Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ I

Учебно-методическое пособие

Брянская область 2023г.

УДК 517.23 (076)
ББК 22.161.1
Р 19

Ракул, Е. А. Высшая математика. Ч. I: учебно-методическое пособие / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2023. – 124 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения направлений подготовки 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент.

Рецензенты:
Безик В.А, к.т.н., зав. кафедрой автоматики, физики и математики
Иванюга Т.В., к.э.н., доцент кафедры экономики и менеджмента

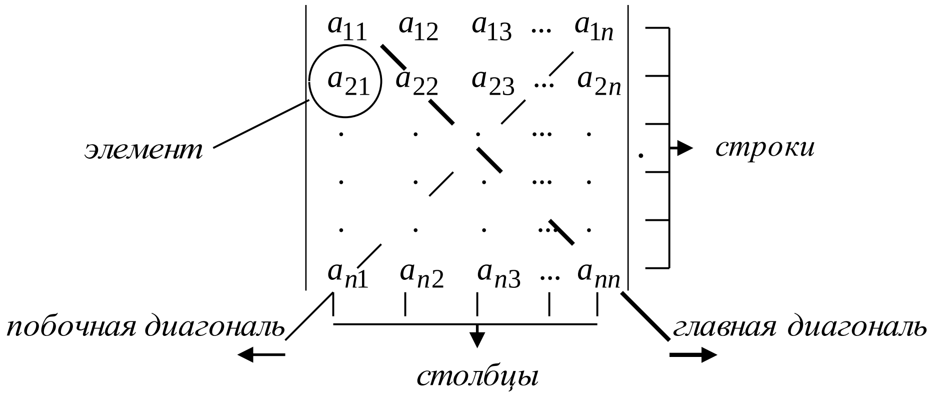
Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 30.10.2023 г., протокол №2.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Определители второго и третьего порядка

Определение. *Определителем порядка n* называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы, имеющей n строк и n столбцов, которая раскрывается по определенному правилу.



Числа a_{ij} называются *элементами* определителя, i – номер строки, j – номер столбца. Элементы с одинаковым номером i образуют строки, а элементы с одинаковым номером j – столбцы. Элементы с равными номерами $(i = j)$ образуют *главную диагональ*. Другая диагональ квадратной таблицы, начинающаяся в левом нижнем углу и заканчивающаяся в правом верхнем углу, называется *побочной*.

Определение. *Определителем второго порядка* называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы размером 2 х 2, то есть имеющей 2 строки и 2 столбца.

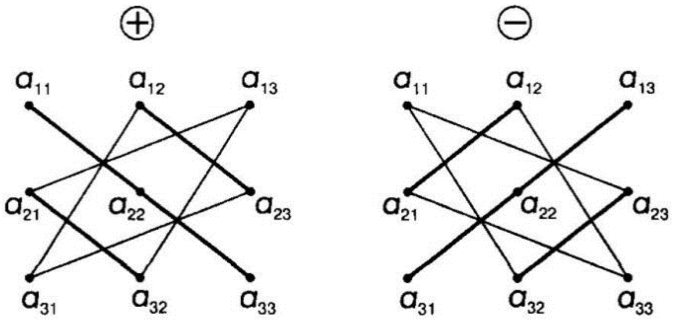
Определитель второго порядка вычисляется по правилу: *из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, надо вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Пример 1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = -13$.

Определение. *Определителем третьего порядка* называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы размером 3 х 3, то есть имеющей 3 строки и 3 столбца.

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника (Саррюса):



Пример 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 0 - (60 - 2 + 0) = -7 - 58 = -65.$

Определение. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель порядка $(n-1)$, который получается из исходного определителя порядка n путем вычеркивания строки i и столбца j, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 3. Найти миноры элементов a_{12} и a_{33} определителя из примера 2.

Вычеркивая в определителе строку 1 и столбец 2: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, получим минор $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. Поступая аналогично со строкой 3 и столбцом 3, получим минор $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Пример 4. Найти миноры элементов a_{11} и a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Исходя из определения минора M_{11}: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$, получаем $M_{11} = -2$, аналогично найдем минор $M_{21} = 1$.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется произведение минора этого элемента на $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Замечание. Из определения алгебраического дополнения следует, что алгебраическое дополнение совпадает со своим минором, если сумма $i+j$ является четным числом, и противоположно ему по знаку, если сумма $i+j$ есть нечетное число.

Определение. *Транспонированным определителем* n-го порядка называется определитель порядка n, полученный из исходного определителя путем замены строк на соответствующие столбцы, а столбцов на соответствующие строки.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, то $\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Пример 5. Найти определитель, транспонированный к определителю $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение.

Из определения транспонированного определителя $\Delta^T = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2 Свойства определителей

1. Величина транспонированного определителя равна величине исходного определителя.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, тогда $\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Отсюда видно, что $\Delta^T = \Delta$.

2. Перестановка местами двух строк (столбцов) изменяет знак определителя на противоположный.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, тогда $\Delta^{'} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} =$

$= -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\Delta$.

Замечание. Если поменять местами строки (столбцы) четное число раз, то величина и знак определителя не меняется. Нечетная перестановка местами строк (столбцов) не меняет величину определителя, но изменяет его знак на противоположный.

3. Определитель, содержащий две (или более) одинаковых строки (столбца), равен нулю.

Если определитель содержит два одинаковых столбца, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} -$

$- a_{21}a_{11} = 0$.

4. Для того чтобы умножить определитель на число k, достаточно умножить на это число все элементы какой-либо одной строки (столбца). Обратно: если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель k, то его можно вынести за знак определителя.

Действительно,

$$k \cdot \Delta = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\,a_{11}a_{22} - k\,a_{21}a_{12} = k(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}).$$

5. Если две каких-либо строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю.

Пусть в определителе второго порядка первая и вторая строки пропорциональны, тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}\,k\,a_{12} - k\,a_{11}a_{12} = k(a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12}) = 0.$$

6. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Пусть в определителе второго порядка все элементы первой строки равны нулю, тогда $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0\,a_{22} - a_{21}0 = 0$.

7. Если элементы какой-либо строки (столбца) можно представить в виде двух слагаемых, то сам определитель можно представить в виде суммы двух определителей.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, то $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2$. Доказать самостоятельно.

8. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на вещественное число k и прибавить к соответствующим элементам другой строки (соответственно, столбца), то величина определителя не изменится.

Умножим элементы второго столбца на вещественное число k и прибавим результат умножения к соответствующим элементам первого столбца, получим $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} \\ k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta$. Второй определитель равен нулю по свойству 5.

Замечание. Данное свойство применяется для обнуления всех элементов какой-либо строки (столбца) за исключением одного, что существенно облегчает вычисление определителей порядка выше 3 (см. также свойство 9).

9. Метод раскрытия определителя по элементам какой-либо строки (столбца): Определитель любого порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_i a_{ij} A_{ij} = \sum_j a_{ij} A_{ij}.$$

Пример 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ по элементам 3 строки и по элементам 2 столбца.

Воспользуемся свойством 9: раскроем определитель по элементам 3 строки

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = (-2)\cdot M_{31} + (-3)\cdot(-M_{32}) + 4\cdot M_{33} =$$

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-3) + 3\cdot 8 + 4\cdot(-1) = 26\,.$$

Вычислим определитель по элементам 2 столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = (-1)\cdot(-M_{12}) + 1\cdot M_{22} + (-3)\cdot(-M_{32}) =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-10) + 1\cdot 12 + 3\cdot 8 = 26\,.$$

Из полученных результатов видно, что свойство 9 является универсальным методом вычисления любых определителей по элементам любой строки или столбца.

Используя свойство 8 можно обнулить все элементы какой-либо строки (столбца) за исключением одного (***метод обнуления***), а затем раскрыть определитель по элементам этой строки, воспользовавшись свойством 9.

1.3 Понятие матрицы, виды матриц

Определение. *Матрицей* называется таблица чисел (выражений), имеющая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем писать матрицу в сокращенном виде $A = \underset{m\times n}{(a_{ij})}$, где числа a_{ij} называются *матричными элементами*, i *– номер строки*, j *– номер столбца*, выражение $m\times n$ будем называть *размерностью* матрицы или ее структурой.

Определение. Если матрица содержит m строк и 1 столбец, то она называется *матрицей-столбцом* $B = \underset{m\times 1}{(b_{ij})} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$.

Определение. Если матрица содержит 1 строку и n столбцов, то она называется *матрицей-строкой* $C = \underset{1\times n}{(c_{ij})} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \end{pmatrix}$.

Пример 1. Следующие таблицы являются матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ \pi - 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, у которой совпадает количество столбцов с количеством строк, называется *квадратной*.

Всякой квадратной матрице соответствует определитель, составленный из тех же матричных элементов, который в теории матриц называется ещё *детерминантом матрицы* $\det A = \Delta_A$.

Определение. *Транспонированной* к исходной квадратной матрице называется такая матрица, строки которой заменены на соответствующие столбцы, а столбцы – на соответствующие строки.

Определение. Матрицу, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю, будем называть *треугольной*

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали, называется *диагональной*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Единичной* матрицей называется диагональная матрица, у которой на главной диагонали все элементы равны единице, а остальные элементы равны нулю:

$$E_{(2)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\quad E_{(3)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad E_{(4)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

1.4 Действия над матрицами

Определение. *Суммой (разностью)* двух матриц $A=\underset{m\times n}{(a_{ij})}$ и $B=\underset{m\times n}{(b_{ij})}$ одинаковой структуры называется матрица той же размерности $C=\underset{m\times n}{(c_{ij})}$, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$.

Пример 2. Найти сумму и разность матриц

$$A=\begin{pmatrix}-1&3&8\\2&-4&6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&9\\3&2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\5&4&3\end{pmatrix}.$$

Решение.

Из приведенных матриц складывать (вычитать) можно только матрицы A и C, которые имеют одинаковую структуру. Найдем сумму

$$A+C=\begin{pmatrix}-1&3&8\\2&-4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&-2\\5&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1&3+(-1)&8+(-2)\\2+5&-4+4&6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&6\\7&0&9\end{pmatrix}.$$

и разность этих матриц

$$A-C=\begin{pmatrix}-1&3&8\\2&-4&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-2\\5&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-1&3-(-1)&8-(-2)\\2-5&-4-4&6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&10\\-3&-8&3\end{pmatrix}$$

При умножении действительного числа k на матрицу $A=\underset{m\times n}{(a_{ij})}$ ***все*** элементы матрицы умножаются на это число.

Пример 3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-1&3&8\\2&-4&6\end{pmatrix}$. Найти матрицу $-2A$.

Решение.

$$-2A=-2\cdot\begin{pmatrix}-1&3&8\\2&-4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-1)&-2\cdot3&-2\cdot8\\-2\cdot2&-2\cdot(-4)&-2\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6&-16\\-4&8&-12\end{pmatrix}.$$

Определение. *Произведением матриц* $\underset{m\times l}{A=(a_{ij})}$ и $\underset{l\times n}{B=(b_{ij})}$ называется матрица $\underset{m\times n}{C=(c_{ij})}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{il}\cdot b_{lj}.$$

Замечание. Перемножать можно лишь те матрицы, для *которых количество столбцов первой перемножаемой матрицы совпадает с количеством строк второй перемножаемой матрицы*. Матрица, получаемая в результате перемножения, имеет количество строк равное количеству строк первой матрицы и количество столбцов равное количеству столбцов второй матрицы.

Пример 4. Найти (если это возможно) произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 3 & -2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрица A имеет структуру 2×3, матрица $B-\ 2\times2$, матрица $C-3\times2$. Согласно определению можно найти произведения $B\cdot A,\ A\cdot C,\ C\cdot A,\ C\cdot B$. Не существуют произведения $A\cdot B,\ B\cdot C$.

Вычислим произведение $B\cdot A$. Для того чтобы найти элементы возможных произведений, надо просуммировать произведения элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы:

$d_{11}=2\cdot(-1)+9\cdot2=16;\quad d_{12}=2\cdot3+9\cdot(-4)=-30;\quad d_{13}=2\cdot8+9\cdot6=70;$

$d_{21}=3\cdot(-1)+(-2)\cdot2=-7;\quad d_{22}=3\cdot3+(-2)\cdot(-4)=17;\quad d_{23}=3\cdot8+(-2)\cdot6=12.$

Отсюда следует, что $D=B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -30 & 70\\ -7 & 17 & 12\end{pmatrix}$.

Остальные возможные произведения найти ***самостоятельно***.

Замечание. Из приведенного примера видно, что в общем случае произведение матриц *некоммутативно* (неперестановочно), т. е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Определение. Обратной матрицей к исходной квадратной матрице $\underset{n\times n}{A=(a_{ij})}$ называется матрица A^{-1} той же структуры, произведение которой с матрицей A коммутативно и равно единичной матрице, то есть $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Рассмотрим схему построения обратной матрицы A^{-1}:

– находим определитель матрицы A (Δ_A – определитель матрицы A, если $\Delta_A = 0$, то обратной матрицы ***не существует***);

– вычисляют алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов определителя Δ_A;

– записывают выражение для обратной матрицы по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Обращаем внимание на то, что матрица алгебраических дополнений записана в транспонированном виде.

Пример 5. Найти обратную матрицу к матрице $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим детерминант данной матрицы $\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, раскроем этот определитель по элементам первой строки:

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \left(-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 7 = 13.$$

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов определителя:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 9 .$$

Запишем обратную матрицу $C^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Проверим правильность нахождения обратной матрицы, для чего воспользуемся ее определением. Умножим найденную матрицу на исходную матрицу, вычислим элементы результирующей матрицы

$d_{11} = 6 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) = 13;$

$d_{12} = 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 0;$

$d_{13} = 6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0;$

$d_{21} = -7 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) = 0;$

$d_{22} = -7 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 13;$

$d_{23} = -7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0;$

$$d_{31} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 9 \cdot (-2) = 0;$$
$$d_{32} = -2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + 9 \cdot (-2) = 0;$$
$$d_{33} = -2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 13.$$

Таким образом, $C^{-1} \cdot C = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{(3)}$, т.е. обратная матрица найдена верно.

1.5 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

1.5.1 Метод Крамера

Определение. ***Системой*** *линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)* называется система вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, где числа a_{ij}

называются *коэффициентами при неизвестных* x_j, а числа b_i называются *свободными коэффициентами*.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *главным определителем* системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Крамер предложил следующий метод решения СЛАУ: умножим главный определитель на x_1, для этого умножим все элементы первого столбца на эту неизвестную: $x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Второй столбец умножим на x_2, третий столбец – на x_3, … , n-ый столбец – на x_n и все эти произведения прибавим к первому столбцу, при этом произведение $x_1 \cdot \Delta$ не изменится:

$$x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно записи СЛАУ первый столбец получившегося определителя представляет собой столбец свободных коэффициентов, т.е.

$$x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1.$$

Определение. Определитель Δ_1 называется *первым вспомогательным определителем* СЛАУ.

Поступая аналогично тому, как описано выше, найдем все вспомогательные определители СЛАУ:

$$x_2\cdot\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\Delta_2;\dots\ x_n\cdot\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n\end{vmatrix}=\Delta_n.$$

Замечание. *Для того чтобы найти вспомогательный определитель i, надо в главном определителе СЛАУ заменить столбец i на столбец свободных коэффициентов.*

Определение. Полученные выше соотношения называются *формулами Крамера*.

Используя формулы Крамера, находят неизвестные величины $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

Проанализируем полученные формулы:

– если главный определитель системы отличен от нуля ($\Delta\neq 0$), то система имеет единственное решение;

– если главный определитель системы равен нулю ($\Delta=0$), а хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля ($\Delta_1\neq 0$ или $\Delta_2\neq 0$, или, …, или $\Delta_n\neq 0$), то система не имеет решений (деление на ноль запрещено);

– если все определители системы равны нулю ($\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\dots=\ \Delta_n=0$), то система уравнений имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решить СЛАУ методом Крамера $\begin{cases} 2x-3y+2z=1 \\ x+y+z=3 \\ y-2z+x=0 \end{cases}$.

Прежде всего, обращаем внимание на то, что в последнем уравнении переменные записаны в неправильном порядке, в этом случае говорят, что СЛАУ записана в ненормализованном виде. Нормализуем СЛАУ, для чего запишем неизвестные в последнем уравнении системы в правильном порядке, чтобы одноименные неизвестные были записаны друг под другом $\begin{cases} 2x-3y+2z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$. Найдем главный определитель СЛАУ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2\end{vmatrix}+(-3)\cdot\left(-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)+2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}=-6-9=-15.$$

Так как главный определитель системы отличен от нуля, то СЛАУ имеет единственное решение. Найдем три вспомогательных определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \left(-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 18 + 6 = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left(-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 3 - 6 = -15;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \left(-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 9 = -15.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1.$$

Замечание. После нахождения решения СЛАУ надо обязательно *провести проверку*, для чего найденные числовые значения неизвестных подставляется в нормализованную систему линейных алгебраических уравнений.

Выполним проверку $\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 1 \equiv 1 \\ 1 + 1 + 1 = 3 \qquad \Rightarrow 3 \equiv 3 \\ 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow 0 \equiv 0 \end{cases}$. Отсюда видно, что СЛАУ решена верно.

1.5.2 Матричный способ решения СЛАУ

Для решения СЛАУ матричным способом введем в рассмотрение матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ и матрицу столбец свободных коэффициентов $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$. Тогда СЛАУ можно записать в матричном виде $A\cdot X=B$. Матричный способ решения СЛАУ состоит в следующем: умножим слева матричное уравнение на обратную матрицу A^{-1} к матрице A, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$; в силу того, что произведение $A^{-1}\cdot A=E$ и $E\cdot X=X$, найдем $X=A^{-1}\cdot B$. Таким образом, *для нахождения неизвестных матричным способом, надо найти обратную к A матрицу A^{-1}, после чего надо умножить эту матрицу на матрицу-столбец свободных коэффициентов.*

Пример 2. Решить СЛАУ матричным способом $\begin{cases} 2x-3y+2z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$.

Введем в рассмотрение следующие матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1}(см. лекцию № 2): найдем определитель матрицы A $\Delta=-15$. Найдем алгебраические дополнения всех элементов Δ:

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3;\quad A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4;\quad A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3;\quad A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-6;\quad A_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$$A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\quad A_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5;\quad A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5.$$

Запишем обратную матрицу $A^{-1}=-\dfrac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ (в правильности нахождения обратной матрицы убедиться самостоятельно). Подействуем найденной матрицей на матрицу-столбец свободных коэффициентов B:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-3&-4&-5\\3&-6&0\\0&-5&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-15\\-15\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что $x=1;\ y=1;\ z=1$. После нахождения решения СЛАУ необходимо сделать проверку.

1.5.3 Метод Гаусса

Метод Гаусса или метод исключения неизвестных состоит в том, чтобы за счет элементарных преобразований привести СЛАУ к треугольному виду. Покажем использование расширенной матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных и расширенной за счет столбца свободных коэффициентов, для приведения СЛАУ к треугольному виду на примере системы, рассматриваемой в этой лекции. Расширенная матрица для СЛАУ Примера 1 имеет вид: $A=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&2&1\\1&1&1&3\\1&1&-2&0\end{array}\right)$.

Замечание. В методе Гаусса желательно, чтобы *первая строка расширенной матрицы начиналась с единицы*.

Обменяем в расширенной матрице первую и вторую строки местами, получим $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-3&2&1\\1&1&-2&0\end{array}\right)$. Приведем матрицу к треугольному виду, выполнив следующие преобразования: умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-5&0&-5\\1&1&-2&0\end{array}\right)$.

Разделим все элементы второй строки на (-5), получим эквивалентную матрицу $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&0&1\\1&1&-2&0\end{array}\right)$. Умножим элементы первой строки на (-1) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&0&1\\0&0&-3&-3\end{array}\right)$. Разделим все элементы третьей строки на (-3), получим $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Таким образом, эквивалентная СЛАУ имеет вид (напомним, что первый столбец это коэффициенты при неизвестной x, второй – при неизвестной y, третий – при неизвестной z, а за вертикальной чертой находится столбец свободных коэффициентов) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \qquad y=1 \\ \qquad z=1 \end{cases}$. Из первого уравнения находим, что $x=1$.

Вывод: *Из вышеизложенного материала следует, что вне зависимости от способа решения СЛАУ всегда должен получаться один и тот же ответ.*

Замечание. После нахождения решения СЛАУ надо обязательно выполнить проверку, то есть подставить полученные значения неизвестных в заданную СЛАУ и убедиться в тождественности левой части всех равенств системы соответствующим правым частям. Отметим, что задание СЛАУ всегда верно, то есть, если проверка показывает нарушение оговоренной тождественности, то надо искать ошибку в проведенных вычислениях.

1.6 Понятие вектора

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок $\overline{AB}$, где A – начало, а B – конец вектора.

Векторы можно также обозначать одной прописной буквой латинского алфавита со стрелочкой (или черточкой) наверху $\bar{a}=\overrightarrow{AB}$.

Определение. Если начало и конец вектора $\bar{a}$ не закреплены, то он называется *свободным*.

Свободный вектор можно перемещать как вдоль его прямой, так и параллельно самому себе.

Определение. Если зафиксирована точка, которая определяет начало вектора, то она называется точкой приложения вектора.

Определение. *Длиной (модулем)* вектора $\bar{a}$ называется расстояние между началом и концом вектора и обозначается $|\bar{a}|$.

Определение. Векторы называются *коллинеарными* **(**Рис. 1**)**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначается: $\bar{a}\parallel\bar{b}$.

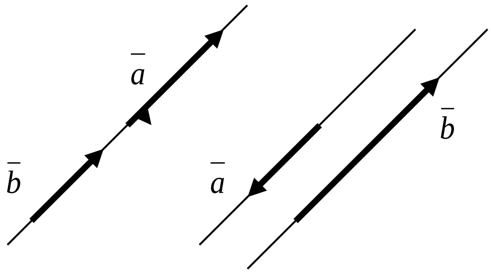


Рис. 1

Определение. Векторы называются *компланарными* (Рис. 2), если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

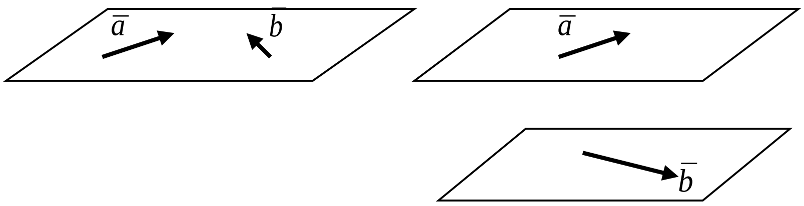


Рис. 2

Определение. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым вектором* и обозначается $\overline{AA} = \bar{0}$. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Определение. Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *сонаправленными*, если они лежат в одной полуплоскости от прямой, соединяющей их начала. Обозначаются: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$. Нулевой вектор считают сонаправленным любому вектору.

Определение. Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *противоположно направленными*, если они лежат в разных полуплоскостях от прямой, соединяющей их начала. Обозначаются: $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$. Нулевой вектор считают противоположно направленным любому вектору.

Определение. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны, т.е. $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ и $|\bar{a}| = |\bar{b}|$. Обозначаются: $\bar{a} = \bar{b}$.

Определение. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *противоположными*, если они противоположно направлены и их длины равны, т.е. $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ и $|\bar{a}| = |\bar{b}|$. Обозначаются: $\bar{a} = -\bar{b}$.

1.7 Линейные операции над векторами

1.7.1 Сумма векторов

Для нахождения суммы векторов применяют три основных правила:

1) правило треугольника

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарные, и пусть начало вектора $\bar{b}$ совпадает с концом вектора $\bar{a}$, тогда их суммой будет вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, начало $\bar{b}$ которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а его конец – с концом вектора $\bar{b}$ (Рис. 3).

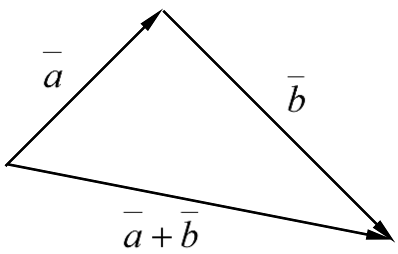


Рис. 3

2) правило параллелограмма

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарные, и пусть начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ совпадают. Построим на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллелограмм, тогда их суммой будет вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, начало которого совпадает с общим началом векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а его конец лежит в противоположной вершине параллелограмма (Рис. 4).

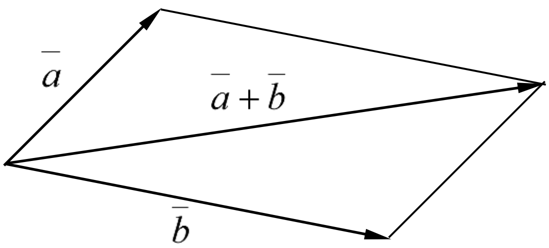


Рис. 4

3) правило многоугольника

Правило многоугольника применяется, если необходимо сложить более двух векторов. При этом каждый следующий вектор откладывается от конца предыдущего. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора в сумме с концом последнего, и будет суммой этих векторов (Рис. 5).

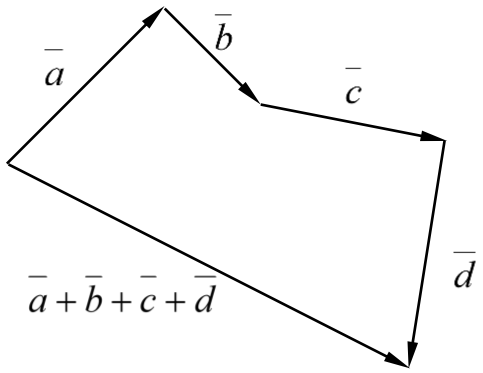


Рис. 5

1.7.2 Разность векторов

Определение. Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a}-\bar{b}$, сумма которого с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$ (Рис. 6).

Вектор разности всегда направлен к тому вектору, от которого ведется вычитание. При вычитании векторы откладываются от одной точки.

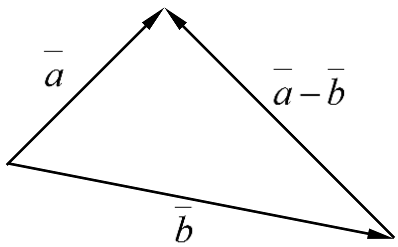


Рис. 6

1.7.3 Умножение вектора на число

Определение. Произведением вектора $\bar{a}\neq\bar{0}$ на число m называется вектор $m\bar{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|m\bar{a}|=|m|\cdot|\bar{a}|$;

2) вектор $m\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{a}$ при $m>0$, и $m\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{a}$ при $m<0$.

Из определения операции умножения вектора на число следует *первое условие коллинеарности векторов*: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, если существует такое число m, что выполняется равенство $\bar{b}=m\bar{a}$.

Произведение числа на вектор обладает следующими свойствами:

– сочетательным $\lambda\cdot(\mu\cdot\bar{a})=\mu\cdot(\lambda\cdot\bar{a})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\bar{a}$;

– распределительным относительно чисел $(\lambda+\mu)\cdot\bar{a}=\lambda\cdot\bar{a}+\mu\cdot\bar{a}$;

– распределительным относительно векторов $\lambda\cdot(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\cdot\bar{a}+\lambda\cdot\bar{b}$.

Если число $m=0$, то в результате умножения $m\cdot\bar{a}=\bar{0}$ получают нулевой вектор.

1.8 Проекция вектора на ось

Пусть задана ось l и некоторый вектор $\bar{a}=\overline{AB}$, не принадлежащий оси. Проведем через начало вектора $\bar{a}$ прямую, которая параллельна оси l, угол между прямой и вектором $\bar{a}$ обозначим через φ (Рис. 7).

Пусть точка A' – проекция начала вектора $\bar{a}=\overline{AB}$ на ось l, точка B' – проекция конца вектора на ту же ось. Вектор $\overline{A'B'}$ называется *составляющей* вектора $\overline{AB}$ на оси l.

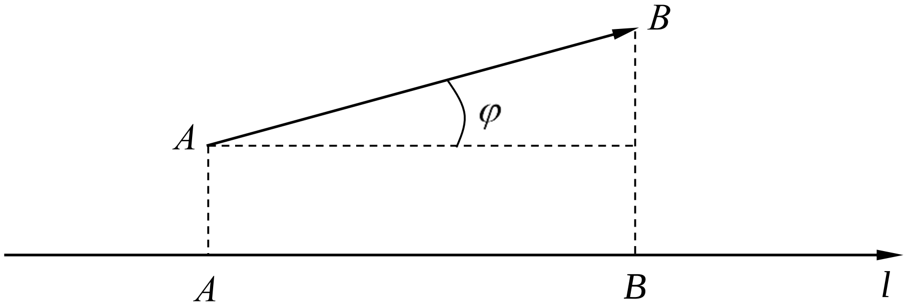


Рис. 7

Определение. *Проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* l называется длина составляющей вектора $\overline{A'B'}$, взятая со знаком «+», если $\overline{A'B'}\uparrow\uparrow l$, и со знаком «–», если $\overline{A'B'}\uparrow\downarrow l$.

Из рисунка 7 следует, что

$$np_l\,\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\cos\varphi. \qquad (1)$$

Из формулы (1) вытекает, что при $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ величина $np_l\,\bar{a}>0$, а при $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ величина $np_l\,\bar{a}<0$. При $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (или $\varphi=-\frac{\pi}{2}$) проекция равна нулю, т. е. $np_l\,\bar{a}=0$. Проекции обладают следующими свойствами, сформулируем их в виде теорем.

Теорема 1. Если два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны, то и их проекции на ось l также будут равны, т.е.

$$np_l\,\bar{a} = np_l\,\bar{b}.$$

Теорема 2. Проекция суммы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на ось l равна сумме проекций этих векторов на ту же ось, т.е.

$$np_l\,(\bar{a} + \bar{b}) = np_l\,\bar{a} + np_l\,\bar{b}.$$

Теорема 3. При умножении вектора $\bar{a}$ на число m его проекция на ось l умножается на то же число, т.е.

$$np_l\,(m \cdot \bar{a}) = m \cdot np_l\,\bar{a}.$$

Определение. Направленная прямая с выбранным началом отсчета и масштабом измерения называется *числовой осью*.

Определение. Две (три) взаимно перпендикулярные числовые оси образуют *прямоугольную (декартову) систему координат* на плоскости (в пространстве).

Обозначим:

$np_{Ox}\,\bar{a} = x$ – проекцию вектора $\bar{a}$ на ось абсцисс Ox,

$np_{Oy}\,\bar{a} = y$ – проекцию вектора $\bar{a}$ на ось ординат Oy,

$np_{Oz}\,\bar{a} = z$ – проекцию вектора $\bar{a}$ на ось аппликат Oz.

Определение. Проекции x, y, z вектора $\bar{a}$ на координатные оси называются *координатами вектора* $\bar{a}$. Обозначается: $\bar{a}(x;\, y;\, z)$.

Длина вектора $\bar{a}$ определяется по формуле:

$$|\,\bar{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (2)$$

Пусть заданы произвольные точки в пространстве: $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\bar{b}(x_2;\, y_2;\, z_2)$. *Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$ нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала*, т.е.

$$\overline{AB}(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1). \qquad (3)$$

Следующие формулы определяют действия с векторами в координатной форме. Пусть заданы векторы $\bar{a}(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $\bar{b}(x_2;\, y_2;\, z_2)$, тогда

1) сумма векторов

$$\bar{a} + \bar{b}(x_1 + x_2;\, y_1 + y_2;\, z_1 + z_2)$$

2) разность векторов

$$\bar{a} - \bar{b}(x_1 - x_2;\, y_1 - y_2;\, z_1 - z_2)$$

3) умножение вектора на число

$$m\bar{a}\left(mx_1;\, my_1;\, mz_1\right).$$

1.9 Направляющие косинусы вектора

Пусть задан произвольный вектор пространства $\bar{a}\left(x;\, y;\, z\right)$. Совместим его начало с началом системы координат. Обозначим α – угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси Ox; β – угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси Oy; γ – угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси Oz.

Определение. Косинусы углов α, β, γ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Тогда по формуле (1) получим, что $x = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\alpha$; $y = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\beta$; $z = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\gamma$. Откуда получаем формулы для определения направляющих косинусов вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\bar{a}\right|},\ \cos\beta = \frac{y}{\left|\bar{a}\right|},\ \cos\gamma = \frac{z}{\left|\bar{a}\right|}. \qquad (4)$$

Вычислив квадрат модуля вектора $\bar{a}$, найдем соотношение, которое связывает направляющие косинусы вектора $\bar{a}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (5)$$

Направляющие косинусы вектора однозначно определяют его ***направление*** в пространстве.

1.10 Базис в пространстве

Определение. ***Ортом*** некоторой оси U называется вектор единичной длины в выбранном масштабе измерения, сонаправленный с этой осью $\bar{e}_U$.

Рассмотрим пространственную декартову систему координат $Oxyz$, по всем осям координат выберем одинаковый масштаб измерения. Вдоль направления каждой оси отложим отрезки единичной длины.

Обозначим орты координатных осей: Ox – через $\bar{i}$, Oy – через $\bar{j}$, Oz – через $\bar{k}$ (Рис. 8**).**

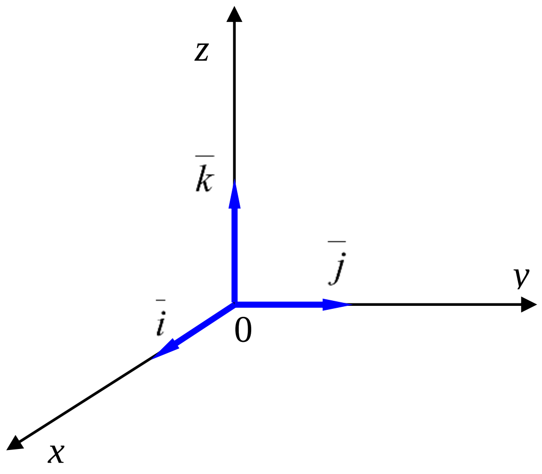


Рис. 8

Из рисунка 8 видно, что орты координатных осей имеют следующие свойства:

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1, \quad \bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}.$$

Так как векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ некомпланарные, то они образуют *базис в пространстве*: $B_3 = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. На плоскости базис состоит только из двух единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$: $B_2 = \{\bar{i}, \bar{j}\}$.

Теорема. Любой вектор пространства может быть единственным образом разложен по векторам базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, т.е.

$$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}, \qquad (6)$$

где числа x, y, z – координаты вектора $\bar{a}$.

1.11 Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (7)$$

где $\varphi = (\widehat{\bar{a}; \bar{b}})$ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если их длины равны 2 и 5, соответственно, а угол между векторами равен $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Используя определение скалярного определения, находим

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=5.$$

Используя определения проекции вектора на ось и скалярного произведения двух векторов, можно записать, что

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot пр_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot пр_{\bar{b}}\bar{a}. \qquad (8)$$

Откуда можно найти *проекцию одного вектора на другой*, например,

$$пр_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}.$$

Рассмотрим основные *свойства скалярного произведения*:

1. $\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$;
2. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;
3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$;
4. $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора $\bar{a}$ равен квадрату его длины);
5. Вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$ тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Теорема. Пусть заданы векторы $\bar{a}(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $\bar{b}(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Тогда их скалярное произведение равно

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (9)$$

Формула (9) выражает скалярное произведение векторов в координатной форме.

Следствие 1. Если вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \qquad (10)$$

Следствие 2. Если φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (11)$$

Пример 2. Найти, при каком значении m векторы $\bar{a}(m;-1;\, 2)$ и $\bar{b}(3;\, m;\, -1)$ перпендикулярны.

Решение. Условием перпендикулярности векторов является обращение в нуль их скалярного произведения, поэтому воспользуемся следствием 1 из теоремы:

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 3m - m - 2 = 2m - 2 = 0$, откуда находим $m = 1$.

ПРАКТИКУМ К ГЛАВЕ 1

Пример 1. Дан вектор $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 6\overline{k}$. Найти его длину и направляющие косинусы.

Решение.

Длину вектора определяем по формуле $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где x, y, z - координаты вектора. Имеем:

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

Определяем направляющие косинусы вектора $\overline{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|} = \frac{2}{7},\ \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|} = \frac{3}{7},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|} = -\frac{6}{7}.$$

Направляющие косинусы вектора должны удовлетворять соотношению

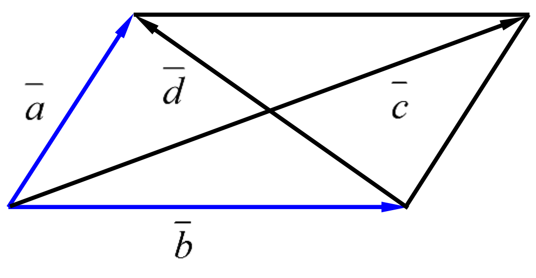
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Проверим это соотношение для направляющих косинусов вектора $\overline{a}$:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = 1,\quad \frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = 1,\quad 1 = 1, \text{ верно.}$$

Пример 2. Построить параллелограмм на векторах $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{k} - 3\overline{j}$ и определить длины его диагоналей.

Решение.



Итак, требуется найти длины векторов $\overline{c}$ и $\overline{d}$. Вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ (по правилу параллелограмма), поэтому
$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k} - 3\overline{j} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$,

отсюда $\overline{c}(2; -2; 1)$, тогда длина вектора $\overline{c}$ равна $|\overline{c}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

Вектор $\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}$, поэтому $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}+3\bar{j}=2\bar{i}+4\bar{j}-\bar{k}$, отсюда $\bar{d}(2;4;-1)$, тогда длина вектора $\bar{d}$ равна $|\bar{d}|=\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$.

Пример 3. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha=45^\circ$, $\beta=135^\circ$, $\gamma=60^\circ$?

Решение.

Направляющие косинусы вектора должны удовлетворять соотношению $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Проверим его для заданных по условию углов:

$$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 135^\circ=\cos\left(180^\circ-45^\circ\right)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

Имеем: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$, $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1$, $\frac{5}{4}=1$, неверно, значит, вектор <u>*не может*</u> составлять с координатными осями указанные углы.

Пример 4. Вектор составляет с осями Ox и Oy углы $\alpha=60^\circ$ и $\beta=120^\circ$. Вычислить его координаты при условии, что $|\bar{a}|=2$.

Решение.

Так как $\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta=\frac{y}{|\bar{a}|}$, то $x=|\bar{a}|\cos\alpha=2\cos 60^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1$, $y=|\bar{a}|\cos\beta=2\cos 120^\circ=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$. Третью координату вектора $\bar{a}$ определим по формуле длины вектора: $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, отсюда получаем уравнение:

$$2=\sqrt{1+1+z^2},\ \sqrt{2+z^2}=2,\ 2+z^2=4,\ z^2=2,\ z=\pm\sqrt{2}.$$

Таким образом, для вектора $\bar{a}$ получаем следующие координаты:

$$\bar{a}(1;\,-1;\,\sqrt{2})\ \text{или}\ \bar{a}(1;\,-1;\,-\sqrt{2}).$$

Пример 5. На плоскости даны три вектора $\bar{a}=2\bar{i}$, $\bar{b}=3\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{c}=2\bar{i}+6\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение.

Требуется найти такие числа m и n, что выполняется равенство $\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}$. Подставим в это равенство разложение по базису векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, заданное по условию:

$$2\bar{i} + 6\bar{j} = m(2\bar{i}) + n(3\bar{i} + 3\bar{j}),$$

$$2\bar{i} + 6\bar{j} = 2m\bar{i} + 3n\bar{i} + 3n\bar{j},$$

$$2\bar{i} + 6\bar{j} = (2m + 3n)\bar{i} + 3n\bar{j}.$$

Для отыскания чисел m и n составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2m + 3n = 2, \\ 3n = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 2m + 6 = 2, \\ n = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2m = -4, \\ n = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2, \\ n = 2. \end{cases}$$

В итоге получим следующее разложение вектора $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{c} = -2\bar{a} + 2\bar{b}$.

Пример 6. Даны векторы $\bar{a}(-3;4;-1), \bar{b}(-1;2;3), \bar{c}(-4;-2;1)$. Найти векторы $4\bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c}, \; -5\bar{a} + 4\bar{b} + \bar{c}$.

Решение.

Выполним действия с векторами в координатной форме:

$$4\bar{a}(-12;16;-4), \; 3\bar{b}(-3;\,6;\,9), \; -2\bar{c}(8;\,4;\,-2),$$

тогда

$$4\bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c}(-12 - 3 + 8; 16 + 6 + 4; \; -4 + 9 - 2),$$

$$4\bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c}(-7;\,26;\,3).$$

Аналогично находим координаты вектора $-5\bar{a} + 4\bar{b} + \bar{c}$:

$$-5\bar{a}(15;\,-20;\,5), \; 4\bar{b}(-4;\,8;\,12),$$

тогда

$$-5\bar{a} + 4\bar{b} + \bar{c}(15 - 4 - 4; -20 + 8 - 2; 5 + 12 + 1),$$

$$-5\bar{a} + 4\bar{b} + \bar{c}(7;\,-14;\,18).$$

Пример 7. Известно, что $|\bar{a}| = 3, \; |\bar{b}| = 4$, $\varphi = \left(|\bar{a}|, \hat{\ } |\bar{b}|\right) = 60^\circ$. Вычислить: 1) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 2) $\bar{a}^2$; 3) $\bar{b}^2$; 4) $(3\bar{a} + 2\bar{b})(\bar{a} - 2\bar{b})$.

Решение.

1) Скалярное произведение векторов определяется формулой $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Подставим сюда известные величины, получим:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=3\cdot 4\cdot\cos 60^\circ=12\cdot\frac{1}{2}=6.$$

2) Величина $\bar{a}^2$ есть скалярные квадрат вектора. По свойству скалярного произведения $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$. Тогда $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=3^2=9$.

3) Аналогично находим скалярный квадрат $\bar{b}^2=|\bar{b}|^2=4^2=16$.

4) $(3\bar{a}+2\bar{b})(\bar{a}-2\bar{b})=3\bar{a}^2-6\bar{a}\cdot\bar{b}+2\bar{b}\cdot\bar{a}-4\bar{b}^2=3\bar{a}^2-4\bar{a}\cdot\bar{b}-4\bar{b}^2=$
$=3\cdot 9-4\cdot 6-4\cdot 16=27-24-64=-61$.

Пример 8. Заданы векторы $\bar{a}=2\bar{i}-5\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}+7\bar{k}$. Найти скалярное произведение векторов, их длины и угол между векторами.

Решение.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в координатной форме определяется формулой: $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. По условию $\bar{a}(2;-5;4)$, $\bar{b}(-1;2;7)$. Тогда получим:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot(-1)+(-5)\cdot 2+4\cdot 7=-2-10+28=16.$$

Длина вектора определяется формулой $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где x, y, z – координаты вектора $\bar{a}$. Для заданных по условию векторов имеем:

$$|\bar{a}|=\sqrt{2^2+(-5)^2+4^2}=\sqrt{4+25+16}=\sqrt{45}=3\sqrt{5},$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+7^2}=\sqrt{1+4+49}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}.$$

Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла между векторами определяется формулой:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

Для заданных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находим: $\cos\varphi=\dfrac{16}{3\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{6}}=\dfrac{16}{9\sqrt{30}}$. Тогда угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\varphi=\arccos\dfrac{16}{9\sqrt{30}}\approx 71^\circ$.

Пример 9. Заданы векторы $\overline{a}=2\overline{m}+4\overline{n},\ \overline{b}=\overline{m}-\overline{n}$. Известно, что $|\overline{m}|=|\overline{n}|=1$, угол между векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$ равен $\varphi=120^\circ$. Найти угол γ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение.

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определим по формуле: $\cos\gamma=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

Имеем:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(2\overline{m}+4\overline{n})(\overline{m}-\overline{n})=2\overline{m}^2-2\overline{m}\cdot\overline{n}+4\overline{n}\cdot\overline{m}-4\overline{n}^2=2\overline{m}^2+2\overline{m}\cdot\overline{n}-4\overline{n}^2=$$

$$=2|\overline{m}|^2+2|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\cos120^\circ-4|\overline{n}|^2=2+2\left(-\frac{1}{2}\right)-4=2-1-4=-3.$$

$$|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}=\sqrt{(2\overline{m}+4\overline{n})^2}=\sqrt{4\overline{m}^2+16\overline{m}\cdot\overline{n}+16\overline{n}^2}=$$

$$=\sqrt{4|\overline{m}|^2+16|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\cos120^\circ+16|\overline{n}|^2}=\sqrt{4+16\left(-\frac{1}{2}\right)+16}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

$$|\overline{b}|=\sqrt{\overline{b}^2}=\sqrt{(\overline{m}-\overline{n})^2}=\sqrt{\overline{m}^2-2\overline{m}\cdot\overline{n}+\overline{n}^2}=$$

$$=\sqrt{|\overline{m}|^2-2|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\cos120^\circ+|\overline{n}|^2}=\sqrt{1-2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}=\sqrt{3}.$$

Тогда получим: $\cos\gamma=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$, откуда $\gamma=120^\circ$.

Пример 10. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j},\quad \overline{b}=-\overline{j}+\overline{k}$.

Решение.

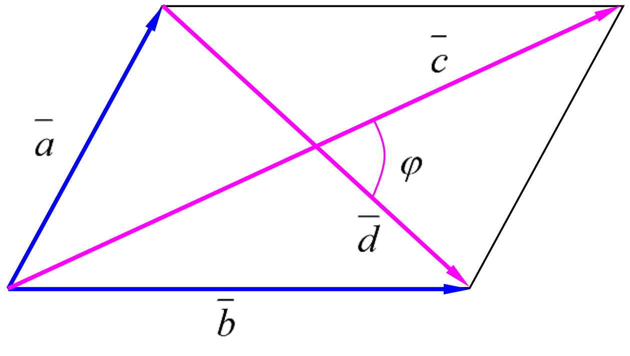


Рис. 9

Обозначим диагонали параллелограмма через векторы (Рис. 9).

Тогда задача сводится к нахождению угла между векторами $\overline{c}$ и $\overline{d}$, определим его по формуле $\cos\varphi=\dfrac{\overline{c}\cdot\overline{d}}{|\overline{c}|\cdot|\overline{d}|}$.

Выразим векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{j} + \bar{k} = 2\bar{i} + \bar{k}, \qquad \bar{c}(2;0;1).$$

$$\bar{d} = \bar{b} - \bar{a} = -\bar{j} + \bar{k} - 2\bar{i} - \bar{j} = -2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}, \qquad \bar{d}(-2;-2;1).$$

Тогда их скалярное произведение равно:

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -4 + 0 + 1 = -3.$$

Найдем длины векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$:

$$|\bar{c}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad |\bar{d}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Находим далее $\cos\varphi = \dfrac{\bar{c} \cdot \bar{d}}{|\bar{c}| \cdot |\bar{d}|} = \dfrac{-3}{\sqrt{5} \cdot 3} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 117^\circ$.

Пример 11. Даны векторы $\bar{a} = 5\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$. Найти проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$.

Решение.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a}.$$

Отсюда находим искомую проекцию:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

Найдем скалярное произведение векторов в координатной форме. Имеем:

$$\bar{a}(5;4;-6), \ \bar{b}(2;-1;-1),$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-6) \cdot (-1) = 10 - 4 - 6 = 0, \quad \text{поэтому } np_{\bar{b}}\bar{a} = 0.$$

Пример 12. При каком значении m векторы $\bar{a}(4;\ m;\ -6)$ и $\bar{b}(m;\ 2;\ -7)$ перпендикулярны?

Решение.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Получим:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 4 \cdot m + m \cdot 2 + (-6) \cdot (-7),$$

$$4m + 2m - 42 = 0, \quad 6m = 42, \quad m = 7.$$

Следовательно, при $m = 7$ данные по условию векторы перпендикулярны.

2 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1 Метод координат

В данном разделе используются понятия и сведения, известные из школьного курса геометрии и векторной алгебры, такие как координаты точки на вещественной оси, вектор, координаты вектора, простейшие операции над векторами и др.

Числовая ось – это прямая с выбранным направлением, началом отсчета (началом координат) и единицей измерения (масштабом) (Рис. 10)

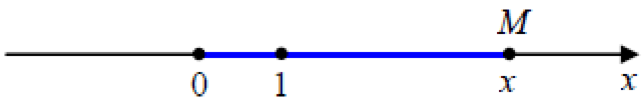


Рис. 10

Как известно из школьного курса математики, между действительными числами и точками числовой прямой можно установить *взаимно однозначное соответствие*. Вещественное число, соответствующее положению точки M на числовой оси, является *координатой* точки M.

Положение каждой точки M на числовой оси Ox однозначно определяется ее координатой x и обратно, каждой точке M соответствует единственная координата $x \in R$, где R – это множество действительных чисел. Точки числовой прямой отождествляются с действительными числами, которые им соответствуют.

Определение. *Координатной плоскостью* Oxy называется плоскость с взаимно перпендикулярными числовыми осями Ox – ось абсцисс и Oy – ось ординат. Начало отсчета (начало координат) лежит на пересечении координатных осей, единицы измерения на осях Ox и Oy одинаковы (Рис. 11).

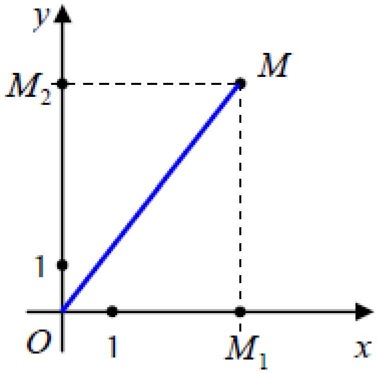


Рис. 11

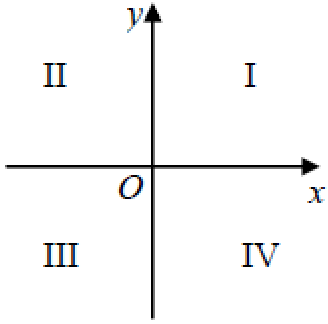


Рис. 12

Координатные углы называются *квадрантами* ***или*** *четвертями*. Для них принята нумерация, показанная на рисунке 12.

Определение. *Декартовыми прямоугольными координатами точки М на плоскости* называются координаты проекций точки M на координатные оси: координата x – абсцисса, координата y –ордината точки M.

В трехмерном пространстве рассмотрим три взаимно перпендикулярные координатные оси Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат и Oz – ось аппликат. Начало координат – точка O лежит на пересечении осей, единицы измерения на всех осях одинаковы (Рис. 13). Будем рассматривать прямоугольную правую систему координат $Oxyz$, когда при повороте от оси Ox к оси Oy направление оси Oz выбирается по правилу «правого винта» (правилу «буравчика»).

Трехгранные углы, образованные координатными плоскостями, называются октантами. Выше плоскости Oxy ($z > 0$) расположены I – IV октанты, ниже ($z < 0$) V – VIII октанты.

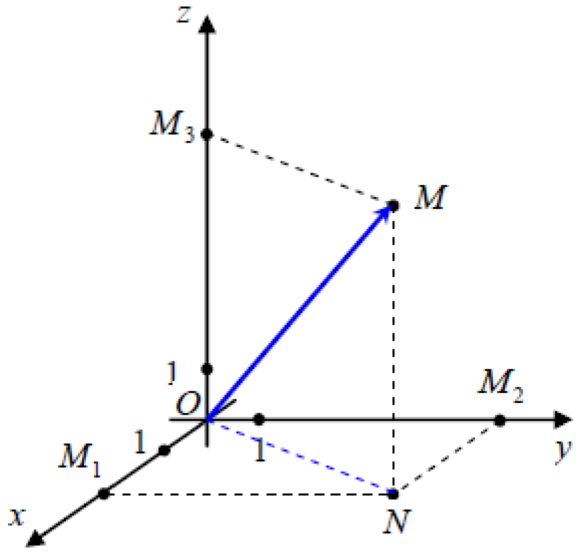


Рис. 13

Определение. *Декартовыми прямоугольными координатами точки М в пространстве* называются координаты проекций точки M на координатные оси: x – абсцисса точки M, y – ордината, z – аппликата.

2.2 Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

2.2.1 Расстояние между двумя точками

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ на плоскости (Рис. 13). Найдем расстояние $d = M_1M_2$.

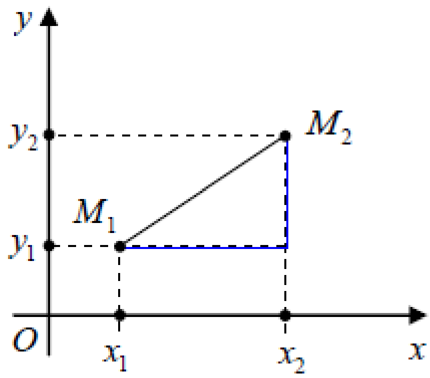


Рис. 14

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника (Рис.14) получим:

$$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда находим

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (12)$$

Пример 1. Найти расстояние между точками $A(-2;\ 2)$ и $B(10;\ -3)$.

Решение. Подставляя в формулу (12) координаты точек A и B, получим

$$AB = \sqrt{(10-(-2))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13\,.$$

2.2.2 Деление отрезка в заданном отношении

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ на плоскости (Рис. 15). Требуется найти координаты точки $M(x;\ y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$.

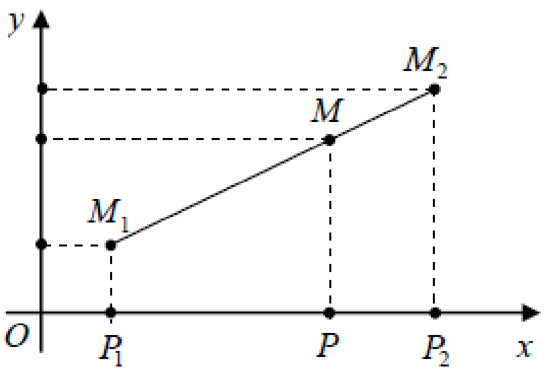


Рис. 15

По обобщенной теореме Фалеса получим $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2} = \dfrac{P_1P}{PP_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$.
Выражая из последнего равенства x, получим $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. Аналогично, находим $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Таким образом, координаты искомой точки $M(x;\ y)$ определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{13}$$

Если точка $M(x;\ y)$ - середина отрезка M_1M_2, то отношение $\lambda = 1$. Тогда из формул (13) получаем формулы для определения координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{14}$$

Пример 2. Найти координаты точки C, которая делит отрезок AB, где $A(-2;\ -6)$ и $B(10;\ -3)$, в отношении $\lambda = 2$.

Решение. Подставляя координаты точек A и B в формулы (13), получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 2 \cdot 10}{1 + 2} = \frac{18}{3} = 6;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{-6 + 2 \cdot (-3)}{1 + 2} = \frac{-12}{3} = -4,$$

значит, $C(6;\ -4)$ - искомая точка.

2.3 Полярная система координат

Во многих задачах, кроме декартовых, удобно использовать полярные координаты.

Определение. Полярной осью называется луч OE с выбранным направлением, выходящий из полюса O (начало отсчета), и единицей измерения.

Определение. *Полярным радиусом* ρ точки M называется расстояние от точки M до полюса O. *Полярным углом* φ точки M называется направленный угол, отсчитываемый *против* часовой стрелки от полярной оси к вектору $\overline{OM}$.

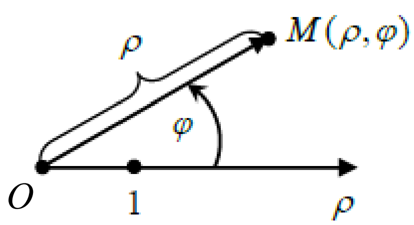


Рис. 16

Полярными координатами точки М называется упорядоченная пара $(\rho;\ \varphi)$ (рис. 16).

Обычно полагают, что $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0;\ 2\pi)$ или $\varphi \in [-\pi;\ \pi)$. Для полюса $\rho = 0$, а угол φ не определен однозначно и может быть любым числом.

Рассмотрим *связь между полярными и декартовыми координатами.* Пусть полюс O совпадает с началом прямоугольной системы координат (Рис. 17), полярная ось OE совпадает с положительной частью оси Ox в прямоугольной системе Oxy. Тогда для произвольной точки плоскости $M(x;\ y)$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (15)$$

Формулы (15) позволяют найти прямоугольные координаты точки по известным полярным координатам.

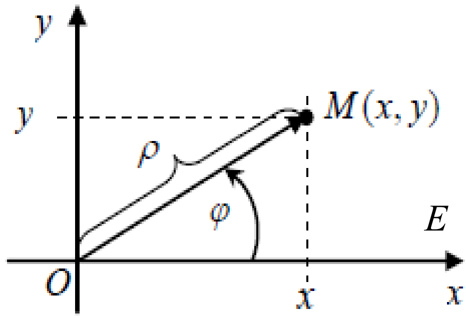


Рис. 17

Полярные координаты точки M по известным прямоугольным координатам можно найти по формулам:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (16)$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (17)$$

Согласно равенству (17), если полярный угол $\varphi \in [-\pi;\ \pi)$, то в зависимости от того, в какой четверти находится точка $M(x;\ y)$, угол φ может быть найден по одной из следующих формул:

$$\varphi = \begin{cases} \text{не определен},\ x = y = 0 \\ \dfrac{\pi}{2},\ x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2},\ x = 0,\ y < 0 \\ arctg\dfrac{y}{x},\ x > 0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x},\ x < 0,\ y \geq 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x},\ x < 0,\ y < 0 \end{cases} \qquad (18)$$

Пример 3. Дана точка в прямоугольной системе координат $M(-2;\ 2)$. Найти полярные координаты точки M.

Решение. Полярный радиус точки М определим по формуле (16):

$$\rho=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Так как $x<0,\ y>0$, то по формуле (18) находим полярный угол

$$\varphi=\pi+arctg\left(\frac{2}{-2}\right)=\pi+arctg(-1)=\pi-arctg1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, точка M в полярной системе координат имеет координаты $M\left(2\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

2.4 Прямая на плоскости

В этом параграфе будет рассмотрен такой простейший геометрический объект как прямая линия на плоскости. Прямая линия на плоскости – это линия, уравнение которой может быть записано в виде $Ax+By+C=0$, где A, B, C – действительные числа, причём A и B одновременно не равны нулю. Указанное уравнение является алгебраическим уравнением первой степени. Этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на прямой линии, и не удовлетворяют координаты x и y ни одной точки, не лежащей на прямой линии.

2.4.1 Угловой коэффициент прямой

В прямоугольной системе координат рассмотрим прямую l, не параллельную оси Ox. Возьмём на прямой две точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$. Угол между прямой и положительным направлением оси Ox, обозначим α (рис. 18).

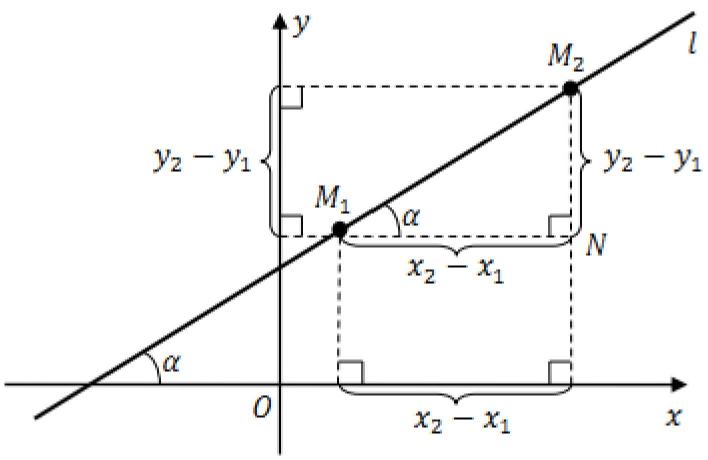


Рис. 18

Определение. Угол α называют *углом наклона* прямой. Тангенс угла наклона прямой называют *угловым коэффициентом прямой*, обозначают буквой k и записывают:

$$k = tg\alpha . \qquad (19)$$

Угловой коэффициент прямой характеризует направление прямой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_1M_2N (Рис.17): длина катета $M_1N = x_2 - x_1$; длина катета $M_2N = y_2 - y_1$.

В этом треугольнике выразим тангенс угла α:

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

Учитывая, что $k = tg\alpha$, получаем формулу для нахождения углового коэффициента прямой:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (20)$$

Если $\alpha = 0$, то $k = tg0 = 0$, и прямая параллельна оси Ox (рис. 19). В этом случае ординаты точек равны, то есть $y_1 = y_2$. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то угловой коэффициент $k = tg\frac{\pi}{2}$ не существует, и прямая параллельна оси Oy (рис.20). В этом случае абсциссы точек равны, то есть $x_1 = x_2$.

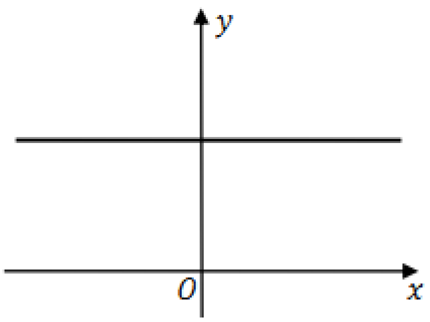


Рис. 19

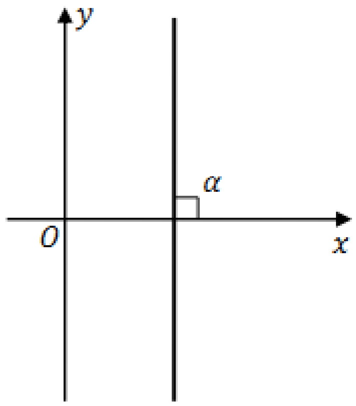


Рис. 20

2.4.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

В прямоугольной системе координат рассмотрим прямую l, не параллельную оси Oy. Будем считать, что известен угловой коэффициент прямой k и точка пересечения прямой с осью Oy – точка $B(0;b)$, где b –

величина отрезка, отсекаемого прямой на оси *Oy*. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка прямой (рис. 21).

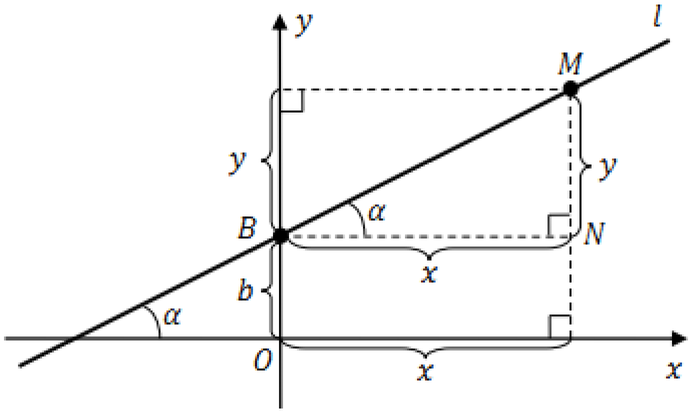


Рис. 21

Воспользуемся формулой (20) нахождения углового коэффициента прямой. В качестве первой точки возьмём точку $B(0;b)$ и в качестве второй точки – точку $M(x;y)$. С учётом этого: $k=\dfrac{y-b}{x-0}$, откуда находим

$$y=kx+b. \qquad (21)$$

Уравнение (21) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Если $b=0$, то $y=kx$, и прямая проходит через начало координат (рис.22).

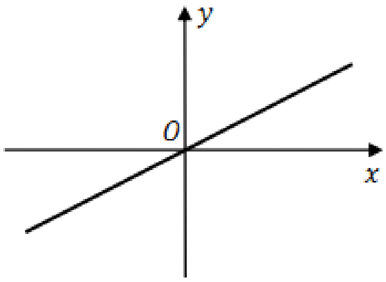


Рис. 22

Если $k=0$, то $y=b$. В этом случае прямая параллельна оси *Ox* и отсекает на оси *Oy* отрезок, величина которого равна *b* (рис. 23).

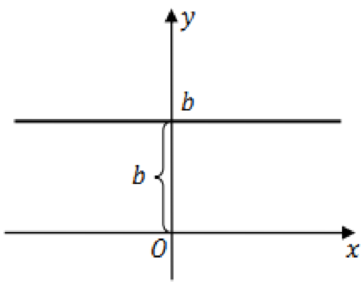


Рис. 23

Если k не существует, то прямая параллельна оси Oy и задаётся уравнением $x = a$, где a – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (рис. 24).

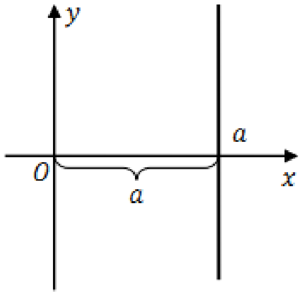


Рис. 24

Пример 4. Прямая задана уравнением $y = -4x + 3$. Найти угловой коэффициент прямой и величину отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат.

Решение.

Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. С учётом этого получаем: $k = -4,\ b = 3$.

Пример 5. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и наклонённой к оси абсцисс под углом 135°.

Решение.

Так как прямая проходит через начало координат, то её уравнение имеет вид $y = kx$, где k – угловой коэффициент прямой. Найдем k:

$$k = tg135^\circ = tg\left(180^\circ - 45^\circ\right) = -tg45^\circ = -1.$$

Тогда уравнение искомой прямой: $y = -x$.

Пример 6. Построить прямую $y = 3x + 4$.

Решение.

Прямая, заданная уравнением $y = 3x + 4$, пересекает ось ординат в точке $B(0;4)$. Найдём вторую точку. Возьмём, например, $x = -2$, и $y = 3(-2) + 4 = -2$ тогда вторая точка прямой $A(-2;\ -2)$ (рис. 25).

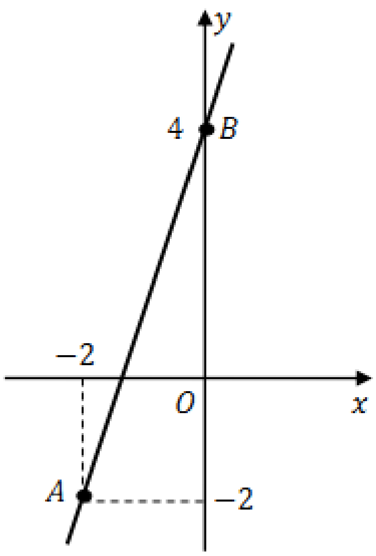


Рис. 25

2.4.3 Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

В прямоугольной системе координат рассмотрим прямую, не параллельную оси Oy. Будем считать, что известен угловой коэффициент прямой k и одна точка прямой $M_0(x_0;\ y_0)$. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка прямой.

Для составления уравнения прямой воспользуемся формулой (20) углового коэффициента прямой. Запишем формулу углового коэффициента для точек $M_0(x_0;\ y_0)$ и $M(x; y)$, получим:

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

откуда получаем уравнение вида

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{22}$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом*.

Если угловой коэффициент k не задан, то полученное уравнение определяет множество прямых, проходящих через точку M_0. Множество таких прямых называют *пучком прямых*, проходящих через точку M_0.

Пример 7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 4)$ и имеющей угловой коэффициент, равный 3.

Решение.

По условию задачи $x_0 = -1,\ y_0 = 4,\ k = 3$. Тогда из уравнения (22) получим:

$$y - 4 = 3(x - (-1)),$$

$$y - 4 = 3(x + 1), \text{ или } y = 3x + 7.$$

2.4.4 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

В прямоугольной системе координат рассмотрим прямую, не параллельную оси Oy. Будем считать, что известны две точки прямой: $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка прямой.

Воспользуемся формулой (20) углового коэффициента прямой: $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Подставляя в уравнение прямой (4) угловой коэффициент и координаты точки $M_1(x_1;\ y_1)$, получим уравнение вида

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

откуда после преобразований получим уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (23)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки*.

Пример 8. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-2;3)$ и $M_2(4;1)$.

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой (23). По условию задачи $x_1=-2$, $y_1=3$, $x_2=4$, $y_2=1$. Получим:

$$\frac{x-(-2)}{4-(-2)}=\frac{y-3}{1-3}; \quad \frac{x+2}{6}=\frac{y-3}{-2}.$$

Преобразуем это уравнение к виду с угловым коэффициентом:

$6(y-3)=-2(x+2)$; $\quad 3(y-3)=-(x+2)$; $\quad 3y-9=-x-2$;

$$3y=-x+7 \,\big|\, :3,$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}.$$

2.4.5 Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени: $Ax+By+C=0$, где A,B,C – действительные числа, причём A и B одновременно не равны нулю. Выразим из уравнения y:

$$By=-Ax-C,$$

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Полученное уравнение имеет вид $y=kx+b$, где $k=-\dfrac{A}{B}$, $b=-\dfrac{C}{B}$, т.е. представляет собой уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Таким образом, уравнение

$$Ax + By + C = 0, \qquad (24)$$

где A, B, C – действительные числа, причём A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую и называется *общим уравнением прямой*.

Если $C = 0$, то уравнение имеет вид $Ax + By = 0$. Это уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

Пример 9. Преобразовать уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = -\frac{4}{3}x + 2$ к общему уравнению.

Решение.

Умножим на 3 обе части уравнения: $3y = -4x + 6$. Теперь перенесем все слагаемые в левую часть уравнения: $4x + 3y - 6 = 0$ – искомое общее уравнение данной прямой.

2.4.6 Уравнение прямой в отрезках на осях

Пусть в прямоугольной системе координат прямая l, не параллельная оси Oy, пересекает координатные оси в точках $A(a;\, 0)$ и $B(0;\, b)$. Воспользуемся уравнением прямой по двум заданным точкам (23), получим:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}, \quad \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b}.$$

откуда после преобразований получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (25)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой в отрезках на осях*. Здесь a и b – это величины отрезков, которые прямая отсекает на осях координат (рис. 26).

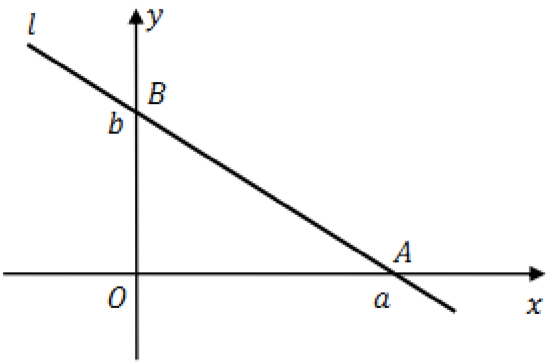


Рис. 26

Пример 10. Преобразовать уравнение прямой $3x+2y-6=0$ к уравнению прямой в отрезках на осях и построить прямую.

Решение.

Прямая $3x+2y-6=0$ задана общим уравнением. Выполним следующие преобразования:

$$3x+2y=6, \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1.$$

Получили уравнение прямой в отрезках на осях. На оси абсцисс прямая отсекает отрезок, величина которого равна 2, на оси ординат величина отрезка равна 3 (рис. 27).

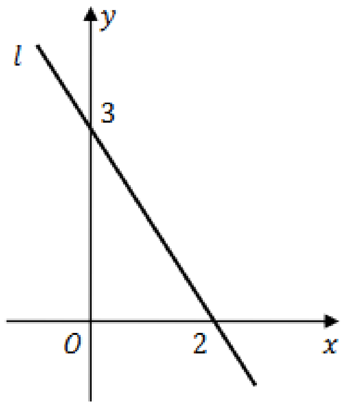


Рис. 27

2.4.7 Угол между двумя прямыми

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнением с угловым коэффициентом: $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, где $k_1=tg\alpha_1$, $k_2=tg\alpha_2$; α_1, α_2 - углы наклона прямых к оси Ox. Обозначим через α наименьший угол между прямыми l_1 и l_2 (рис. 28).

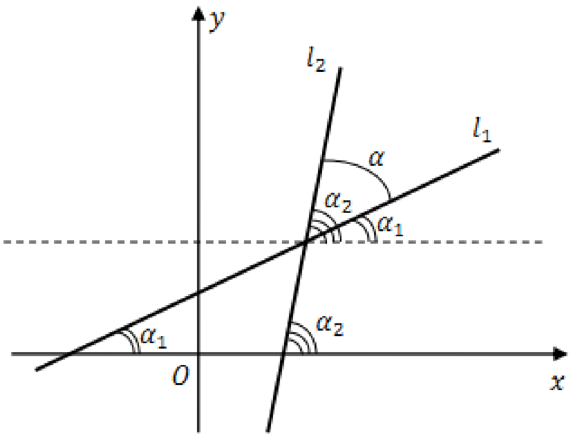


Рис. 28

Из чертежа видно, что угол $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда тангенс этого угла α равен

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}.$$

Поскольку $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$, то из последней формулы получаем

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (26)$$

По формуле (26) находят *угол между двумя прямыми*.

При нахождении угла между двумя прямыми обычно подразумевают острый угол. С учётом этого формулу можно записать в виде

$$tg\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \qquad (27)$$

В этом случае нет необходимости учитывать очерёдность прямых. Если есть необходимость учёта очерёдности прямых, то пользуются следующим правилом: *поворот от первой прямой ко второй прямой должен происходить против часовой стрелки*.

Рассмотрим взаимное расположение двух прямых на плоскости, заданных уравнением с угловым коэффициентом.

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2.$$

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и, $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, то есть $k_1 = k_2$ (рис. 29). Таким образом, равенство

$$k_1 = k_2, \qquad (28)$$

является *условием параллельности прямых*.

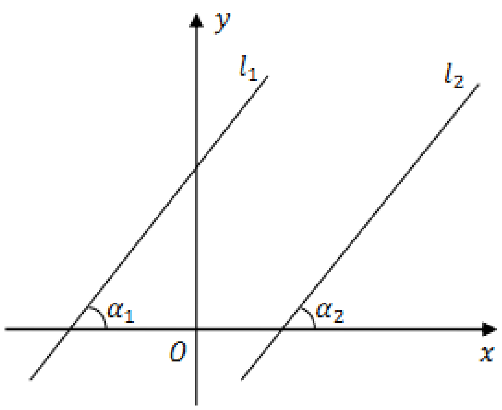


Рис. 29

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $tg\alpha$ не существует. Тогда из формулы (26) следует, что знаменатель дроби должен быть равен нулю, то есть $1 + k_1 k_2 = 0$, откуда находим, что

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \qquad (29)$$

Формула (29) является *условием перпендикулярности прямых*.

Пример 11. Найти угол между двумя прямыми: $2x + y - 5 = 0$, $6x - 2y + 1 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнения прямых к уравнению с угловым коэффициентом:

$$y = -2x + 5, \quad y = 3x + 0{,}5.$$

Выпишем угловые коэффициенты прямых: $k = -2,\ k = 3$. Тогда по формуле (27) находим $tg\alpha = \left|\frac{3-(-2)}{1+(-2)\cdot 3}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1$, значит, $\alpha = arctg1 = 45^\circ$.

2.4.8 Расстояние от точки до прямой

Пусть в прямоугольной системе координат задана прямая l своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – действительные числа, причём A и B одновременно не равны нулю. Пусть точка $M_0(x_0;\, y_0)$ не принадлежит прямой l.

Расстоянием от точки M_0 до прямой l называется длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую (Рис. 30).

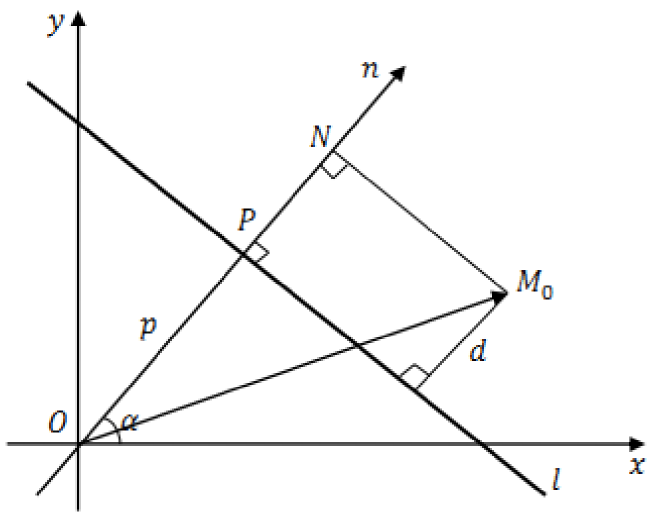


Рис. 30

Формула для вычисления расстояния d от точки M_0 до прямой l имеет вид:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{30}$$

Пример 12. Найти расстояние от точки $A(2;\,-1)$ до прямой $4x + 3y + 10 = 0$.

Решение.

По условию $x_0 = 2,\ y_0 = -1,\ A = 4,\ B = 3,\ C = 10$. Применим формулу (30):

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 - 3 + 10|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

2.5 Линии второго порядка

Определение. Линии, которые в прямоугольной системе координат задаются общим уравнением второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{31}$$

где A, B, C, D, E, F - некоторые числа, причем A, B, C одновременно не равны нулю, называются *линиями второго порядка*.

2.5.1 Окружность

Определение. *Окружностью* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Пусть точка $C(x_0;\ y_0)$ - центр окружности, $M(x; y)$ - произвольная точка окружности (Рис. 31). По определению, расстояние CM есть величина постоянная, она называется *радиусом окружности* и обозначается R.

Каноническое уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{32}$$

Если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности примет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

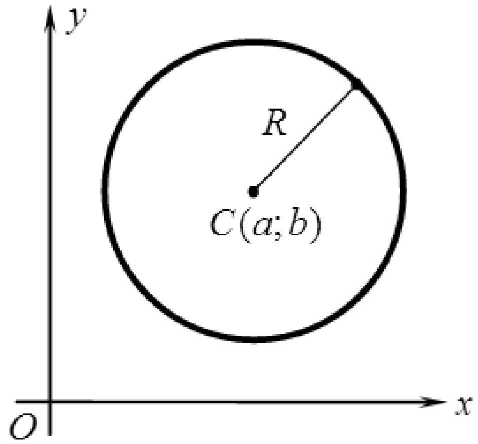


Рис. 31

Пример. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Решение. Выделив полные квадраты по каждой переменной, данное уравнение можно записать в виде: $(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) = 4$,

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 4, \text{ или } (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(-1;2)$ и радиусом $R = \sqrt{9} = 3$.

2.5.2 Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

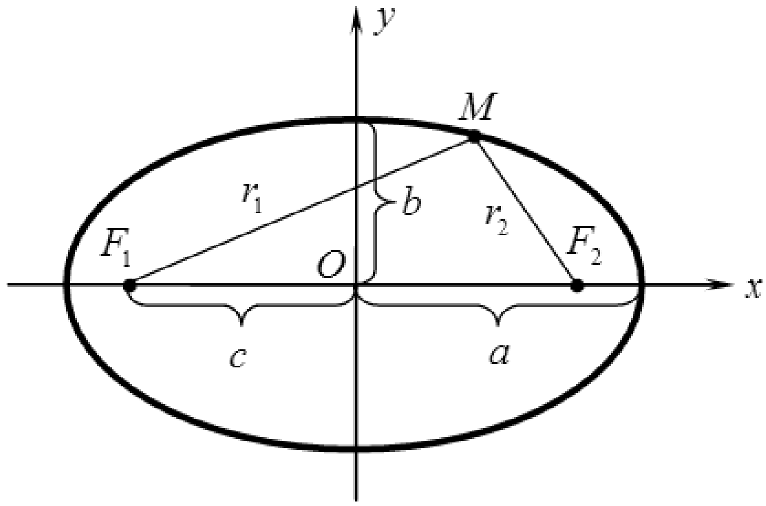


Рис. 32

Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка эллипса, расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$. Обозначим сумму расстояний от точки M до фокусов через $2a$, тогда $2a > 2c$, или $a > c$.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат (Рис. 32). Тогда фокусы эллипса имеют координаты $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Отрезки $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ называются *фокальными радиусами точки M*.

По определению, $r_1 + r_2 = 2a$. Это и есть уравнение эллипса. С помощью преобразований это уравнение можно привести к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{33}$$

Параметры эллипса: a – *большая полуось* эллипса, b – *малая полуось* эллипса. Эллипс симметричен относительно осей координат и относительно начала координат. Точки пересечения эллипса с осями координат называются его *вершинами*.

Параметры a, b, c эллипса связаны соотношением

$$c^2 = a^2 - b^2. \tag{34}$$

Определение. *Эксцентриситетом* эллипса называется величина, равная отношению половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса, т.е.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{35}$$

Так как $a > c$, то эксцентриситет эллипса $\varepsilon < 1$.

Определение. *Директрисами* эллипса называются две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса, симметричные относительно центра и проходящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него. Уравнения директрис эллипса $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

2.5.3 Гипербола

Определение. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка гиперболы, расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$. Обозначим модуль разности расстояний от точки M до фокусов через $2a$, тогда $2a < 2c$, или $a < c$.

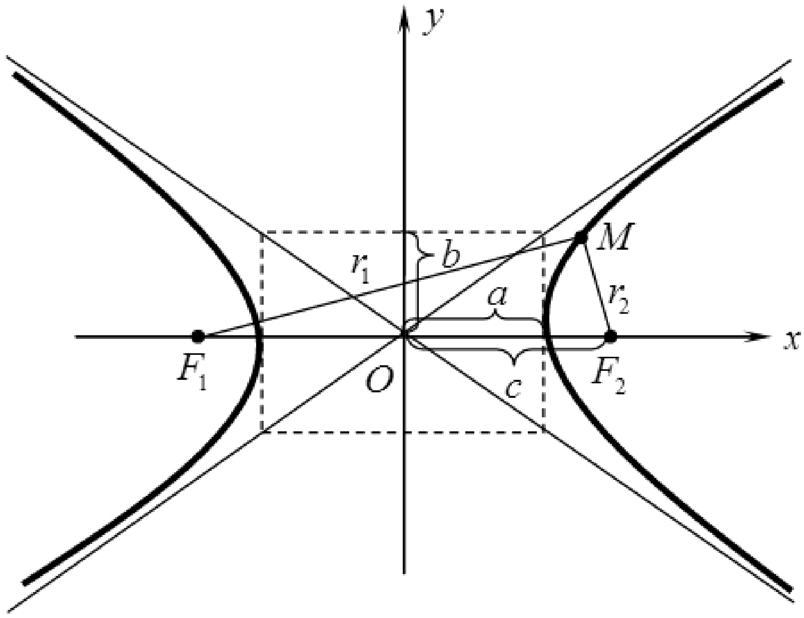


Рис. 33

Введем на плоскости прямоугольную систему координат (Рис. 33). Тогда фокусы гиперболы имеют координаты $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Отрезки $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ называются *фокальными радиусами точки M*.

По определению, $|r_1 - r_2| = 2a$. Это и есть уравнение гиперболы. С помощью преобразований это уравнение можно привести к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{36}$$

Параметры гиперболы: a – *действительная полуось* гиперболы, b – *мнимая полуось* гиперболы. Гипербола симметрична относительно осей координат и относительно начала координат.

Гипербола симметрична относительно осей координат и относительно начала координат (Рис. 33). Точки пересечения гиперболы с осью Ox называются её *вершинами*. Прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат, с размерами $2a$ и $2b$, называется *основным прямоугольником* гиперболы. Диагоналями этого прямоугольника являются прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$, они называются *асимптотами* гиперболы.

Параметры a, b, c гиперболы связаны соотношением

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (37)$$

Определение. *Эксцентриситетом* гиперболы называется величина, равная отношению половины расстояния между фокусами к действительной полуоси гиперболы, т.е.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (38)$$

Так как $a < c$, то эксцентриситет эллипса $\varepsilon > 1$.

Определение. *Директрисами* гиперболы называются две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы, симметричные относительно центра и проходящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него. Уравнения директрис гиперболы $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Гипербола, которая задается каноническим уравнением вида

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (39)$$

называется *сопряженной* к гиперболе (36). Фокусы сопряженной гиперболы принадлежат оси Oy - действительной оси сопряженной гиперболы.

Если полуоси гиперболы равны $a = b$, то гипербола называется *равносторонней*.

2.5.4 Парабола

Определение. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px. \qquad (40)$$

Расстояние от фокуса параболы до директрисы обозначается p и называется *параметром* параболы (Рис. 34). Фокус параболы находится в точке $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, директриса задается уравнением $x = -\frac{p}{2}$. Парабола (40) симметрична относительно оси Ox, вершина её находится в начале координат.

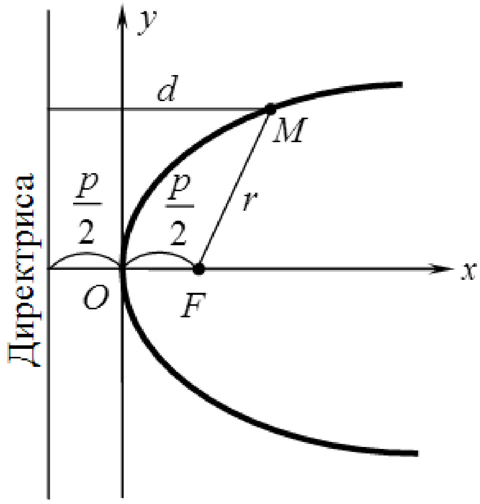


Рис. 34

Парабола может быть задана также одним из следующих канонических уравнений:

1) $y^2 = -2px$

Ось симметрии – ось Ox, вершина в начале координат, фокус $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, директриса $x = \frac{p}{2}$.

2) $x^2 = 2py$

Ось симметрии – ось Oy, вершина в начале координат, фокус $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, директриса $y = -\frac{p}{2}$.

3) $x^2 = -2py$

Ось симметрии – ось Oy, вершина в начале координат, фокус $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, директриса $y = \frac{p}{2}$.

ПРАКТИКУМ К ГЛАВЕ 2

Задача 1. Проверить, проходит ли прямая $2x+3y-5=0$ через точки $A(-2;\,3)$, $B(1;2)$.

Решение. Если точка принадлежит прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т.е. при подстановке координат точки в уравнение прямой вместо переменных x, y, получим верное равенство.

Для точки A получим:

$2\cdot(-2)+3\cdot 3-5=0$, $-4+9-5=0$, $0=0$, верно, значит, точка $A(-2;\,3)$ принадлежит данной прямой, т.к. её координаты удовлетворяют уравнению прямой.

Для точки B получим:

$2\cdot 1+3\cdot 2-5=0$, $2+6-5=0$, $3=0$, неверно, значит, точка $B(1;2)$ не принадлежит данной прямой, т.к. её координаты не удовлетворяют уравнению прямой.

Задача 2. Найти угловой коэффициент прямой $10x+2y+12=0$. Какой угол составляет эта прямая с осью Ox?

Решение. Приведем уравнение заданной прямой к виду $y=kx+b$. Для этого выразим переменную y из этого уравнения:

$$2y=-10x-12\,\big|:2,\quad y=-\frac{10}{2}x-\frac{12}{2},\quad y=-5x-6,$$

Следовательно, угловой коэффициент заданной прямой $k=-5$.

Чтобы определить угол, который составляет эта прямая с осью Ox, воспользуемся формулой $k=tg\varphi$. Имеем:

$$tg\varphi=-5,\quad \varphi=arctg(-5)\approx 101^\circ.$$

Задача 3. Привести уравнение прямой $2x-3y-6=0$ к виду в отрезках на осях.

Решение. Запишем данное уравнение в виде: $2x-3y=6$. Теперь разделим обе части уравнения на 6, получим:

$$\frac{2x}{6}-\frac{3y}{6}=\frac{6}{6},\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$$

Это и есть уравнение данной в отрезках на осях.

Задача 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3;\ 5)$, $B(7;-2)$, найти её угловой коэффициент.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставим сюда координаты точек A и B:

$$AB:\ \frac{x-(-3)}{7-(-3)}=\frac{y-5}{-2-5},\quad \frac{x+3}{10}=\frac{y-5}{-7},$$

$$10(y-5)=-7(x+3),\ 10y-50=-7x-21,$$

откуда получаем общее уравнение прямой AB: $7x+10y-29=0$.

Чтобы найти её угловой коэффициент, выразим из общего уравнения переменную y (см. задачу 2):

$$10y=-7x+29,\ y=-\frac{7}{10}x+\frac{29}{10}, \text{ откуда } k_{AB}=-\frac{7}{10}.$$

Задача 5. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(-1;\ 4)$: 1) параллельно прямой $2x+3y-5=0$; 2) перпендикулярно прямой $6x+8y-11=0$.

Решение. 1) Найдем угловой коэффициент данной прямой (см. задачу 2):

$$3y=-2x+5,\ \ y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}, \text{ откуда } k_1=-\frac{2}{3}.$$

Поскольку искомая прямая параллельна данной прямой, то её угловой коэффициент $k_2=k_1=-\frac{2}{3}$. Далее воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом:

$$y-y_A=k_2(x-x_A).$$

Получим:

$$y-4=-\frac{2}{3}(x-(-1)),\ y-4=-\frac{2}{3}(x+1),$$

откуда

$$3y-12=-2(x+1),\quad 3y-12=-2x-2,\quad 2x+3y-10=0.$$

2) Найдем угловой коэффициент данной прямой (см. задачу 2):

$$8y=-6x+11,\ \ y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{8}, \text{ откуда } k_1=-\frac{3}{4}.$$

Поскольку искомая прямая перпендикулярна данной прямой, то её угловой коэффициент $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = \dfrac{4}{3}$. Далее воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом:

$$y - y_A = k_2(x - x_A).$$

Получим:

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - (-1)),\ y - 4 = \frac{4}{3}(x + 1),$$

откуда

$$3y - 12 = 4(x + 1),\ 3y - 12 = 4x + 4,$$

$$4x - 3y + 16 = 0.$$

Задача 6. Найти острый угол между прямыми $2x + 4y - 7 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$.

Решение. Определим угловые коэффициенты заданных прямых:

$$4y = -2x + 7,\ \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4},\ \ k_1 = -\frac{1}{2};$$

$$3y = x + 5,\ \ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3},\ \ k_2 = \frac{1}{3}.$$

Тангенс угла между прямыми определим по формуле: $tg\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Имеем:

$$tg\theta = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1,$$ откуда $\theta = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 7. Найти расстояние между параллельными прямыми $l_1: 2x - 3y - 5 = 0$ и $l_2: 2x - 3y + 21 = 0$.

Решение. Задача сводится к нахождению расстояния от точки, взятой на одной из этих прямых, до другой прямой. Выберем на прямой l_1 произвольную точку. Пусть $x = 1$, тогда $2 \cdot 1 - 3y - 5 = 0$, $-3 - 3y = 0$, $y = -1$. Значит, точка $M(1;\ -1) \in l_1$.

Расстояние от точки M до прямой l_2 определим по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Находим

$$d=\frac{|2\cdot 1-3\cdot(-1)+21|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|2+3+21|}{\sqrt{4+9}}=\frac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}\,.$$

Задача 8. Даны координаты вершин ΔABC: $A(5;-2)$, $B(-3;3)$, $C(-1;-6)$. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты; 3) угол A в градусах; 4) уравнение высоты CD и её длину; 5) уравнение медианы AE и её длину; 6) уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB; 7) координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно прямой CD.

Решение.

1) Длина стороны AB: $AB=\sqrt{(-3-5)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{64+25}=\sqrt{89}\,.$

2) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\,.$$

Тогда для точек A и B получим:

$\dfrac{x-5}{-3-5}=\dfrac{y-(-2)}{3-(-2)}$, $\quad\dfrac{x-5}{-8}=\dfrac{y+2}{5}$, $\quad -8(y+2)=5(x-5)$, $\quad -8y-16=5x-25$,

$-8y=5x-9$, $\quad y=-\dfrac{5}{8}x+\dfrac{9}{8}$, откуда $k_{AB}=-\dfrac{5}{8}$.

Для точек A и C получим:

$\dfrac{x-5}{-1-5}=\dfrac{y-(-2)}{-6-(-2)}$, $\quad\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y+2}{-4}$, $\quad -6(y+2)=-4(x-5)$, $\quad -6y-12=-4x+20$,

$-6y=-4x+32$, $\quad y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{16}{3}$, откуда $k_{AC}=\dfrac{2}{3}$.

3) Тангенс угла A определим по формуле: $tg\angle A=\dfrac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AB}k_{AC}}$. Имеем:

$$tg\angle A=\frac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{8}\right)}{1+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{8}}{1-\frac{10}{24}}=\frac{\frac{31}{24}}{\frac{14}{24}}=\frac{31}{14},\quad \angle A=arctg\frac{31}{14}\approx 66^\circ.$$

4) Так как $CD\perp AB$, угловой коэффициент прямой $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{-\frac{5}{8}}=\dfrac{8}{5}$.

Далее воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом:

$$y - y_C = k_{CD}\left(x - x_C\right).$$

Получим:

$$y-(-6)=\frac{8}{5}\left(x-(-1)\right),\quad y+6=\frac{8}{5}(x+1),\quad 5y+30=8x+8,\ 8x-5y-22=0.$$

Длину высоты CD определим как расстояние от точки C до прямой AB по формуле: $d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где $A, B, C-$коэффициенты общего уравнения прямой AB.

Для прямой AB находим: $y=-\dfrac{5}{8}x+\dfrac{9}{8}$, $5x+8y-9=0$, откуда $A=5,\ B=8,\ C=-9$. Тогда

$$CD=\frac{\left|5\cdot(-1)+8\cdot(-6)-9\right|}{\sqrt{5^2+8^2}}=\frac{\left|-5-48-9\right|}{\sqrt{25+64}}=\frac{62}{\sqrt{89}}.$$

5) Определим координаты точки E как середины стороны BC:

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-3-1}{2}=-2;\quad y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3-6}{2}=-\frac{3}{2},\ \text{т.е. } E\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right).$$

Тогда уравнение медианы AE имеет вид:

$$\frac{x-5}{-2-5}=\frac{y-(-2)}{-\frac{3}{2}-(-2)},\quad \frac{x-5}{-7}=\frac{y+2}{\frac{1}{2}},\quad -7(y+2)=\frac{1}{2}(x-5),\quad -14(y+2)=x-5,$$

$$-14y-28=x-5,\quad x+14y+23=0.$$

Длина медианы AE:

$$AE=\sqrt{(-2-5)^2+\left(-\frac{3}{2}-(-2)\right)^2}=\sqrt{(-7)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{49+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{197}}{2}.$$

6) Так как искомая прямая параллельна стороне AB, то угловой коэффициент этой прямой $k=k_{AB}=-\dfrac{5}{8}$. Далее воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом:

$$y-y_E=k\left(x-x_E\right).$$

Получим:

$$y-\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{8}\left(x-(-2)\right),\quad y+\frac{3}{2}=-\frac{5}{8}(x+2),$$

$$8y+12=-5(x+2),\quad 8y+12=-5x-10,\quad 5x+8y+22=0.$$

7) Если точка M симметрична точке A относительно прямой CD, то точка D является серединой отрезка AM. Определим координаты точки D как точки пересечения прямых AB и CD из системы уравнений:

$$\begin{cases}5x+8y-9=0,\\ 8x-5y-22=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}5x+8y=9,\\ 8x-5y=22;\end{cases}$$

$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 8\\ 8 & -5\end{vmatrix}=-25-64=-89\neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}9 & 8\\ 22 & -5\end{vmatrix}=-45-176=-221,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 9\\ 8 & 22\end{vmatrix}=110-72=38.$$

Тогда по формулам Крамера находим:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{221}{89},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-\frac{38}{89}\text{, значит, } D\left(\frac{221}{89};\ -\frac{38}{89}\right).$$

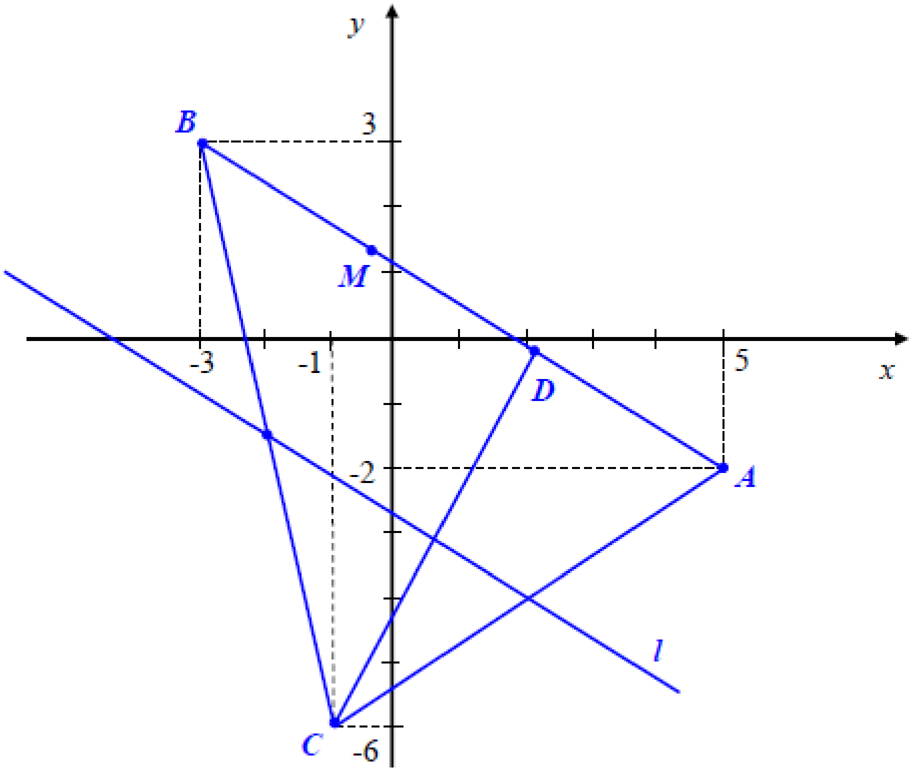


Рис. 35

Т.к. точка D - середина отрезка AB, то справедливы формулы

$$x_D=\frac{x_A+x_M}{2},\quad y_D=\frac{y_A+y_M}{2},$$

откуда находим

$$x_M = 2x_D - x_A = 2\cdot\left(\frac{221}{89}\right) - 5 = \frac{442}{89} - 5 = \frac{442-445}{89} = -\frac{3}{89};$$

$$y_M = 2y_D - y_A = 2\cdot\left(-\frac{38}{89}\right) - (-2) = -\frac{76}{89} + 2 = \frac{-76+178}{89} = \frac{102}{89}.$$

Следовательно, точка $M\left(-\frac{3}{89};\ \frac{102}{89}\right)$.

Задача 9. Составить каноническое уравнение окружности, если:

1) точка $C(2;\ 5)$ – центр окружности, радиус $R = 7$;

2) окружность проходит через точку $A(2;\ 6)$, центр окружности находится в точке $C(-1; 2)$;

3) точки $A(3; 2)$, $B(-1; 6)$ – концы диаметра окружности;

4) точка $C(1;\ -1)$ – центр окружности, прямая $l: 5x - 12y + 9 = 0$ касательная к окружности;

5) окружность задана общим уравнением второй степени $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Решение.

1) Каноническое уравнение окружности задано уравнением (32). Подставляя в это уравнение заданные координаты центра и радиус, получим уравнение:

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 7^2, \text{ или } (x-2)^2 + (y-5)^2 = 49.$$

2) Так как окружность проходит через точку A, то отрезок AC равен радиусу окружности, т.е.

$$R = AC = \sqrt{(2-(-1))^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Значит, каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = 5^2, \text{ или } (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

3) Так как AB – диаметр окружности, то его середина C является центром окружности. Определим координаты точки C:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1, \qquad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4,$$

значит, $C(1; 4)$ – центр окружности.

Радиус окружности $R = AC = \sqrt{(1-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$.

Тогда каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x-1)^2+(y-4)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2, \text{ или } (x-1)^2+(y-4)^2=8.$$

4) Пусть заданная прямая l касается окружности в точке A (Рис. 36). Как известно, радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Поэтому $AC\perp l$. Следовательно, $R-$это расстояние от точки C до прямой l. Найдем это расстояние по формуле:

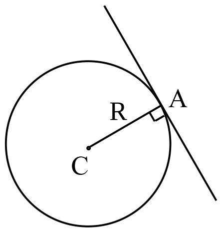


Рис.36

$$R=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Подставляя в эту формулу координаты центра окружности $x_0=1,\ y_0=-1$ и коэффициенты общего уравнения касательной $A=5,\ B=-12,\ C=9$, получим:

$$R=\frac{|5\cdot 1-12\cdot(-1)+9|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|5+12+9|}{\sqrt{25+144}}=\frac{26}{\sqrt{169}}=\frac{26}{13}=2.$$

Тогда каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x-1)^2+(y-(-1))^2=(2)^2, \text{ или } (x-1)^2+(y+1)^2=4.$$

5) Приведем данное уравнение к виду (32). Для этого сгруппируем отдельно слагаемые содержащие переменные x и y:

$$\left(x^2-2x\right)+\left(y^2+4y\right)=20.$$

Выделим в скобках полные квадраты:

$$\left(x^2-2\cdot x\cdot 1+1\right)-1+\left(y^2+2\cdot y\cdot 2+4\right)-4=20,$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25.$$

Задача 10. Найти точки пересечения с осями координат окружности $x^2+y^2+6x+11y+10=0$.

Решение. На оси Ox $y=0$, поэтому из уравнения окружности получаем уравнение:

$$x^2+6x+10=0,$$

$$D=36-4\cdot 1\cdot 10=36-40=-4<0,$$

значит, уравнение корней не имеет. Поэтому *точек пересечения с осью Ox у окружности нет*.

На оси Oy $x=0$, поэтому из уравнения окружности получаем уравнение:

$$y^2+11y+10=0,$$

$$D=121-4\cdot 1\cdot 10=121-40=81,$$

$$y_1 = \frac{-11 + \sqrt{81}}{2} = \frac{-11+9}{2} = -1, \quad y_2 = \frac{-11 - \sqrt{81}}{2} = \frac{-11-9}{2} = -10.$$

Следовательно, *с осью Oy окружность имеет две точки пересечения*: $(0; -1)$ и $(0; -10)$.

Задача 11. Найти уравнение линии центров двух окружностей, если заданы уравнения: 1) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ и $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 25$; 2) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ и $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

Решение.

Линия центров – прямая, проходящая через центры двух окружностей (Рис. 37).

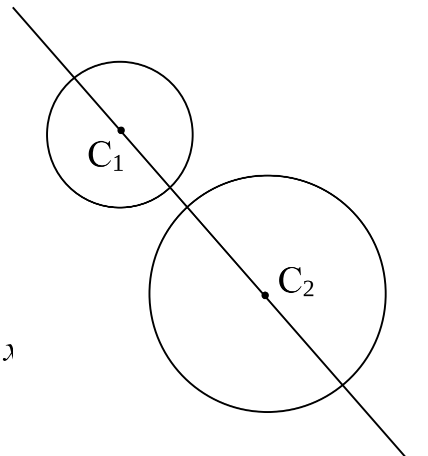


Рис.37

1) Из заданных канонических уравнений определяем координаты центров окружностей: $C_1(-2; 1)$, $C_2(-2; -5)$. Теперь уравнение линии центров C_1C_2 составим по двум точкам:

$$\frac{x-(-2)}{-2-(-2)} = \frac{y-1}{-5-1}, \quad \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{-6}, \quad -6(x+2) = 0,$$

откуда находим $x = -2$.

2) Приведем уравнения окружностей к каноническому виду (см. задачу 9):

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 0,$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = 0,$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13,$$

откуда $C_1(2; -3)$ - центр окружности.

$$(x^2 - 6x) + y^2 = 0,$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + y^2 = 0,$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9,$$

откуда находим $C_2(3; 0)$ - центр окружности.

Уравнение линии центров C_1C_2 составим по двум точкам:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+3}{0+3}, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3}, \quad y + 3 = 3(x-2),$$

$$y = 3x + 9.$$

Задача 12. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, если известно, что:

1) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8;

2) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

3) малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13.

Решение.

1) Из условия следует, что $2a = 10,\ 2c = 8$, значит, $a = 5, c = 4$. Зная, что для эллипса $c^2 = a^2 - b^2$, находим $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$, откуда $b = 3$. Таким образом, каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2) По условию $2c = 6$, откуда находим $c = 3$. По определению эксцентриситета $\varepsilon = \frac{c}{a}$, значит, $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$, или $\frac{3}{a} = \frac{3}{5}$. Отсюда следует, что $a = 5$. Зная, что для эллипса $c^2 = a^2 - b^2$, находим $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$, откуда $b = 4$. Таким образом, каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3) По условию $2b = 6,\ \frac{2a}{\varepsilon} = 13$, отсюда $b = 3,\ \frac{a}{\varepsilon} = \frac{13}{2}$. По определению эксцентриситета $\varepsilon = \frac{c}{a}$, значит, $\frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{13}{2}$, $\frac{a^2}{c} = \frac{13}{2}$, $a^2 = \frac{13}{2}c$. Зная, что для эллипса $c^2 = a^2 - b^2$, находим $c^2 = \frac{13}{2}c - 9$, откуда следует квадратное уравнение

$$2c^2 - 13c + 18 = 0.$$

$$D = 169 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 169 - 144 = 25,$$

$$c_1 = \frac{13 + \sqrt{25}}{4} = \frac{13 + 5}{4} = \frac{9}{2},\quad c_2 = \frac{13 - \sqrt{25}}{4} = \frac{13 - 5}{4} = 2.$$

В результате получим следующие уравнения эллипса:

а) если $c = \frac{9}{2}$, то $a^2 = \frac{13}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{117}{4}$, и уравнение эллипса $\frac{x^2}{\frac{117}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1$;

б) если $c = 2$, то $a^2 = \frac{13}{2} \cdot 2 = 13$, и уравнение эллипса $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 13. Построить эллипс, найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения директрис: 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $9x^2+4y^2=36$.

Решение.

1) Из уравнения эллипса следует, что $a^2=25,\ b^2=16$, откуда находим полуоси эллипса: $a=5$ – большая полуось, $b=4$ – малая полуось. Построим заданный эллипс (Рис. 38)

Определим координаты фокусов эллипса. Известно, что для эллипса $c^2=a^2-b^2$, значит, $c^2=25-16=9,\ c=3$.

Поэтому $F_1(-3;\ 0),\ F_2(3;\ 0)$ – фокусы эллипса (Рис. 38). Эксцентриситет эллипса находим по формуле

$$\varepsilon=\frac{c}{a},\quad \varepsilon=\frac{3}{5}<1.$$

Директрисы эллипса – это две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса, они имеют уравнение $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$. В нашем случае $x=\pm\frac{5}{\frac{3}{5}},\ x=\pm\frac{25}{3}$.

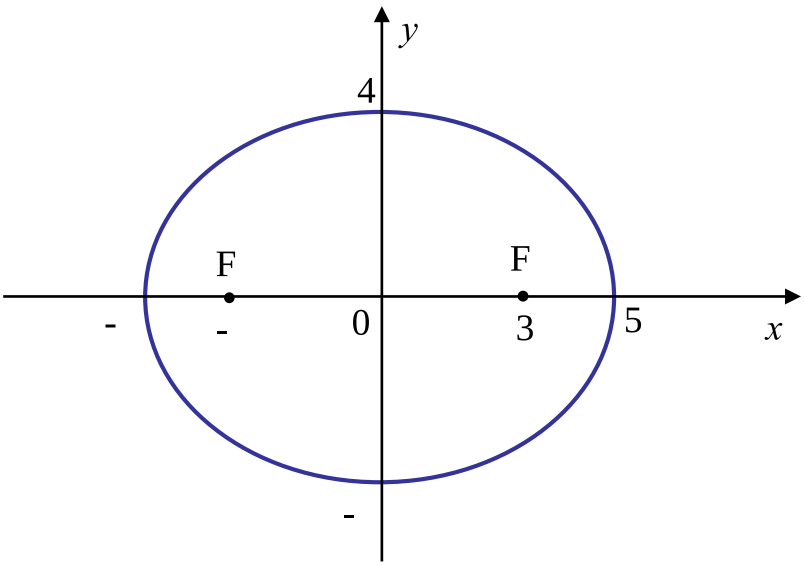


Рис.38

2) Приведем заданное уравнение эллипса к каноническому виду. Для этого разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Из уравнения находим $a^2=4,\ b^2=9$, отсюда $a=2$ – малая полуось, $b=3$ – большая полуось.

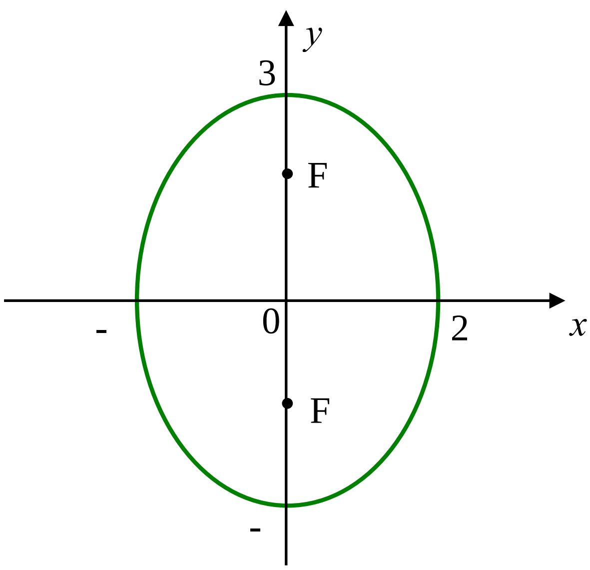


Рис.39

Следовательно, заданный эллипс вытянут вдоль оси Oy. Построим эллипс (Рис. 39). Определим координаты фокусов эллипса. Для данного эллипса $c^2 = b^2 - a^2$, значит,

$$c^2 = 9 - 4 = 5, \quad c = \sqrt{5}.$$

Поэтому $F_1(0;\ -\sqrt{5})$, $F_2(0;\ \sqrt{5})$ -фокусы эллипса, они лежат на оси Oy (Рис. 39). Эксцентриситет эллипса находим по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{b}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1.$$

Директрисы эллипса – это две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса, в данном случае они имеют уравнение $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$. В итоге получаем уравнения $y = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$, $y = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.

Задача 14. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что: 1) $2a = 10,\ 2b = 8$; 2) $2c = 6,\ \varepsilon = \frac{3}{2}$; 3) $2a = 16,\ \varepsilon = \frac{5}{4}$;

4) $y = \pm\frac{4}{3}x$ - асимптоты гиперболы, $2c = 20$;

5) $2c = 26$, расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13}$.

Решение.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a – действительная полуось гиперболы, b – мнимая полуось.

1) Из условия находим $a = 5,\ b = 4$, значит, уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

2) По условию $c = 3$, тогда $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{a} = \frac{3}{2}$, откуда $a = 2$. Так как $c^2 = a^2 + b^2$, то находим $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. Тогда уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

3) По условию $a=8$, тогда $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$, $\frac{c}{8}=\frac{5}{4}$, откуда $c=10$. Так как $c^2=a^2+b^2$, то находим $b^2=c^2-a^2=100-64=36$. Тогда уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

4) По условию $c=10$. Из уравнения асимптот следует, что $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, значит $b=\frac{4}{3}a$. Так как $c^2=a^2+b^2$, то получим уравнение $100=a^2+\frac{16}{9}a^2$, или $\frac{25}{9}a^2=100$, откуда находим $a^2=36$, $a=6$. Тогда $b=\frac{4}{3}\cdot 6=8$, и уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

5) По условию $c=13$. Расстояние между директрисами равно $\frac{2a}{\varepsilon}=\frac{228}{13}$. Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $\frac{2a^2}{c}=\frac{228}{13}$, $\frac{2a^2}{13}=\frac{228}{13}$, откуда находим $a^2=114$. Из равенства $c^2=a^2+b^2$ получаем $b^2=c^2-a^2=169-114=55$. Тогда уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{114}-\frac{y^2}{55}=1$.

Задача 15. Убедившись, что точка $M_1\left(-5;\ \frac{9}{4}\right)$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, определить фокальные радиусы точки M_1.

Решение.

Точка М принадлежит гиперболе, так как её координаты удовлетворяют уравнению гиперболы: $\frac{25}{16}-\frac{81}{16\cdot 9}=1$, $\frac{25}{16}-\frac{9}{16}=1$, $1=1$, верно.

Из уравнения следует, что $a^2=16$, $b^2=9$. Из равенства $c^2=a^2+b^2$ находим $c^2=16+9=25$, $c=5$. Тогда точки $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$ – фокусы гиперболы. Определим теперь фокальные радиусы точки M_1:

$$M_1F_1=\sqrt{(-5+5)^2+\left(\frac{9}{4}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4},$$

$$M_1F_2=\sqrt{(-5-5)^2+\left(\frac{9}{4}-0\right)^2}=\sqrt{100+\frac{81}{16}}=\sqrt{\frac{1681}{16}}=\frac{41}{4}.$$

Задача 16. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если известно, что: 1) парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $A(9;6)$; 2) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку $B(4;\,-8)$. Определить фокус параболы и уравнение директрисы.

Решение.

1) Так как парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку, лежащую в I координатной четверти, то её каноническое уравнение имеет вид: $y^2=2px$. Подставим сюда координаты точки A: $36=2p\cdot 9$, $18p=36,\;\; p=2$ - параметр параболы. Следовательно, $y^2=4x$ - каноническое уравнение данной параболы. Фокус параболы находится в точке $F(1;0)$. Уравнение директрисы $x=-1$.

2) Так как парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку, лежащую в IV координатной четверти, то её каноническое уравнение имеет вид: $x^2=-2py$. Подставим сюда координаты точки B: $16=-2p\cdot(-8)$, $16p=16$, $p=1$ - параметр параболы. Следовательно, $x^2=-2y$ - каноническое уравнение данной параболы. Фокус параболы находится в точке $F\left(0;\,-\frac{1}{2}\right)$.

Уравнение директрисы $y=\frac{1}{2}$.

Задача 17. Найти фокус и уравнение директрисы параболы $y^2=24x$.

Решение.

Из канонического уравнения параболы $y^2=2px$ следует, что $2p=24,\;\; p=12$ - параметр параболы. Тогда фокус параболы находится в точке $F\left(\frac{p}{2};\,0\right)$, т.е. в точке $F(6;\,0)$. Директриса параболы задается уравнением $x=-\frac{p}{2}$, $x=-6$.

3 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1 Понятие функции

Определение. *Функцией* называется закон, по которому каждому значению независимой переменной x, называемой *аргументом*, ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной y, называемой *функцией*: $y = f(x)$, где f – характеристика функции.

Определение. *Областью определения функции* $D(y)$ называется множество допустимых действительных значений аргумента, при которых функция имеет смысл в области вещественных чисел; множество значений, которые при этом принимает функция, называется ее *множеством значений* $E(y)$.

Определение. Множество точек плоскости (x; y), координаты которых связаны данной функциональной зависимостью $f(x)$, называется *графиком* функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется *четной*, если: 1) $D(y)$ симметрична относительно начала координат; 2) для любого $x \in D(y)$ выполняется $f(-x) = f(x)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если: 1) $D(y)$ симметрична относительно начала координат; 2) для любого $x \in D(y)$ выполняется $f(-x) = -f(x)$.

Определение. Если функция не является ни четной, ни нечетной, то она называется *функцией общего типа*.

Пример 1.

$y = x^2$; x^4; x^6; $\cos x$ – четные функции;

$y = x$; x^3; x^5; $\sin x$; tgx; $ctgx$ – нечетные функции;

$y = a^x$; $\log_a x$; $2x - 4$ – функции общего вида.

Определение. Функция называется *периодической*, если существует такое действительное число T, что $\forall x \in D(y)$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$, при этом наименьшее положительное число T, при котором выполняется указанное равенство, называется *периодом* функции.

Пример 2.

$y = \cos x$; $T = 2\pi$, так как $y(x+T) = \cos(x+2\pi) = \cos x = y(x)$.

Определение. Функция называется *возрастающей* на интервале $[a;b]$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. при $x_2 > x_1$ выполняется $f(x_2) > f(x_1)$ **(**Рис. 40**)**.

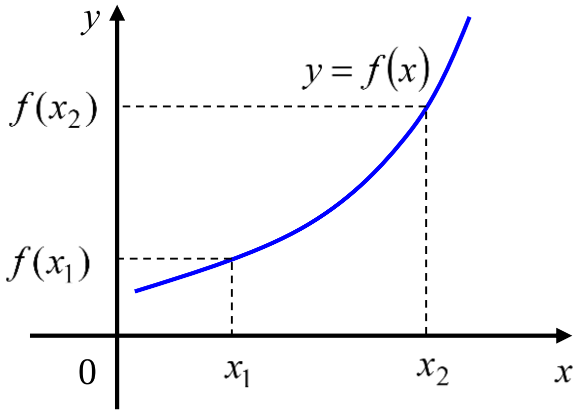


Рис.40

Определение. Функция называется *убывающей* на интервале $[a;b]$, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции **(**Рис. 41**)**, т.е. при $x_2 > x_1$ выполняется $f(x_2) < f(x_1)$.

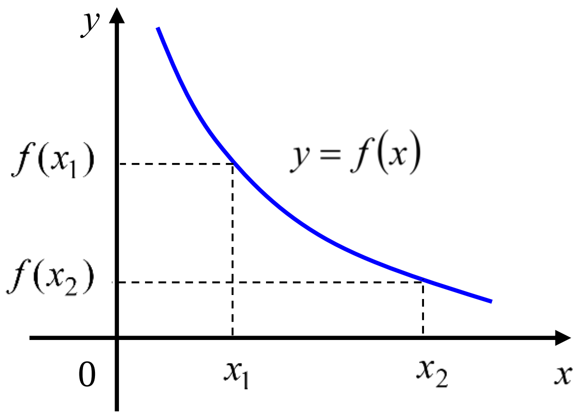


Рис.41

Определение. Возрастающие или убывающие на интервале $[a;b]$ функции называются *монотонными* функциями.

Определение. Если на интервале $[a;b]$ функция не меняет своего значения, то она называется *постоянной*.

Пусть задана функция $y = f(x)$. Если график этой функции пересекает ось абсцисс Ox в единственной точке, то можно найти такой закон, по которому каждому значению переменной y будет поставлено в соответствие единственное значение переменной x, т.е. $x = \varphi(y)$. Такой закон соответствия называется *обратной функцией*.

Пример 3. Найти обратную функцию к функции $y = 8x + 5$.

Выразив переменную x из этого равенства, найдем обратную функцию $x = \dfrac{y-5}{8}$.

Функция может быть задана одним из следующих способов:

– аналитический, т.е. в виде аналитической формулы (например, $y = x^3$);

– графический, т.е. в виде графика;

– табличный, т.е. в виде таблицы

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

– словесный, т.е. функция задается на каждом интервале разными аналитическими формулами, графиком или таблицей, например, $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

Пусть дана функция $y = f(U)$, где $U = g(x)$.

Определение. Функция вида $y = f(g(x))$ *сложной* функцией, а операция ее образования *композицией функций* или взятием *функции от функции*.

Определение. Переменная U называется *промежуточным аргументом*.

Промежуточных аргументов у функции может быть несколько.

Пример 4. $y = \sin(x^2)$.

В данном примере промежуточным аргументом является $U = x^2$, а внешней функцией будет $y = \sin U$.

Пример 5. $y = \sin^2 x$.

Промежуточный аргумент будет $U = \sin x$, а внешней функцией является возведение в квадрат, т.е. $y = U^2$.

Пример 6. $y = \sqrt{\log_2(x+4)}$

В этой функции несколько промежуточных аргументов, а именно: $t = x + 4$, $U = \log_2 t$, тогда $y = \sqrt{U}$.

3.2 Предел функции

3.2.1 Предел последовательности

Определение. Если область определения функции представляет собой ряд натуральных чисел, то область $D(y): 1, 2, 3, ..., n, ...$ называется *естественной*.

Определение. Область значений функции $E(n)$, расположенная в порядке возрастания номера n $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$, называется *последовательностью* и обозначается $\{y_n\}$.

Пример 7.

$$\{n\} = 1, 2, 3, ..., n, ...;$$

$$\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ..., \frac{1}{n^2}, ...; \qquad .$$

$$\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ...$$

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{y_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $\forall n \geq N$ имеет место неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$ или в другой форме записи $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Приведенное в определении неравенство с модулем можно преобразовать к виду $-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$.

Выясним геометрический смысл предела a. Если a – предел последовательности $\{y_n\}$, то существует такое число $N(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, начиная с которого все последующие значения последовательности попадают в полосу, ограниченную прямыми $y = a - \varepsilon$ и $y = a + \varepsilon$, каким бы малым не было бы число ε. Отметим, что уменьшение числа ε до ε_1 приводит к более узкой полосе внутрь которой попадают члены последовательности, начиная с номера $N(\varepsilon_1)$ (Рис. 42).

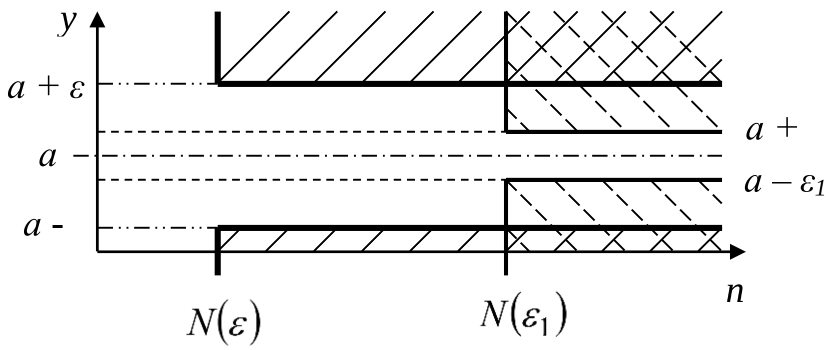


Рис. 42

3.2.2 Предел функции

Определение. *Окрестностью точки* x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение. Интервал, симметричный относительно точки x_0 ($[x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon]$), называется ее ε-*окрестностью*.

Определение. Если областью определения функции $y=f(x)$ есть множество $D(y)$, то точка x_0 называется *точкой сгущения*, если для любого числа $\delta>0$ выполняется неравенство $|x-x_0|<\delta$ при $x\neq x_0$.

Замечание. Отметим, что точка x_0 может и не принадлежать области $D(y)$.

Определение. Если функция $y=f(x)$ определена на множестве $D(y)$ с точкой сгущения x_0, то число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого $\delta>0$ из выполнения неравенства $|x-x_0|<\delta$ следует выполнение неравенства $|f(x)-A|<\varepsilon$ для любого положительного числа ε. Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Замечание. В качестве точки x_0 может выступать и бесконечно удаленная точка.

Пример 2. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$ при $x\to\infty$.

Решение. Перепишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$ и построим ее график при $x>0$ (Рис. 43).

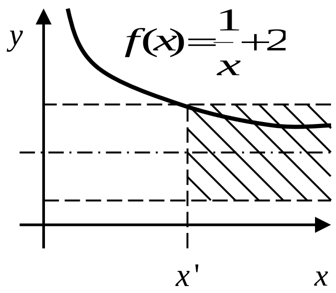


Рис. 43

Из рисунка видно, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, т.е. при $x\to\infty$ выполняется неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$. Следовательно $\left|\dfrac{1+2x}{x}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$, отсюда получаем $|x|<\dfrac{1}{\varepsilon}=\delta$. Итак, если $|x|<\delta$, то $|f(x)-2|<\varepsilon$. Из рисунка видно, начиная с некоторого значения x' все значения функции $f(x)$ лежат в интервале $[2-\varepsilon;\ 2+\varepsilon]$.

Замечание. График функции $f(x)$ может приближаться к своему предельному значению сверху, снизу или колеблясь возле прямой $y=A$ приближаясь к своему предельному значению.

Определение. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу*, если $\forall x\in D(y)$ выполняется неравенство $f(x)\geq m$ ($m\in R$).Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху*, если $\forall x\in D(y)$ выполняется неравенство $f(x)\leq M$ ($M\in R$). Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если $\exists m,M\in R$ такие, что $\forall x\in D(y)$ выполняется неравенство $m\leq f(x)\leq M$.

3.2.3 Односторонние пределы

Определение. Число B называется *левым односторонним пределом функции* $f(x)$ при стремлении x к x_0 слева ($x\to x_0-0$), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-B|<\varepsilon$ или

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=B.$$

Определение. Число C называется *правым односторонним пределом функции* $f(x)$ при стремлении x к x_0 справа ($x\to x_0+0$), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ выполняется неравенство $|f(x)-C|<\varepsilon$ или

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=C.$$

Пример 3. Найти односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

Решение. С учетом определения модуля данную функцию можно записать в виде $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ \textit{не определена}, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$. Построим график этой функции (Рис. 44):

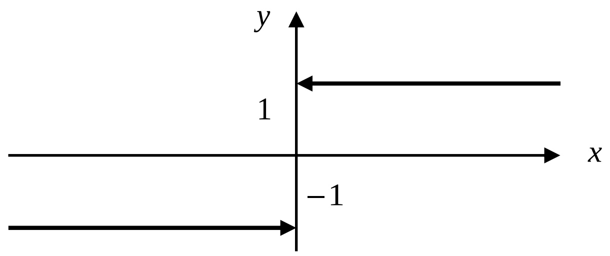


Рис. 44

Из рисунка видно, что левосторонний предел $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=-1$, а правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=1$.

Пример 4. Вычислить односторонние пределы функции $f(x)=\frac{5}{x-2}$ при $x\to 2$.

Решение. При $x\to 2-0$ (слева) знаменатель дроби стремится к малой отрицательной величине, следовательно, сама дробь стремится к $-\infty$. При $x\to 2+0$ (справа) знаменатель дроби стремится к малой положительной величине, следовательно, сама дробь стремится к ∞. Таким образом, левый односторонний предел $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{5}{x-2}=-\infty$, а правый односторонний предел $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{5}{x-2}=\infty$.

Пример 5. Найти односторонние пределы $f(x)=e^{\frac{x+1}{x+3}}$ при $x\to -3$.

Решение. При $x\to -3-0$ (слева) знаменатель дроби, стоящей в показателе степени экспоненты, стремится к малой отрицательной величине, следовательно, сама дробь стремится к $-\infty$. Если аргумент показательной функции с основанием большим единицы стремится к $-\infty$, то сама функция $f(x)\to 0$. При $x\to -3+0$ (справа) знаменатель дроби, стоящей в показателе степени экспоненты, стремится к малой положительной величине, следовательно, сама дробь стремится к ∞. Если аргумент показательной функции (основание больше единицы) стремится к ∞, то сама функция $f(x)\to\infty$. Таким образом, левосторонний предел $\lim\limits_{x\to -3-0} e^{\frac{x+1}{x+3}}=0$, а правосторонний предел $\lim\limits_{x\to -3+0} e^{\frac{x+1}{x+3}}=\infty$.

3.2.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$ ($\pm\infty$, $x_0\pm 0$), если ее предел при этом равен нулю, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Пример 6. $y=\frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция при $x\to\pm\infty$; $y=x$ – бесконечно малая функция при $x\to 0$.

Рассмотрим свойства бесконечно малых функций:

1. *Сумма (разность) конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция*.

2. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

3. Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ конечный предел $A \neq 0$, частное

от деления бесконечно малой функции на функцию $f(x)$ есть бесконечно малая функция.

4. Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ конечный предел A, то в некоторой δ-окрестности точки x_0 ее можно представить в виде суммы предельного значения A и бесконечно малой в этой окрестности функции $\alpha(x)$, т.е. $f(x) = A + \alpha(x)$.

5. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы предельного значения A и бесконечно малой в этой окрестности функции $\alpha(x)$, т.е. $f(x) = A + \alpha(x)$, то число A является пределом данной функции.

6. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

7. Отношение бесконечно малой функции к ограниченной функции есть бесконечно малая функция.

8. Отношение двух бесконечно малых функций не определено. В этом случае говорят о неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если ее предел при этом равен $\pm\infty$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Рассмотрим свойства бесконечно больших функций:

1. Сумма бесконечно больших при $x \to x_0$ функций есть бесконечно большая функция.

2. Произведение бесконечно больших функций есть бесконечно большая функция.

3. Произведение бесконечно большой функции на ограниченную функцию есть бесконечно большая функция.

4. Отношение бесконечно большой функции к ограниченной функции есть бесконечно большая функция.

5. Разность и отношение двух бесконечно больших функций не определено. В этом случае говорят о неопределенностях вида $\infty - \infty$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Установим связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями, которая дается следующими теоремами:

Теорема 1. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией, то в этой же окрестности функция $f(x)=\dfrac{C}{\alpha(x)}$ $(C \in R)$ будет бесконечно большой функцией.

Теорема 2. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $f(x)$ является бесконечно большой функцией, то в той же самой окрестности функция $\alpha(x)=\dfrac{C}{f(x)}$ $(C \in R)$ будет бесконечно малой функцией.

Эти теоремы очень часто применяются при вычислении пределов, содержащих бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$.

Замечание. Другими словами данную теорему можно сформулировать так: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы a и b, то предел от суммы (разности) будет равен сумме (разности) пределов от этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 4. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$.

Замечание. Иначе данную теорему можно сформулировать так: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы a и b, то предел от произведения функций будет равен произведению пределов от этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 5. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $f(x)$ постоянна и равна C $(C \in R)$, то ее предел равен C.

Следствие 1. Если $g(x)=C$, то $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot C]=$ $=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Следствие 2. Предел степени функции $f(x)$ равен степени предела этой функции, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^n.$$

Теорема 6. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Замечание. Сформулируем теорему иначе: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы a и $b \neq 0$, то предел от отношения функций будет равен отношению пределов от этих функций, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

3.3 Понятие непрерывной функции

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* а, если она удовлетворяет следующим трём условиям:

1) $f(x)$ определена в точке а (то есть существует $f(a)$);
2) $f(x)$ имеет конечный предел функции при $x \to a$;
3) этот предел равен частному значению функции в точке а, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа (слева) в точке* a, если правое (левое) предельное значение этой функции в точке a существует и равно частному значению $f(a)$ $\left(\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)\right)$.

Пример 1. Приведём примеры непрерывных функций:

1) $f(x) = x^n$, так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a^n = f(a)$.
2) $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $Q_m(a) \neq 0$.
3) Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ свойством непрерывности в точке $x = 0$ не обладает.

Определение непрерывности функции в точке a может быть записано еще так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right),$$

то есть *для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции*. Очевидно, что непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью её графика при прохождении данной точки (без отрыва карандаша от листа бумаги).

Дадим аргументу a приращение Δx. Тогда функция $y=f(x)$ получит приращение Δy, определяемое как разность наращенного и исходного значений функции (см. рис. 45):

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a).$$

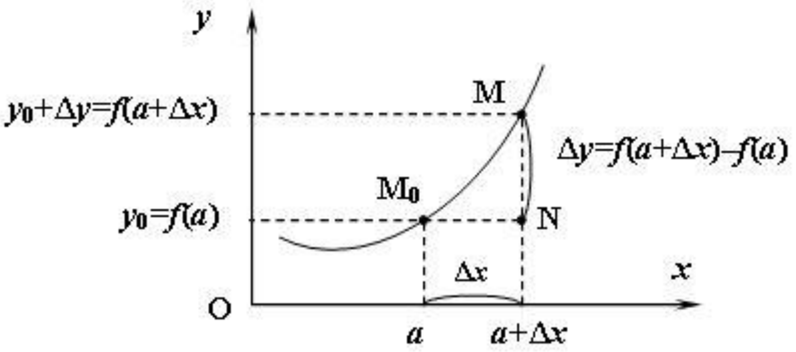


Рис. 45

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Определение. Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва функции*.

Точки разрыва имеют различный характер и классифицируются следующим образом.

1) Если $f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$, то a называется *точкой устранимого разрыва функции* $f(x)$. При этом значение $f(a)$ может быть и не определено.

2) Если $f(a-0)\neq f(a+0)$, то a называется *точкой разрыва с конечным скачком функции* $f(x)$. Значение $f(a)$ может быть любым, а может быть и не определено.

3) Конечный скачок и устранимый разрыв функции $f(x)$ называются *разрывами I рода*. Их отличительным признаком является существование конечных односторонних пределов $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Все другие разрывы называются *разрывами II рода*. В точке разрыва II рода хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

Пример 2. 1) Пусть $f(x)=\begin{cases}|x| & \text{при } x\neq 0;\\ 1 & \text{при } x=0.\end{cases}$ Очевидно, $f(0-0)=f(0+0)=0$, но $f(0)=1$ (рис. 46). Следовательно, $x=0$ – точка устранимого разрыва функции $f(x)$. Если положить $f(0)=0$, то разрыв устраняется.

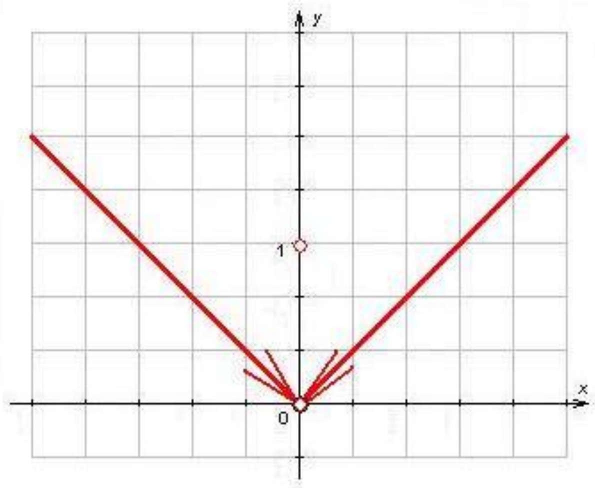


Рис. 46

2) Пусть $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } x\ge 0; \\ x+1 \text{ при } x<0. \end{cases}$ Здесь $f(0-0)=1$, $f(0+0)=0$ (рис. 47). Следовательно, $x=0$ – точка разрыва с конечным скачком функции $f(x)$. При переходе через точку $x=0$ значения функции $f(x)$ меняются скачком от значений, сколь угодно близких к 1 при $x<0$ к значению, равному 0 в точке $x=0$, и значениям, сколь угодно близким к 0 при $x>0$.

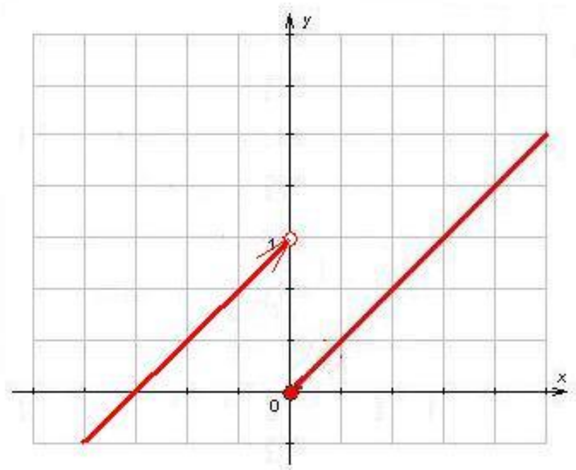


Рис. 47

3) Пусть $f(x)=5^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$. Определим односторонние пределы: $f(0-0)=0$, $f(0+0)=+\infty$. Точка $x=0$ – точка разрыва функции $f(x)$ II рода (рис. 48).

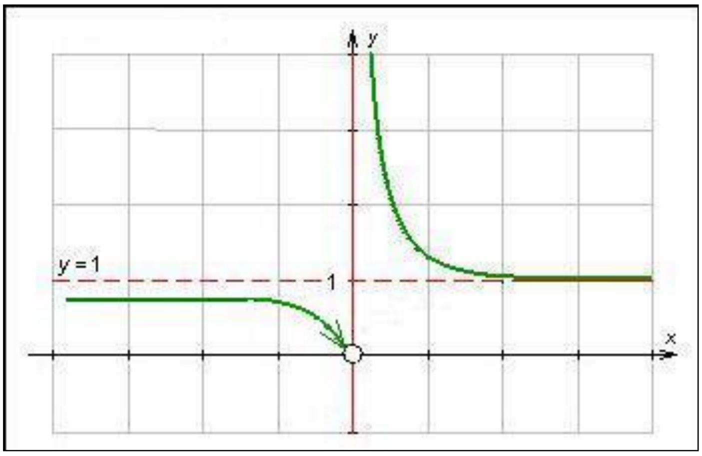


Рис. 48

Определение. Функция *непрерывна на множестве* X, если она непрерывна в любой точке $x \in X$. Функция *непрерывна на интервале* $(a;b)$ или *на отрезке* $[a;b]$, если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a); \ \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

Теорема 1. 1) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на X и непрерывны в точке a, то их алгебраическая сумма (разность) $f(x) \pm g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a) \neq 0)$ являются функциями, непрерывными в точке a.

Доказательство следует из определения непрерывности функции и аналогичных свойств пределов функций.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на промежутке* X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Можно доказать, что все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Пример 3. Доказать непрерывность функции $y = \cos x$.

Решение. Найдём предел приращения функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (\cos(x + \Delta x) - \cos x) = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = 0.$$

Таким образом, получили, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, следовательно, по определению функция $y = \cos x$ является непрерывной на всей числовой оси.

ПРАКТИКУМ К ГЛАВЕ 3

Задача 1. Найти область определения функций: 1) $y = \sqrt{x+6} - \sqrt{4-x}$;
2) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12} + \dfrac{2x-3}{x-5}$; 3) $y = \lg\left(8x - x^2\right)$; 4) $y = \arcsin\dfrac{1-4x}{5}$.

Решение.

1) Выражения, стоящие под знаком квадратного корня должны быть неотрицательны, поэтому область определения функции совпадает с решением системы неравенств

$$\begin{cases} x + 6 \geq 0, \\ 4 - x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -6, \\ x \leq 4; \end{cases}$$

Таким образом, $-6 \leq x \leq 4$ и область определения $D(y) = [-6;\, 4]$.

2) Так как выражение, стоящее под знаком квадратного корня должно быть неотрицательно, а знаменатель дроби во втором слагаемом не должен обращаться в нуль, то необходимо, чтобы

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geq 0, \\ x - 5 \geq 0 \end{cases}$$

Решаем квадратное неравенство *методом интервалов*. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 7x + 12$. Область определения функции $D(f) = R$. Найдем нули функции: $x^2 - 7x + 12 = 0$,

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1, \quad x_1 = \frac{7+1}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{7-1}{2} = 3.$$

Отмечаем найденные значения в области определения, получим три интервала (Рис. 49). Определяем знак функции $f(x)$ в каждом интервале:

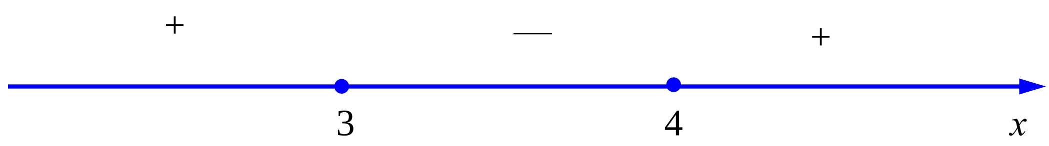


Рис.49

Выбираем интервалы, где стоит знак «+». Таким образом, решение первого неравенства системы: $x \in (-\infty;\, 3] \cup [4;\, +\infty)$.

Решение второго неравенства: $x \geq 5$.

Далее находим пересечение решений первого и второго неравенств, это и будет областью определения заданной функции:

$$D(y) = [5;\, +\infty).$$

3) Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, т.е. $8x - x^2 > 0$. Решая это квадратное неравенство методом интервалов (см. решение задачи 1(2)), получим, что $0 < x < 8$. Таким образом, $D(y) = (0;\, 8)$.

4) Аргумент арксинуса должен находиться в отрезке $[-1;\, 1]$. Поэтому данная функция определена только при тех значениях x, для которых выполнено двойное неравенство

$$-1 \le \frac{1-4x}{5} \le 1.$$

Решая его, получим: $-5 \le 1 - 4x \le 5$, $-6 \le -4x \le 4$, $-1 \le x \le \frac{3}{2}$.

Таким образом, $D(y) = \left[-1;\ \frac{3}{2}\right]$.

Задача 2. Установить четность или нечетность функций: 1) $y = x^3 \cos 5x$; 2) $y = \frac{1}{2}\left(3^x + 3^{-x}\right)$; 3) $y = x^2 - 4x + 1$; 4) $y = \lg\frac{2+x}{2-x}$.

Решение.

1) Область определения функции $D(y) = (-\infty;\, +\infty)$ симметрична относительно начала координат. Найдем $y(-x)$:

$$y(-x) = (-x)^3 \cos(5(-x)) = -x^3 \cos 5x = -y(x).$$

Следовательно, данная функция нечетная.

2) Область определения функции $D(y) = (-\infty;\, +\infty)$ симметрична относительно начала координат. Найдем $y(-x)$:

$$y(-x) = \frac{1}{2}\left(3^{-x} + 3^{-(-x)}\right) = \frac{1}{2}\left(3^{-x} + 3^{x}\right) = y(x).$$

Следовательно, данная функция четная.

3) Область определения функции $D(y) = (-\infty;\, +\infty)$ симметрична относительно начала координат. Найдем $y(-x)$:

$$y(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 1 = x^2 + 4x + 1.$$

Так как $y(-x) \ne y(x)$ и $y(-x) \ne -y(x)$, то данная функция ни четная, ни нечетная (функция общего типа).

4) Найдем область определения функции. Выражение под знаком логарифма должно быть положительным: $\frac{2+x}{2-x} > 0$. Решая это неравенство

методом интервалов, находим $D(y)=(-2;\,2)$. Область определения симметрична относительно начала координат. Найдем $y(-x)$:

$$y(-x)=\lg\frac{2+(-x)}{2-(-x)}=\lg\frac{2-x}{2+x}=\lg\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1}=-\lg\frac{2+x}{2-x}=-y(x).$$

Следовательно, данная функция является нечетной.

Задача 3. Сложные функции, заданные цепочкой равенств, записать в виде одного равенства: 1) $y=u^3,\ u=4x+1$; 2) $y=\lg u,\ u=\sqrt[5]{v},\ v=\cos x$; 3) $y=\sin u,\ u=arctg v,\ v=3+w^2,\ w=x-2$.

Решение.

1) Исключая промежуточный аргумент u, получим: $y=u^3=(4x+1)^3$.

2) В данном случае сложная функция содержит два промежуточных аргумента u и v. Последовательно исключая их, получим:

$$y=\lg u=\lg\sqrt[5]{v}=\lg\sqrt[5]{\cos x}=\frac{1}{5}\lg(\cos x).$$

3) В данном случае сложная функция содержит три промежуточных аргумента. Последовательно исключая их, получим:

$$y=\sin u=\sin(arctg v)=\sin\left(arctg\left(3+w^2\right)\right)=\sin\left(arctg\left(3+(x-2)^2\right)\right)=$$
$$=\sin\left(arctg\left(x^2-4x+7\right)\right)$$

Задача 4. Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+5x-3}{\log_2\left(x^2+1\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^4+2x^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}(xctg3x)$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{x}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 5x}{tg^2 3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{x}$.

Решение.

1) Подставим в функцию предельное значение -1, получим:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x-3}{\log_2\left(x^2+1\right)}=\frac{(-1)^2+5(-1)-3}{\log_2\left((-1)^2+1\right)}=\frac{1-5-3}{\log_2 2}=\frac{-7}{1}=-7.$$

2) Подставим в функцию предельное значение 2, получим:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\frac{2^2-5\cdot2+6}{2^2-3\cdot2+2}=\frac{4-10+6}{4-6+2}=\frac{0}{0}.$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы избавиться от неопределенности, преобразуем дробь, разложив на множители числитель и знаменатель дроби. Квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 –корни квадратного трехчлена.

Находим:

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$
$$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3;$$
$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2;$$
$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x - 1} = \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1.$$

3) Подставим в функцию предельное значение 0, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 - \sqrt{x + 9}}{x} = \frac{3 - \sqrt{0 + 9}}{0} = \frac{3 - 3}{0} = \frac{0}{0}.$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы избавиться от неопределенности, преобразуем дробь, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(3 + \sqrt{x + 9}\right)$, сопряженное числителю данной дроби. В результате в числителе получим формулу сокращенного умножения $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 - \sqrt{x + 9}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(3 - \sqrt{x + 9}\right)\left(3 + \sqrt{x + 9}\right)}{x\left(3 + \sqrt{x + 9}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{9 - (x + 9)}{x\left(3 + \sqrt{x + 9}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x\left(3 + \sqrt{x + 9}\right)} =$$
$$= -\lim_{x \to 0} \frac{1}{3 + \sqrt{x + 9}} = -\frac{1}{3 + \sqrt{0 + 9}} = -\frac{1}{6}.$$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 1}{3x^4 + 2x^2 - 1} = \dfrac{2(\infty)^3 + 1}{3(\infty)^4 + 2(\infty)^2 - 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$.

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы избавиться от неопределенности, разделим числитель и знаменатель дроби на x в наибольшей степени, т.е. на x^4. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^4+2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}}{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}=\frac{0+0}{3+0-0}=\frac{0}{3}=0.$$

5) Подставим в функцию предельное значение 0, в результате получим:

$$\lim_{x\to 0}(xctg3x)=0\cdot ctg0=0\cdot\infty.$$

Получили неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем её к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, применив тригонометрическое тождество $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}(xctg3x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=\frac{0}{tg0}=\frac{0}{0}.$$

Применим для вычисления предела следствие из первого замечательного предела. Получим:

$$\lim_{x\to 0}(xctg3x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\cdot tg3x}=\left|\begin{array}{l} t=3x \\ t\xrightarrow[x\to 0]{}0 \end{array}\right|=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

6) Применим следствие из первого замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\arcsin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{5x}=\left|\begin{array}{l} t=5x \\ t\xrightarrow[x\to 0]{}0 \end{array}\right|=$$

$$=5\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=5\cdot 1=5.$$

7) Применим свойство степени и теорему о пределе функции, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{tg^2 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{tg3x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}\right)^2.$$

Вычислим теперь предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}$, применив первый замечательный предел и следствие из него. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 5x\cdot 3}{5x\cdot tg3x\cdot 3}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\left|\begin{array}{l} t=5x \\ t\xrightarrow[x\to 0]{}0 \\ \alpha=3x \\ \alpha\xrightarrow[x\to 0]{}0 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{5}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{tg\alpha}=\frac{5}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{3}.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{tg^2 3x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg 3x}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}.$$

8) В данном случаем получаем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Умножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное выражение, т.е. на сумму $x+\sqrt{x^2-3}$. В результате в числителе получим формулу сокращенного умножения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(x^2-3\right)}{x+\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+\sqrt{x^2-3}}=\frac{3}{\infty+\infty}=\frac{3}{\infty}=0.$$

9) Применим для вычисления предела второй замечательный предел. Для этого преобразуем выражение в скобках, выделив там 1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-1-3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-4}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}.$$

Далее выполним замену переменной: $t=\frac{-4}{x+1}$, где $t\xrightarrow[x\to\infty]{}0$. Выразим переменную x через новую переменную t: $x+1=-\frac{4}{t}$, $x=-\frac{4}{t}-1$.

Выполняя подстановку, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{4}{t}-1-1}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{4}{t}-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{4}{t}}\cdot(1+t)^{-2}=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-4}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{-2}=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-4}\cdot 1=$$

$$=e^{-4}=\frac{1}{e^4}.$$

10) Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, используя свойство логарифма:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{x}=\lim_{x\to 0}6\cdot\frac{1}{6x}\cdot\ln(1+6x)=6\lim_{x\to 0}\ln(1+6x)^{\frac{1}{6x}}.$$

Поскольку функция $y=\ln x$ непрерывна при $x>0$, то по теореме о пределе функции можно поменять местами знак функции и знак предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{x}=6\lim_{x\to 0}\ln(1+6x)^{\frac{1}{6x}}=6\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{6x}}\right)=\left|\begin{array}{l}\alpha=6x\\ \alpha\xrightarrow[x\to 0]{}0\end{array}\right|=$$

$$=6\ln\left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)=6\ln e=6\cdot 1=6.$$

Задача 5. Переходя к эквивалентным бесконечно малым, вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 15x}{tg10x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 10x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{\sqrt{4+x}-2}$.

Решение.

1) Так как $\sin y\sim y$ при $x\to a$, $tgy\sim y$ при $x\to a$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 15x}{tg10x}=\lim_{x\to 0}\frac{15x}{10x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

2) Так как $\sin y\sim y$ при $x\to a$, $1-\cos y\sim\frac{1}{2}y^2$ при $x\to a$, то получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 10x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)^2}{1-\cos 10x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}(10x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{50x^2}=\frac{9}{50}.$$

3) Так как $a^y-1\sim y\ln a$ при $x\to a$, $\ln(1+y)\sim y$ при $x\to a$, то получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

4) Преобразуем сначала числитель и знаменатель дроби, имеем:

$$\cos 7x-\cos 3x=-2\sin\frac{7x-3x}{2}\sin\frac{7x+3x}{2}=-2\sin 2x\sin 5x;$$

$$\sqrt{4+x}-2=\sqrt{4\left(1+\frac{x}{4}\right)}-2=2\sqrt{1+\frac{x}{4}}-2=2\left(\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1\right)=2\left(\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right).$$

Так как $\sin y\sim y$ при $x\to a$, $(1+y)^m-1\sim my$ при $x\to a$, то получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{\sqrt{4+x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\sin 5x}{2\left(\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)}=-\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 5x}{\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{10x^2}{\frac{x}{8}}=$$

$$=-80\lim_{x\to 0}x=-80\cdot 0=0.$$

Задача 6. Задана функция $y=\begin{cases} x+2, \; x\le -2; \\ x^2-4, \; -2<x<1; \\ 4-2x, \; x\ge 1. \end{cases}$ Требуется: 1) найти точки разрыва функции, если они существуют; 2) найти односторонние пределы функции в точках разрыва; 3) найти скачок функции в точках разрыва.

Решение.

1) Данная функция определена и непрерывна в интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$, $(1;+\infty)$. При $x=-2$ и $x=1$ меняется аналитическое выражение функции, значит, только в этих точках функция может иметь разрыв.

2) Определим односторонние пределы в точках разрыва.

$$\lim_{x\to -2-0} y=\lim_{x\to -2-0}(x+2)=-2+2=0;$$

$$\lim_{x\to -2+0} y=\lim_{x\to -2+0}\left(x^2-4\right)=(-2)^2-4=0.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x=-2$ совпадают, то в этой точке функция непрерывна.

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2-4\right)=1^2-4=-3$$

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0}(4-2x)=4-2\cdot 1=2.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x=1$ не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода.

Скачком функции в точке разрыва первого рода называется абсолютная величина разности между её односторонними пределами.

Следовательно, скачок функции в точке $x=1$ равен: $\Delta=|2-(-3)|=5$.

Задача 7. Задана функция $y=\dfrac{3}{x+2}$. Требуется: 1) установить, непрерывна ли функция в точках $x_1=-2, x_2=3$ или терпит разрыв; 2) найти односторонние пределы в точках разрыва.

Решение.

1) Так как при $x_1=-2$ значение функции не существует (имеет место деление на ноль), то в этой точке функция терпит разрыв. При $x_2=3$ существует значение функции $y(3)=\dfrac{3}{3+2}=\dfrac{3}{5}$, то в этой точке функция непрерывна.

2) Найдем односторонние пределы в точке разрыва:

$$\lim_{x\to -2-0} y=\lim_{x\to -2-0}\frac{3}{x+2}=\frac{3}{-2-0+2}=\frac{3}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0} y=\lim_{x\to -2+0}\frac{3}{x+2}=\frac{3}{-2+0+2}=\frac{3}{+0}=+\infty.$$

Таким образом, в точке $x_1=-2$ функция имеет разрыв второго рода.

Задача 8. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{-5x+3}{x-1}$.

Решение.

Поскольку в точке $x=1$ функция терпит разрыв, найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{-5x+3}{x-1}=\frac{-5+3}{1-0-1}=\frac{-2}{-0}=+\infty;\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{-5x+3}{x-1}=\frac{-5+3}{1+0-1}=\frac{-2}{+0}=-\infty.$$

Так как односторонние пределы в точке $x=1$ бесконечны, то в этой точке существует вертикальная асимптота – прямая $x=1$.

Найдем горизонтальную асимптоту. Так как

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-5x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{-5+0}{1-0}=-5,$$

то прямая $y=-5$ - горизонтальная асимптота графика функции.

Пусть прямая $y=kx+b$ - наклонная асимптота. Найдем параметры k и b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{x^2-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-5}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{0+0}{1-0}=\frac{0}{1}=0,$$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-5x+3}{x-1}-0\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x+3}{x-1}=-5$ (см. вычисление выше).

Следовательно, наклонная асимптота имеет вид $y=0\cdot x-5$, $y=-5$. В данном случае наклонная асимптота совпадает с горизонтальной.

4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1 Производная функции, её геометрический смысл

Пусть дан график непрерывной функции.

Определение. Разность между конечным и начальным значениями аргумента называется его *приращением*, т.е. $\Delta x = x - x_0$. При этом *функция получает приращение* $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$:

Теорема 1. Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Определение. *Производной* функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции Δy в точке x_0 к приращению аргумента Δx, т. е. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

С точки зрения механики производная определяет *мгновенную скорость* движения, а с геометрической точки зрения производная функции равна *тангенсу угла наклона касательной* к положительному направлению оси абсцисс в заданной точке, в которой вычисляется значение производной.

Пусть дан график функции $f(x)$.

Требуется составить уравнения касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$. Для составления уравнения касательной воспользуемся уравнением прямой: $y - f(x_0) = k_1(x - x_0)$. В силу того, что $k_1 = tg\varphi = f'(x_0)$, *уравнение касательной* имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Так как нормаль перпендикулярна к касательной, то ее угловой коэффициент k_2 связан с угловым коэффициентом касательной соотношением: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Следовательно, *уравнение нормали* имеет следующий вид: $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

4.2 Правила дифференцирования

Вычисление производной согласно определению является трудоемкой задачей. В связи с этим были получены следующие *правила дифференцирования*.

1) Производная от суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных от этих функций, т.е. $[U(x) \pm V(x)]' = U'(x) \pm V'(x)$.

2) Производная от произведения двух функций вычисляется по формуле:

$$(U\cdot V)'=U'\cdot V+U\cdot V'.$$

3) Производная от частного двух функций вычисляется согласно формуле:

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'\cdot V-U\cdot V'}{V^2}.$$

4) Производная обратной функции вычисляется по формуле: $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

5) Производная сложной функции $y=f(U(x))$ вычисляется по формуле:

$$y'_x=f'_U(U)\cdot U'_x.$$

4.3 Производные основных элементарных функций

Производные от элементарных функций и соответствующие производные сложных функций сведем в таблицу:

Производные элементарных функций	Производные сложных функций, $y=f(U),\ U=g(x)$
$(C)'=0,\ C=const$	-
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(U^n)'=nU^{n-1}\cdot U'$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{U})'=\frac{1}{2\sqrt{U}}\cdot U'$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{U}\right)'=-\frac{1}{U^2}\cdot U'$
$(e^x)'=e^x$	$(e^U)'=e^U\cdot U'$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^U)'=a^U\ln a\cdot U'$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a U)'=\frac{1}{U\ln a}\cdot U'$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln U)'=\frac{1}{U}\cdot U'$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin U)'=\cos U\cdot U'$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos U)'=-\sin U\cdot U'$
$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgU)'=\frac{1}{\cos^2 U}\cdot U'$
$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgU)'=-\frac{1}{\sin^2 U}\cdot U'$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin U)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(arctgU)' = \dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgU)' = -\dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$

Пример. Найти производную функции $y = \ln(4^x)$.

Решение.

По правилу дифференцирования сложной функции и с учетом выражения для логарифмической и показательной функций имеем $y' = (4^x)' \dfrac{1}{4^x} = \dfrac{4^x \ln 4}{4^x} = \ln 4$.

4.4 Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой Δx-окрестности точки x, т.е. существует конечный предел $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$. Так как предел конечен, то можно записать приращение функции в виде $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция в изучаемой окрестности данной точки. Сравним первое и второе слагаемые с бесконечно малой функцией Δx. Для первого слагаемого имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, т.е. оно является бесконечно малой функцией того же порядка малости, что и величина Δx. Для второго слагаемого получаем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0$, т.е. оно является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем величина Δx. Это означает, что первое слагаемое является главной частью указанной суммы.

Определение. Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента Δx, называется *дифференциалом* функции:

$$d\,f(x) = f'(x)\,\Delta x.$$

Если $f(x)=x$, то ее дифференциал $dx=(x)'\,\Delta x=\Delta x$. Следовательно, *дифференциал аргумента равен его приращению*. Отсюда получаем, что дифференциал функции можно записать в виде $d\,f(x)=f'(x)\,dx$. Таким образом, для производной можно ввести новую формулу $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$. Такая форма записи производной очень удобна для вывода различных формул.

Дифференциал функции с геометрической точки зрения описывает приращение касательной прямой при приращении аргумента $\Delta x \to 0$.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть дана функция $y=f(x)$, тогда при приращении аргумента Δx функция получает приращение $\Delta y = f'(x)\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \approx f'(x)\,\Delta x = d\,y$.
Это приближенное равенство позволяет по виду функции и известному значению функции в заданной точке вычислить значение функции в приращенной точке:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+d\,y=f(x)+f'(x)\,\Delta x.$$

Пример 3. Вычислить $\sqrt{4{,}01}$.

В данном примере задана функция $f(x)=\sqrt{x}$. В качестве точки x выбираем значение $x=4$, из которого легко извлекается квадратный корень: $\sqrt{4}=2$. Приращенной точкой является точка $x+\Delta x=4{,}01$. Таким образом, приращение аргумента равно $\Delta x=4{,}01-4=0{,}01$. Производная от заданной функции согласно таблице производных $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно,

$$\sqrt{4{,}01}\approx 2+\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot\ \cdot 0{,}01=2{,}0025.$$

Пусть дана функция $y=f(x)$, тогда согласно определению ее дифференциал равен $d\,f(x)=f'(x)\,dx$. Дифференциал аргумента dx равен его приращению Δx. Однако производная функции $f'(x)$ в общем случае является функцией аргумента x. В связи с этим дифференциал функции является функцией аргумента x. Следовательно, можно поставить вопрос о дифференцируемости дифференциала функции.

Определение. Дифференциал от первого дифференциала функции называется *вторым дифференциалом функции*, т.е.

$$d^2 f(x)=d(f'(x)\,dx)=(f'(x))'(dx)^2=f''(x)(dx)^2.$$

Определение. Производная от первой производной функции называется *второй производной функции*, т.е. $(f'(x))'=f''(x)$.

Аналогично вводятся дифференциалы и производные высших порядков:

$$d^3 f(x) = f'''(x)(d\,x)^3;$$
$$d^4\; f(x) = f^{(4)}(x)(d\,x)^4;$$
и так далее.

Отметим, что обозначение производной, начиная с четвертой, берется в скобки.

Производные высших порядков могут быть записаны в виде
$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{d\,x^2};\quad f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{d\,x^3};\text{ и т. д.}$$

Пример 4. Найти второй дифференциал функции $y = \sin x$.

Используя формулу для второго дифференциала, найдем вторую производную от заданной функции
$$(\sin x)' = \cos x;\quad (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x.$$
Следовательно, второй дифференциал равен
$$d^2 y = -\sin x(dx)^2.$$

4.5 Правило Лопиталя

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на открытом интервале $(a; b)$ и при $x \to a$ одновременно стремятся к нулю или бесконечности, то для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)$ применяется формула
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема Лопиталя применяется ***только для раскрытия неопределенностей вида*** $\left[\frac{0}{0}\right]$ ***или*** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия других типов неопределенностей, они должны путем тождественных преобразований вначале приведены к одной из двух указанных неопределенностей, после чего можно применять правило Лопиталя.

При применении правила Лопиталя ***производная берется отдельно от числителя и отдельно от знаменателя дроби***.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^3-a^3}$.

Так как $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^3-a^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$ применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^3-a^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{3a^2}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

При необходимости *правило Лопиталя применяется повторно*.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x}$.

В данном примере имеем дело с неопределенностью $[0^0]$. Предположим, что данный предел существует и равен А, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x}=A$.

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей равенства

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\ln(\sin x)^{tg\,x}=\lim_{x\to 0}tgx\ln(\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{ctg\,x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

(применим правило Лопиталя) $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x\cos x)=0$.

Отсюда находим предельное значение заданной функции $\ln A=0\Rightarrow A=e^0=1$.

4.6 Возрастание и убывание функций. Экстремумы. Необходимое условие существования экстремума

Из определений возрастающей и убывающей функций следует необходимое условие возрастания и убывания функции.

Теорема 1. Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$, то для любого $x\in[a;b]$ ее первая производная $f'(x)\geq 0$. Если дифференцируемая функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a;b]$, то для любого $x\in[a;b]$ ее первая производная $f'(x)\leq 0$.

Пример 8. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=x^2$.

Согласно теореме 1 вычислим первую производную функции $f(x)$: $f'(x)=2x$.

Эта производная будет отрицательной для всех $x<0$ и положительной для всех $x>0$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает для всех $x\in(-\infty;0)$ и $f(x)$ возрастает для всех $x\in(0;+\infty)$.

Теорема 2 (достаточное условие возрастания и убывания функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Если ее первая производная $f'(x) > 0$ для любого $x \in (a; b)$, то функция возрастает на отрезке $[a; b]$. Если ее первая производная $f'(x) < 0$ для любого $x \in (a; b)$, то функция убывает на отрезке $[a; b]$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум ($\min$), если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для любого $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум ($\max$), если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для любого $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение. Точки минимума и максимума объединяются под общим названием точки экстремума.

Точки экстремума всегда являются внутренними точками области определения функции.

Не следует путать *минимальное значение функции* f_{min} *с наименьшим значением функции на отрезке* $\min\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$, *максимальное значение функции* f_{max} *– с наибольшим значением функции на отрезке* $\max\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$.

Теорема 3 (необходимое условие существования экстремума функции). Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то ее первая производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Обращение в нуль первой производной функции в точке x_0 ***является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума в этой точке***. Непрерывная функция может иметь экстремум в точке x_0 даже в том случае, когда ее первая производная в этой точке не существует.

Определение. Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или не существует, называются критическими (стационарными) точками.

Всякая точка экстремума является критической точкой, однако не любая критическая точка будет экстремумом.

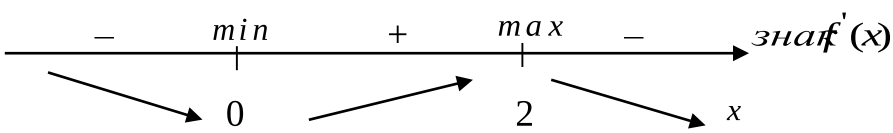
4.7 Достаточные признаки существования экстремумов. Выпуклость вверх и вниз графика функции. Асимптоты

Теорема 4 (первый достаточный признак существования экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме может быть самой точки x_0, и при переходе через эту точку слева направо ее первая производная меняет свой знак с “+” на “–”, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, а если ее первая производная меняет свой знак с “–” на “+”, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. Если при переходе через точку x_0 первая производная не меняет свой знак, то в этой точке экстремума нет.

Теорема 5 (второй достаточный признак существования экстремума). Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ обращается в ноль ($f'(x_0)=0$), а вторая производная существует, непрерывна в некоторой окрестности этой точки и отлична от нуля в самой точке ($f''(x_0)\neq 0$), то в точке x_0 наблюдается экстремум. Если при этом $f''(x_0)>0$, то точка x_0 является точкой минимума, а при $f''(x_0)<0$ – точкой максимума.

Пример 9. Найти экстремумы функции $f(x)=x^2e^{-x}$.

Решение. Вычислим первую производную функции и приравняем ее к нулю с целью отыскания критических точек: $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}x(2-x)=0$. Так как показательная функция $e^{-x}>0\ \forall x\in R$, то $x(2-x)=0$. Отсюда находим критические точки $x_1=0$ и $x_2=2$. Отложим эти точки на числовой оси и на каждом интервале определим знак первой производной функции, т.е. применим первый достаточный признак существования экстремума:



При переходе слева направо через точку $x_1=0$ первая производная функция меняет свой знак с “–” на “+”, следовательно, в этой точке наблюдается минимум. При переходе слева направо через точку $x_2=2$ первая производная функция меняет свой знак с “+” на “–”, следовательно, в этой точке наблюдается максимум.

Применим второй достаточный признак существования экстремума, для чего вычислим вторую производную функции: $f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)$. Вычислим значение второй производной функции в точке $x_1=0$: $f''(0)=2>0$

, следовательно, в этой точке функция имеет минимум. Вычислим значение второй производной функции в точке $x_2 = 2: f''(2) = -2e^{-2} < 0$, следовательно, в этой точке функция имеет максимум.

Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[a; b]$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет конечное число точек экстремума на этом интервале. Если наибольшее значение функция достигает внутри отрезка, то очевидно, что это будет один из максимумов (аналогично для наименьшего значения – один из минимумов). Однако возможны варианты, когда функция достигает своих наименьшего и наибольшего значений на концах заданного отрезка. Поэтому для отыскания этих значений применяют следующую схему:

1. Находят область определения функции и убеждаются в том, что заданный отрезок входит в эту область.
2. Находят критические точки, для чего решают уравнение $f'(x) = 0$, и точки, в которых первая производная функции не существует.
3. Вычисляют значения функции в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, в точках, в которых первая производная функции не существует и на концах заданного отрезка.
4. Из полученных чисел выбирают наименьшее $m = \min\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$ и наибольшее $M = \max\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$.

Пример 10. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[0; 5]$.

Решение. Действуя согласно вышеприведенной схеме, находим:

1) $D(y) = R;\ [0; 5] \subset R$. Следовательно, функция определена и непрерывна на заданном отрезке.

2) Вычислим первую производную $f'(x) = 3x^2 - 3$. Производная существует на всей числовой оси, поэтому найдем критические точки $3x^2 - 3 = 0$. Отсюда находим, что $x_1 = -1 \notin [0; 5]$ и $x_2 = 1 \in [0; 5]$.

3) Вычислим значение функции в критических точках и на концах заданного отрезка:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0; \quad f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2; \quad f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110.$$

4) Из полученных чисел выбираем наименьшее $m = f(1) = -2$ и наибольшее $M = f(5) = 110$, которые определяют наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[0; 5]$.

Выпуклость вверх и вниз графика функции. Точки перегиба

Определение. График функции $f(x)$ называется выпуклым вверх на интервале $(a; b)$, если он лежит ниже любой касательной, проведенной к графику этой функции на заданном интервале.

Определение. График функции $f(x)$ называется выпуклым вниз на интервале $(a; b)$, если он лежит выше любой касательной, проведенной к графику этой функции на заданном интервале .

Теорема 6 (достаточные условия выпуклости вверх и вниз). Если вторая производная функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ существует и положительна, то на этом интервале график функции $f(x)$ будет выпуклым вниз. Если вторая производная функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ существует и отрицательна, то на этом интервале график функции $f(x)$ будет выпуклым вверх.

Пример 11. Определить направление выпуклости графика функции $f(x) = e^x$.

Найдем вторую производную от заданной функции $f''(x) = e^x$. В силу того, что $f''(x) = e^x > 0 \ \forall x \in R$, то график функции $f(x) = e^x$ будет выпуклым вниз на всей числовой оси.

Определение. Точка, в которой меняется направление выпуклости графика функции, называется *точкой перегиба*.

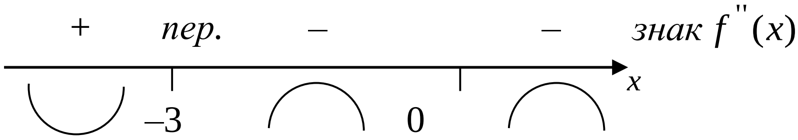
Теорема 7 (необходимое условие существования точки перегиба). Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку перегиба x_p, то в точке перегиба вторая производная равна нулю, т.е. $f''(x_p) = 0$.

Обращение в нуль второй производной функции в точке перегиба является необходимым, но не достаточным условием существования такой точки на графике функции.

Теорема 8 (достаточное условие существования точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на некотором интервале, вторая производная которой в точке x_p, принадлежащей этому интервалу, обращается в нуль ($f''(x_p) = 0$) или не существует. Если при переходе через точку x_p вторая производная функции меняет свой знак, то точка x_p определяет точку перегиба графика функции $f(x)$.

Пример 12. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$.

Решение. Найдем вторую производную заданной функции $f''(x)=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$. Найдем точки подозрительные на перегиб: а) $f''(x)=0 \Rightarrow x\notin R$ б) $f''(x)$ – не существует $\Rightarrow$ знаменатель дроби обращается в ноль при $x_1=0$ и $x_2=-3$. Отложим эти точки на числовой оси и определим знак второй производной на каждом интервале:



Из рисунка видно, что точка $x_2=-3$ является точкой перегиба, так как при переходе через нее вторая производная изменяет свой знак. Точка $x_1=0$ не является точкой перегиба, так как при переходе через нее вторая производная не изменяет своего знака.

Асимптоты графика функции

В большинстве практических случаев необходимо знать поведение функции при неограниченном росте (убыли) аргумента. Одним из наиболее интересных случаев, которые возникают при таком исследовании, является случай, когда график функции неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая (l): $y=kx+b$ называется *асимптотой графика* функции $f(x)$, если расстояние от переменной точки графика до этой прямой стремится к нулю при стремлении аргумента $x\to\pm\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|f(x)-y\right|=0$.

График функции может приближаться к асимптоте сверху, снизу, слева, справа или колеблясь возле этой прямой (Рис. 50).

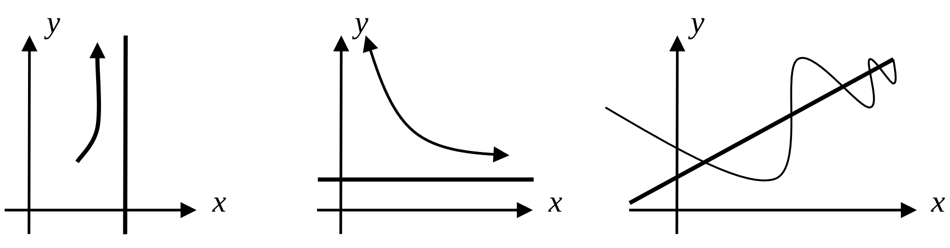


Рис. 50

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Определение. Вертикальная прямая $x=a$ называется *вертикальной* асимптотой, если $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$. Горизонтальная прямая $y=b$ называется *горизонтальной* асимптотой, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной* асимптотой, при этом параметр $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ и параметр $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$ отличаются от $\pm\infty$ и $k\neq 0$.

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты: если $k=0$, то наклонная асимптота вырождается в горизонтальную $y=b$, при условии, что $b\neq\pm\infty$. Если параметр $b=\pm\infty$, то горизонтальной асимптоты не существует.

Алгоритм полного исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность/нечетность и периодичность.
3. Найти точки пересечения с координатными осями.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Исследовать функцию на непрерывность (определить точки разрыва, если они есть; найти односторонние пределы в точках разрыва и определить, какого рода разрыв).
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы.
8. Исследовать функцию на направление выпуклости и точки перегиба.
9. По данным исследования построить схематичный график функции. Если необходимо, построить таблицу значений функции.

Пример 13. Исследовать и построить схематичный график функции $f(x)=xe^{x}$.

Решение. Используя схему исследования графика функции с помощью производных, найдем:

1. $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

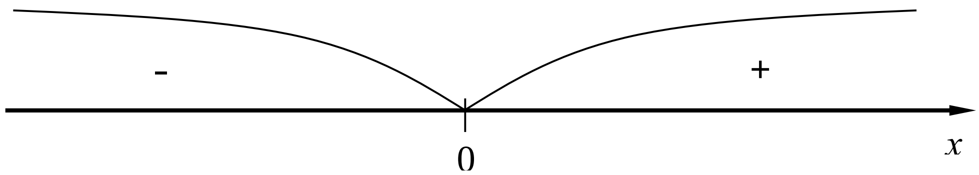
2. Функция непериодическая. Область определения $D(y)$ симметрична относительно начала координат. Найдем $y(-x)$: $y(-x)=-x\cdot e^{-x}$. Так как $y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq y(x)$, то данная функция ни четная, ни нечетная (функция общего типа).

3. Найдем точки пересечения графика функции с координатными осями

Ox: $f(x)=0 \Rightarrow xe^{x}=0 \Rightarrow x=0$, т.е. $O(0;\,0)$ – точка пересечения с осью абсцисс;

Oy: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=0e^{0}=0$, т.е. $O(0;\,0)$ – точка пересечения с осью ординат.

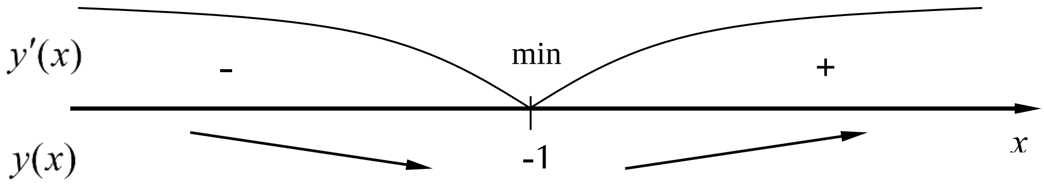
4. Найдем промежутки знакопостоянства функции. Для этого отметим в области определения нули функции (точки пересечения с осью Ox) и найдем знак функции в каждом интервале:



5. Функция непрерывна на R.

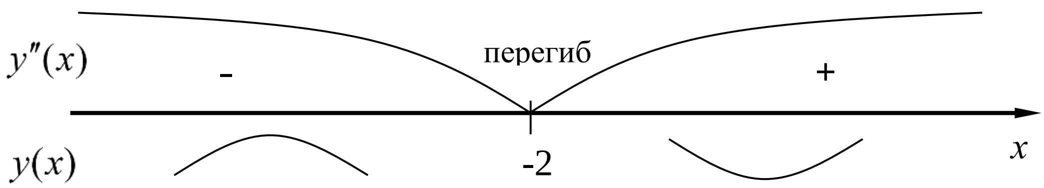
6. Так как функция непрерывна, то вертикальных асимптот у графика нет. Найдем $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^x=\begin{cases}\infty, & при\ \ x\to\infty;\\ 0, & при\ \ x\to-\infty\end{cases}$. Таким образом, при $x\to\infty$ асимптот нет, а при $x\to-\infty$ возможна горизонтальная асимптота. Вычислим параметр $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\,x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-0\cdot x)=0$. Следовательно, график заданной функции имеет горизонтальную асимптоту $y=0$.

7. Найдем первую производную функции $f'(x)=(1+x)e^x$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдем критические точки, решая уравнение $f'(x)=(1+x)e^x=0\ \Rightarrow x=-1$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак первой производной на каждом интервале



Так как при переходе слева направо через точку $x=-1$ первая производная меняет свой знак с “–” на “+”, то в этой точке наблюдается минимум. Вычислим значение функции в точке минимуме $y_{\min}=y(-1)=-1\cdot e^{-1}\approx-0{,}37$.

8. Найдем вторую производную функции $f''(x)=(2+x)e^x$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдем точки, подозрительные на перегиб, решая уравнение $f''(x)=(2+x)e^x=0\ \Rightarrow x=-2$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак второй производной на каждом интервале



Так как при переходе слева направо через точку $x=-2$ вторая производная меняет свой знак, то в этой точке наблюдается точка перегиба. Вычислим значение функции в точке перегиба: $y(-2)=-2\cdot e^{-2}\approx-0{,}27$.

9. Построим схематичный график функции (Рис. 51), выбрав по координатным осям разные масштабы измерения.

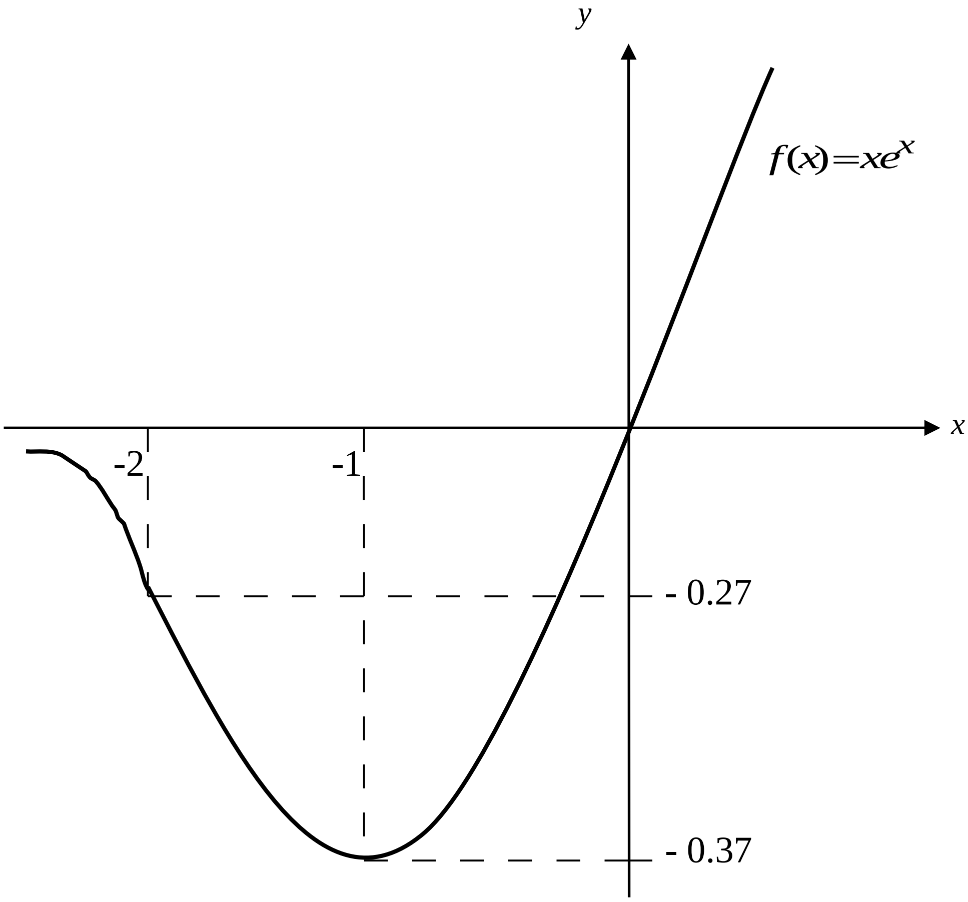


Рис. 51

ПРАКТИКУМ К ГЛАВЕ 4

Задача 1. Используя таблицу производных и правила дифференцирования, найти производные следующих функций: 1) $y=4x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $y=\left(x^2+1\right)\cos x$; 3) $y=\frac{x-1}{2\arccos x}$; 4) $y=5^x+x\ln x$.

Решение. 1) С помощью свойств степени запишем данную функцию в виде:

$$y=4x^3-x^{-\frac{1}{2}}+6x^{-\frac{2}{3}}.$$

Тогда

$$y'=\left(4x^3\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+\left(6x^{-\frac{2}{3}}\right)'=4\left(x^3\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)+6\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=4\cdot 3x^2-\left(-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}\right)+$$
$$+6\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}\right)=12x^2+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{5}{3}}=12x^2+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^5}};$$

2) Применим правило дифференцирования произведения функций, получим:

$$y'=\left(x^2+1\right)'\cos x+\left(x^2+1\right)(\cos x)'=\left(\left(x^2\right)'+1'\right)\cos x+\left(x^2+1\right)(\cos x)'=$$
$$=(2x+0)\cos x+\left(x^2+1\right)(-\sin x)=2x\cos x-\left(x^2+1\right)\sin x;$$

3) Применим правило дифференцирования частного двух функций, получим:

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{\arccos x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)'\arccos x-(x-1)(\arccos x)'}{\arccos^2 x}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot\arccos x-(x-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\arccos^2 x}=\frac{\arccos x+\frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\arccos^2 x};$$

4) Имеем:

$$y'=\left(5^x\right)'+(x\ln x)'=5^x\ln 5+(x)'\ln x+x(\ln x)'=5^x\ln 5+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=5^x\ln 5+\ln x+1.$$

Задача 2. Найти производные функций: 1) $y=\ln\left(x^3-3x^2+4x\right)$; 2) $y=\sqrt{\cos\frac{x}{6}}$; 3) $y=e^{4x}\cdot\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)$; 4) $y={\arcsin\sqrt{5x}}\big/{5^{2x+1}}$.

Решение.

1) Положим $y=\ln u$, где $u=x^3-3x^2+4x$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{x^3-3x^2+4x}\cdot\left(x^3-3x^2+4x\right)'=\frac{3x^2-6x+4}{x^3-3x^2+4x};$$

2) Полагая $y=\sqrt{u}$, $u=\cos t$, $t=\frac{x}{6}$, по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{\cos\frac{x}{6}}}\cdot\left(\cos\frac{x}{6}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\cos\frac{x}{6}}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{6}\right)\cdot\left(\frac{x}{6}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\cos\frac{x}{6}}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}=-\frac{\sin\frac{x}{6}}{12\sqrt{\cos\frac{x}{6}}};$$

3) Применим правило дифференцирования произведения функций $(u\cdot v)'=u'v+uv'$. Положим $u=e^{4x}$, $v=\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)$. Получим:

$$y'=\left(e^{4x}\right)'\cdot\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)+e^{4x}\cdot\left(\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)\right)'=e^{4x}(4x)'\cdot\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)+$$

$$+e^{4x}\cdot2\sin\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)'=4e^{4x}\cdot\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)+2e^{4x}\sin\left(\frac{2}{x}\right)\cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left(\frac{2}{x}\right)'=$$

$$=4e^{4x}\cdot\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)+2e^{4x}\sin\left(\frac{2}{x}\right)\cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=4e^{4x}\cdot\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)-\frac{2e^{4x}}{x^2}\sin\left(\frac{4}{x}\right).$$

4) Применим правило дифференцирования частного функций $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. Положим $u=\arcsin\sqrt{5x}$, $v=5^{2x+1}$. В результате получим:

$$y' = \frac{\left(\arcsin\sqrt{5x}\right)' \cdot 5^{2x+1} - \arcsin\sqrt{5x} \cdot \left(5^{2x+1}\right)'}{\left(5^{2x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{5x}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{5x}\right)' \cdot 5^{2x+1} - \arcsin\sqrt{5x} \cdot 5^{2x+1} \cdot \ln 5 \cdot (2x+1)'}{\left(5^{2x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{5^{2x+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-5x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{5x}}(5x)' - \arcsin\sqrt{5x} \cdot \ln 5 \cdot 2\right)}{\left(5^{2x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{5}{2\sqrt{5x(1-5x)}} - 2\ln 5 \cdot \arcsin\sqrt{5x}}{5^{2x+1}}.$$

Задача 3. Найти производную показательно-степенной функции $y = \left(x^2+3\right)^{\cos 2x}$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства по основанию e:

$$\ln y = \ln\left(x^2+3\right)^{\cos 2x}, \qquad \ln y = \cos 2x \cdot \ln\left(x^2+3\right).$$

Продифференцируем теперь обе части последнего равенства, применив справа правило дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos 2x)' \cdot \ln\left(x^2+3\right) + \cos 2x \cdot \left(\ln\left(x^2+3\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin 2x \cdot (2x)' \cdot \ln\left(x^2+3\right) + \cos 2x \cdot \frac{1}{x^2+3} \cdot \left(x^2+3\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -2\sin 2x \cdot \ln\left(x^2+3\right) + \cos 2x \cdot \frac{2x}{x^2+3}.$$

Учитывая, что $y = \left(x^2+3\right)^{\cos 2x}$, окончательно получаем:

$$y' = \left(x^2+3\right)^{\cos 2x} \cdot \left(-2\sin 2x \cdot \ln\left(x^2+3\right) + \frac{2x \cdot \cos 2x}{x^2+3}\right).$$

Задача 4. Найти третью производную функции $y = x\ln 2x$ в точке $x = 2$.

Решение. Найдем первую производную функции, применяя правило дифференцирования произведения функций:

$$y' = (x)' \ln 2x + x(\ln 2x)' = 1 \cdot \ln 2x + x \cdot \frac{1}{2x}(2x)' = \ln 2x + x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \ln 2x + 1.$$

Найдем теперь вторую производную функции:

$$y'' = (y')' = (\ln 2x + 1)' = \frac{1}{2x} \cdot (2x)' + 1' = \frac{1}{2x} \cdot 2 + 0 = \frac{1}{x}.$$

Найдем третью производную функции:

$$y''' = (y'')' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Определим значение третьей производной в указанной точке $x = 2$:

$$y'''(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}.$$

Задача 5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \left(3x - 2x^3\right)^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем производную заданной по условию функции:

$$y' = 2\left(3x - 2x^3\right) \cdot \left(3x - 2x^3\right)' = 2\left(3x - 2x^3\right)\left(3 - 6x^2\right).$$

Имеем: $f(x_0) = f(1) = (3 - 2 \cdot 1)^2 = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 2(3 - 2)(3 - 6) = -6$.

Подставляя эти значения в уравнение касательной, получим уравнение вида:

$$y = 1 + (-6)(x - 1), \quad y = 1 - 6x + 6, \quad y = -6x + 7.$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид: $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Тогда получаем уравнение:

$$y = 1 - \frac{1}{-6}(x - 1), \quad y = 1 + \frac{1}{6}(x - 1), \quad y = 1 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}, \quad y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}.$$

Задача 6. Точка движется прямолинейно по закону $S = \dfrac{t^3}{3} + 2t^2 - t$. Найти скорость и ускорение движения через 1 с после начала движения.

Решение. Скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени:

$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{t^3}{3}+2t^2-t\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3t^2+2\cdot 2t-1=t^2+4t-1.$$

Тогда через 1 с после начала движения скорость движения равна:

$$v(1)=1^2+4\cdot 1-1=4 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение прямолинейного движения равно второй производной пути по времени:

$$a(t)=S''(t)=\left(t^2+4t-1\right)'=2t+4.$$

Следовательно, через 1 с после начала движения ускорение движения будет равно:

$$a(1)=2\cdot 1+4=6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача 7. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y=\frac{6}{\sqrt{x}}$ в точке $x=4{,}018$.

Решение.

Применим формулу приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала: $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$.

По условию, $x=4{,}018=4+0{,}018$, значит, $x_0=4,\ \Delta x=0{,}018$. Найдем производную заданной функции:

$$y'=\left(\frac{6}{\sqrt{x}}\right)'=6\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=6\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right)=-3x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{x\sqrt{x}}.$$

Имеем: $f(x_0)=f(4)=\frac{6}{\sqrt{4}}=\frac{6}{2}=3,\ f'(x_0)=f'(4)=-\frac{3}{4\sqrt{4}}=-\frac{3}{8}=-0{,}375.$

Тогда $f(4{,}018)=\frac{6}{\sqrt{4{,}018}}\approx 3+(-0{,}375)\cdot 0{,}018=2{,}993.$

Задача 8. Применяя правило Лопиталя найти пределы следующих функций: 1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} xctg3x$; 3) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{6}{9-x^2}-\frac{1}{x+3}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\cos x}$.

Решение.

1) Подставляя в заданную функцию $x=-1$, получим неопределенность вида 0/0:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}=\frac{3-2-1}{-1-1+2}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. заменим отношение функций отношением их производных:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{6x+2}{-2x+1}=\frac{6\cdot(-1)+2}{-2\cdot(-1)+1}=\frac{-6+2}{2+1}=-\frac{4}{3}.$$

2) Подставляя в функцию $x=0$, получим неопределенность $0\cdot\infty$. Учтем, что $ctg3x=\dfrac{1}{tg3x}$, получим под знаком предела функцию $\dfrac{x}{tg3x}$ и неопределенность вида 0/0. Раскрываем неопределенность по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}xctg3x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 3x}{3}=\frac{1}{3}.$$

3) В заданной функции обе дроби при $x=-3$ являются бесконечно большими, т.е. получается неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Приведем дроби в скобках к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{6}{9-x^2}-\frac{1}{x+3}\right)=\lim_{x\to -3}\frac{6-(3-x)}{(3-x)(3+x)}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{9-x^2}=\frac{-3+3}{9-9}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{9-x^2}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{-2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -3}\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}.$$

4) В данном случае имеет место неопределенность вида (∞^0). Пусть $y=(tgx)^{\cos x}$, логарифмируя обе части этого равенства, получим:

$$\ln y=\ln(tgx)^{\cos x}=\cos x\cdot\ln(tgx).$$

Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(tgx)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(tgx)}{\dfrac{1}{\cos x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

По правилу Лопиталя находим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(tgx)}{\frac{1}{\cos x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{tgx}\cdot(tgx)'}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{tgx\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = .$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin xtgx} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1.$$

Задача 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ на отрезке $[-3;\ 3]$.

Решение. Для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, надо вычислить значения функции на концах промежутка и во всех её критических точках, принадлежащих промежутку.

Заданная по условию функция непрерывна на отрезке $[-3;\ 3]$. Найдем производную: $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6\cdot\left(x^2 - x - 2\right)$.

В данном случае критическими являются точки, в которых производная равна нулю, т.е. $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, причем обе они принадлежат рассматриваемому отрезку $[-3;\ 3]$. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y(-1) = 17,\quad y(2) = -10,\quad y(-3) = -35,\quad y(3) = 1.$$

Среди этих значений выбираем наименьшее и наибольшее:

$$y_{наим} = y(-3) = -35,\qquad y_{наиб} = y(-1) = 17.$$

Задача 10. Разность двух чисел равна 12. Каковы должны быть эти числа, чтобы их произведение было наименьшим?

Решение. При решении задач на вычисление наименьших и наибольших значений величин надо определить, для какой величины в задаче необходимо найти наименьшее или наибольшее значение. Она и будет исследуемой функцией. В качестве независимой переменной лучше всего выбрать переменную, через которую исследуемая функция выражается проще всего.

Обозначим одно число x, тогда второе будет равно $x+12$. Функция, которая выражает произведение этих двух чисел, имеет вид:

$$f(x) = x(x+12) = x^2 + 12x.$$

Область определения этой функции – вся числовая прямая.

Найдем производную функции: $f'(x) = 2x + 12 = 2(x+6)$.

Приравнивая производную к нулю, получим единственную критическую точку: $x = -6$. Она разбивает область определения функции на два интервала (Рис. 52). Определяем знак производной в каждом интервале, и отмечаем поведение функции.

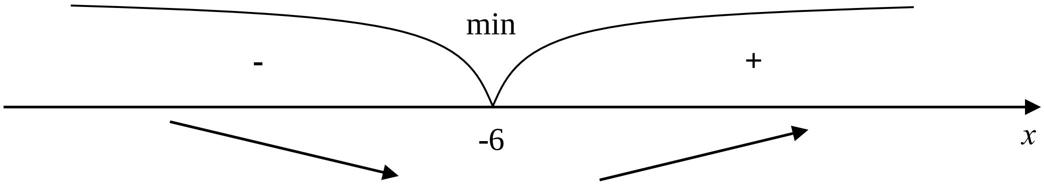


Рис. 52

Таким образом, точка $x = -6$ является точкой минимума функции, а значит, в ней функция, выражающая произведение чисел, принимает свое наименьшее значение. Итак, получили одно число равным -6, тогда второе равно 6.

Задача 11. В каком отношении находятся наибольший объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в шар, к объему этого шара?

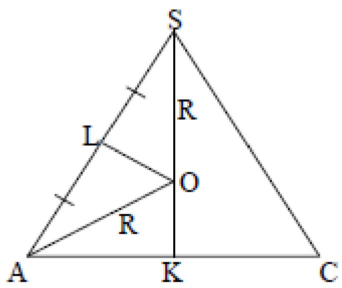


Рис. 53

Решение. Пусть радиус шара равен R. Рассмотрим осевое сечение нашей фигуры плоскостью, проходящей через высоту пирамиды SK и одну из диагоналей основания AC (Рис. 53).

Обозначим $AC = a$, $SK = h$.

Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$. Так как в основании пирамиды лежит правильный квадрат, то $S_{осн} = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{a^2}{2}$. Поэтому $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 h = \frac{1}{6} a^2 h$.

Установим связь между параметрами a и h. Из подобия треугольников $\Delta ASK \sim \Delta OSL$ следует, что $\frac{LS}{SK} = \frac{SO}{AS}$, откуда $LS \cdot AS = SO \cdot SK$. Так как центром окружности, описанной около треугольника, является точка O, которая лежит на пересечении серединных перпендикуляров сторон треугольника, то $LS=\frac{1}{2}AS$, $AK=\frac{1}{2}AC$. Так как $SO=R,\ AS=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$, то получим: $\frac{1}{2}AS^2=SO\cdot SK$, $\frac{1}{2}\left(h^2+\frac{a^2}{4}\right)=Rh$, откуда находим $a^2=4\left(2Rh-h^2\right)$. Подставляя это выражение в формулу для объема пирамиды, получим зависимость объема от высоты:

$$V==\frac{1}{6}\cdot 4h\left(2Rh-h^2\right)=\frac{2}{3}\left(2Rh^2-h^3\right).$$

Исследуем эту функцию на экстремум. Область определения функции $D(V)=(0;\ 2R)$. Найдем производную функции:

$$V'=\frac{2}{3}\left(4Rh-3h^2\right)=\frac{2}{3}h\left(4R-3h\right).$$

Найдем критические точки:

$$V'=0,\ \frac{2}{3}h\left(2R-3h\right)=0,\ \text{откуда}\ h=0\notin D(V),\ \text{или}\ h=\frac{4}{3}R.$$

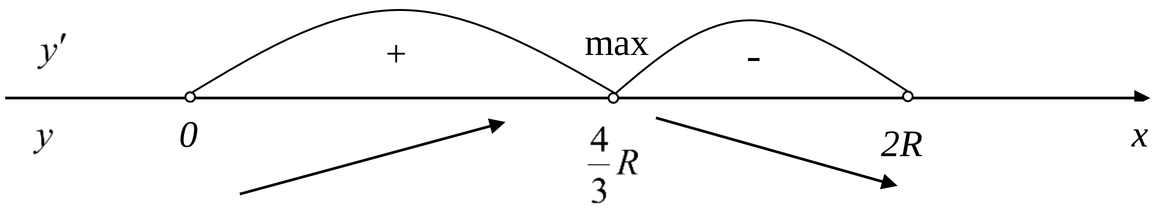


Рис. 54

Исследуя знаки производной в интервалах и поведение функции (Рис. 54), находим, что при $h=\frac{4}{3}R$ объем пирамиды будет максимальным: $V_{\max}=\frac{64}{81}R^3$. Учитывая, что объем шара равен $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, находим искомое в задаче отношение объемов: $\frac{V_{\max}}{V}=\frac{16}{27\pi}$.

Задача 12. Исследовать функцию $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить её график.

Решение.

1) Функция определена при всех значениях аргумента x, кроме $x=1$. Следовательно, область определения функции: $D(y)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

2) Функция непериодическая. Так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то данная функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего типа).
3) Найдем точки пересечения с осями координат.

   С осью Ox: $y=0,\quad 2x-1=0,\quad x=\dfrac{1}{2}$, т.е. $\left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$ - точка пересечения с осью Ox. С осью Oy: $x=0,\quad y=-1$, т.е. $(0;\ -1)$ - точка пересечения с осью Oy.
4) Определим промежутки знакопостоянства. Нуль функции $x=\dfrac{1}{2}$ разбивает область определения функции на три интервала (Рис. 55), в каждом из которых определяем знак функции.

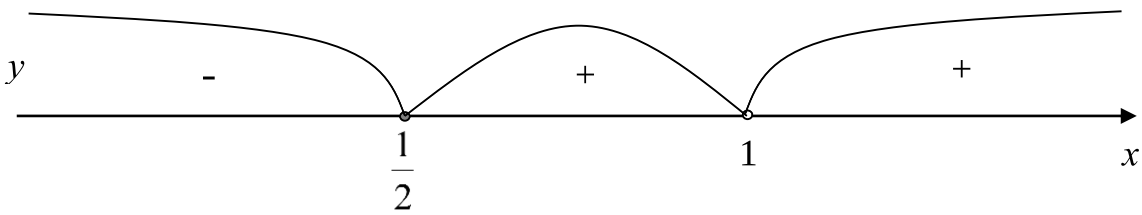


Рис. 55

Таким образом, функция принимает отрицательные значения в интервале $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right)$, а в интервалах $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ и $(1;+\infty)$ функция принимает положительные значения.

5) Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна в своей области определения. В точке $x=1$ функция терпит разрыв. Найдем односторонние пределы в точке разрыва:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{2(1-0)-1}{(1-0-1)^2}=\frac{1}{(-0)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{2(1+0)-1}{(1+0-1)^2}=\frac{1}{(+0)^2}=+\infty.$$

   Значит, $x=1$ - точка разрыва второго рода.
6) Вертикальные асимптоты графика функции следует искать в точках разрыва второго рода. Поэтому прямая $x=1$ - вертикальная асимптота графика функции.

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-2x+1}=\left|\begin{matrix}\textit{правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x-2}=0,$$

Значит, прямая $y=0$ - горизонтальная асимптота графика функции.

Проверим наличие наклонной асимптоты $y=kx+b$. Для этого найдем пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

То есть наклонная асимптота совпадает с горизонтальной асимптотой $y=0$.

7) Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную по правилу дифференцирования дроби:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-(2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{x}{(x-1)^2}.$$

Производная $y'=0$ при $x=0$ и y' не существует при $x=1$. Тем самым имеем две критические точки: $x_1=0,\ x_2=1$. Но точка $x_2=1$ не принадлежит области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Разобьем числовую ось на три интервала (Рис. 3): $(-\infty;0),(0;1),(1;\infty)$.

В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, следовательно, здесь функция убывает; во втором интервале – положительна и данная функция возрастает. При переходе через точку $x=0$ первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум: $y_{\min}=y(0)=-1$. Значит, точка (0;-1) – точка минимума функции.

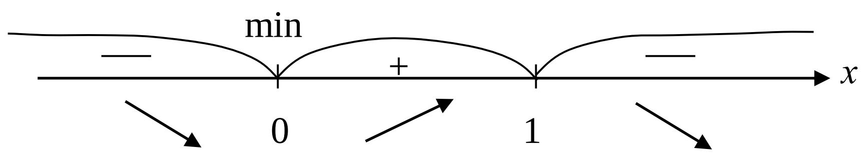


Рис. 56

На рисунке 56 знаками +, - указаны интервалы знакопостоянства производной y', а стрелками – возрастание и убывание исследуемой функции.

8) Для определения точек перегиба графика функции и направления выпуклости графика функции найдем вторую производную:

$$y''=-\frac{(x-1)^3-x\cdot 3(x-1)}{(x-1)^6}^{3}=\frac{2x+1}{(x-1)^6}.$$

Вторая производная равна нулю ($y''=0$) при $x=-\frac{1}{2}$ и y'' не существует при $x=1$. Разобьем числовую ось на три интервала (Рис. 57): $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $(1;\infty)$. На правом интервале вторая производная $y''<0$, и дуга исследуемой кривой выпукла вверх; на втором и третьем интервалах $y''>0$, тем самым график является выпуклым вниз. При переходе через точку $x=-\frac{1}{2}$ вторая производная меняет свой знак, поэтому $x=-\frac{1}{2}$ - абсцисса точки перегиба. Следовательно, $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$- точка перегиба графика функции.

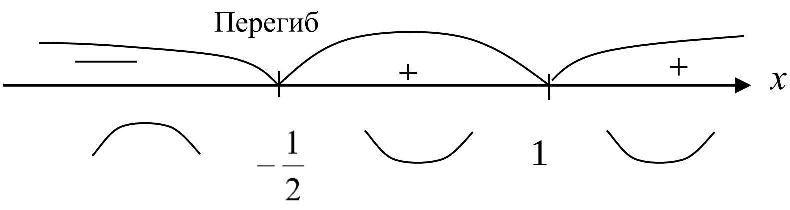


Рис. 57

9) Построим график заданной функции (Рис. 58).

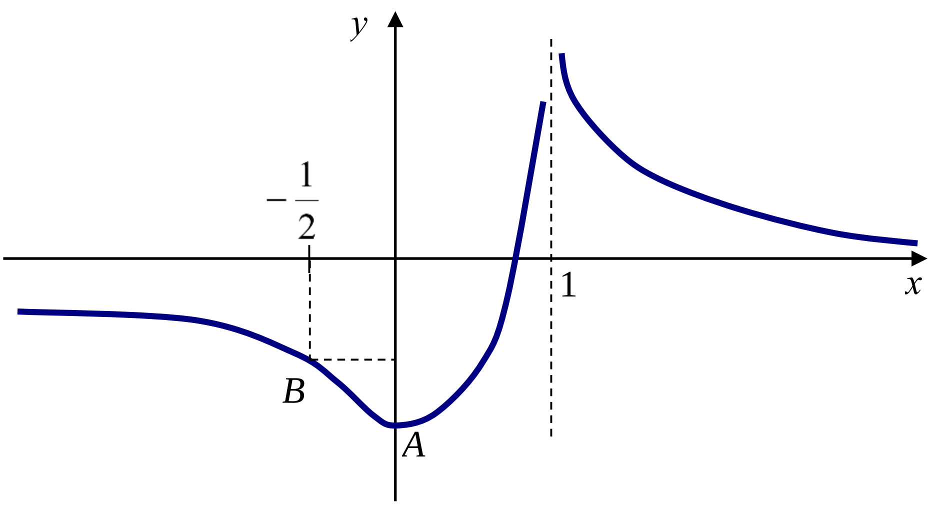


Рис. 58

Задача 13. Исследовать функцию $y=xe^{x}$ и построить её график.

Решение.

1) Функция определена при всех значениях аргумента x, значит, $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$.

2) Данная функция непериодическая. Область определения функции симметрична относительно начала координат. Найдем $f(-x)$: $f(-x)=-xe^{-x}$.

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то данная функция ни чётная, ни нечётная (функция общего типа).

3) Найдем точки пересечения с осями координат.

С осью Ox: $y = 0$, $xe^x = 0$; так как $e^x \neq 0$ для любого $x \in R$, то $x = 0$.

Значит, $(0;\ 0)$- точка пересечения с осью Ox.

С осью Oy: $x = 0$, $y = 0 \cdot e^0 = 0$, поэтому $(0;\ 0)$ - точка пересечения и с осью Oy.

4) Определим промежутки знакопостоянства. Нуль функции $x = 0$ разбивает область определения функции на два интервала (Рис. 59), в каждом из которых определяем знак функции: при $x = -1$ находим $y(-1) = -1 \cdot e^{-1} < 0$; при $x = 1$ находим $y(1) = 1 \cdot e^1 > 0$.

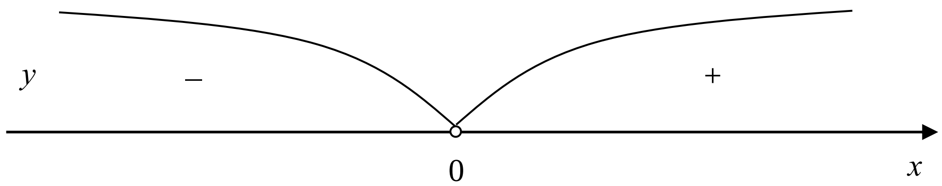


Рис. 59

5) Данная функция непрерывна на всей числовой прямой. Точек разрыва у функции нет.

6) Найдем асимптоты графика функции. Так как функция непрерывна, то вертикальных асимптот у графика функции нет.

Пусть прямая $y = b$ – горизонтальная асимптота. Поскольку функция e^x имеет разные пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, то находим

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x = \infty \cdot \infty = +\infty,$$

т.е. правой горизонтальной асимптоты у графика функции нет;

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\begin{matrix}\textit{правило} \\ \textit{Лопиталя}\end{matrix}\right| = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

т.е. прямая $y = 0$ - левая горизонтальная асимптота графика функции.

Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$. Для этого найдем пределы: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$. Имеем:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$$

т.е. правой наклонной асимптоты у графика функции нет.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(xe^x - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\begin{matrix} \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{matrix}\right| = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Поэтому прямая $y = 0\cdot x + 0,\ \ y = 0$ - левая наклонная асимптота графика функции (т.е. левая наклонная асимптота совпадает с левой горизонтальной).

7) Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную по правилу дифференцирования произведения:

$$y' = x'\cdot e^x + x\cdot\left(e^x\right)' = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$

Найдем критические точки из уравнения $y' = 0$:

$$e^x(1+x) = 0, \qquad e^x \neq 0,\ 1 + x = 0, \qquad x = -1.$$

Критическая точка разбивает область определения на два интервала: $(-\infty;\ -1)$ и $(-1;\ +\infty)$. Определим знак производной и поведение функции в каждом интервале (Рис. 60): при $x = -2$, $y'(-2) = e^{-2}(1-2) < 0$, функция убывает; при $x = 0$, $y'(0) = e^0(1+0) = 1 > 0$, функция возрастает.

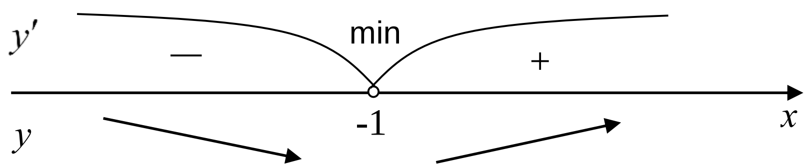


Рис. 60

Следовательно, точка $x = -1$ является точкой минимума функции. Находим

$$y_{\min} = y(-1) = -1\cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

8) Для определения точек перегиба и направления выпуклости графика функции найдем вторую производную:

$$y'' = \left(e^x(1+x)\right)' = \left(e^x\right)'(1+x) + e^x(1+x)' = e^x(1+x) + e^x = e^x(x+2).$$

Найдем критические точки из уравнения $y''=0$:

$$e^x(x+2)=0, \quad e^x \neq 0,\ x+2=0, \quad x=-2.$$

Критическая точка разбивает область определения на два интервала: $(-\infty;\,-2)$ и $(-2;\,+\infty)$. Определим знак второй производной и направление выпуклости графика функции в каждом интервале (Рис. 61): при $x=-3$, $y''(-3)=e^{-3}(-3+2)<0$, функция выпукла вверх; при $x=0$, $y''(0)=e^0(0+2)=2>0$, функция выпукла вниз.

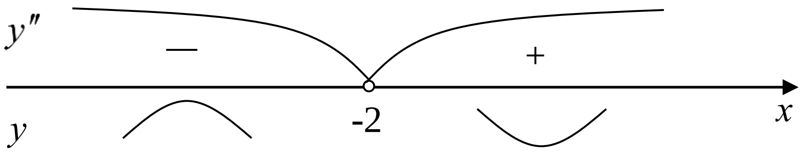


Рис. 61

В точке $x=-2$ функция меняет направление выпуклости, поэтому $x=-2$ - точка перегиба графика функции. Находим $y(-2)=-2e^{-2}=-\dfrac{2}{e^2}$.

9) Построим график функции (Рис. 62).

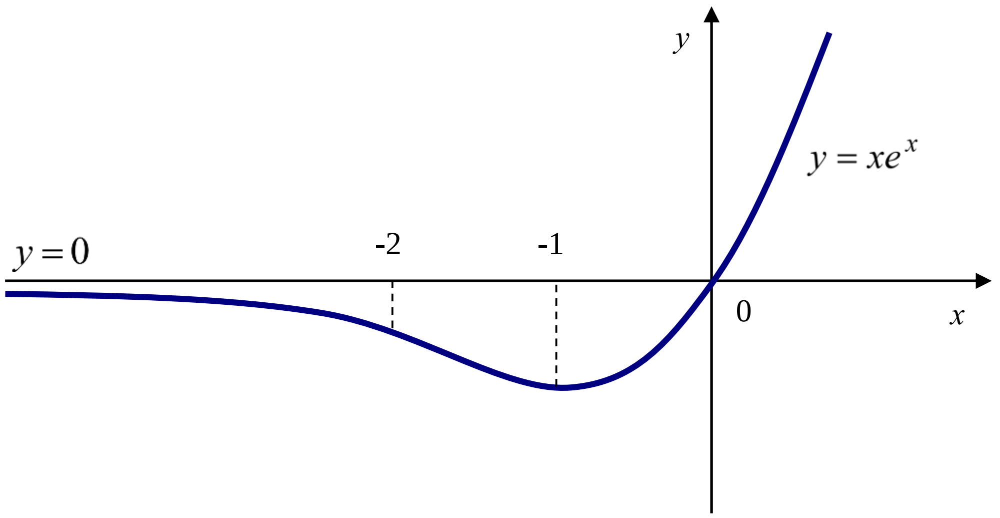


Рис. 62

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2014. 208 с.
2. Горлач Б.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник. СПб.: Лань, 2017. 300 с
3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие для вузов. М.: Физматлит, 2011. 168 с.
4. Кожухов И.Б. Сборник задач по математике для втузов. В 4 т. Т. 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры: учеб. пособие для втузов. М.: Физматлит, 2009. 288 с.
5. Козлов В.М. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2009. 320 с.
6. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Мн.: Вышэйшая шк., 2011. 304 с.
7. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие / И.А. Соловьев, В.В. Шевелев, А.В. Червяков и др. СПб.: Лань, 2009. 320 с.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб.: Профессия, 2001. 432 с.
9. Бермант А.Ф., Араманович И.Г Краткий курс математического анализа для вузов. СПб: Лань, 2005. 736 с.
10. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: АСТ, 2001. 656 с.
11. Сборник задач по математическому анализу. Т 2. Интегралы. Ряды: учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 504 с.
12. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 336 с.
13. Шипачев В.С. Высшая математика: учебное пособие для вузов. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 447 с. (Бакалавр и специалист).

ISBN 978-5-534-12319-7. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/447322

14. Шипачев В.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 212 с. (Бакалавр. Прикладной курс). ISBN 978-5-534-04282-5. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437924
15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т. 1: учебник для бакалавров. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 703 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-9916-3701-5. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/425369
16. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 кн. Кн. 1: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 253 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-534-02148-6. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437223
17. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник: учебное пособие для академического бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 192 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-9916-7568-0. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/433433

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Часть I

Учебно-методическое пособие

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 07.11.2023 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 7,20. Тираж 50 экз. Изд. 7597.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии.
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ