Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика»

Брянская область 2020

УДК 517.37 (07)
ББК 22.161.1
Р 19

Ракул, Е. А. Кратные интегралы: учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2020. – 57 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 20.03.02 Природообустройство и водопользование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 35.03.06 Агроинженерия. Учебно-методическое пособие может быть использовано как для аудиторной работы, так и для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Высшая математика».

Рецензенты:
Панов М.В., к.т.н., доцент кафедры автоматики, физики и математики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 28.09.2020 г., протокол № 1.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Определение двойного интеграла

Пусть в некоторой замкнутой области D на плоскости Oxy задана ограниченная функция двух переменных $z = f(x, y)$. Область D (рис. 1) разобьем произвольным образом на n частей $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. И чтобы не вводить новых символов, площади этих подобластей тоже будем обозначать через ΔS_i $(i = 1, ..., n)$, а их диаметры (расстояния между наиболее удаленными точками границы области ΔS_i) – через d_i. Пусть $\max d_i$ - наибольший диаметр областей ΔS_i $(i = 1, ..., n)$.

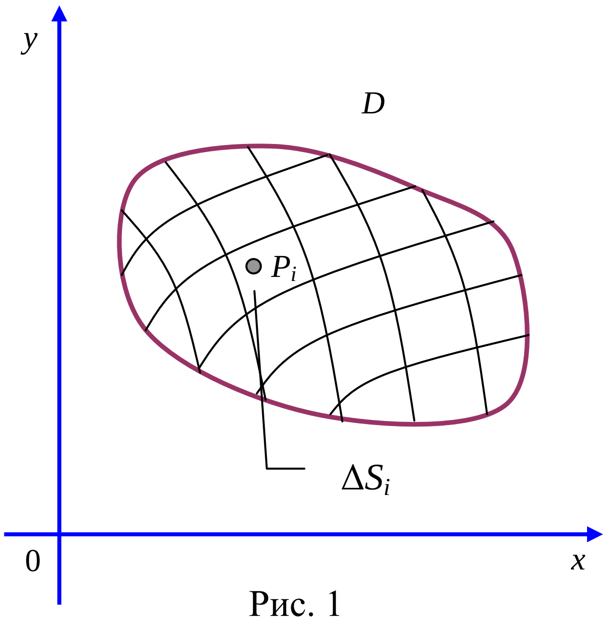

Рис. 1

В каждой из областей ΔS_i возьмем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ (внутри или на границе ΔS_i). И вычислим значение функции в этой точке $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Значение $f(P_i)$ умножим на площадь ΔS_i - меру элементарной области ΔS_i.

Составим сумму произведений вида

$$S_n = f(P_1)\Delta S_1 + ... + f(P_n)\Delta S_n. \quad (1)$$

Сумма (1) называется *интегральной суммой* для функции $z = f(x, y)$ по области D, соответствующей данному разбиению.

Измельчая разбиение, находим предел I интегральной суммы S_n при условии, что $\max d_i \to 0$, то есть $n \to \infty$

$$I = \lim_{\max d_i \to 0} S_n = \lim_{\max d_i \to 0} \left[f(P_1)\Delta S_1 + ... + f(P_n)\Delta S_n \right].$$

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\max d_i \to 0$ (при этом $n \to \infty$), и если этот предел не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные площадки S_i, ни от выбора точки $P_i \in \Delta S_i$, то он называется *двойным интегралом* от функции $z = f(x, y)$ по области D и обозначается символом

$$\iint\limits_D f(P)dS \quad \text{или} \quad \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Выражение $f(x, y)dxdy$ называется *подынтегральным выражением*; функция $f(x, y)$ – *подынтегральной функцией*; $dS = dxdy$ – *элементом площади*; D – *областью интегрирования*; x и y – *переменными интегрирования*.

Итак, по определению

$$\iint\limits_D f(P)dS = \lim_{\max d_i \to 0} S_n. \tag{2}$$

Функция, имеющая предел (2), называется *интегрируемой в области* D.

1.2 Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть в пространстве дано тело T (рис. 2), ограниченное снизу областью D, сверху – графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, которая определена в области D, с боков – цилиндрической поверхностью, направляющей которой является граница области D, а образующие параллельны оси Oz. Тело такого вида называется *цилиндрическим телом*.

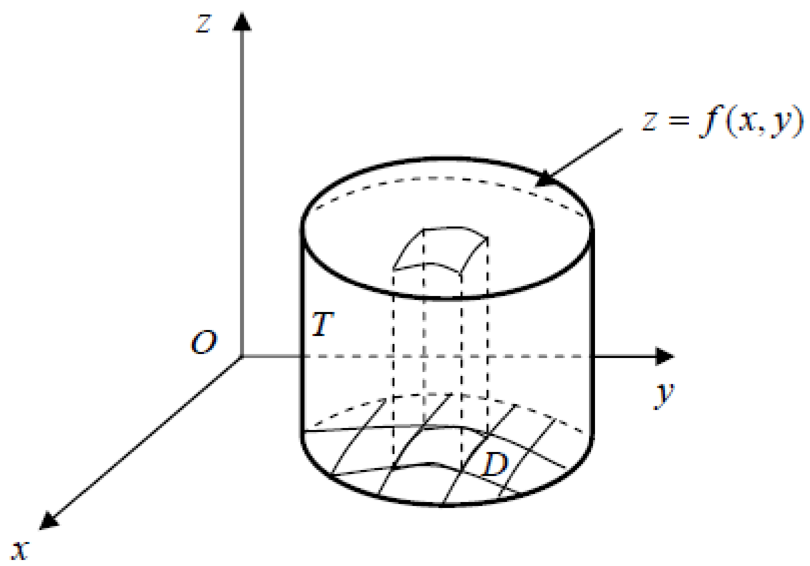

Рис. 2

Аналогично тому, как задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к установлению геометрического смысла определенного интеграла, так и задача о вычислении объема тела T приводит к геометрическому истолкованию двойного интеграла.

Действительно, интегральная сумма (1) представляет собой сумму объемов прямых цилиндров с площадями оснований ΔS_i и высотами $f(P_i)$, которую можно принять за приближенное значение объема V тела T: $V \approx S_n$. Это приближенное равенство тем точнее, чем мельче разбиение области D на части. Устремляя $n \to \infty$, получим

$$V = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Так как функция $f(x, y)$ интегрируема, то предел существует и равен двойному интегралу от этой функции по области D, т. е.

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy. \qquad (3)$$

Отсюда следует *геометрический смысл двойного интеграла*: **двойной интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен объему соответствующего цилиндрического тела**.

1.3 **Свойства двойного интеграла**

1. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций

$$\iint_D [f_1(x, y) + \ldots + f_n(x, y)]dxdy = \iint_D f_1(x, y)dxdy + \ldots + \iint_D f_n(x, y)dxdy.$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла

$$\iint_D k \cdot f(x, y)\,dxdy = k\iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

3. Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек (рис. 3), то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

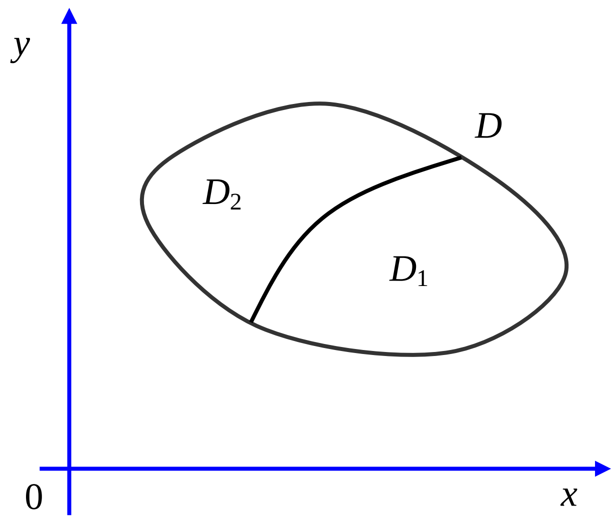

Рис. 3

4. Если $f(x, y) \le g(x, y)$ для всех $(x, y) \in D$, то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy \le \iint_D g(x, y)\,dxdy.$$

5. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области D, то двойной интеграл от нее удовлетворяет неравенствам:

$$m \cdot S \le \iint_D f(x, y)\,dxdy \le M \cdot S,$$

где S - площадь области D.

1.4 Вычисление двойного интеграла

Пусть область интегрирования D удовлетворяет условию: любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно координатной оси, пересекает ее границу не более, чем в двух точках.

Определение. Область D называется *правильной в направлении оси* Oy (Ox), если любая прямая, параллельная оси Oy (Ox), пересекает границу области не более, чем в двух точках.

Для правильной в направлении оси Oy области нижнюю из этих точек будем называть *точкой входа*, а верхнюю – *точкой выхода*. Для правильной в направлении оси Ox области точка входа – левая точка пересечения прямой с границей области, точка выхода – правая точка пересечения прямой с границей.

Область, правильная как в направлении оси Oy, так и в направлении оси Ox, называется *правильной*.

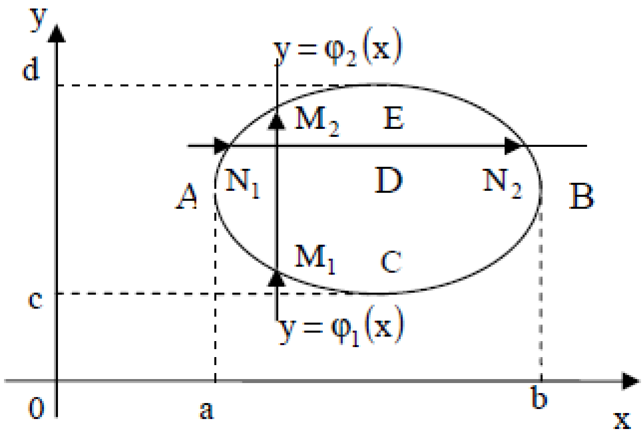

Рис. 4

Область, изображенная на рисунке 4, является правильной и в направлении оси Oy (при этом M_1- точка входа в область, M_2- точка выхода из нее) и в направлении оси Ox (N_1- точка входа, N_2- точка выхода из области).

Правильная в направлении оси Oy область D аналитически определяется системой неравенств

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{cases}$$

где $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$- уравнения нижней (ACB) и верхней (AEB) линий границы; $x=a$, $x=b$ - уравнения прямых, параллельных оси Oy и касающихся границы в точках A и B (см. рис. 4).

Правильная в направлении оси Ox область D аналитически определяется системой неравенств

$$\begin{cases} c \le y \le d, \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \end{cases}$$

где $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$- уравнения левой (CAE) и правой (CBE) линий границы; $y=c$, $y=d$ - уравнения прямых, параллельных оси Ox и касающихся границы в точках C и E (см. рис. 4).

Рассмотрим выражение

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Будем называть его *двукратным или повторным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области D. Сначала вычисляется интеграл в скобках, интегрирование ведется по переменной y, при этом переменная x считается постоянной. В результате интегрирования получается некоторая функция переменной x:

$$\Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,.$$

Затем эта функция интегрируется по переменной x в пределах от a до b:

$$I_D = \int\limits_a^b \Phi(x)\,dx\,.$$

Двукратный интеграл обычно записывается в виде

$$I_D = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,.$$

Пример 4.1. Вычислить двукратный интеграл $I_D = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} (x-y)\,dy\,.$

Решение.

$$I_D = \int\limits_0^2 dx \left(x\int\limits_0^{x^2} dy - \int\limits_0^{x^2} y\,dy \right) = \int\limits_0^2 dx \left(x\cdot y\Big|_0^{x^2} - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{x^2} \right) = \int\limits_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 x^3 dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^4 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}(16-0) - \frac{1}{10}(32-0) = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}.$$

1.4.1 Сведение двойного интеграла к двукратному

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению одного или нескольких двукратных интегралов. Покажем это для случая, когда $f(x,y) \geq 0$ в области *D*. Будем рассматривать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ как объем цилиндрического тела *T*, ограниченного снизу областью *D*, сверху поверхностью $z = f(x,y)$ (формула (3)). Задачей вычисления объема тела мы уже занимались, когда рассматривали применения определенного интеграла к задачам геометрии. Тогда была получена формула

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{4}$$

где $S(x)$ – площадь произвольного поперечного сечения тела, перпендикулярного к оси Ox, а $x=a, x=b$ - уравнения плоскостей, ограничивающих тело. Применим эту формулу к вычислению интеграла $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, где D – правильная область.

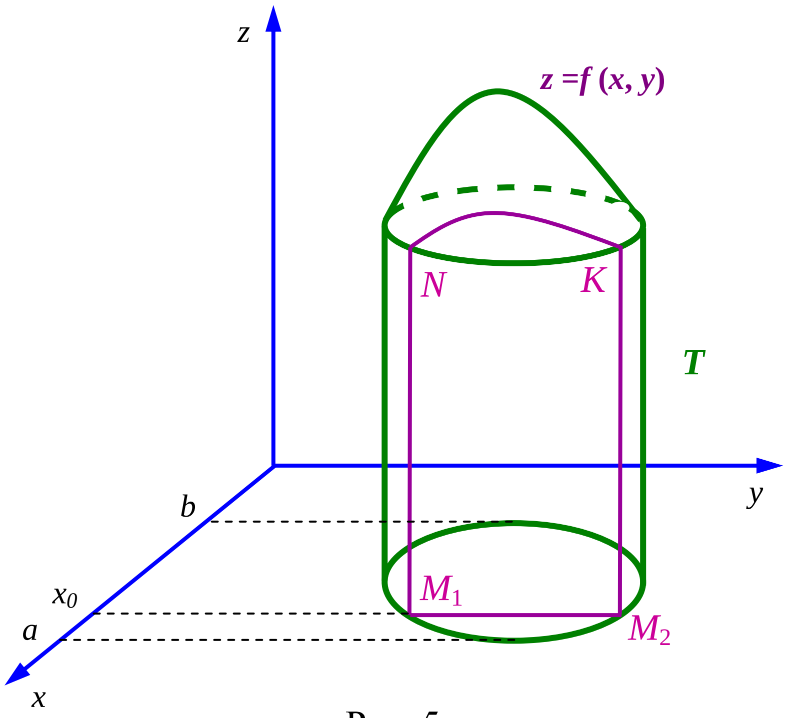

Рис. 5

Рассечем цилиндрическое тело T (рис. 5) произвольной плоскостью $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$, параллельной плоскости Oyz. В сечении имеем криволинейную трапецию M_1NKM_2, ограниченную кривой NK, уравнение которой $z = f(x_0, y)$, где y изменяется от ординаты точки M_1 до ординаты точки M_2. Точка M_1 является точкой входа прямой $x = x_0$ в область D, а M_2 - точкой выхода из нее. Точка M_1 лежит на линии $y = \varphi_1(x)$, значит, $y_{M_1} = \varphi_1(x_0)$; точка M_2 лежит на линии $y = \varphi_2(x)$, значит, $y_{M_2} = \varphi_2(x_0)$. Таким образом, площадь рассматриваемого сечения, как площадь криволинейной трапеции находится по формуле:

$$S(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\,dy.$$

В силу произвольности x $(a<x<b)$ интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\,dy$ есть выражение для площади $S(x)$ любого сечения, перпендикулярного к оси Ox.

Подставляя найденное $S(x)$ в формулу (4.1), получим

$$V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\,dy .$$

Сопоставляя полученный результат с формулой (2), заключаем, что двойной интеграл выражается через двукратный по формуле:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy . \qquad (5^*)$$

Рассекая тело T плоскостями $y = const$ $(c < y < d)$, найдем площадь $S(y)$ любого сечения, перпендикулярного к оси Oy, по формуле

$$S(y) = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx ,$$

где переменная y при интегрировании считается постоянной. Применяя формулу для вычисления объема тела по площади параллельных сечений

$$V = \int\limits_c^d S(y)\,dy ,$$

придем ко второму выражению для двойного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx . \qquad (5^{**})$$

Если область интегрирования D являются правильной в направлении оси Oy и в направлении оси Ox, то вычисление двойного интеграла можно производить как по формуле (5^*), так и по формуле (5^{**}). В тех случаях, когда нижняя или верхняя (левая или правая) линии границы области D представлены различными аналитическими выражениями, область следует разбить прямыми, параллельными оси Oy (или Ox), на составляющие области, в каждой из которых указанные границы определялись бы одним уравнением, а затем воспользоваться свойством двойного интеграла. Так, для области D, изображенной на рисунке 6, двойной интеграл следует представить в виде суммы двух интегралов по областям D_1 и D_2:

$$D_1:\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2^{(1)}(x), \end{cases} \qquad D_2:\begin{cases} b \le x \le c, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2^{(2)}(x), \end{cases}$$

И каждый интеграл может быть вычислен по формуле (5*):

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2^{(1)}(x)} f(x,y)\,dy + \int_b^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2^{(2)}(x)} f(x,y)\,dy \qquad (6)$$

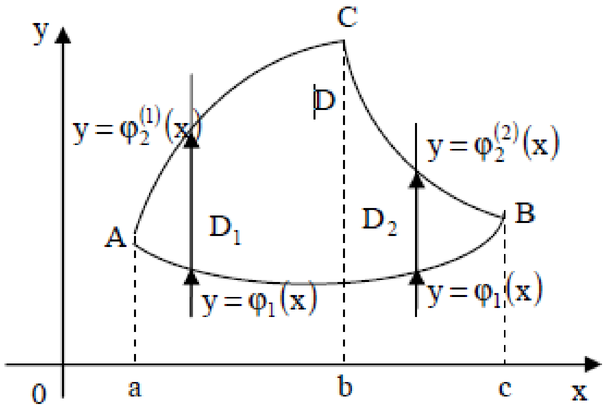

Рис. 6

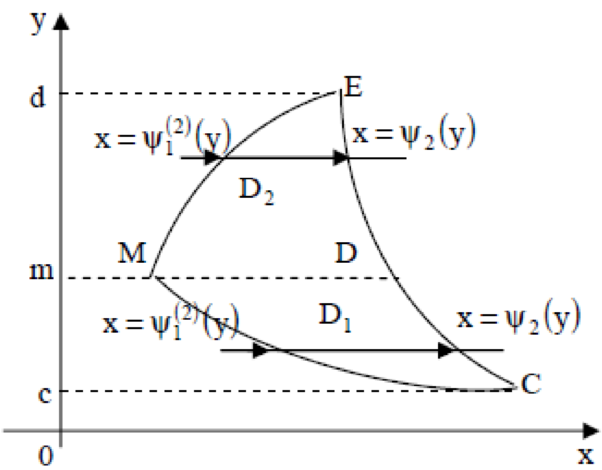

Рис. 7

Для области D, изображенной на рисунке 7, двойной интеграл следует представить в виде суммы двух интегралов по областям D_1 и D_2:

$$D_1:\begin{cases} c \le y \le m, \\ \psi_1^{(1)}(y) \le x \le \psi_2(y), \end{cases} \qquad D_2:\begin{cases} m \le y \le d, \\ \psi_1^{(2)}(y) \le x \le \psi_2(y), \end{cases}$$

И каждый интеграл может быть вычислен по формуле (5**):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy =$$
$$= \int\limits_c^m dy \int\limits_{\psi_1^{(1)}(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx + \int\limits_m^d dy \int\limits_{\psi_1^{(2)}(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (7)$$

Пример 4.2. Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где область D ограничена линиями $x=2$, $y=x$, $xy=1$.

Решение.

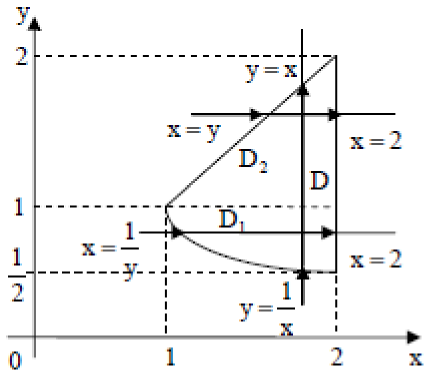

Рис. 8

Сначала изобразим область (см. рис. 8), построив заданные линии. Область является правильной в направлении оси Oy: произвольная прямая, проведенная параллельно этой оси, пересекает ее границу в двух точках.

Область снизу ограничена линией $y=\varphi_1(x)=\frac{1}{x}$, сверху – линией $y=\varphi_2(x)=x$, слева и справа – прямыми $x=1, x=2$. Поэтому интеграл можно вычислить по формуле (5*), представив область D в виде:

$$D:\begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ \frac{1}{x} \le y \le x. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy = \int\limits_1^2 x^2dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2} = \int\limits_1^2 x^2dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} y^{-2}dy = \int\limits_1^2 x^2dx \left(-\frac{1}{y}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) =$$

$$= \int\limits_1^2 x^2dx\left(-\frac{1}{x}+x\right) = \int\limits_1^2 \left(x^3-x\right)dx = \int\limits_1^2 x^3dx - \int\limits_1^2 xdx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = 4-\frac{1}{4}-\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

Изменим порядок интегрирования. Данная область D является правильной и в направлении оси Ox, но при этом левая граница ее состоит из двух участков, имеющих уравнения $x=\frac{1}{y}$ при $\frac{1}{2} \le y \le 1$ и $x=y$ при $1 \le y \le 2$.

В этом случае следует разбить область прямой $y=1$ на две области D_1 и D_2:

$$D_1:\begin{cases}\frac{1}{2}\le y\le 1,\\ \frac{1}{y}\le x\le 2,\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}1\le y\le 2,\\ y\le x\le 2,\end{cases}$$

Тогда исходный интеграл можно вычислить по формуле:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\iint\limits_{D_1}\frac{x^2}{y^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{y}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx.=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2}x^2\,dx+\int\limits_{1}^{2}\frac{dy}{y^2}\int\limits_{y}^{2}x^2\,dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{2}\right)+\int\limits_{1}^{2}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_{y}^{2}\right)=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3y^3}\right)+\int\limits_{1}^{2}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{8}{3}-\frac{y^3}{3}\right)=\frac{8}{3}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}y^{-2}dy-\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}y^{-5}dy+\frac{8}{3}\int\limits_{1}^{2}y^{-2}dy-\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{2}ydy=$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{y}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4y^4}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}\right)+\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{y}\Bigg|_{1}^{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{1}^{2}=\frac{8}{3}(-1+2)+\frac{1}{12}(1-16)-$$

$$-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{1}{6}(4-1)=\frac{9}{4}.$$

Мы убедились в том, что *значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования*. Однако, очевидно, первоначально выбранный порядок интегрирования рациональнее обратного порядка интегрирования. Этот пример также показывает, как важно выбрать нужный порядок интегрирования.

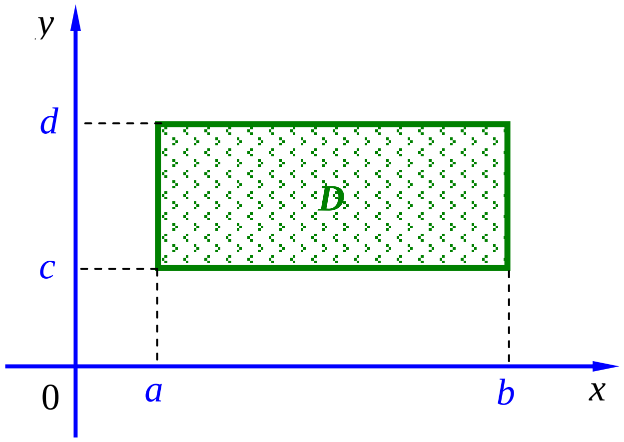

Рис. 9

Заметим, что формулы сведения двойного интеграла к двукратному имеют особенно простой вид, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 9). В этом случае являются постоянными пределы и внутреннего интеграла:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy\,.$$

1.4.2 Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Рассмотрим две плоскости с декартовыми координатами (x,y) и (u,v), где выделены замкнутые ограниченные области D и D'. Будем предполагать, что функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ определены в области D'. Предположим еще, что формулы

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,\,v) \tag{8}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками областей D и D' (рис. 10).

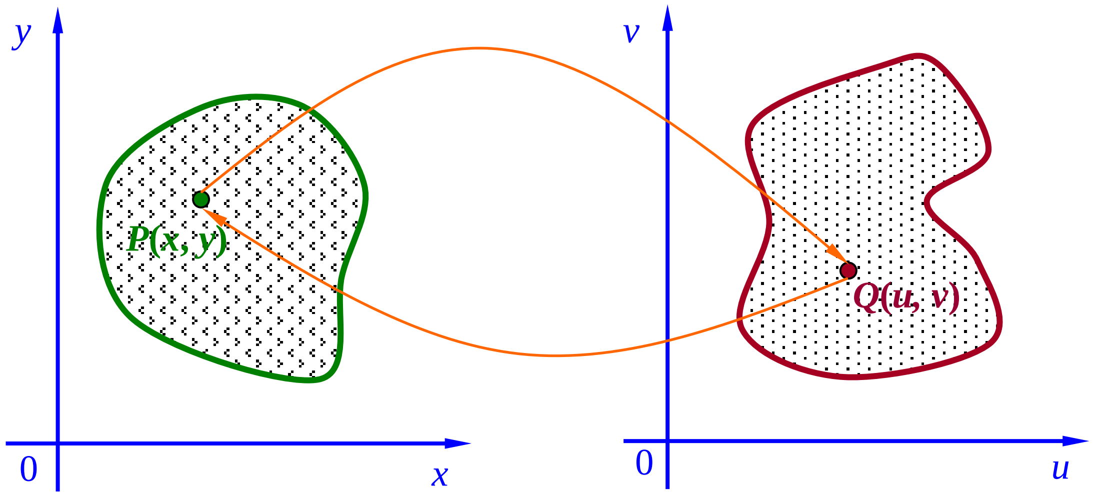

Рис. 10

Это значит, что не только каждой точке $Q(u,v)$ из области D' соответствует, согласно формулам (4.5), единственная точка $P(x,y)$ из области D, но и, наоборот, для любой точки $P(x,y)$ из D существует единственная точка $Q(u,v)$ из D', для которой $x = x(u,v)$, $y = y(u,\,v)$. Другими словами, для любых чисел x и y (таких, что точка $P(x,y)$ находится в D) система уравнений (4.5) имеет единственное решение $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, такое, что точка $Q(u,v)$ лежит в D'. Числа u,v называются *криволинейными координатами*.

Если $z = f(x,y)$ - непрерывная в замкнутой ограниченной области D функция, и если формулы $x = x(u,v)$, $y = y(u,\,v)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками области D и точками некоторой области D', удовлетворяющее условиям:

1) функции $x = x(u,v)$, $y = y(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в областях D и D';

2) *функциональный определитель Якоби* (якобиан преобразования (9))

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \qquad (9)$$

отличен от нуля всюду в области D'.

Тогда имеет место следующая *формула замены переменных в двойном интеграле*:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|I(u,v)\right| dudv. \qquad (10)$$

При удачной замене переменных преобразованный интеграл может оказаться проще, чем исходный; например, пределы интегрирования могут получиться постоянными.

Наиболее используемыми из криволинейных координат являются полярные. Мы знаем, что полярные координаты φ и ρ любой точки связаны с ее декартовыми координатами x и y формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi\ \ (u = \varphi,\ v = \rho). \qquad (11)$$

при условии, что полюс помещен в начале декартовой системы координат и полярная ось направлена вдоль оси Ox. Эти формулы сопоставляют числам φ и ρ числа x и y. Значит, здесь имеется отображение плоскости (φ, ρ) на плоскость (x, y); оно будет взаимно однозначным, если потребовать выполнения неравенств

$$0 \le \rho \le \infty,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi\ \ (-\pi \le \varphi \le \pi).$$

Найдем частные производные функций (11) и вычислим якобиан преобразования:

$$x'_\varphi = -\rho\sin\varphi,\ \ x'_\rho = \cos\varphi,$$

$$y'_\varphi = \rho\cos\varphi,\ \ y'_\rho = \sin\varphi.$$

$$I(\varphi,\rho) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho\sin^2\varphi - \rho\cos^2\varphi = -\rho\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = -\rho.$$

Тогда формула (10) в полярных координатах примет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi\big)\rho\, d\varphi d\rho. \qquad (12)$$

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, как и в декартовой, сводится к двукратному интегрированию по переменным φ и ρ. Рассмотрим правила расстановки пределов.

$\boxed{1.}$ Пусть полюс не содержится внутри области *D*.

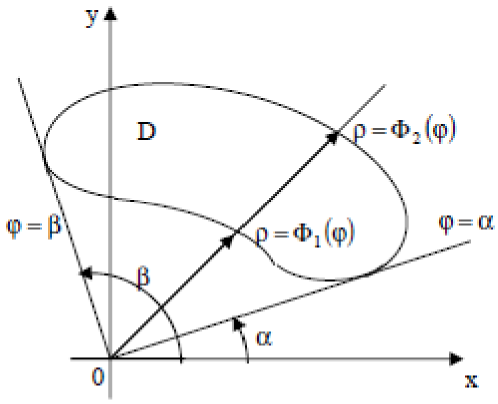

Рис. 11

Область D ограничена кривыми $\rho = \Phi_1(\varphi),\ \rho = \Phi_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$, где $\Phi_1(\varphi) \le \Phi_2(\varphi)$ $\alpha \le \beta$ (рис.11). Если луч $\varphi = const$, проходящий через внутреннюю точку области, пересекает ее границу не более чем в двух точках, то такую область так же будем называть правильной. В таком случае

$$D: \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta, \\ \Phi_1(\varphi) \le \rho \le \Phi_2(\varphi), \end{cases}$$

и

$$\iint\limits_{D} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho.$$

Интегрирование в обратном порядке, т.е. сначала по φ, а потом по ρ, обычно не встречается.

$\boxed{2.}$ Пусть полюс содержится внутри области интегрирования и любой луч $\varphi = const$ пересекает границу в одной точке (рис. 12). Здесь область D описывается системой неравенств

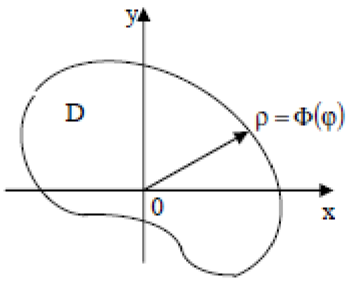

Рис. 12

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le \Phi(\varphi). \end{cases}$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_{D} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\varphi d\rho == \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\Phi(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho.$$

Переход к полярным координатам в двойном интеграле целесообразен в следующих случаях:

1. Подынтегральная функция $f(x, y)$ содержит в своем выражении $x^2 + y^2$;

2. Уравнение границы области D содержит выражение $x^2 + y^2$;

3. Наличие условий 1 и 2.

Пример 4.3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

Решение.

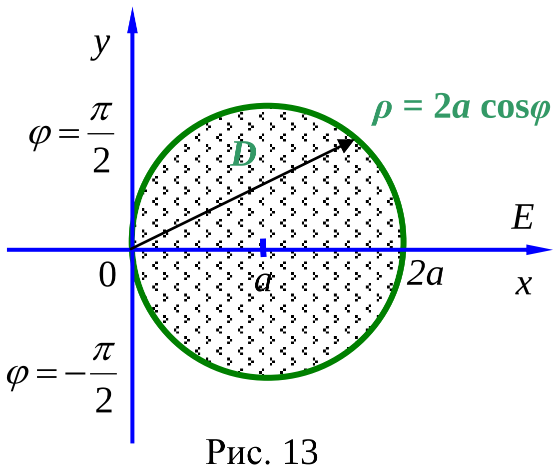

Рис. 13

Запишем данное уравнение границы области D в каноническом виде

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2,$$

после чего можно утверждать, что область интегрирования есть круг радиуса a с центром в точке $(a;0)$ (см. рис.13). Введем полярные координаты, положив

$x = \rho\cos\varphi,$

$y = \rho\sin\varphi.$

Запишем уравнение окружности в полярных координатах:

$$x^2 + y^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2a \cdot \rho\cos\varphi,$$
$$\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 2a\rho\cos\varphi, \;\; \rho = 2a\cos\varphi.$$

Тогда область D в полярных координатах может быть задана системой неравенств:

$$D: \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le 2a\cos\varphi. \end{cases}$$

Преобразуем к полярным координатам подынтегральную функцию:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \sqrt{\rho^2} = \rho\,.$$

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho\cdot\rho\, d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2a\cos\varphi} \right) = \frac{8a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi\, d\varphi = \left| \begin{array}{l} t=\sin\varphi \\ dt=\cos\varphi d\varphi \\ \alpha=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1 \\ \beta=\sin\dfrac{\pi}{2}=1 \end{array} \right| = \frac{8a^3}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)dt = \frac{8a^3}{3}\int\limits_{-1}^{1} dt -$$

$$-\frac{8a^3}{3}\int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{8a^3}{3}\cdot t\Big|_{-1}^{1} - \frac{8a^3}{3}\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{8a^3}{3}(1+1) - \frac{8a^3}{9}(1+1) = \frac{32}{9}a^3.$$

1.5 Некоторые приложения двойных интегралов

1. *Объем тела*

При выяснении геометрического смысла двойного интеграла было установлено, что объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельны оси Oz, выражается формулой

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

2. *Площадь*

Так как двойной интеграл от неотрицательной функции выражает объем прямого цилиндра с основанием D, то при $f(x,y)=1$ для любой точки $(x,y)\in D$ будет равен объему цилиндра с высотой равной 1. Ясно, что этот объем численно равен площади S плоской области D:

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

3. *Масса пластинки*

Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластинку, занимающую область D (рис.1.1), по которой распределена масса с плотностью $\gamma = \gamma(x,y)$. Толщину пластинки считаем настолько малой, что изменением плотности по толщине ее можно пренебречь. Если $\gamma = \gamma(x, y)$ - непрерывная функция, то масса пластинки может быть вычислена по формуле

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy.$$

4. *Координаты центра тяжести и статические моменты пластинки*.

Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластинку (плоскую фигуру), занимающую область D (рис.1.1), по которой распределена масса с плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$.

Статические моменты плоской фигуры D относительно координатных осей Ox и Oy соответственно определяются по формулам:

$$M_x = \iint\limits_D y\,\gamma(x, y)\, dxdy,$$
$$M_y = \iint\limits_D x\,\gamma(x, y)\, dxdy.$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры D определяются формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \ \ y_c = \frac{M_x}{m},$$

M_x, M_y - статические моменты плоской фигуры D относительно координатных осей Ox и Oy;

m - масса пластинки, $m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy$.

5. *Моменты инерции пластинки*

Рассмотрим плоскую пластину D, имеющую поверхностную плотность распределения масс $\gamma = \gamma(x, y)$.

Момент инерции I_y пластинки D относительно оси Oy можно определить по формуле:

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \gamma(x, y)\, dxdy.$$

Момент инерции I_x пластинки D относительно оси Ox определяется формулой:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \gamma(x, y)\, dxdy.$$

Момент инерции I_0 пластинки D относительно начала координат определяется формулой:

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \gamma(x, y)\, dxdy.$$

2 ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Определение тройного интеграла, его свойства

Тройной интеграл от функции трех переменных по некоторой ограниченной пространственной области определяется по той же схеме, что и определенный и двойной интегралы. Ввиду полной аналогии между определениями двойного и тройного интегралов, изложение тем будем вести по возможности кратко.

Итак, пусть в области T, отнесенной к пространственной системе координат и ограниченной замкнутой поверхностью S, задана ограниченная функция $u = f(x, y, z)$. Тело T с помощью сети поверхностей произвольным образом разобьем на n частей $T_1, T_2, ..., T_n$, объемы которых обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$.

Пусть $\max \Delta V_i$ - наибольший из объемов $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. В каждой из областей T_i выберем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, затем вычислим значение функции в ней $f(P_i)$ и умножим его на объем ΔV_i. Составим сумму вида

$$S_n = f(P_1)\Delta V_1 + f(P_2)\Delta V_2 + ... + f(P_n)\Delta V_n. \qquad (1)$$

Её называют *интегральной суммой* для функции $u = f(x, y, z)$ по области T.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\max \Delta V_i \to 0$ $(n \to \infty)$, не зависящий ни от способа разбиения области T на элементарные части, ни от выбора в них точки P_i, то он называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается символом

$$\iiint\limits_T f(P)\, dV \quad \text{или} \quad \iiint\limits_T f(x, y, z)\, dxdydz.$$

В этом случае функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой* в области T; T – *областью интегрирования*; x, y и z – *переменными интегрирования*; dV (или $dxdydz$) – *элементом объема*.

Если положить $f(x, y, z) = 1$ всюду в области T, то из определения тройного интеграла следует формула для вычисления объема V области T

$$V = \iiint\limits_T dV = \iiint\limits_T dxdydz.$$

Итак, по определению

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Выясним *механический смысл тройного интеграла*, если функцию $u = f(x,y,z)$ считать объемной плотностью вещества в области *T*. Ясно, что если в каждой частичной области T_i плотность постоянна и равна ее значению в точке P_i, выражение $f(P_i)\Delta V_i$ определяет приближенное значение массы всего тела. Предел этой суммы при указанном условии, по определению, есть *масса* тела. Таким образом, если $u = f(x,y,z)$ есть объемная плотность распределения вещества в области *T*, то интеграл (1) дает массу всего вещества, заключенного в объеме *T*.

Терминология для тройных интегралов совпадает с соответствующей терминологией для двойных интегралов. *Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными соответствующим свойствам двойного интеграла*. Приведем лишь формулировки теорем об оценке и о среднем значении интеграла.

Теорема 1 (об оценке тройного интеграла).

Если m и M – наименьшее и наибольшее значения $u = f(x,y,z)$ в области *T*, то значение тройного интеграла от нее удовлетворяет неравенству:

$$m \cdot V \le \iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz \le M \cdot V ,$$

где *V* – объем области *T*.

Теорема 2 (о среднем значении интеграла).

В области *T* найдется по крайней мере одна такая точка *P*, для которой выполняется равенство

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = f(P) \cdot V .$$

2.2 Вычисление тройного интеграла

Вычисление тройного интеграла, как и двойного, осуществляется путем последовательного интегрирования по каждой из переменных. Мы ограничимся описанием соответствующих правил

2.2.1 Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интеграла или к вычислению трех однократных интегралов, т.е. трехкратного интеграла.

Предположим, что область T, ограниченная замкнутой поверхностью S, такая, что:

1) всякая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю точку области T, пересекает поверхность S - границу данной области – в двух точках;

2) вся область T проектируется на плоскость Oxy в правильную (относительно какой-либо координатной оси) область D.

Область T, обладающую перечисленными свойствами, называют *правильной в направлении оси Oz*.

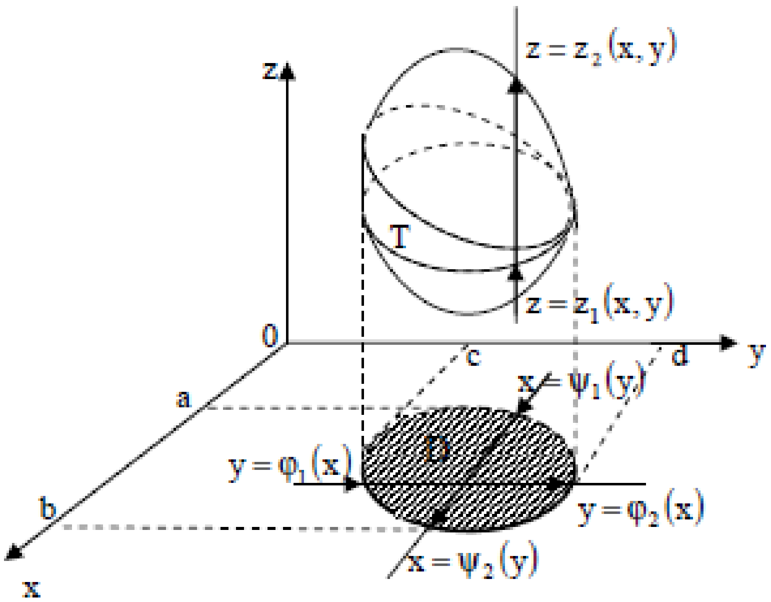

Рис. 14

Пусть область интегрирования T, правильная в направлении оси Oz, ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$ $(z_1(x, y) \le z_2(x, y))$, с боков – прямым цилиндром (в частном случае боковая поверхность цилиндра может отсутствовать); проекцией тела T на плоскость Oxy является двумерная область D (Рис. 14). Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \qquad (2)$$

Записывая, в свою очередь, двойной интеграл через один из повторных, получаем:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,, \qquad (3)$$

или

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \qquad (4)$$

Наиболее простой вид формулы (3) или (4) принимают в случае, когда T есть параллелепипед, ограниченный плоскостями $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d$, $z = e,\ \ z = g$:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^g f(x,y,z)\,dz\,. \qquad (5)$$

Пример 2.1. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz$, где T – пирамида, ограниченная плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$ (Рис. 15).

Решение.

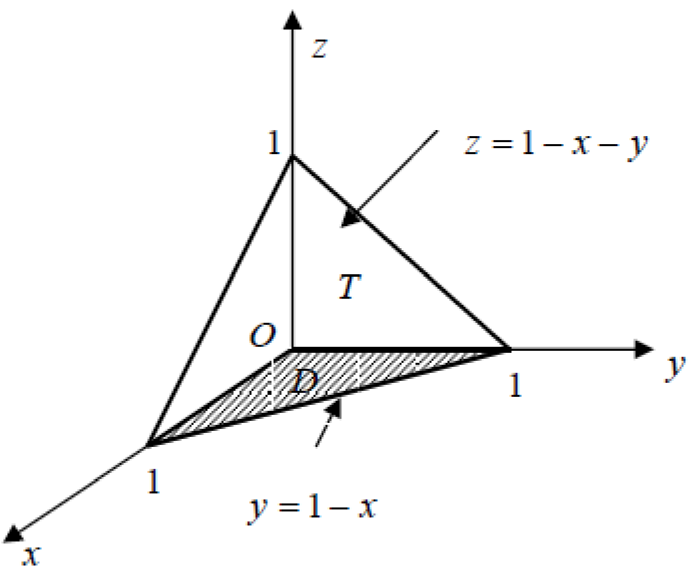

Рис. 15

Правильную в направлении оси Oz область T (Рис.15) спроектируем на плоскость Oxy.Проекцией области T на плоскость Oxy является треугольник D, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$. Тогда по формуле (3) имеем:

$$\iiint_T (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x-y} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)(1+x+y)dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[1-(x+y)^2\right]dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(y - \frac{(x+y)^3}{3} \right) \Bigg|_0^{1-x} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

2.2 Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

Если функции

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w) \tag{6}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками $P(x,y,z)$ области T пространства $Oxyz$ и точками $Q(u,v,w)$ области T' пространства $Ouvw$ (при этом тройка чисел u,v,w, соответствующая точке $P(x,y,z)$ из области T, называется *криволинейными координатами* этой точки) и функциональный определитель Якоби $I(u,v,w)$, иначе Якобиан преобразования (6)

$$I(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль в области T', то справедлива следующая формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{T'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|I(u,v,w)\right| dudvdw. \tag{7}$$

Наиболее используемыми из криволинейных координат являются цилиндрические и сферические.

$\boxed{1.}$ ***Цилиндрические координаты***

Положение точки P в пространстве определяется полярными координатами $(\varphi,\ \rho)$ её проекции P' на плоскость Oxy и ее аппликатой z (Рис.16). Величины $\varphi,\ \rho,\ z$ называются *цилиндрическими координатами* точки P. Из рисунка 16 видно, что декартовы координаты точки связаны с ее цилиндрическими координатами соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad (8)$$

$$(u = \varphi,\ \ v = \rho,\ \ \ w = z).$$

Для выполнения взаимно однозначного соответствия полагают

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \rho < \infty,\ \ -\infty < z < \infty.$$

Якобиан преобразования (8) равен

$$I(u, v, w) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

Преобразование тройного интеграла к цилиндрическим координатам осуществляется по формуле:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{T'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho\, d\varphi d\rho dz\,. \qquad (9)$$

Цилиндрическими координатами при вычислении тройного интеграла фактически пользуются тогда, когда после интегрирования по z, есть необходимость перехода в получившемся двойном интеграле к полярным координатам.

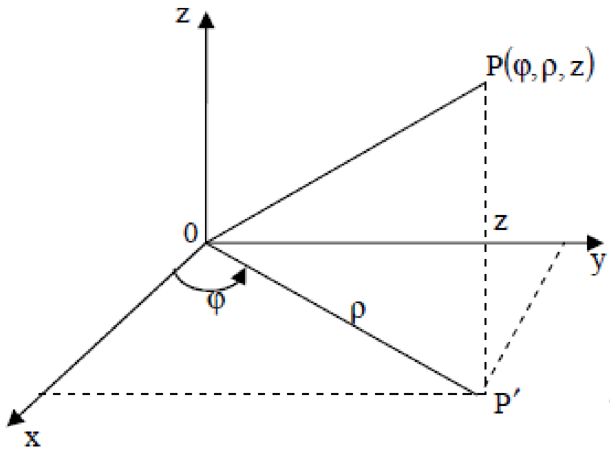

Рис. 16

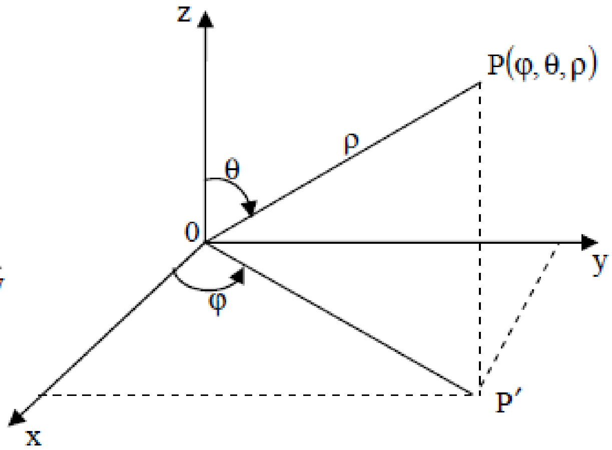

Рис. 17

$\boxed{2.}$ ***Сферические координаты***.

В сферических координатах положение точки P определяется числами $\varphi,\ \theta,\ \rho$; где ρ - расстояние точки P от начала координат или длина радиус-вектора этой точки, φ - угол между проекцией радиус-вектора точки на плоскость Oxy и осью Ox; θ - угол между радиус-вектором и осью Oz, который отсчитывается от положительного направления оси Oz (Рис. 17). Связь между декартовыми и сферическими координатами точки имеет вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases} \qquad (10)$$

$$(u = \varphi,\ v = \theta,\ w = \rho).$$

Для выполнения взаимно однозначного соответствия полагают

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \rho < \infty.$$

Якобиан преобразования (10) равен $I(\varphi,\theta,\rho) = -\rho^2\sin\theta$ (проверьте самостоятельно!) и переход от прямоугольных координат к сферическим координатам $\varphi,\ \theta,\ \rho$ осуществляется по формуле:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\varphi d\theta d\rho \quad (11)$$

Переход к сферическим координатам в тройном интеграле целесообразен в следующих случаях:

1) Подынтегральная функция $f(x, y, z)$ содержит в своем выражении сумму $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$;

2) Уравнение поверхности, ограничивающей тело *T*, содержит сумму $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$;

3) Имеют место в тройном интеграле случаи 1) и 2).

Применение сферических координат особенно удобно в тех случаях когда область T – шар с центром в начале координат или шаровое кольцо.

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$, где T – область, ограниченная поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$ (Рис. 18).

Решение.

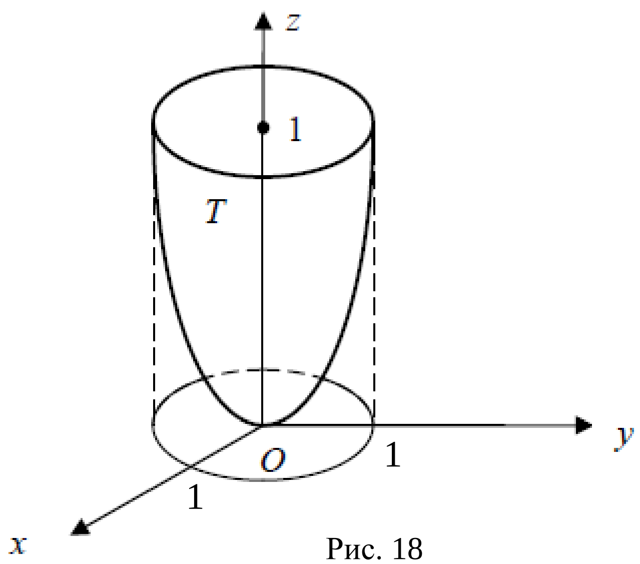

Рис. 18

Перейдем к цилиндрическим координатам, т.к. подынтегральная функция и уравнение поверхности содержит сумму $x^2 + y^2$. Проекцией области T на плоскость Oxy является круг с границей $x^2 + y^2 = 1$, поэтому координата φ изменяется от 0 до 2π, координата $0 \le \rho \le 1$. Снизу область T ограничена поверхностью $z = x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi = = \rho^2$ сверху – поверхностью $z = 1$. Таким образом, область T можно описать системой неравенств:

$$T: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le 1, \\ \rho^2 \le z \le 1. \end{cases}$$

Применяя формулу (9), получим:

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_{\rho^2}^1 z\sqrt{\rho^2}\,\rho dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2 d\rho\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_{\rho^2}^1\right)=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho^4}{2}\right)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\int\limits_0^1\rho^2 d\rho-\int\limits_0^1\rho^6 d\rho\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1-\left.\frac{\rho^7}{7}\right|_0^1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{21}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{2}{21}\cdot\left.\varphi\right|_0^{2\pi}=\frac{4\pi}{21}.$$

Пример 2.3. Найти объем шара радиуса R с помощью тройного интеграла.

Решение.

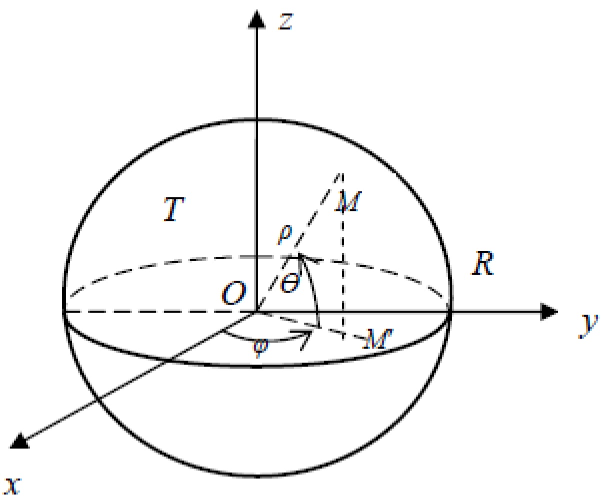

Рис. 19

Поместим начало декартовой прямоугольной системы координат в центре шара T и перейдем к сферическим координатам. Из вида области T (Рис. 19) следует, что координаты $\varphi,\ \theta,\ \rho$ меняются в следующих пределах:

$$T:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\theta\le\pi,\\ 0\le\rho\le R.\end{cases}$$

Применяя формулу (10), получим искомый объем шара:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^R\rho^2\sin\theta\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^R\right)=$$

$$=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(-\cos\theta\big|_0^{\pi}\right)=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi(-\cos\pi+\cos 0)=\frac{2R^3}{3}\cdot\left.\varphi\right|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2.3 Некоторые приложения тройных интегралов

Кратко рассмотрим типичные задачи применения тройных интегралов, ограничившись приведением необходимых формул, так как их вывод аналогичен выводу соответствующих формул в случае двойных интегралов.

Как уже было отмечено в п. 1, *объем* V пространственной области T равен

$$V = \iiint_T dxdydz. \tag{12}$$

Пусть область T занимает материальное тело с плотностью $\gamma(x, y, z)$, представляющей собой непрерывную функцию. Тогда *координаты центра тяжести* тела определяются следующими формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}, \tag{13}$$

где *масса* данного тела Т

$$m = \iiint_T \gamma(x, y, z) dxdydz; \tag{14}$$

M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} - *статические моменты* тела относительно координатных плоскостей Oyz, Oxz, Oxy соответственно, которые вычисляются по формулам:

$$M_{yz} = \iiint_T x\,\gamma(x, y, z) dxdydz, \tag{15}$$

$$M_{xz} = \iiint_T y\,\gamma(x, y, z) dxdydz, \tag{16}$$

$$M_{xy} = \iiint_T z\,\gamma(x, y, z) dxdydz. \tag{17}$$

Моменты инерции тела T относительно осей координат и начала координат определяются следующими формулами:

$$I_x = \iiint_T \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z) dxdydz, \tag{18}$$

$$I_y = \iiint\limits_T \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\,dxdydz, \tag{19}$$

$$I_z = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y, z)\,dxdydz, \tag{20}$$

$$I_0 = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)\,dxdydz. \tag{21}$$

Если тело однородное, то в формулах (14) – (21) следует считать $\gamma = const$.

В заключение отметим, что по аналогии с двойным и тройным интегралами можно ввести понятие *n-кратного интеграла*, т. е. интеграла от функции n переменных. В этой главе мы ограничились рассмотрением только двойных и тройных интегралов, имеющих наиболее широкое применение.

ПРАКТИКУМ ПО ТЕМЕ «ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ»

Задача 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2 - y\right)dxdy$, где область D задана неравенствами $-1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.

Решение.

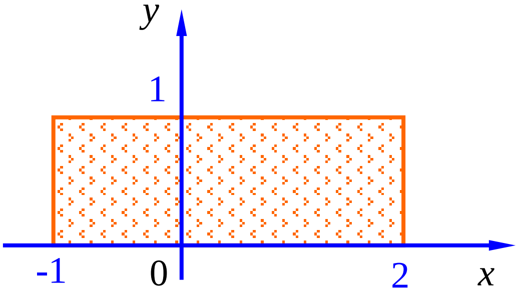

Рис. 20

Указанная область D представляет собой прямоугольник, изображенный на рисунке 20. Тогда переходя к двукратному интегралу, получим

$$\iint\limits_D \left(x^2 - y\right)dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 - y\right)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} dx \left(x^2 \int\limits_{0}^{1} dy - \int\limits_{0}^{1} ydy \right) = \int\limits_{-1}^{2} dx \left(x^2 \cdot y\Big|_0^1 - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 \right) =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) dx = \int\limits_{-1}^{2} x^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{2} dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} - \frac{1}{2} \cdot x\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8+1) - \frac{1}{2}(2+1) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Задача 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2 - y\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$.

Решение.

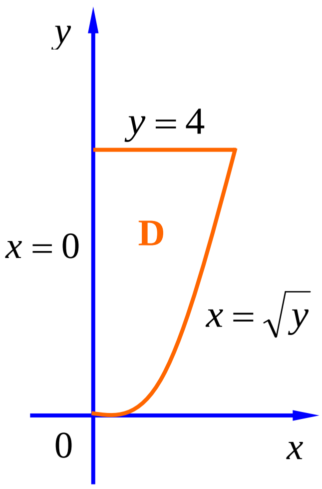

Рис. 21

Заданная область D является правильной как в направлении оси Ox, так и в направлении оси Oy (Рис. 21). Поэтому для вычисления данного интеграла можно воспользоваться любой из формул перехода к повторному интегралу. Будем рассматривать область D как правильную в направлении оси Ox. Тогда её можно задать следующей системой неравенств:

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 4, \\ 0 \le x \le \sqrt{y}. \end{cases}$$

Тогда двойной интеграл равен

$$\iint_D \left(x^2 - y\right)dxdy = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} \left(x^2 - y\right)dx = \int_0^4 dy\left(\int_0^{\sqrt{y}} x^2dx - y\int_0^{\sqrt{y}} dx\right) =$$

$$= \int_0^4 dy\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\sqrt{y}} - y \cdot x\Big|_0^{\sqrt{y}}\right) = \int_0^4\left(\frac{y\sqrt{y}}{3} - y\sqrt{y}\right)dy = -\frac{2}{3}\int_0^4 y\sqrt{y}dy = -\frac{2}{3}\int_0^4 y^{\frac{3}{2}}dy =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left.y^{\frac{5}{2}}\right|_0^4 = -\frac{4}{15}y^2\sqrt{y}\Big|_0^4 = -\frac{4}{15}\cdot 32 = -\frac{128}{15}.$$

Задача 3. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

Решение.

Исходя из заданных пределов интеграла, найдем область интегрирования D:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \le y \le \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

Построим эти линии (Рис. 22): $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = x$ - прямые, $y = \sqrt{1-x^2}$ - дуга окружности ($x^2 + y^2 = 1$).

Теперь изменим порядок интегрирования. Область D является правильной в направлении оси Oy, но её правая граница состоит из двух участков, уравнения которых $x = y$ и $x = \sqrt{1-y^2}$.

Поэтому разобьем область D на две части D_1 и D_2, проведя прямую, параллельную оси Ox и проходящую через точку $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (см. рис. 3), в которой стыкуются указанные участки правой границы.

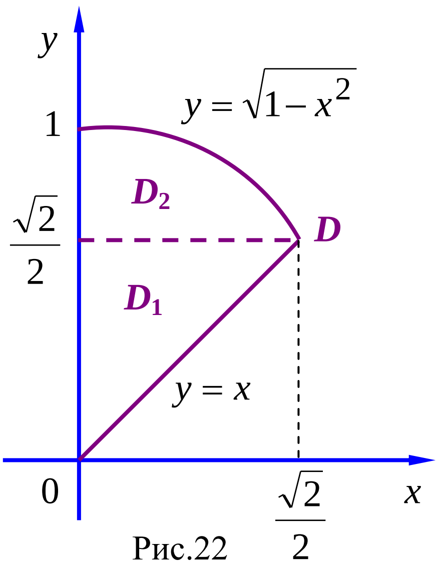

Рис.22

Зададим области D_1 и D_2:

$$D_1:\begin{cases} 0\le y\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0\le x\le y; \end{cases} \qquad D_2:\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le y\le 1, \\ 0\le x\le \sqrt{1-y^2}. \end{cases}$$

Тогда согласно свойству двойного интеграла, получаем:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^y f(x,y)\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Задача 4. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$.

Решение.

Исходя из заданных пределов двукратных интегралов, найдем области интегрирования D_1 и D_2:

$$D_1:\begin{cases} -2\le y\le -1, \\ -\sqrt{2+y}\le x\le 0; \end{cases} \qquad D_2:\begin{cases} -1\le y\le 0, \\ -\sqrt{-y}\le x\le 0. \end{cases}$$

Построим линии, ограничивающие эти области (см. рис. 23):

$y=-2,\ y=-1,\ y=0,\ x=0$ – прямые,

$x=-\sqrt{2+y},\ x^2=2+y,\ y=x^2-2$ - парабола (по условию задана только левая её ветвь, т.к. $x<0$),

$x=-\sqrt{-y},\ x^2=-y,\ y=-x^2$ – парабола (по условию задана только левая её ветвь, т.к. $x<0$).

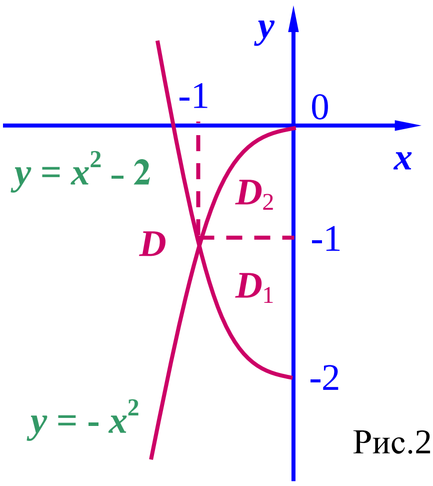

Рис.23

Рассмотрим область D (Рис. 23), она является правильной в направлении оси Oy, поэтому может быть задана следующей системой неравенств:

$$D:\begin{cases} -1\le x\le 0, \\ x^2-2\le y\le -x^2. \end{cases}$$

Тогда согласно свойству двойного интеграла, получаем:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y)dy.$$

Задача 5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, где область $D-$кольцо, ограниченное окружностями $x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2=4$.

Решение.

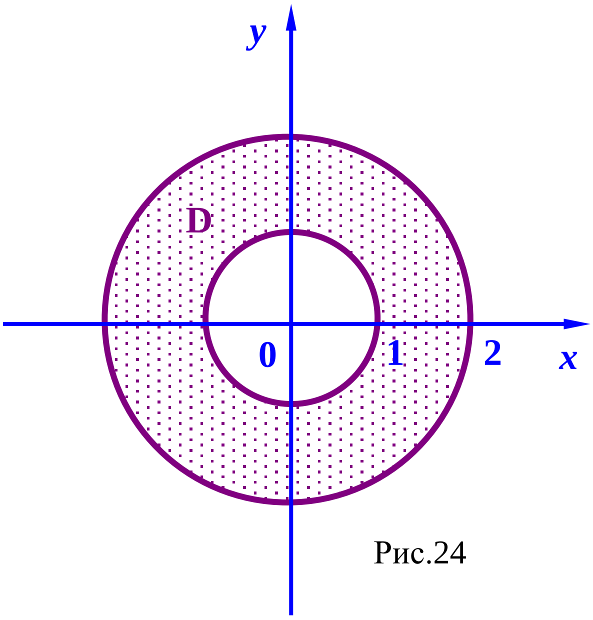

Рис.24

Область D представляет собой кольцо (см. рис. 24).

В данном случае вычисление двойного интеграла значительно упростится, если перейти к полярным координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Зададим в полярных координатах уравнения окружностей:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \ \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1$$

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=1,\ \ \rho^2=1,\ \ \rho=1.$$

$$x^2+y^2=4 \ \Rightarrow \ \ \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4,$$

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=4,\ \ \rho^2=4,\ \ \rho=2.$$

Тогда область D в полярных координатах может быть задана в виде:

$$D:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 1\le\rho\le 2. \end{cases}$$

Выразим в полярных координатах подынтегральную функцию:

$$\sqrt{4-x^2-y^2} = \sqrt{4-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{4-\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} = \sqrt{4-\rho^2}\,.$$

Модуль функционального определителя Якоби равен $\left|I(\varphi,\rho)\right| = \rho$.

Таким образом, для исходного интеграла получаем:

$$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\, d\rho = \left| \begin{array}{l} t = 4-\rho^2 \\ dt = -2\rho d\rho \\ \rho d\rho = -\dfrac{1}{2}dt \\ \alpha = 4-1^2 = 3 \\ \beta = 4-2^2 = 0 \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_3^0 \sqrt{t}\left(-\frac{1}{2}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^3 \right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\left. \frac{2}{3} t\sqrt{t} \right|_0^3 \right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \sqrt{3}\cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi\sqrt{3}.$$

Задача 6. Вычислить с помощью перехода к полярным координатам двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$ по области $D-$ круг $x^2+y^2 \le 4x$.

Решение.

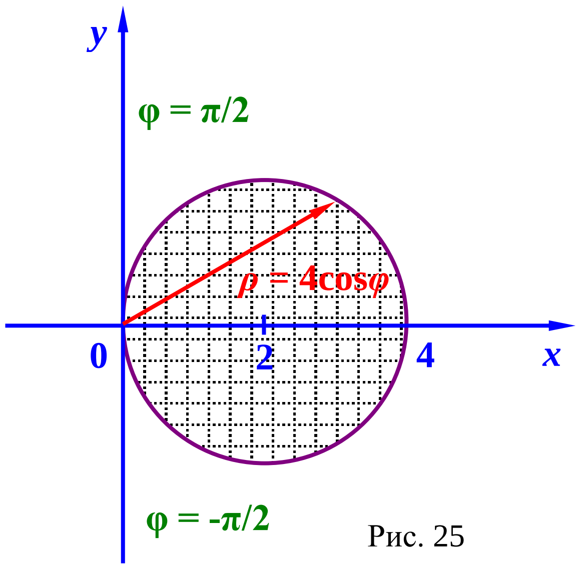

Рис. 25

Приведем уравнение границы области D к каноническому виду:

$$x^2+y^2 = 4x,\ x^2-4x+y^2 = 0,$$
$$(x^2-4x+4)+y^2 = 4,\ (x-2)^2+y^2 = 4.$$

Получили каноническое уравнение окружности с центром в точке (2; 0) и радиусом $R = 2$ (см. Рис. 25).

Перейдем к полярным координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Диапазон изменения угла φ в данном случае очевиден: $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Выразим в полярных координатах уравнение окружности:

$$x^2+y^2 = 4x,\quad \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi = 4\rho\cos\varphi,$$
$$\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) = 4\rho\cos\varphi,\quad \rho = 4\cos\varphi.$$

Тогда область интегрирования D в полярных координатах имеет вид:

$$D:\ \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le 4\cos\varphi. \end{cases}$$

Выразим в полярных координатах подынтегральную функцию:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = \rho^2 .$$

Модуль функционального определителя Якоби равен $|I(\varphi, \rho)| = \rho$.

Таким образом, для исходного интеграла получаем:

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{4\cos\varphi} \right) =$$

$$= 64 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = 64 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 \varphi\right)^2 \, d\varphi = 64 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi =$$

$$= 16 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = 16 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 32 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \, d\varphi + 16 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= 16 \cdot \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 16 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 16 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = 16\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + 8\left(\sin\pi - \sin(-\pi)\right) +$$

$$+ 8 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 8 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi \, d\varphi = 16\pi + 8(0 + 0) + 8\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 8 \cdot \frac{1}{4} \sin 4\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 16\pi + 8\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) +$$

$$+ 2\left(\sin 2\pi - \sin(-2\pi)\right) = 16\pi + 8\pi + 2(0 + 0) = 24\pi.$$

Задача 7. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной окружностью $x^2+y^2=2x$ и прямыми $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

Решение.

Приведем уравнение окружности к каноническому виду: $x^2+y^2=2x$, $(x^2-2x+1)+y^2=1$, $(x-1)^2+y^2=1$ – окружность с центром в точке $(1;\,0)$ и радиусом $R=1$. Выполним чертеж области D (см. рис.26).

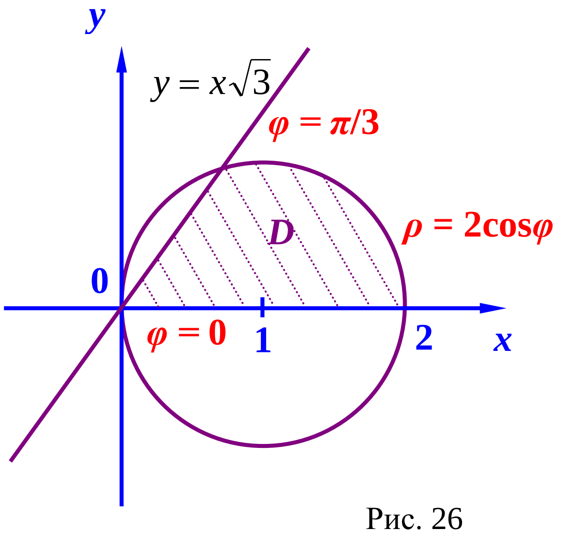

Рис. 26

Площадь области D вычисляем по формуле:

$$S=\iint\limits_D dx\,dy.$$

Перейдем в двойном интеграле к полярным координатам по формулам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Угол φ изменяется внутри области D от прямой $y=0$ до прямой $y=x\sqrt{3}$. Найдем значения угла φ, соответствующие этим прямым:

$$y=0,\ \rho\sin\varphi=0,\ \sin\varphi=0,\ \varphi=0;$$

$$y=x\sqrt{3},\ \rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi,\ tg\varphi=\sqrt{3},\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, диапазон изменения угла φ: $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

Выразим в полярных координатах уравнение окружности:

$$x^2+y^2=2x,\ \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=2\rho\cos\varphi,\quad \rho=2\cos\varphi.$$

Тогда область интегрирования D в полярных координатах имеет вид:

$$D:\ \begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}, \\ 0\le\rho\le 2\cos\varphi. \end{cases}$$

Модуль функционального определителя Якоби равен $\left|I(\varphi,\rho)\right|=\rho$.

Тогда площадь области D:

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\, d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2\varphi\, d\varphi=\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin 0\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Задача 8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=1$, $x=0$, $z=0$, $z=x^2+y^2$.

Решение.

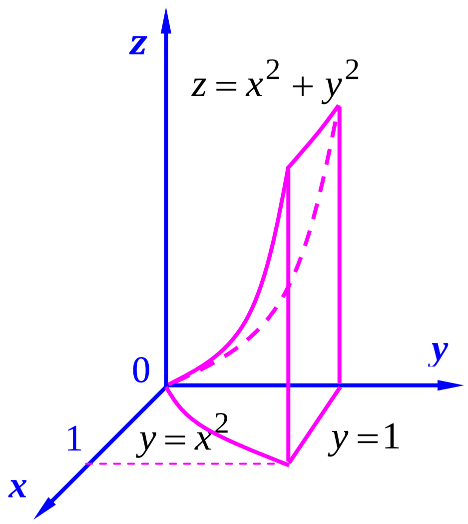

Рис. 27

Данное тело (Рис. 27) представляет собой вертикальный цилиндр, ограниченный сверху частью параболоида $z=x^2+y^2$, снизу – областью D на плоскости Oxy, заключенной между параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$.

Объём получившегося тела определим по формуле:

$$V=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Рассмотрим отдельно область D на плоскости Oxy (Рис. 28). Исходя из заданных линий, зададим область D системой неравенств:

$$D:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ x^2\le y\le 1.\end{cases}$$

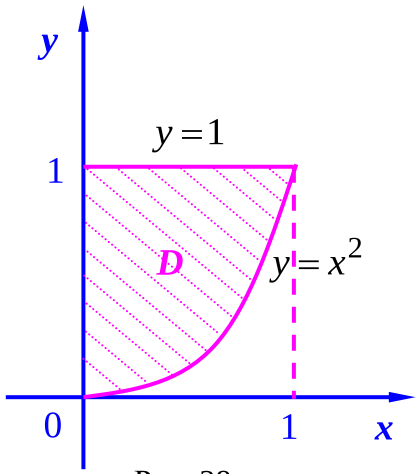

Рис. 28

Тогда объём данного тела равен:

$$V=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left(x^2\int_{x^2}^1 dy+\int_{x^2}^1 y^2dy\right)=\int_0^1 dx\left(x^2\cdot y\Big|_{x^2}^1+\frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^1\right)=\int_0^1\left(x^2-x^4+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^6\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x^4dx+\frac{1}{3}\int_0^1 dx-\frac{1}{3}\int_0^1 x^6dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{x^5}{5}\Big|_0^1+\frac{1}{3}x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^7}{7}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{21}=\frac{35-21+35-5}{105}=\frac{44}{105}.$$

Задача 9. Пластинка D задана ограничивающими её кривыми: $x=1$, $y=0$, $y^2=4x$ $(y\ge 0)$. Поверхностная плотность пластинки $\gamma(x,y)=7x^2+y$. Найти массу пластинки.

Решение.

Массу пластинки D определим по формуле: $m=\iint\limits_D \gamma(x,\,y)dxdy$.

Построим линии, ограничивающие пластинку D (Рис. 29). Область D является правильной в направлении оси Ox, зададим её системой неравенств:

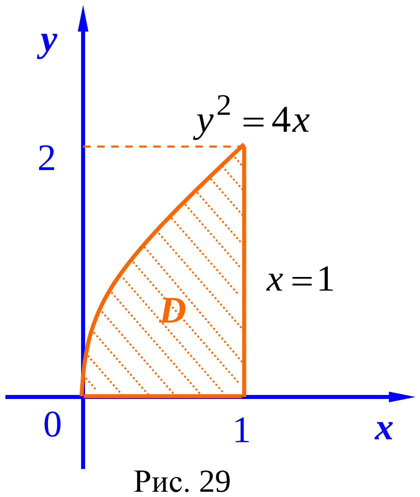

Рис. 29

$$D:\begin{cases}0\le y\le 2,\\ \frac{1}{4}y^2\le x\le 1.\end{cases}$$

Тогда масса пластинки равна:

$$m=\iint\limits_D\left(7x^2+y\right)dxdy=\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{4}y^2}^1\left(7x^2+y\right)dx=$$

$$=\int_0^2 dy\left(7\int_{\frac{1}{4}y^2}^1 x^2dx+y\int_{\frac{1}{4}y^2}^1 dx\right)=\int_0^2 dy\left(7\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{4}y^2}^1+y\cdot x\Big|_{\frac{1}{4}y^2}^1\right)=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{7}{3}-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{64}y^6+y-\frac{1}{4}y^3\right)dy=\frac{7}{3}\int_0^2 dy-\frac{7}{192}\int_0^2 y^6dy+\int_0^2 ydy-\frac{1}{4}\int_0^2 y^3dy=$$

$$=\frac{7}{3}\cdot y\Big|_0^2-\frac{7}{192}\cdot\frac{y^7}{7}\Big|_0^2+\frac{y^2}{2}\Big|_0^2-\frac{1}{4}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^2=\frac{14}{3}-\frac{2}{3}+2-1=5.$$

Задача 10. Найти координаты центра тяжести пластинки, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$, если плотность распределения массы в каждой точке пластинки равна ординате этой точки.

Решение.

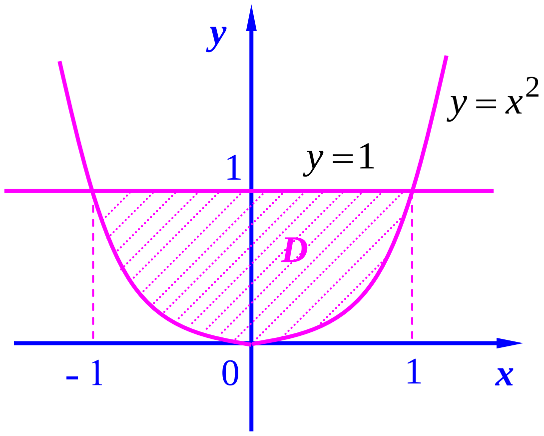

Рис. 30

Построим заданные линии (Рис. 30). Найдем сначала массу пластинки. По условию её плотность равна $\gamma(x, y) = y$. Тогда массу определим по формуле:

$$m = \iint_D y\,dxdy.$$

Область D является правильной в направлении оси Oy. Зададим её системой неравенств:

$$D:\ \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x^2 \le y \le 1. \end{cases}$$

Тогда масса пластинки равна:

$$m = \iint_D y\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} ydy = \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_{x^2}^{1} \right) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^4 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1+1) - \frac{1}{10}(1+1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Вычислим статические моменты пластинки относительно координатных осей:

$$M_x = \iint_D y \cdot y\,dxdy = \iint_D y^2 dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} y^2 dy = \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{y^3}{3} \Bigg|_{x^2}^{1} \right) = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^6\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} dx - \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{1}{3} \cdot x\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^7}{7}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1+1) - \frac{1}{21}(1+1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{21} = \frac{4}{7}$$

$$M_y=\iint_D xydxdy=\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}ydy=\int_{-1}^{1}xdx\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{1}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}xdx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^5dx=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^6}{6}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}(1-1)-\frac{1}{12}(1-1)=0.$$

Следовательно, координаты центра тяжести заданной пластинки имеют вид:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=0,\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{4}{7}:\frac{4}{5}=\frac{5}{7}.$$

Задача 11. Вычислить момент инерции однородного квадрата со стороной, равной 2, относительно одной из его вершин.

Решение.

Совместим начало координат с одной из вершин квадрата (Рис. 31). Так как квадрат однородный, то его плотность $\gamma(x,y)=\gamma=const$. Тогда искомый момент инерции находим по формуле:

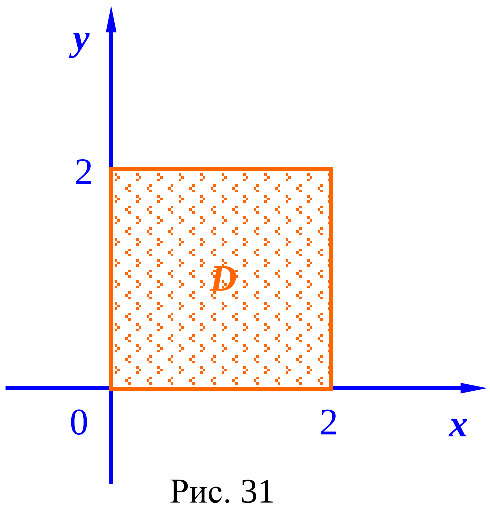

Рис. 31

$$I_0=\gamma\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\gamma\int_0^2dx\int_0^2\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\gamma\int_0^2dx\left(x^2\int_0^2dy+\int_0^2y^2dy\right)=$$

$$=\gamma\int_0^2dx\left(x^2\cdot y\Big|_0^2+\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^2\right)=\gamma\int_0^2\left(2x^2+\frac{8}{3}\right)dx=2\gamma\int_0^2x^2dx+\frac{8}{3}\gamma\int_0^2dx=2\gamma\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2+\frac{8}{3}\lambda x\Big|_0^2=$$

$$=\frac{16}{3}\gamma+\frac{16}{3}\gamma=\frac{32}{3}\gamma.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ»

1. Вычислить двукратные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 \left(x^2 + y^2\right) dx$; 2) $\int\limits_4^6 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy$; 3) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} xy\,dy$.

2. Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями. Выполнить чертеж.

1) $\iint\limits_D (x+y) dxdy$, $D: x=0,\ y=0,\ x+y=3$;

2) $\iint\limits_D x\,dxdy$, $D: x=-1,\ x=2,\ y=x+2,\ y=x^2$;

3) $\iint\limits_D dxdy$, $D:\ y=x,\ y=\frac{1}{4}x,\ x+2y=6$.

3. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

1) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_2^x f(x, y)\,dy$; 2) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y)\,dx$.

4. Вычислить двойной интеграл по указанной области с помощью перехода к полярным координатам. Выполнить чертеж.

1) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где $D-$ первая четверть круга $x^2+y^2 \le 9$;

2) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, где $D-$ круговой сектор, ограниченный линиями $x^2+y^2=1,\ y=\frac{x\sqrt{3}}{3},\ y=x\sqrt{3},\ x \ge 0$.

5. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\frac{1}{2}x^2,\ y=x+3,\ 2x+y-6=0$. Выполнить чертеж.

6. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $x^2+y^2=2y$, $z=4-x^2-y^2$.

7. Найти координаты центра тяжести плоской однородной пластинки D, ограниченной линиями $x=8-y^2$, $x=-2y$.

8. Вычислить момент инерции относительно оси Ox однородной фигуры, ограниченной линиями: $y=2\sqrt{x},\ x+y=3,\ y=0$.

ПРАКТИКУМ ПО ТЕМЕ «ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ»

Задача 1. Вычислить трехкратный интеграл: а) $\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^4 xyz\,dz$;

б) $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_0^2 (z+4)\,dz$.

Решение.

а) Область интегрирования T в пространстве представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами 2, 3 и 4 (Рис. 32). Вычислим трехкратный интеграл:

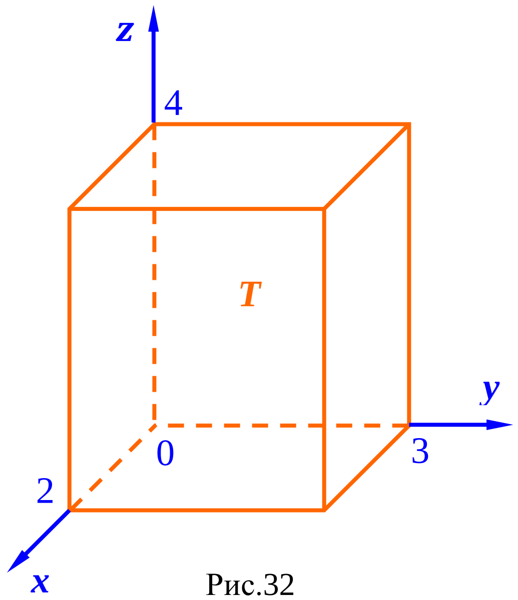

Рис.32

$$\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^4 xyz\,dz = \int_0^2 x\,dx \int_0^3 y\,dy \int_0^4 z\,dz =$$

$$= \int_0^2 x\,dx \int_0^3 y\,dy \left(\left. \frac{z^2}{2} \right|_0^4 \right) = 8\int_0^2 x\,dx \int_0^3 y\,dy =$$

$$= 8\int_0^2 x\,dx \left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_0^3 \right) = 8 \cdot \frac{9}{2} \int_0^2 x\,dx = 36 \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 =$$

$$= 36 \cdot 2 = 72.$$

б) Область интегрирования T представляет собой параболический цилиндр в пространстве (Рис. 33), в основании которого фигура, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$.

Вычислим трехкратный интеграл:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_0^2 (z+4)\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \left(\int_0^2 z dz + 4\int_0^2 dz \right) =$$

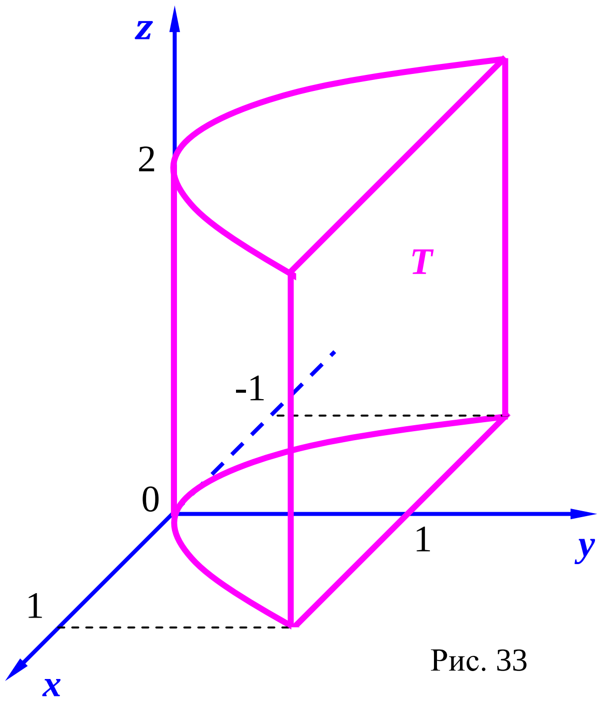

Рис. 33

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2+4z\Big|_0^2\right)=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\,(2+8)=10\int_{-1}^{1}dx\left(y\Big|_{x^2}^{1}\right)=10\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=10\int_{-1}^{1}dx-$$

$$-10\int_{-1}^{1}x^2dx=10x\Big|_{-1}^{1}-10\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}=10(1+1)-\frac{10}{3}(1+1)=20-\frac{20}{3}=\frac{40}{3}.$$

Задача 2. Вычислить $\iiint\limits_T x^2\,dxdydz$, где область T ограничена плоскостями $y+z=3,\ x=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Решение.

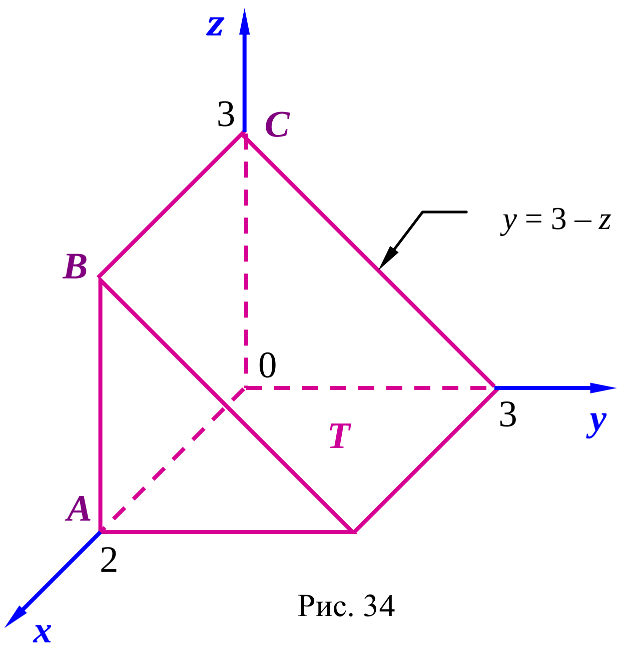

Рис. 34

Плоскости, заданные уравнениями $x=0,\ y=0,\ z=0$, являются координатными.

Плоскость $x=2$ параллельна координатной плоскости Oyz $(x=0)$. Плоскость $y+z=3$ параллельна оси Ox. Построив плоскости, получим тело Т – треугольную призму (Рис. 34). Область T является правильной в направлении оси Oy, поэтому её можно задать системой неравенств:

$$T:\ \begin{cases}0\le x\le 2,\\ 0\le z\le 3,\\ 0\le y\le 3-z.\end{cases}$$

Тогда для заданного по условию интеграла получаем:

$$\iiint\limits_T x^2\,dxdydz=\int_0^2 dx\int_0^3 dz\int_0^{3-z}x^2dy=\int_0^2 x^2dx\int_0^3 dz\left(y\Big|_0^{3-z}\right)=\int_0^2 x^2dx\int_0^3(3-z)dz=$$

$$=\int_0^2 x^2dx\left(3\int_0^3 dz-\int_0^3 z\,dz\right)=\int_0^2 x^2dx\left(3z\Big|_0^3-\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^3\right)=\frac{9}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{9}{2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{9}{2}\cdot\frac{8}{3}=12.$$

Задача 3. Вычислить тройной интеграл с помощью перехода к цилиндрическим координатам: $\iiint\limits_T y\,dxdydz$, где область T ограничена поверхностями $y=\sqrt{x^2+z^2}$ и $y=a$ $(a>0)$.

Решение.

Поверхность $y=\sqrt{x^2+z^2}$ представляет собой конус, симметричный относительно оси Oy (Рис. 35). Поверхность $y=a$ $(a>0)$ - плоскость, параллельная координатной плоскости Oxz. Область T, ограниченная данными поверхностями, является правильной вдоль оси Oy. Проекцией этого конуса на плоскость Oxy является круг с границей $x^2+z^2=a^2$, поэтому в данном случае целесообразно перейти к цилиндрическим координатам.

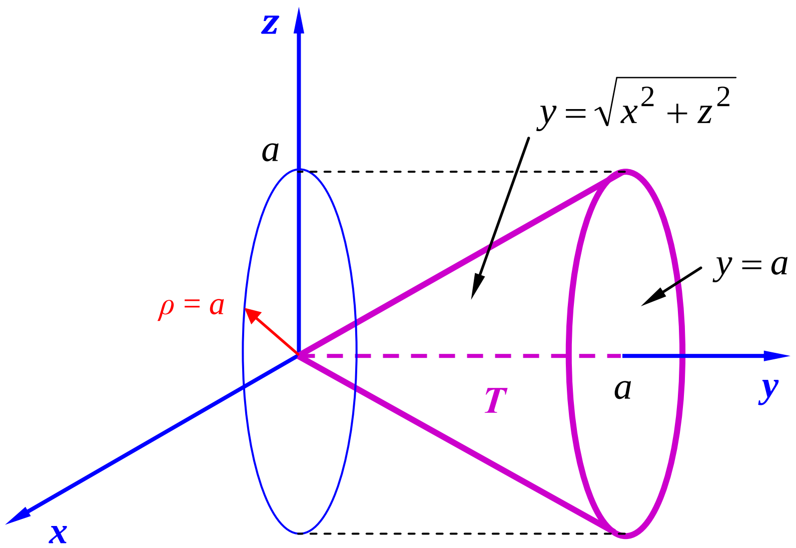

Рис. 35

Причем формулы связи декартовых и цилиндрических координат здесь имеют вид:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ z=\rho\sin\varphi, \\ y=y. \end{cases}$$

Выразим уравнение конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$ в цилиндрических координатах:

$$y=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\sqrt{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}=\sqrt{\rho^2}=\rho\,.$$

Выразим в цилиндрических координатах уравнение окружности $x^2+z^2=a^2$:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=a^2,$$
$$\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=a^2,$$
$$\rho^2=a^2,\qquad \rho=a$$

Таким образом, область интегрирования T может быть задана системой неравенств:

$$T:\ \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 0\le\rho\le a, \\ \rho\le y\le a. \end{cases}$$

Модуль функционального определителя Якоби равен $\left|I(\varphi,\rho,y)\right|=\rho$.

Тогда для исходного интеграла имеем:

$$\iiint\limits_T y\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a d\rho\int_\rho^a y\,\rho\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a \rho d\rho\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_\rho^a\right)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{a^2}{2}\int_0^a\rho d\rho-\frac{1}{2}\int_0^a\rho^3 d\rho\right)=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{a^2}{2}\cdot\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^a-\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^a\right)=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{8}\right)=$$

$$=\frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{a^4}{8}\cdot\left.\varphi\right|_0^{2\pi}=\frac{1}{4}\pi a^4.$$

Задача 4. Вычислить тройной интеграл с помощью перехода к сферическим координатам: $\iiint\limits_T\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область T определяется неравенствами: $r^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2$, $z\ge 0$.

Решение.

Построим заданную область интегрирования T.

Уравнение $x^2+y^2+z^2=r^2$ задает в пространстве сферу с центром в начале координат и радиусом r; $x^2+y^2+z^2=R^2$ - сфера с центром в начале координат и радиусом R. Так как $z\ge 0$, то нам заданы только верхние части этих сфер (Рис. 36). Таким образом, область интегрирования T – шаровой слой, заключенный между верхними полусферами радиусов r и R. Эта область проектируется на плоскость Oxy в кольцо (Рис. 37), ограниченное окружностями $x^2+y^2=r^2$ и $x^2+y^2=R^2$.

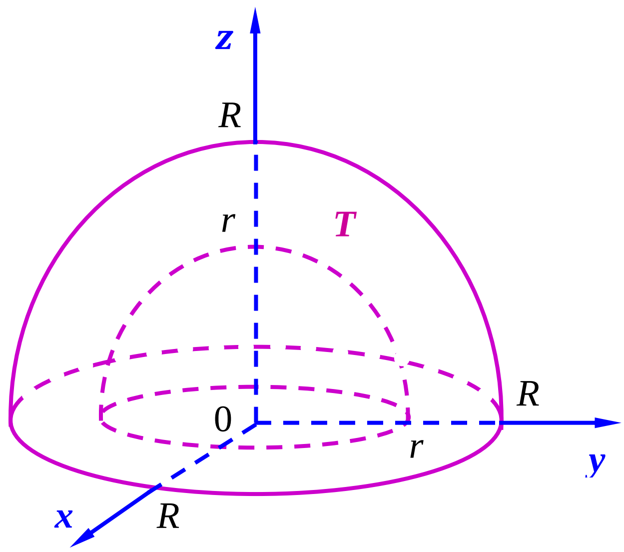

Рис.36

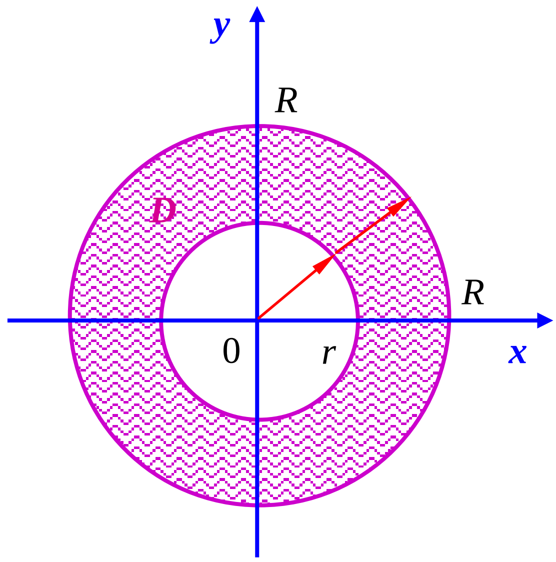

Рис.37

Перейдем к сферическим координатам по формулам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\theta. \end{cases}$$

Из рисунков 5 и 6 видно, что угол φ изменяется от 0 до 2π, угол θ изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Выразим в сферических координатах уравнения сфер:

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2=r^2 \;\Rightarrow \\
&\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=r^2; \\
&\rho^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\rho^2\cos^2\theta=r^2; \\
&\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=r^2; \\
&\rho^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=r^2; \\
&\rho^2=r^2 \;\Rightarrow\; \rho=r.
\end{aligned}$$

Аналогично, для сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ получаем уравнение $\rho=R$.

Таким образом, область интегрирования T в сферических координатах может быть задана системой неравенств:

$$T:\ \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ r \le \rho \le R. \end{cases}$$

Рассмотрим подынтегральную функцию $x^2 + y^2$, выразим её в сферических координатах:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta = \rho^2 \sin^2 \theta \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) = \\ = \rho^2 \sin^2 \theta.$$

Модуль функционального определителя Якоби в сферических координатах равен $|I(\varphi, \theta, \rho)| = \rho^2 \sin\theta$. Тогда для исходного интеграла получим:

$$\iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_r^R \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho^2 \sin\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \, d\theta \int_r^R \rho^4 d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \, d\theta \left(\left. \frac{\rho^5}{5} \right|_r^R \right) = \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 \theta\right) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta d\theta \\ \sin\theta d\theta = -dt \\ \alpha = \cos 0 = 1 \\ \beta = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^0 \left(1 - t^2\right)(-dt) = \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 - t^2\right) dt =$$

$$= \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^1 dt - \int_0^1 t^2 dt \right) = \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \left(t\Big|_0^1 - \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi\left(R^5 - r^5\right)}{15}.$$

Задача 5. Найти объем тела *T*, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=6-x^2-y^2$.

Решение.

Искомый объем определяем по формуле $V=\iiint\limits_T dxdydz$. Построим область интегрирования *T* (Рис. 38). Она ограничена снизу конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$, а сверху – параболоидом $z=6-x^2-y^2$.

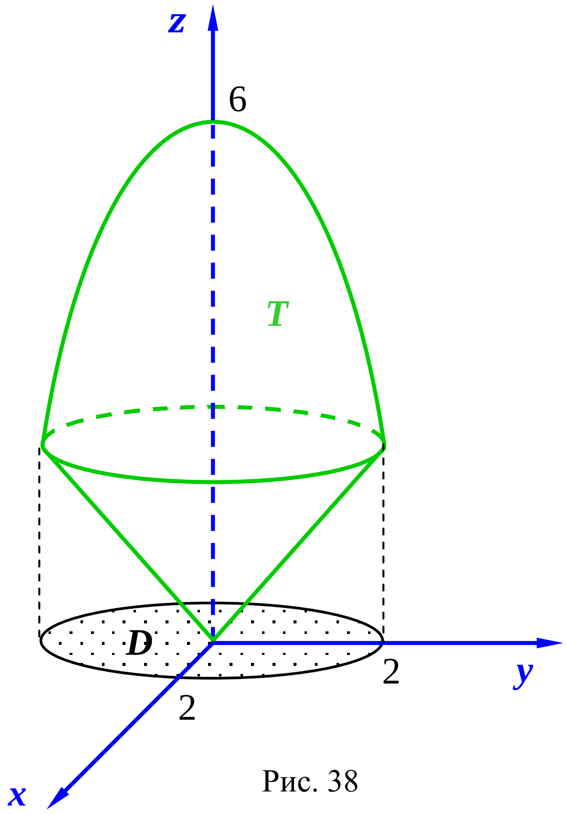

Рис. 38

Определим уравнение контура, по которому пересекаются заданные поверхности. Этим же уравнением будет задаваться граница области *D* – проекции области интегрирования *T* на плоскость *Oxy* (Рис. 38). Получим уравнение:

$$6-x^2-y^2=\sqrt{x^2+y^2}\text{, или } \left(x^2+y^2\right)+\sqrt{x^2+y^2}-6=0.$$

Выполним замену переменной $t=\sqrt{x^2+y^2}$, $t\geq 0$, в результате получим квадратное уравнение:

$$t^2+t-6=0.$$

Его корнями являются числа $t_1 = 2,\ t_2 = -3$. Значение $t_2 = -3$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$, поэтому

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Таким образом, область D ограничена окружностью радиуса $R = 2$.

Для вычисления объема перейдем в тройном интеграле к цилиндрическим координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Очевидно, что угол φ изменяется от 0 до 2π, z изменяется от 0 до 6. Выразим уравнение границы области D в цилиндрических координатах:

$$x^2 + y^2 = 4 \;\Rightarrow\; \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = 4, \;\; \rho^2 = 4, \;\; \rho = 2.$$

Следовательно, область интегрирования T может быть задана следующей системой неравенств:

$$T: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \rho \leq 2, \\ 0 \leq z \leq 6. \end{cases}$$

Модуль функционального определителя Якоби равен $\left|I(\varphi,\ \rho,\ z)\right| = \rho$. Тогда объем заданного по условию тела равен:

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^6 \rho\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \left(z\Big|_0^6 \right) = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^2 \right) =$$

$$= 12\int_0^{2\pi} d\varphi = 12 \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = 24\pi.$$

Задача 6. Найти массу куба $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2$, если его плотность в каждой точке равна $\gamma(x,y,z) = x + y + z$.

Решение.

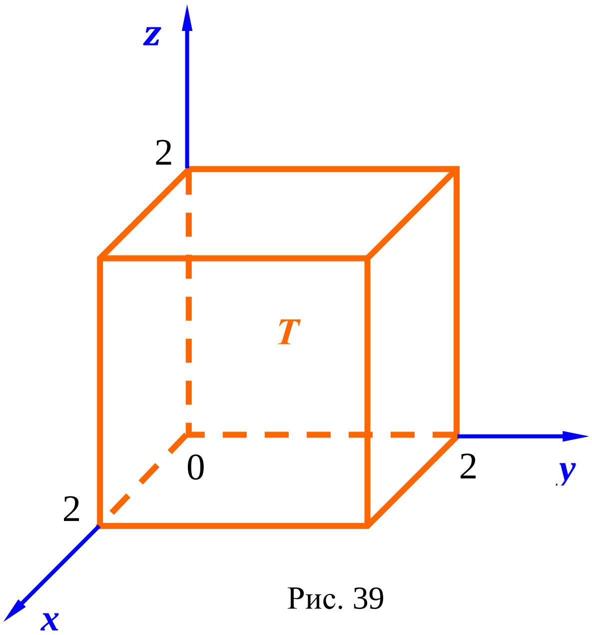

Рис. 39

Массу куба (Рис. 39) определим по формуле:

$$m = \iiint\limits_T (x + y + z)\,dxdydz.$$

Область интегрирования T может быть задана системой неравенств:

$$T: \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2, \\ 0 \le z \le 2. \end{cases}$$

Тогда масса куба будет равна:

$$m = \iiint\limits_T (x + y + z)\,dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 (x + y + z)dz = \int_0^2 dx \int_0^2 dy \left((x + y)\int_0^2 dz + \int_0^2 zdz \right) =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 dy \left((x + y)\cdot z\Big|_0^2 + \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^2 \right) = \int_0^2 dx \int_0^2 (2(x + y) + 2)dy = 2\int_0^2 dx \int_0^2 (x + y + 1)dy =$$

$$= 2\int_0^2 dx \left((x+1)\int_0^2 dy + \int_0^2 ydy \right) = 2\int_0^2 dx \left((x+1)\cdot y\Big|_0^2 + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2 \right) = 2\int_0^2 (2(x+1) + 2)dx =$$

$$= 4\int_0^2 (x+2)dx = 4\int_0^2 xdx + 8\int_0^2 dx = 4\cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + 8\cdot x\Big|_0^2 = 8 + 16 = 24.$$

Задача 7. Найти момент инерции относительно оси Oz тела T, ограниченного плоскостями $y = 4,\ z = 0,\ z = 1$ и цилиндром $y = x^2$, если плотность в каждой точке численно равна аппликате этой точки.

Решение.

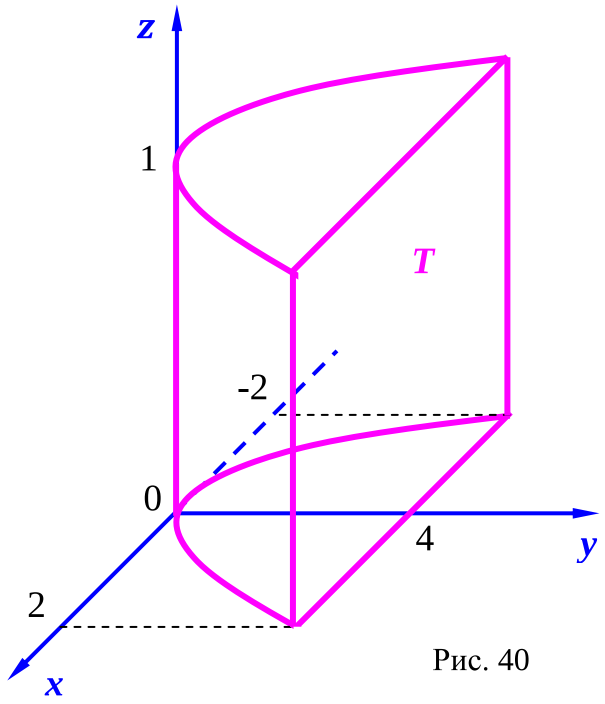

Рис. 40

Так как по условию плотность тела в каждой точке численно равна аппликате этой точки, то $\gamma(x, y, z) = z$.

Момент инерции тела относительно оси Oz определим по формуле:

$$I_z = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right) \cdot z\, dxdydz.$$

Область интегрирования T может быть задана следующей системой неравенств (Рис. 40):

$$T: \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ x^2 \le y \le 4, \\ 0 \le z \le 1. \end{cases}$$

Момент инерции тела относительно оси Oz заданного по условию тела равен:

$$I_z = \iiint\limits_T \left(x^2 + y^2\right) \cdot z\, dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 + y^2\right) z dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} \left(x^2 + y^2\right) dy \left(\left. \frac{z^2}{2} \right|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} \left(x^2 + y^2\right) dy = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} dx \left(x^2 \int\limits_{x^2}^{4} dy + \int\limits_{x^2}^{4} y^2 dy \right) = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} dx \left(x^2 \cdot y \Big|_{x^2}^{4} + \left. \frac{y^3}{3} \right|_{x^2}^{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} \left(4x^2 - x^4 + \frac{64}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = 2 \int\limits_{-2}^{2} x^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} x^4 dx + \frac{32}{3} \int\limits_{-2}^{2} dx - \frac{1}{6} \int\limits_{-2}^{2} x^6 dx =$$

$$= 2 \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^{2} - \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-2}^{2} + \frac{32}{3} \cdot x \Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{6} \cdot \left. \frac{x^7}{7} \right|_{-2}^{2} = \frac{2}{3}(8 + 8) - \frac{1}{10}(32 + 32) + \frac{32}{3}(2 + 2) -$$

$$- \frac{1}{42}(128 + 128) = \frac{32}{3} - \frac{32}{5} + \frac{128}{3} - \frac{128}{21} = 32\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3} - \frac{4}{21} \right) = 32 \cdot \frac{134}{105} = \frac{4288}{105}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ»

1. Вычислить трехкратные интегралы:

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y x^2 y z^3 dz$; 2) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz$.

2. Вычислить тройные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями. Выполнить чертеж области интегрирования.

1) $\iiint\limits_T \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$, $T: x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=3,\ z=0,\ z=6$;

2) $\iiint\limits_T xz^2 dxdydz$, $T: x=\sqrt{2y-y^2},\ x=2,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=3$;

3. Вычислить тройной интеграл по указанной области с помощью перехода к цилиндрическим координатам. Выполнить чертеж: $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, где $T -$ область, ограниченная цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $z=0,\ z=3$.

4. Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z) dxdydz$ к сферическим координатам и расставить пределы интегрирования, где область T - часть шара $x^2+y^2+z^2 \le 25$, лежащая в I октанте.

5. Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного поверхностями: $y=4-x^2,\ y=x^2+2,\ z=-1,\ z=2$. Выполнить чертеж.

6. Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1,\ 2y+z=2$, если в каждой его точке плотность численно равна ординате этой точки. Выполнить чертеж.

7. Найти статические моменты относительно координатных плоскостей пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, если плотность в каждой точке численно равна абсциссе этой точки. Выполнить чертеж.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бермант А.Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов. СПб.: Лань, 2010. 736 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1985. 384 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. В 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 253 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437223
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник: учеб. пособие для академического бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 192 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/433433
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1990. 624 с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Физматлит, 2003. 336 с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров / под ред. А.Н. Тихонова. М.: Юрайт, 2012. 607 с.
8. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2003. 304 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

Кратные интегралы

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Высшая математика»

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 20.11.2020 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 3,31. Тираж 25 экз. Изд. № 6754.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ