Брянский государственный аграрный университет

**Комогорцев В.Ф.**

# ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ и ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

для студентов сельскохозяйственного вуза
(бакалавриат)
по направлениям подготовки:

21.03.02 – «Землеустройство и кадастры»
38.03.01 – «Экономика»

Брянск – 2015

**УДК 51(07)**
**ББК 22.1**
**К 63**

**Комогорцев В.Ф.** ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ: Учебное пособие/ В.Ф. Комогорцев.- Брянск.- Издательство Брянского ГАУ, 2015.- 75 с.

Данное учебное пособие соответствует ныне действующему федеральному государственному стандарту высшего профессионального образования по направлениям подготовки 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» и 38.03.01 «Экономика», квалификация (степень) «Бакалавр». Оно содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

зав. кафедрой математики, физики и информатики, к.т.н. Панкова Е.А.;

доцент кафедры электрооборудования и автоматики, к.т.н. Яковенко Н.И.

Рекомендована к изданию учебно-методической комиссией факультета энергетики и природопользования от 26.11.2014 г., протокол №7.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ГЛАВА 1.
# ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

## Общие понятия и определения

**Моделирование** – это замещение одного объекта (оригинала) другим (моделью) и изучение свойств оригинала путем изучения свойств модели.

Модели разделяют на **материальные** (физические) и **идеальные** (математические).

**Физические модели** – это натуральные модели. В частности, физическими моделями являются макеты и опытные образцы изучаемых объектов. Например, макет жилого района – физическая модель этого района. Уменьшенная копия самолета, испытываемая в аэродинамической трубе – физическая модель реального самолета. Физическими являются также **аналоговые модели**. Аналоговые модели - это натуральные объекты, отличающиеся по своей физической природе от оригинала, но имеющие с оригиналом сходные процессы функционирования.

Например, теоретически установлено, что задача о напряжениях, возникающих при кручении бруса, сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о прогибах упругой (например, резиновой) пленки, нагруженной равномерным давлением и натянутой по контуру той же формы, что и поперечное сечение бруса. Аналогом напряжения в брусе является угол, который составляет касательная к поверхности пленки к плоскости контура, а аналогом крутящего момента – объем, заключенный между плоскостью контура и поверхностью пленки. Сделав сосуд с нужной формой дна и налив в него жидкость, мы получим аналоговую модель закручиваемого бруса. Изучая (обмеряя) прогнувшуюся пленку, мы сможем установить и интересующие нас силовые факторы в закручиваемом брусе.

Современная техника вообще широко использует различные аналоговые модели. С их помощью исследуются многие сложные и недоступные непосредственному наблюдению процессы. Наиболее широкое применение получили электрические и электронные аналоговые модели, в которых сила тока или напряжение являются аналогами физических величин другой природы. Например, построены электрические аналоговые модели, с помощью которых изучаются колебания мостов, осуществляется управление стабилизацией ракеты в полете, и т.д.

**Математическая модель объекта** – это нематериальная, идеальная модель, представляющая собой систему математических соотношений и формул, связывающих наиболее существенные параметры объекта. При этом можно использовать любые математические средства – дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные и интегральные уравнения, ряды, теорию вероятностей, и т.д. По существу вся математика создана для составления и исследования моделей объектов или процессов. Причем в последнее время все большую роль в этом исследовании играют ЭВМ. Расчетные формулы, которые используют инженеры для анализа и синтеза всевозможных материальных систем, обычно выведены из математических моделей этих систем. Хорошая математическая модель объекта позволяет глубже и полнее исследовать реальный объект, чем это можно сделать при исследовании его физической модели.

Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Например, невозможно прямыми измерениями исследовать поле напряжений или деформаций в толще деформируемого материала. Нельзя поставить натурный эксперимент в истории, чтобы проверить, «что было бы, если бы...» Невозможно проверить правильность той или иной космологической теории. В принципе возможно, но вряд ли разумно, поставить эксперимент по распространению какой-либо болезни, например чумы, или осуществить ядерный взрыв, чтобы изучить его последствия. Однако все это можно сделать на компьютере, построив предварительно математические модели изучаемых явлений.

## Основные этапы математического моделирования

**1) Обозначение целей моделирования.** Целью математического моделирования изучаемого объекта может быть: а) простое познавательное изучение объекта; б) управление объектом. Например, при построении математических моделей атмосферы (климата), геологических подвижек земной коры и других масштабных систем, которыми человек управлять пока не в состоянии, целью математического моделирования может быть лишь просто изучение и, по мере возможности, прогнозирование процессов, происходящих в этих системах. Но во многих других случаях основной целью математического моделирования объекта является не его пассивное познавательное изучение, а управление этим объектом. Например, математическая модель технологического или экономического процесса должна позволять не только изучать процесс, но и давать рекомендации по его управлению и поиску наилучших условий для его протекания.

**2) Построение математической модели**. На этом этапе сначала на качественном уровне рассматривается подлежащий изучению «нематематический» объект — явление природы, конструкция, механизм, экономический план, производственный процесс и т. д. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Определяются перечень всех входных и выходных параметров объекта исследования и их предполагаемое влияние на достижение целей моделирования. Устанавливается словесная фиксация основных связей входных и выходных параметров объекта. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель объекта. Это самая трудная стадия моделирования.

**3) Решение математической задачи, к которой приводит модель**. На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов аналитического или численного (на ЭВМ) решения получившейся математической задачи, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время.

**4) Интерпретация полученных следствий из математической модели.** Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.

**5) Проверка адекватности модели.** На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.

**6) Модификация модели.** На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения.

## §1. Примеры математических моделей объектов различной физической природы

Простейшим примером математической модели объекта является следующий: объект – точка числовой оси, а её координата (число) – математическая модель этого объекта. Еще простой пример: математической моделью линии на плоскости или в пространстве является её уравнение. Например, уравнение $y = x^2$ - это математическая модель хорошо всем известной параболы. Более сложные геометрические объекты имеют и более сложные математические модели (уравнения). Но если эти модели (уравнения) построены, то с помощью математического анализа этих моделей (этих уравнений) можно полно и всесторонне исследовать соответствующие им геометрические объекты.

А теперь рассмотрим несколько практических задач, математические модели которых построить несложно.

### 1. Задача о траектории брошенного тела без учета сопротивления воздуха

Поднятое на высоту $h$ компактное массивное тело брошено горизонтально со скоростью $v$ (например, с балкона выбросили кирпич). Установить траекторию $L$ брошенного тела.

<u>*Решение*</u>. Пренебрежем сопротивлением воздуха, что оправдано для массивных компактных тел, движущихся с не слишком большими скоростями. И будем моделировать брошенное тело материальной точкой, что тоже вполне оправдано, если это тело небольшое.

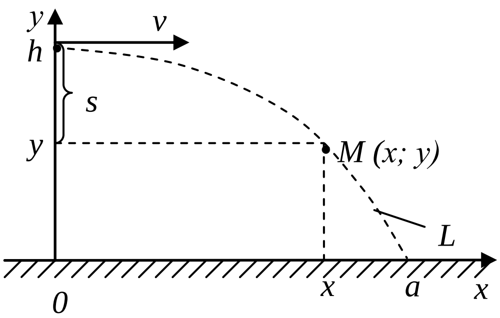


Рис. 1

Рассмотрим рис.1. Так как брошенная точка $M$ участвует одновременно в двух независимых движениях – равномерном горизонтально со скоростью $v$ и равноускоренном вертикально вниз с ускорением свободного падения $g$, то в любой момент времени $t \geq 0$ координаты ($x; y$) этой точки найдутся по хорошо известным из школьной физики формулам:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = h - s = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (t \geq 0) \qquad (1.1)$$

Система уравнений (1.1) и описывает траекторию брошенной материальной точки. Она позволяет в любой заданный момент времени $t$ найти координаты ($x; y$) движущейся точки.

Полученную систему уравнений можно, при желании, привести и к одному уравнению вида $y = f(x)$, связывающему координаты ($x; y$) движущейся точки $M$ непосредственно друг с другом. Для этого из первого уравнения системы (1.1) выразим $t = \frac{x}{v}$ и подставим его во второе уравнение. В итоге получим явное уравнение траектории $L$:

$$y = h - \frac{gx^2}{2v^2}. \qquad (1.2)$$

Положив в (1.2) $y = 0$ и $x = a$, найдем дальность полета $a$:

$$a = v\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.2) является уравнением параболы. Таким образом, построенная математическая модель траектории брошенного тела указывает на то, что эта траектория является параболой (1.2) (точнее, линией, близкой к этой параболе). А дальность полета может быть найдена по формуле (1.3). Как свидетельствует опытная проверка, для кирпича всё это действительно близко к истине. То есть построенная математическая модель достаточно хорошо (адекватно) описывает реальную траекторию брошенного кирпича. Но она уже недостаточно хорошо (недостаточно адекватно) описывает траекторию пули, ибо сопротивление воздуха её движению весьма велико, и пренебрежение им сильно искажает реальные результаты. Для пули эта модель требует существенного усложнения, связанного с необходимостью учитывать это сопротивление. И мы это усложнение проведем в следующем пункте.

Неадекватной, очевидно, эта модель будет и для бумажного самолетика, запущенного с балкона. Для самолетика построение адекватной математической модели, очевидно, вообще сопряжено с огромными трудностями, если даже вообще возможно, ибо такая модель требует учета массы входных параметров, которыми нельзя пренебречь, причем многие из них являются случайными. В частности, любое случайное дуновение ветра может кардинально изменить траекторию движения самолетика. А вот для тяжелых самолетов, не реагирующих на случайные дуновения ветра и другие аналогичные факторы, существенные для бумажного самолетика, адекватные математические модели процессов их полета создать все же можно. И эти модели, хоть и трудным путем, с помощью и использованием серьёзных компьютерных технологий, всё же созданы. А это позволяет достаточно надежно использовать сложную авиационную технику и управлять ею.

## 2. Задача о траектории брошенного тела при учете сопротивления воздуха

А теперь снова рассмотрим задачу пункта 1, но теперь уже при учете сопротивления воздуха движущемуся телу. В частности, эта задача является актуальной для построения математической модели траектории летящей пули.

Итак, пусть стрелок, находясь на некоторой не слишком большой высоте $h$ (на крыше или балконе дома, на невысоком холме) сделал винтовочный горизонтальный выстрел (рис. 1). Пуля массой $m$ вылетела из винтовки со скоростью $v$. Как и выброшенный с балкона кирпич, она будет участвовать одновременно в двух движениях: горизонтальном с большой, но постепенно уменьшающейся со временем скоростью $v_x = v_x(t)$, и движении вертикально вниз с первоначально нулевой и затем возрастающей скоростью $v_y = v_y(t)$. Так как, по нашему предположению, высота $h$ небольшая (несколько метров или пусть даже десятков метров), то пуля до своего падения на землю не успеет набрать вертикальную скорость, сравнимую с горизонтальной. А, значит, можно пренебречь сопротивлением воздуха вертикальному перемещению пули. И, следовательно, мы можем применить для координаты $y$ летящей пули формулу (1.1):

$$y = y(t) = h - s = h - \frac{gt^2}{2} \quad (t \geq 0) \tag{1.4}$$

А вот для координаты $x$, определяющей движение пули в горизонтальном направлении, выражение должно быть отличным от того, которое давалось формулой (1.1), ибо теперь мы должны учесть сопротивление воздуха горизонтальному движению пули.

Как показывает опыт, силу сопротивления воздуха (а также жидкости) движущемуся в них телу можно приближенно считать пропорциональной скорости движения тела. А значит, согласно второму закону Ньютона,

$$mv_x' = -kv_x, \text{ откуда } \quad v_x' = -\frac{k}{m}v_x \tag{1.5}$$

Здесь $k$ - коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров (площади поперечного сечения) и формы тела – для шарообразной пули он больше, для цилиндрической с сужающейся головкой меньше, а также от свойств сопротивляющейся среды (её плотности, вязкости, и т.д.). Определяется этот коэффициент экспериментально. А знак (-) в (1.5) связан с тем, что сила сопротивления воздуха $R = -kv_x$ направлена против скорости движения тела.

Торможение воздухом летящего в нем тела в конечном итоге определяется ускорением торможения $v_x'$. А оно, согласно (1.5), определяется комбинацией

$\frac{k}{m}v_x$. При одной и той же скорости $v_x$ эта комбинация для тяжелой (большего калибра) пули будет меньше, чем для легкой. И еще меньше она будет для артиллерийского снаряда. Действительно, с увеличением размеров пули её площадь поперечного сечения (площадь сопротивления) увеличивается пропорционально квадрату её диаметра, а её объем, а, следовательно, и масса – пропорционально кубу диаметра. Таким образом, согласно (1.5), ускорение торможения оказывается обратно пропорциональным диаметру пули, то есть уменьшается с увеличением этого диаметра. Для артиллерийского снаряда, имеющего диаметр, в десятки и даже в сотни раз превосходящий диаметр пули, ускорение торможения в эти же десятки и сотни раз будет меньше, чем у пули. И поэтому при построении математической модели полета артиллерийского снаряда имеется достаточно оснований сопротивлением воздуха его полету пренебречь. Тем более этим сопротивлением можно пренебречь для брошенного с небольшой скоростью кирпича или другого аналогичного компактного массивного тела, что мы и делали в пункте 1.

Но вернемся к пуле. Равенство (1.5) является дифференциальным уравнением первого порядка для неизвестной функции $v_x = v_x(t)$. Решим это уравнение:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x; \quad \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}dt; \quad \int\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}\int dt; \quad \ln v_x = -\frac{k}{m}t + C; \quad v_x = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Учитывая начальное условие: $v_x(0) = v$, получим для горизонтальной скорости $v_x = v_x(t)$ окончательно:

$$v_x = ve^{-\frac{k}{m}t} \tag{1.6}$$

А теперь можем найти и горизонтальное перемещение пули $x = x(t)$. Учитывая, что $x' = v_x$, получим:

$$x = \int v_x dt = -v\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + C$$

А так как $x(0) = 0$, то $C = v\frac{m}{k}$. И с учетом этого получаем окончательно:

$$x = x(t) = v\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \quad (t \geq 0) \tag{1.7}$$

Равенства (1.4) и (1.7) и определяют траекторию летящей пули при учете сопротивления воздуха её полету. А уравнения (1.1) определяют эту траекторию, если сопротивление воздуха не учитывать.

Сравним результаты, которые дают обе эти модели. Пусть $v = 800$*м/сек* – начальная скорость пули (примерно такая она при выстреле из 7,62 мм винтовки, масса пули 11,75 г). Известно, что при настильной (близкой к горизонтальной) траектории из-за сопротивления воздуха скорость такой пули через секунду её полета уменьшается примерно вдвое, то есть до 400 *м/сек*. Найдем дальность полета пули, если она пущена в горизонтальный полет с высоты $h = 20$ метров, а также найдем вертикальную и горизонтальную скорости, с которыми она упадет на землю.

Согласно представленным выше данным о скорости пули, $v = 800$; $v_x(1) = 400$, откуда, на основании (1.6), имеем:

$$400 = 800 e^{-\frac{k}{m}} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{k}{m} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow \frac{k}{m} = \ln 2 \approx 0{,}693$$

Подставляя $v = 800$ и найденное значение $\frac{k}{m}$ в выражения (1.6) и (1.7), получим:

$$v_x(t) = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t; \quad x(t) = 1154 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t\right) \tag{1.8}$$

Теперь найдем время $T$ полета пули. В момент времени $t = T$ пуля упадет на землю, и станет $y = 0$ (см. рис. 1). Полагая в (1.4) $y = 0$, $t = T$, и учитывая, что $h = 20$ метров, получим: $T = 2$ сек. Подставляя $t = T = 2$ в выражения (1.8), получим конечную горизонтальную скорость пули $v_x = 200$ *м/сек* и дальность полета пули $a \approx 865$*м*.

Если же воспользоваться формулами (1.1)-(1.3), при выведении которых сопротивление воздуха не учитывалось, то для этой же пули получим: $T = 2$ сек., конечная горизонтальная скорость пули $v_x = 800$ *м/сек* (она равна начальной скорости), и дальность полета пули $a = 1600$*м*. Вертикальная скорость падения в обоих случаях примерно одна и та же и равна $v_y = y'(T) = gT = 20$*м/сек*.

Как видим, учет сопротивления воздуха существенно влияет на параметры траектории движения пули. И пренебрегать этим сопротивлением нельзя.

### 3. Задача об определении объема выкопанной ямы

*Решение*. Допустим, что осмотр ямы и предварительный её обмер позволяет считать её прямоугольным параллелепипедом (отклонения её формы от прямоугольного параллелепипеда для нас несущественны). Тогда в качестве математической модели нашей ямы принимаем прямоугольный параллелепипед. Остается измерить длину ямы $x$, ширину $y$ и высоту $z$ и затем по формуле $V = xyz$ вычислить её объем $V$.

Теперь оценим точность вычисления объема ямы. Допустим, что все измерения делались мерной лентой, которая дает результат измерения с точностью до сантиметра, то есть до 0,01 метра (а размеры земляной ямы и трудно получить точнее). Следовательно, при измерении размеров ямы $x$, $y$ и $z$ могли быть допущены их максимальные абсолютные погрешности $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}01$, $\Delta z = 0{,}01$ метра. А, следовательно, максимальные относительные погрешности размеров ямы будут таковы: $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}01}{x}$, $\frac{\Delta y}{y} = \frac{0{,}01}{y}$, $\frac{\Delta z}{z} = \frac{0{,}01}{z}$ (размеры ямы $x$, $y$ и $z$ здесь должны быть указаны в метрах). А так как при произведении величин их относительные погрешности, как известно, складываются, то максимальная относительная погрешность $\frac{\Delta V}{V}$ объема ямы $V = xyz$ будет такой:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = 0{,}01\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \tag{1.9}$$

Например, если оказалось, что $x = 0{,}5$ м, $y = 2$ м, $z = 2$ м, то объем ямы $V = 2\ м^3$. Причем максимальная относительная погрешность этого результата $\frac{\Delta V}{V} = 0{,}03 = 3\%$. Если такая относительная погрешность вычисления объема ямы (в 3%) является допустимой, то поставленная задача решена. А принятая математическая модель ямы (прямоугольный параллелепипед) признается адекватной самому исследуемому объекту, то есть реальной яме. Если же нужна более высокая точность определения объема ямы (с меньшей допустимой погрешностью), то эту модель нужно усложнять: учитывать и отклонения формы ямы от прямоугольного параллелепипеда, и все размеры ямы измерять точнее.

## 4. Задача о баке с наименьшей площадью поверхности

Требуется найти высоту $h_0$ и диаметр $d_0$ жестяного бака объемом $V$ = 30 м$^3$, имеющего форму закрытого кругового цилиндра, при которых площадь полной его поверхности $S$ будет минимальной (в этом случае на его изготовление пойдет наименьшее количество жести).

*Решение*. Запишем известные формулы для объема $V$ и площади полной поверхности $S$ цилиндра высоты $h$ и радиуса $r$:

$$V = \pi r^2 h; \qquad S = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{1.10}$$

Выражая $h$ через $r$ и $V$ из первой формулы и подставляя полученное выражение во вторую, получим:

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \tag{1.11}$$

Таким образом, с математической точки зрения, задача сводится к определению такого значения $r$, при котором достигает своего минимума функция $S(r)$. Для этого найдем те значения $r$, при которых производная $S'$ функции $S$ обратится в нуль:

$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}; \; S' = 0 \;\Rightarrow\; 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0; \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx \sqrt[3]{\frac{30}{6{,}28}} \approx 1{,}684\text{м}. \qquad (1.12)$$

Других значений $r$, при которых $S' = 0$, нет. Значит, найденное значение $r \approx 1{,}684$ м и есть то значение $r_0$ радиуса бака, при котором площадь его полной поверхности будет минимальной. Соответствующее ему значение высоты бака $h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = 2r_0 \approx 3{,}368$ м. Округляя полученные значения до сантиметров, получим ответ: $d_0 = 2r_0 \approx 3\textit{м}\,37\textit{см}$; $h_0 \approx 3\textit{м}\,37\textit{см}$. Таким образом, наиболее экономным баком по расходу металла на его изготовление является бак, у которого диаметр совпадает с высотой. И это верно для бака любого объема.

### 5. Задача об определении скорости револьверной пули

<u>*Решение*</u>. Эту задачу можно решить следующим простым способом. На легком жестком и свободно вращающемся стержне подвешивается массивный груз, в котором застревает пуля. Она передаст грузу свой импульс и свою кинетическую энергию. В результате стержень с грузом отклонится от вертикали на некоторый угол $\alpha$ (рис. 2). Измерив этот угол, можно вычислить и скорость пули. Для этого к системе «пуля-стержень с грузом» нужно применить закон сохранения импульса и закон сохранения энергии.

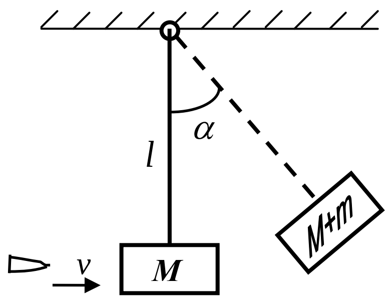


Рис.2

Пренебрегая массой стержня по сравнению с массой груза, согласно первому из этих законов имеем:

$$mv = (m+M)V \qquad (1.13)$$

А согласно второму

$$(m+M)\frac{V^2}{2} = (m+M)gl(1-\cos\alpha) \qquad (1.14)$$

В равенстве (1.14) слева стоит кинетическая энергия системы «пуля-груз», а справа - потенциальная энергия этой системы в положении её максимального отклонения от положения равновесия. Здесь $m$ - масса пули, $M$ - масса груза, $V$ - скорость системы «пуля-груз» после вхождения пули в толщу груза, $g$ - ускорение свободного падения, $l$ - длина стержня, $\alpha$ - угол наибольшего отклонения стержня.

Из уравнений (1.13) - (1.14) легко находится скорость $v$ пули:

$$v=\frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} \qquad (1.15)$$

Отметим, что точность результата (1.15), то есть адекватность этой математической модели, будет тем выше, чем легче будет стержень по сравнению с грузом и чем точнее будут измерены все входящие в формулу (1.15) величины.

## 6. Строительная задача

Городской бюджет имеет возможность потратить на социальное жилье не более 600 млн. рублей, располагая при этом проектами и участками земли под 8 пятиэтажных домов на 90 квартир каждый и под 5 девятиэтажных домов на 120 квартир каждый. Средняя сметная стоимость одной квартиры в пятиэтажном доме составляет 600 тысяч рублей, а в девятиэтажном 800 тысяч рублей. Сколько пятиэтажных и сколько девятиэтажных домов должен построить город, чтобы получить максимальное число квартир?

*Решение*. Постройка одного пятиэтажного дома обойдется городскому бюджету в $90\cdot600000=54$млн. руб, а постройка одного девятиэтажного в $120\cdot800000=96$ млн. руб. Так как квартиры в пятиэтажных домах стоят дешевле, то для городского бюджета выгоднее строить пятиэтажные дома – построенных квартир будет больше.

*Вариант* 1. Если город построит 8 пятиэтажных домов (максимально возможное их число), то он получит 720 квартир, затратив на это $54\cdot8=432$млн. руб. На оставшиеся в бюджете 168 млн. руб. он может построить лишь один девятиэтажный дом за 96 млн. руб. – на второй денег не хватит. Этот один построенный девятиэтажный дом добавит городу еще 120 квартир, итого их будет 720+120=840.

*Вариант* 2. Если город построит 7 пятиэтажных домов (630 квартир), то это обойдется ему в $54\cdot7=378$ млн. руб. На оставшиеся 222 млн. руб. город может построить еще два девятиэтажных дома по 96 млн. руб. (на три не хватит), добавив еще 240 квартир. Итого их станет 630+240 = 870. То есть больше, чем в первом варианте.

*Вариант* 3. Если город построит 6 пятиэтажных домов (540 квартир), то это обойдется ему в $54\cdot6=324$ млн. руб. Оставшихся 276 млн. руб. не хватит на три девятиэтажных дома по 96 млн. руб. – только на два, которые добавят еще 240 квартир. Итого их будет построено 780 – меньше, чем во втором варианте.

Завершая рассмотрение оставшихся вариантов, приходим к выводу: вариант 2 – лучший.

## 7. Транспортная задача

В городе имеются два склада муки и два хлебозавода. Ежедневно на хлебозаводы с первого склада вывозят 50 т муки, а со второго — 70 т, причем на первый — 40 т, а на второй — 80 т. Обозначим через $a_{ij}$ стоимость перевозки 1 т муки с i-го склада на j-й завод (i, j = 1,2). Пусть $a_{11}$ = 12 р., $a_{12}$ = 16 р., $a_{21}$ =

8 р., $a_{22}$ = 10 р. Как нужно спланировать перевозки, чтобы их общая стоимость была минимальной?

<u>*Решение*</u>. Придадим задаче математическую формулировку. Обозначим через $x_1$ и $x_2$ количество муки, которое надо перевезти с первого склада на первый и второй заводы, а через $y_1$ и $y_2$ - со второго склада на первый и второй заводы соответственно. Тогда:

$$x_1 + x_2 = 50; \quad y_1 + y_2 = 70; \quad x_1 + y_1 = 40; \quad x_2 + y_2 = 80 \tag{1.16}$$

Общая стоимость $F$ всех перевозок определяется формулой

$$F = 12x_1 + 16x_2 + 8y_1 + 10y_2 \tag{1.17}$$

С математической точки зрения задача заключается в том, чтобы найти четыре неотрицательных числа $x_1$, $x_2$, $y_1$ и $y_2$, удовлетворяющих условиям (1.16) и дающих минимум функции $F$.

Систему уравнений (1.16) легко решить методом исключения неизвестных. При этом получим (убедитесь в этом самостоятельно):

$$x_2 = 50 - x_1; \quad y_1 = 40 - x_1; \quad y_2 = 30 + x_1, \tag{1.18}$$

а $x_1$ не может быть определено однозначно из этой системы - $x_1$ остается произвольным. Но неотрицательность всех величин, фигурирующих в равенствах (1.18), приводит к условию: $0 \le x_1 \le 40$. Подставляя выражения для $x_2$, $y_1$, $y_2$ из (1.18) в формулу для $F$, получим

$$F = 1420 - 2x_1.$$

Очевидно, что минимум этой функции достигается при максимально возможном значении $x_1$, то есть при $x_1$ = 40. Соответствующие значения других неизвестных определяются по формулам (1.18): $x_2 = 10$, $y_1 = 0$, $y_2 = 70$.

## 8. Задача об остывании вскипевшего чайника

Вскипевший чайник остывает в комнате с температурой воздуха $20^0 C$. Известно, что через 20 минут после снятия чайника с плиты его температура снижается с исходных $100^0 C$ до $60^0 C$. Через какое время с начала остывания чайника его температура опустится до $30^0 C$? И через какое время чайник остынет полностью (то есть его температура сравняется с температурой воздуха)?

<u>*Решение*</u>. Пусть $t$ (мин) – время, прошедшее с момента времени $t = 0$, когда начался процесс остывания чайника. И пусть $T = T(t)$ - функция, описывающая изменение температуры $T$ чайника со временем. Ответы на поставленные вопросы мы получим, если найдем эту функцию.

Согласно условиям задачи, $T(0)=100$; $T(20)=60$; $T_0=20$ - температура окружающего чайник воздуха (указание на градусы Цельсия опускаем). Между чайником и воздухом идет теплообмен. Согласно закону теплообмена Ньютона, скорость остывания тела в окружающей его среде пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Так как скорость остывания нашего чайника – это скорость изменения его температуры, то есть скорость изменения функции $T=T(t)$, а скорость изменения любой функции – это её производная, то скорость остывания чайника равна $T'=T'(t)$. А $T-T_0=T-20$ - это разность температур чайника и воздуха. Следовательно, по закону Ньютона получаем: $T'=k(T-20)$. Здесь $k$ - коэффициент пропорциональности, который пока неизвестен. Собирая все выписанные выше равенства в систему, получим:

$$\begin{cases} T'=k(T-20) \\ T(0)=100 \\ T(20)=60 \end{cases} \tag{1.19}$$

Первое из этих равенств – это дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции $T=T(t)$. Второе равенство представляет собой начальное условие для этого уравнения. А третье равенство – дополнительное условие для неизвестной функции $T=T(t)$. То есть система уравнений (1.19) представляет собой задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка с дополнительным условием для неизвестной функции $T=T(t)$.

Решим эту задачу.

1. Сначала решим (проинтегрируем) дифференциальное уравнение:

$$T'=k(T-20); \quad \frac{dT}{dt}=k(T-20); \quad \frac{dT}{T-20}=kdt; \quad \int\frac{dT}{T-20}=k\int dt;$$
$$\ln(T-20)=kt+C; \quad T-20=e^{kt+C}=e^C\cdot e^{kt}=Ce^{kt}; \quad T=20+Ce^{kt} \tag{1.20}$$

Полученное выражение $T=20+Ce^{kt}$, где $C$ - произвольная константа интегрирования, представляет собой общее решение дифференциального уравнения $T'=k(T-20)$. В этом общем решении содержится всё бесчисленное количество его частных решений.

2. Реализуем теперь начальное условие $T(0)=100$ и с его помощью найдем константу $C$, содержащуюся в общем решении:

$$T(0)=100; \quad 100=20+Ce^{k\cdot 0}=20+C; \quad C=80; \quad T=20+80e^{kt} \tag{1.21}$$

Осталось найти константу $k$. Её найдем из последнего, дополнительного условия (1.14):

$$T(20)=60;\quad 60=20+80e^{20k};\quad e^{20k}=\frac{1}{2} \tag{1.22}$$

Используя этот результат в последнем равенстве (1.21), получим окончательно:

$$T=20+80\left(e^{20k}\right)^{\frac{t}{20}}=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}};\qquad T=T(t)=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \tag{1.23}$$

Найденная функция $T=T(t)$ и описывает изменение температуры чайника со временем.

А теперь с помощью формулы (1.23) можем ответить и на поставленные в задаче вопросы.

1) $T=30;\ t=?$

*Решение*.

$$30=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}};\quad 80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=10;\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3};\quad \frac{t}{20}=3;\quad t=60(\text{мин}).$$

То есть до 30 градусов чайник остынет через 1 час.

2) $T=20;\ t=?$

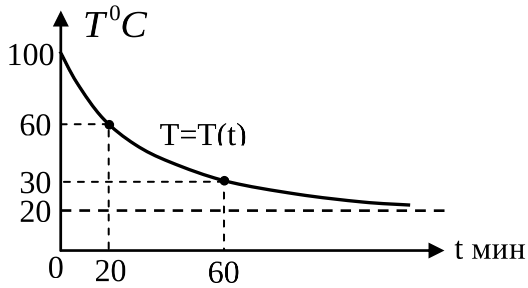



Рис. 3

*Решение*.

$$20=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}};\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=0;$$

$t$ - не существует.

То есть до 20 градусов (до температуры воздуха) чайник никогда не остынет. С течением времени его температура, снижаясь, будет лишь приближаться к комнатной температуре, но никогда её не достигнет. Это наглядно демонстрирует график изменения температуры чайника со временем (график функции (1.23) – рис. 3). И это не противоречит нашему ощущению, что через достаточно большое время (через 2-3 часа) чайник кажется уже полностью остывшим. Просто спустя это время температура чайника настолько приблизится к температуре воздуха, что разница в их температурах нами уже не ощущается.

## 9. Задача о моторной лодке

Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 20 км/час. На полном ходу её мотор выключается, и через 40 секунд после этого скорость лодки уменьшается до 8 км/час. Считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки, определить скорость лодки через 2 минуты после остановки мотора.

*Решение*. После выключения мотора на лодку действует единственная сила – сила сопротивления воды $F$, которая, по условию, пропорциональна скорости $v$ движения лодки. То есть $F = kv$. Имея в виду, что $a = v' = \frac{dv}{dt}$ - ускорение лодки, по второму закону Ньютона $ma = F$ получаем:

$$mv' = kv \qquad (1.24)$$

Это – дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $v = v(t)$ - скорости лодки. Решая его, получаем:

$$m\frac{dv}{dt} = kv; \quad \frac{dv}{v} = \frac{k}{m}dt; \quad \int\frac{dv}{v} = \frac{k}{m}\int dt; \quad \ln v = \frac{k}{m}t + C; \quad v = e^{\frac{k}{m}t+C} = e^{\frac{k}{m}t}\cdot e^{C} = Ce^{\frac{k}{m}t}$$

Здесь учтено, что если $C$– произвольная константа (константа интегрирования), то и $e^C$ - произвольная константа, которую опять можно обозначить буквой $C$.

Полученное выражение

$$v = Ce^{\frac{k}{m}t} \qquad (1.25)$$

представляет собой общее решение дифференциального уравнения (1.24). Оно содержит в себе все частные решения $v = v(t)$ этого уравнения (их бесчисленное количество). Среди них находится и та функция $v = v(t)$, которая описывает скорость нашей лодки. Но чтобы найти эту функцию, нужно в выражении (1.25) найти константу $C$ и комбинацию констант $\frac{k}{m}$. Для этого воспользуемся остальными условиями задачи.

1) По условию, в момент времени $t = 0$ скорость лодки была $v = 20$ км/час. Подставляя эти данные в формулу (1.25), получим: $C = 20$. Таким образом,

$$v = 20e^{\frac{k}{m}t} \qquad (1.26)$$

2) В момент времени $t = 40$ сек.$=\frac{2}{3}$ мин. скорость лодки была 8 км/час. Подставляя эти данные в формулу (1.26), получим:

$$8 = 20e^{\frac{k}{m}\cdot\frac{2}{3}}, \text{ откуда } \quad e^{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \qquad (1.27)$$

С учетом (1.27) выражение (1.26) примет следующий окончательный вид:

$$v = 20\left(e^{\frac{2k}{3m}}\right)^{\frac{3}{2}t} = 20\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}t}; \quad v = v(t) = 20\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}t} \tag{1.28}$$

При $t = 2$ мин. получаем:

$$v = 20\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{32}{25} \approx 1{,}3 \text{ км/час}$$

## 10. Задача о барометрической формуле

Барометрическая формула – это формула, по которой определяется атмосферное давление воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря. Выведем эту формулу.

*Решение*. Пусть $p = p(h)$ - давление воздуха на высоте $h$ над уровнем моря. Функцию $p(h)$ и требуется установить.

Рассмотрим на высоте $h$ горизонтальную площадку единичной площади $S_0 = 1$. Так как, по своему физическому смыслу, давление – это сила, приходящаяся на единицу площади, то атмосферное давление $p = p(h)$ - это сила давления воздуха на эту площадку. А эта сила, очевидно, просто равна весу столба воздуха над этой площадкой.

Наряд с указанной выше площадкой, рассмотрим еще одну площадку единичной площади $S_0 = 1$, расположенную строго над первой площадкой на расстоянии $dh$ от неё ($dh$ бесконечно мало). Давление на эту площадку будет уже не $p(h)$, а $p(h+dh) = p(h) + dp$, где $dp \prec 0$ - изменение давления при переходе с нижней площадки на верхнюю ($dp \prec 0$, так как атмосферное давление с высотой убывает). Величина $dp$, взятая со знаком минус, равна, очевидно, весу воздуха между указанными площадками. Если $\rho = \rho(h)$ - плотность воздуха на высоте $h$, то учитывая, что объем воздуха между площадками равен $dV = S_0 \cdot dh = dh$, получим вес этого воздуха, то есть $dp$:

$$dp = -\rho(h)g \cdot dV = -g\rho(h)dh \tag{1.29}$$

Здесь $g$ - ускорение свободного падения, которое будем считать постоянным (его незначительным уменьшением с увеличением высоты $h$ пренебрежем).

Далее, атмосферный воздух будем считать идеальным газом (как известно, воздух, особенно разреженный, с достаточной для практики точностью можно считать идеальным газом). Уравнение состояния идеального газа имеет вид:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \tag{1.30}$$

Здесь $m$ масса газа; $V$ - объем, занимаемый газом; $p$ - давление в газе; $T$ - абсолютная температура газа (по Кельвину); $\mu$ - молярная масса газа (для воздуха $\mu = 0{,}029\frac{кг}{моль}$); $R = 8{,}31\frac{дж}{моль \cdot K}$ - универсальная газовая постоянная. Из уравнения (1.30) можно выразить плотность газа $\rho$:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} \tag{1.31}$$

Подставив (1.31) в (1.29), получим

$$dp = -\frac{\mu g}{RT} p dh \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{\mu g}{RT} dh \tag{1.32}$$

Пренебрежем изменением с высотой абсолютной температуры воздуха. То есть будем считать, что воздух на разных высотах имеет некую одну и ту же среднюю абсолютную температуру $T$. Для температуры по Цельсию это является большой натяжкой – как известно, на большой высоте заметно холоднее, чем у поверхности Земли, особенно летом. У поверхности Земли может быть $+30^0 C$, а на высоте, на которой летают самолеты $-50^0 C$. Но для абсолютной температуры $T$ по Кельвину эта разница уже не столь существенна: $303^0 K$ и $223^0 K$ соответственно. Поэтому абсолютную температуру $T$ атмосферы действительно приближенно можно считать постоянной и равной её среднему значению (в данном случае $263^0 K$).

Тогда в правой части интеграла (1.32) всё, кроме $dh$ - константы, которые можно вынести за знак интеграла. В результате из равенства (1.32) получим:

$$\ln p = -\frac{\mu g}{RT} h + C \quad \Rightarrow \quad p = Ce^{-\frac{\mu g}{RT} h} \tag{1.33}$$

Если $p_0$ - давление воздуха на высоте моря (при $h = 0$), то $C = p_0$, и формула (1.33) примет следующий окончательный вид:

$$p = p(h) = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} h} \tag{1.34}$$

Это и есть искомая барометрическая формула. По ней можно вычислять атмосферное давление $p = p(h)$ на разных высотах $h$. И она дает результаты, довольно близкие к истинным.

## 11. Задача об определении силы давления воды на плотину

Плотина имеет форму равнобокой трапеции с верхним основанием $2a$ м, нижним основанием $2b$ м, высотой $h$ м (рис.4). Получить формулу, выражающую силу давления воды на эту плотину.

*Решение*. Пусть $F$ - искомая сила давления. Если бы давление воды на плотину в любой её точке было одним и тем же и равным $p$, то силу $F$ мы нашли бы по простой и очевидной формуле: $F = pS$, где $S$ - площадь плотины. Но давление воды с глубиной меняется. Из курса физики известно, что на глубине $x$ давление воды $p = p(x)$ определяется формулой:

$$p = p(x) = \rho g x \qquad (1.35)$$

Здесь $\rho$ - плотность воды ($\rho = 10^3 кг/м^3$), а $g = 9{,}8 м/сек^2$ - ускорение свободного падения. В связи с неравномерностью давления воды на плотину есть смысл при подсчете силы давления $F$ воды на плотину мысленно разбить поверхность плотины на узкие (бесконечно узкие) горизонтальные полоски – так, чтобы все точки каждой полоски находились на одной глубине, то есть при одинаковом давлении воды. После этого найти силу давления воды на каждую полоску, а затем просуммировать эти силы по всем полоскам. То есть использовать идею вычисления силы $F$ через определенный интеграл.

Реализуем эту идею. Введем на поверхности плотины систему координат $xoy$ так, как показано на рис. 4., и выделим на поверхности одну из таких полосок (она заштрихована). Верхний край полоски находится на глубине $x$, а её ширина $dx$ бесконечно мала (полоска бесконечно узкая). Площадь полоски $dS = 2y \cdot dx$. Давление воды на глубине $x$ равно $p = \rho g x$. И в силу того, что наша полоска бесконечно узкая, таким будет давление в любой точке полоски. То есть вся полоска находится под равномерным давлением воды $p = \rho g x$. А тогда сила давления $dF$ найдется умножением этого давления на площадь полоски:

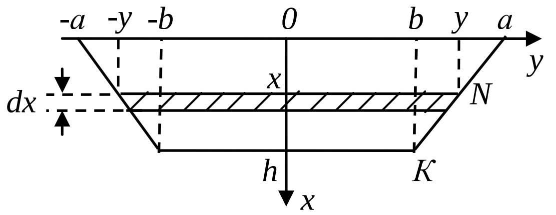


Рис.4

$$dF = p(x) \cdot dS = \rho g x \cdot 2y dx = 2\rho g x y dx \qquad (1.36)$$

Найденная сила $dF$ является бесконечно малой частью (дифференциалом) искомой силы $F$. Заметим, что в формулу (1.36), кроме $x$, входит переменная $y$, которую можно (и нужно!) выразить через переменную $x$ - ту переменную, чей дифференциал $dx$ входит в выражение для $dF$. Для этого используем подобие прямоугольных треугольников, вершины которых отмечены знаками $\{K; b; a\}$ и $\{N; y; a\}$. Пропорциональность их катетов дает:

$$\frac{h}{a-b} = \frac{x}{a-y}, \text{ откуда } \; y = a - \frac{(a-b)x}{h} \qquad (1.37)$$

Подставляя $y$ из (1.37) в (1.36), получим для $dF$ окончательно:

$$dF = 2\rho g x \left( a - \frac{(a-b)x}{h} \right) dx \qquad (1.38)$$

А теперь просуммируем силы $dF$ по всем полоскам, на которые мы мысленно разбивали поверхность плотины – от верхней полоски, где $x=0$, до нижней, где $x=h$, и получим искомую силу $F$ давления воды на всю плотину:

$$F=\sum dF=\sum\ 2\rho gx\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)dx=\int_0^h 2\rho gx\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)dx \tag{1.39}$$

Вычислим определенный интеграл (1.39) с использованием формулы Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned}F&=2\rho g\left(a\int_0^h xdx-\frac{(a-b)}{h}\int_0^h x^2dx\right)=2\rho g\left(a\frac{x^2}{2}\bigg|_0^h-\frac{(a-b)}{h}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h\right)=\\&=2\rho g\left(a\frac{h^2}{2}-\frac{(a-b)h^2}{3}\right)=\rho gh^2\left(\frac{a+2b}{3}\right);\quad F=\rho gh^2\left(\frac{a+2b}{3}\right)\end{aligned} \tag{1.40}$$

Формула для вычисления суммарной силы $F$ давления воды на трапециевидную плотину получена.

А теперь, в дополнение к решенной задаче, найдем центр давления найденной силы. То есть найдем на поверхности плотины точку приложения такой сосредоточенной силы, которая будет являться равнодействующей рассредоточенной по поверхности плотины силы давления воды на плотину. По величине эта равнодействующая равна, естественно, $F$. А точка её приложения, в силу симметрии плотины, должна находиться где-то на оси $ox$ (рис. 4). И эта точка $x_0$ должна быть такой, чтобы относительно этой точки силы $dF$ давления воды на все полоски пластины были самоуравновешены. То есть суммарный момент $M$ всех сил $dF$ относительно горизонтальной линии, проходящей через точку $x_0$, должен равняться нулю.

В частности, относительно указанной горизонтальной линии момент $dM$ силы $dF$, действующей на полоску, изображенную на рис.4, равен $dM=dF\cdot(x-x_0)$ (равен произведению силы на плечо этой силы). А полный момент всех сил $dF$ относительно этой линии равен

$$M=\sum dM=\sum(x-x_0)dF=\int_0^h(x-x_0)\cdot 2\rho gx\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)dx \tag{1.41}$$

Приравнивая этот момент нулю, после несложных выкладок, которые опускаем (проделайте их самостоятельно), получим:

$$x_0=\frac{(a+3b)h}{2(a+2b)} \tag{1.42}$$

В частности, если $a=b$ (плотина прямоугольная), то $x_0=\dfrac{2}{3}h$. На такой глубине находится центр давления воды на прямоугольную плотину.

## Упражнения

1. С поверхности земли под углом $\alpha$ к горизонту с начальной скоростью $v$ брошено материальное тело. При каком значении угла $\alpha$ дальность полета тела будет максимальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

*Ответ*: $\alpha = 45^0$.

2. С поверхности земли произведен винтовочный выстрел с начальной скоростью пули 800 м/сек. Через 1 секунду пуля упала на землю, имея скорость 400 м/сек. Найти дальность полета пули.

*Ответ*: $\approx 577$м.

3. При измерении размеров кругового цилиндра (его радиуса основания $R$ и его высоты $h$) получены значения $R = 40$см и $h = 80$см, причем эти значения получены с максимально возможной ошибкой 5 мм (в ту или в другую сторону). Найти максимально возможные абсолютную $\Delta V$ и относительную $\frac{\Delta V}{V}$ погрешности при вычислении объема $V$ цилиндра.

*Ответ*: $V \approx 0{,}402\, м^3$; $\Delta V \approx 0{,}012\, м^3$; $\frac{\Delta V}{V} \approx 0{,}03 = 3\%$.

4. Из квадратного листа картона со стороной $a$ вырезаются по углам одинаковые квадраты, а из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был максимальным?

*Ответ*: $\frac{1}{6}a$.

5. Труба, лежащая горизонтально, поперечным значением которой является круг радиуса $R$, наполовину наполнена водой. Найти: *а*) силу $F$, с которой вода давит на вертикальную заслонку, закрывающую трубу; *б*) центр давления этой силы.

*Ответ*: *а*) $F = 2\rho g \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, x dx = \frac{2\rho g R^3}{3}$; *б*) центр давления лежит на вертикальной оси симметрии заслонки в точке, отстоящей от поверхности воды на величину $\frac{3\pi}{16} R$.

## §2. Математические модели колебаний различной физической природы

### 1. Гармонические колебания

В рассматриваемых ниже моделях широко используется понятие **гармонических колебаний**. Напомним, что это за колебания.

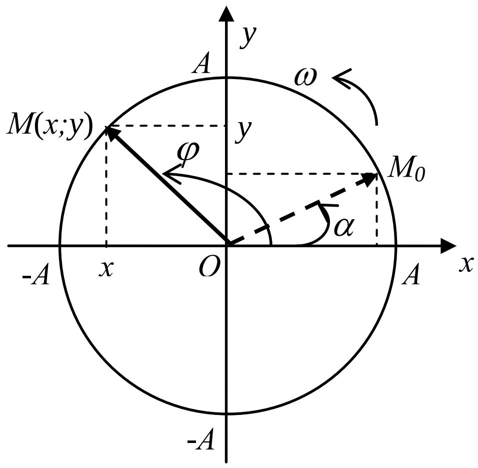


Рис. 5

Пусть по окружности равномерно вращается материальная точка $M$ (рис.5). Её проекции $x$ и $y$ на оси координат будут совершать вдоль своих осей возвратно-поступательные движения, которые называются *гармоническими колебаниями*. Выясним, какими формулами описываются эти колебания.

Пусть радиус окружности $A$, а угловая скорость вращения точки $M$ по окружности равна $\omega$. Угловая скорость, напомним, показывает, на какой угол (в радианах) поворачивается радиус-вектор вращающейся точки за единицу времени. И пусть в начальный момент времени $t=0$ точка $M$ занимала положение $M_0$ с радиусом-вектором, составляющим с осью $ox$ угол $\alpha$. Тогда $\varphi=\omega t+\alpha$ - угол, на который повернется радиус- вектор точки $M$ за время $t$. А проекции $x$ и $y$ точки $M$ на оси координат найдутся по формулам:

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t+\alpha)\,; \quad y = A\sin\varphi = A\sin(\,\omega t+\alpha) \qquad (2.1)$$

Это и есть формулы, которые описывают гармонические колебания этих проекций. В соответствии с первой формулой происходит колебание точки $x$ вдоль оси $ox$, а в соответствии со второй – колебание точки $y$ вдоль оси $oy$.

Среди различных колебаний гармонические колебания (2.1) считаются простейшими. Величина $A$, представляющая собой максимальное отклонение точек $x$ и $y$ от нулевой точки (центра колебаний), называется *амплитудой* колебаний. Величина $\omega$, в соответствии со своим смыслом – *круговой частотой* колебаний. Угол $\varphi=\omega t+\alpha$ - *фазой* колебаний. А начальный угол $\alpha$ - *начальной фазой* колебаний.

Совершив полный оборот вдоль окружности, вращающаяся точка $M$ повернется на угол $2\pi$ радиан (360 градусов) и вернется в свое исходное положение. А так как её угловая скорость вращения равна $\omega$, то сделает она это за время

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad (2.2)$$

За это же время её координаты $x$ и $y$ совершат полное (туда и назад) колебание по своим осям. Эта величина $T$, за которое гармонично колеблющаяся точка совершает полное колебание, называется *периодом* колебаний. За единицу времени эта точка совершит

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{2.3}$$

полных колебаний. И это число $\nu$ называется *частотой* колебаний. Частота обычно измеряется в *герцах* (Гц). Один герц – это одно колебание в секунду. Если частота колебаний равна 50 Гц (стандартная частота колебаний переменного тока), то это значит, что в одну секунду происходит 50 полных колебаний. Период $T$ таких колебаний, согласно (2.3), составит 0,02 секунды.

Отметим, что не следует путать частоту колебаний $\nu$ с круговой частотой $\omega$, ибо

$$\omega = 2\pi\nu \tag{2.4}$$

(следствие равенств (2.2) и (2.3)).

А теперь отметим следующий важный факт, касающийся гармонических колебаний (2.1). Рассматривая и величину $x$, и величину $y$ как функции времени $t$ и находя их вторые производные, легко убедиться в том, что эти величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$x'' + \omega^2 x = 0; \qquad y'' + \omega^2 y = 0 \tag{2.5}$$

То есть, по существу, каждая из них удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению вида

$$z'' + \omega^2 z = 0, \tag{2.6}$$

которое называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*. А функции времени $t$

$$z = x = A\cos(\omega t + \alpha) \quad \text{и} \quad z = y = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{2.7}$$

представляют две равносильные формы его *общего решения*. Общего - это значит, что любое из бесчисленного количества частных решений дифференциального уравнения (2.6) можно представить или в первой форме (2.7), или во второй. Эти частные решения будут отличаться друг от друга лишь значениями $A$ и $\alpha$, то есть амплитудой гармонических колебаний и их начальной фазой.

А теперь рассмотрим несколько задач, в которых фигурируют гармонические колебания.

## 2. Задача о гармоническом осцилляторе

Пусть вдоль оси ох движется материальная точка массой $m$. И движется она под действием центральной притягивающей силы $F$, пропорциональной расстоянию $x$ от точки до центра притяжения – точки О. Требуется найти закон движения точки. То есть найти зависимость координаты $x$ движущейся точки от времени $t$.

Ниже мы покажем, что точка $m$ совершает гармонические колебания вокруг точки О (осциллирует). Поэтому эта задача называется *задачей о гармоническом осцилляторе.* Осциллятором в данном случае является материальная точка $m$.

Фактически эта задача является математической моделью задачи о расположенной вдоль оси $ox$ пружине, один конец которой закреплен в некоторой точке этой оси, а к другому её концу прикреплена сосредоточенная масса $m$ (например, небольшой, но достаточно массивный шарик). Этот шарик, в силу его малых размеров, будем считать материальной точкой. Причем в свободном (нерастянутом) состоянии пружины эта материальная точка (шарик) находится в точке О. Затем шарик каким-то образом (отведением его в сторону или толчком по нему) выводится из состояния покоя, и под действием пружины этот шарик начинает двигаться (колебаться) вдоль оси $ox$ вокруг точки О. Мы хотим выяснить, как именно он будет это делать.

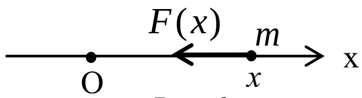


Рис.6

*Решение*. Рассмотрим рис. 6. По условию задачи, сила $F = F(x)$, действующая на материальную точку массы $m$, равна $F = -kx\,(k \succ 0)$, где $k$ - коэффициент пропорциональности. Знак $(-)$ взят потому, что сила $F$, по условию, всегда направлена к притягивающему центру О. То есть при $x \succ 0$ её значение должно быть отрицательным, так как она направлена против оси $ox$, а при $x \prec 0$ её значение должно быть положительным, ибо она направлена вдоль оси $ox$. Именно это и обеспечивает знак $(-)$ в выражении $F = -kx\,(k \succ 0)$.

Записывая теперь для движущейся точки второй закон Ньютона $ma = F$, где $a = x''$ - ускорение точки и $F = -kx$ - действующая сила, получаем $mx'' = -kx$, откуда следует:

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad \left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right) \tag{2.8}$$

А это не что иное, как уже знакомое нам дифференциальное уравнение гармонических колебаний. То есть наша точка $x$ совершает вдоль оси $ox$ гармонические колебания. И эти колебания можно записать в одной из двух равносильных форм:

$$а)\; x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad б)\; x = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{2.9}$$

При этом $A$ - амплитуда этих колебаний, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - их круговая частота, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - период колебаний, $\alpha$ - начальная фаза. Значения амплитуды $A$ и начальной фазы $\alpha$ определяется тем, каким образом колеблющаяся точка выведена из положения равновесия в начале колебаний, то есть в начальный момент времени $t = 0$.

Рассмотрим два характерных варианта этих начальных условий.

*Вариант* 1. Пусть в начальный момент времени $t=0$ материальная точка $m$ отведена вправо по оси $ox$ в точку $x_0$ и отпущена в свободное движение. То есть её координата $x$ при $t=0$ равна $x_0$, а её скорость $x'$ при $t=0$ равна нулю. Иначе говоря, $x(0)=x_0$, а $x'(0)=0$. Выясним, какой будет зависимость $x=x(t)$ в этом случае. Для этого нужно найти величины $A$ и $\alpha$ или в первой из формул (2.9), или во второй. Сделаем это и там, и там.

*а*) Пусть $x=A\cos(\omega t+\alpha)$. Тогда $x'=-A\omega\sin(\omega t+\alpha)$;

$$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ x'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos\alpha = x_0 \\ -A\omega\sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos\alpha = x_0 \\ \sin\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

Следовательно, $x=x_0\cos\omega t$ - формула гармонических колебаний точки $x$ в варианте 1, если исходить из формулы *а*).

*б*) Пусть $x=A\sin(\omega t+\alpha)$. Тогда $x'=A\omega\cos(\omega t+\alpha)$;

$$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ x'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\sin\alpha = x_0 \\ A\omega\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\sin\alpha = x_0 \\ \cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} = 90^0 \end{cases} \qquad (2.11)$$

Следовательно, $x=x_0\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=x_0\cos\omega t$ - формула гармонических колебаний точки $x$ в варианте 1, если исходить из формулы *б*). Совпадение результатов *а*) и *б*) еще раз подтверждает равносильность форм (2.7) общего решения дифференциального уравнения (2.6).

Проанализируем полученную формулу $x=x_0\cos\omega t$. При $t=0$ будет $x=x_0\cos 0=x_0$, и это будет максимальное (амплитудное) отклонение вправо колеблющейся точки $x$ от точки О. При этом скорость точки $x'=-x_0\omega\sin\omega t=-x_0\omega\sin 0=0$ - точка покоится. При $t=\dfrac{T}{4}$, то есть через четверть периода колебаний, будет иметь место равенство $\omega t=\dfrac{\pi}{2}$ (см. формулу (2.2)). В этот момент времени колеблющаяся точка, двигаясь справа налево, пройдет через точку О, ибо $x=x_0\cos\omega t=x_0\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, имея при этом максимальную по величине скорость

$$x'=-x_0\omega\sin\omega t=-x_0\omega\sin\frac{\pi}{2}=-x_0\omega$$

(знак минус показывает, что скорость точки направлена против оси $ox$, то есть влево). Далее, при $\omega t=\pi$, то есть через половину периода колебаний станет $x=x_0\cos\pi=-x_0$ - точка достигнет своего крайнего левого положения, имея при этом скорость $x' = -x_0\omega\sin\pi = 0$ - точка остановится. Затем точка двинется направо, и при $\omega t = \frac{3\pi}{2}$, то есть через три четверти периода колебаний, опять станет $x = 0$. При этом скорость точки будет $x' = -x_0\omega\sin\omega t = -x_0\omega\sin\frac{3\pi}{2} = x_0\omega$ - максимальной по величине. И, наконец, при $\omega t = 2\pi$, то есть по завершению периода колебаний, будет то же самое, что и при $t = 0$ - точка вернется в свое крайнее правое положение $x = x_0$ и остановится. После этого начнется новое колебание точки.

*Вариант* 2. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ масса $m$ покоилась в точке О, и по ней был произведен удар в положительном направлении оси $ox$, придавший массе начальную скорость $v_0$. Это значит, что $x(0) = 0$, а $x'(0) = v_0$. Выясним, какой будет зависимость $x = x(t)$ в этом варианте.

*а*) Пусть $x = A\cos(\omega t + \alpha)$. Тогда $x' = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$;

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos\alpha = 0 \\ -A\omega\sin\alpha = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = -1 \\ A = \dfrac{v_0}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{v_0}{\omega} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (2.12)$$

Следовательно, $x = \frac{v_0}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ - формула гармонических колебаний точки $x$ в варианте 2, если исходить из формулы *а*).

*б*) Пусть $x = A\sin(\omega t + \alpha)$. Тогда $x' = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$;

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\sin\alpha = 0 \\ A\omega\cos\alpha = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \\ A = \dfrac{v_0}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{v_0}{\omega} \\ \alpha = 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

Следовательно, $x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ - формула гармонических колебаний точки $x$ в варианте 2, если исходить из формулы *б*). Опять имеет место совпадение результатов *а*) и *б*).

Если теперь провести анализ таких колебаний точки $x$ аналогично тому, как мы это делали выше для варианта 1, то имея в виду, что $x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ и $x' = v_0\cos\omega t$, придем к следующим выводам. В начальный момент времени $t = 0$ точка $x$ находится в положении О, двигаясь при этом слева направо с максимальной скоростью $v_0$. В момент времени $t = \frac{T}{4}$, то есть через четверть периода колебаний, когда будет $\omega t = \frac{\pi}{2}$, точка достигнет своего крайнего правого (амплитудного) значения $x = \frac{v_0}{\omega}$ и остановится. После этого она двинется влево и, проходя через точку О, опять достигнет своей максимальной скорости $v_0$. Достигнув затем своего левого крайнего положения $x = -\frac{v_0}{\omega}$ и остановившись, она повернет направо и, разгоняясь, в момент времени $t = T$ вернется в точку О. Полное колебание точки завершится и начнется новое колебание.

Вот примерно так будет колебаться вдоль горизонтальной оси массивный шарик или иной груз, прикрепленный к одному из концов пружины, когда другой конец пружины закреплен. Аналогично будет колебаться по вертикали подвешенный к пружине груз, а также раскачиваться груз, подвешенный на веревке или на легком жестком стержне. И таким же образом (мы это подтвердим ниже) происходят колебания тока и напряжения в колебательном контуре, соединяющем емкость и индуктивность.

## 3. Задача об осцилляторе при наличии внешней силы

А теперь усложним рассмотренную выше задачу о гармоническом осцилляторе. Пусть кроме центральной силы на тело массой $m$ (на осциллятор) действует некоторая периодическая во времени внешняя (возмущающая) сила $F(t)$ вида

$$F(t) = A\sin \omega t \qquad (2.14)$$

Эта ситуация изображена на рис. 7.

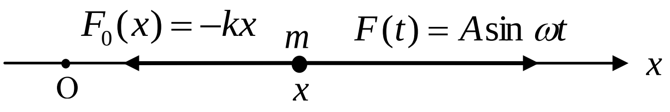



Рис.7

Тогда из второго закона Ньютона для материальной точки $m$ имеем:

$$ma = F_0(x) + F(t); \quad mx'' = -kx + A\sin\omega t; \quad x'' + \frac{k}{m}x = \frac{A}{m}\sin\omega t;$$

$$x'' + \omega_0^2 x = B\sin\omega t \quad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad B = \frac{A}{m}\right) \qquad (2.15)$$

Мы получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (2.15) относительно функции $x = x(t)$, описывающей перемещение материальной точки $m$ вдоль оси $ox$.

Как известно из теории таких уравнений, общее решение уравнения (2.15) имеет вид:

$$x = B_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) + x_*(t) \qquad (2.16)$$

Здесь первое слагаемое $x_1 = B_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ представляет собой общее решение однородного (с нулевой правой частью) дифференциального уравнения

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.17}$$

Это слагаемое описывает гармоническое колебание точки $m$ с амплитудой $B_0$, круговой частотой $\omega_0$ и начальной фазой $\alpha$. То есть описывает то колебание, которое возникло бы, если бы не было внешней силы. Такое колебание называют *свободным*. В нем $B_0$ и $\alpha$ - неизвестные константы, определяемые из начальных условий (об этом – ниже, в конце пункта). А второе слагаемое $x_2 = x_*(t)$ определяет поправку на свободное колебание точки $m$, связанную с действием на эту точку внешней периодической силы $F(t) = A\sin \omega t$, приводящей к появлению выражения $B\sin\omega t$ в правой части дифференциального уравнения (2.15). По своему физическому смыслу $x_2 = x_*(t)$ представляет собой *вынужденное колебание* точки $m$, налагающееся на её свободное колебание (добавляющееся к нему).

Очевидно, что это вынужденное колебание, вызываемое внешней периодической силой, будет тоже периодическим, и будет осуществляться с той же круговой частотой $\omega$, что и частота внешней силы. То есть выражение для $x_2 = x_*(t)$ следует искать в виде, аналогичном виду внешней силы $F(t)$:

$$x_*(t) = A_0 \sin\omega t \tag{2.18}$$

Имея в виду, что

$$x'_* = A_0\omega\cos\omega t, \qquad x''_* = -A_0\omega^2 \sin\omega t \;, \tag{2.19}$$

и подставляя $\{x_*, \quad x'_*, \quad x''_*\}$ в дифференциальное уравнение (2.15), получим:

$$A_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\omega t = B\sin\omega t \Rightarrow A_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = B \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\omega \neq \omega_0) \tag{2.20}$$

Итак, при $\omega \neq \omega_0$, согласно (2.20) и (2.18), получаем:

$$x_*(t) = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t \tag{2.21}$$

Это и есть та составляющая итогового колебания точки $m$, которая связана с действием внешней силы. Её называют *вынужденной составляющей* колебания. Эта вынужденная составляющая, как и составляющая $B_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ свободного колебания, представляет собой гармоническое колебание. Частота вынужденной составляющей колебания $\omega$ - это частота внешней силы, а амплитуда вынужденной составляющей равна $\frac{B}{\omega_0^2-\omega^2}$. Значение этой амплитуды тем больше, чем ближе частота $\omega$ внешней силы к частоте $\omega_0$ собственных (свободных) колебаний точки $m$. При $\omega \to \omega_0$ амплитуда $\frac{B}{\omega_0^2-\omega^2} \to \infty$, и $x_*(t) \to \infty$.

Если $\omega = \omega_0$, то такое явление называется *резонансом*. В этом случае выражение (2.21) теряет смысл и должно быть заменено выражением

$$x_*(t) = -\frac{B}{2\omega_0} t \cos\omega_0 t \qquad (2.22)$$

(обоснование этого опускаем). За счет множителя $t$ эта вынужденная составляющая итогового колебания неограниченно растет со временем $t$. А вместе с ним, согласно (2.16), растет и итоговое (результирующее) перемещение материальной точки. Движение точки при этом, как говорят, идет «вразнос».

На практике явление резонанса используют, например, для раскачивания качелей, толкая их в такт с их собственными колебаниями. Или используют при настройке приемника для усиления его звучания: стараются совместить собственную частоту $\omega_0$ колебаний в колебательном контуре приемника с частотой $\omega$ электромагнитных волн, посылаемых радиостанцией. Впрочем, с явлением резонанса приходится и бороться, чтобы малые естественные колебания (вибрации) зданий и сооружений не переходили в большие и не разрушали их.

И, наконец, последнее. В выражение (2.16), описывающем результирующее движение точки, входят две неопределенные константы - $B_0$ и $\alpha$. Для их определения должны быть заданы два дополнительных условия. Обычно этими условиями являются задание положения $x(0) = x_0$ и скорости $x'(0) = v_0$ в начальный момент времени $t = 0$.

*Пример*. Довести до конечного результата рассмотренную выше задачу о вынужденных колебаниях осциллятора при условии, что $\omega \neq \omega_0$ и условии, что в начальный момент времени $t = 0$ осциллятор (точка) находилась в центральной точке О и покоилась. То есть при начальных условиях: $x(0) = 0; \quad x'(0) = 0$.

*Решение*. Итоговое перемещение колеблющейся точки, согласно (2.16) и (2.21), имеет вид:

$$x = x(t) = B_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{B}{\omega_0^2-\omega^2} \sin\omega t$$

При этом

$$x' = x'(t) = B_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{B\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \cos\omega t$$

В обоих последних выражениях фигурируют неизвестные константы $B_0$ и $\alpha$. Для их определения реализуем начальные условия:

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ x'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 \sin\alpha = 0 \\ B_0\omega_0 \cos\alpha + \dfrac{B\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ B_0 = -\dfrac{B\omega}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha = \pi \\ B_0 = \dfrac{B\omega}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)} \end{cases}$$

Мы получили для величин $\{B_0;\ \alpha\}$ два варианта значений. Но эти два варианта приводят к одному и тому же результату:

$$x = x(t) = \frac{B}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}\left(\omega_0 \sin\omega t - \omega \sin\omega_0 t\right) \tag{2.23}$$

Это и есть та формула, в соответствии с которой происходят вынужденные колебания гармонического осциллятора (материальной точки) при заданных выше начальных условиях.

### 4. Задача об осцилляторе при учете сопротивления среды

В обеих рассмотренных выше задачах об осцилляторе – и для свободных гармонических колебаний материальной точки, и для вынужденных её колебаний – предполагалось, что окружающая колеблющуюся точку (осциллятор) среда не оказывает никакого сопротивления её движению. Но в реальности такое сопротивление всегда есть. Оно может быть незначительным, но оно всегда имеется. В частности, это может быть сопротивление воздушной или водной среды, трение, и т.д. А для токов в колебательном контуре этим сопротивлением будет омическое сопротивление резистора или проводов, соединяющих элементы колебательного контура (об этом – ниже, в следующем пункте). В случае свободных колебаний сопротивление среды приводит к затуханию этих колебаний и их прекращению, ибо энергия колеблющегося тела постоянно расходуется на преодоление сопротивления среды. Мы это хорошо знаем по качелям, если перестать их раскачивать. Да и в случае вынужденных колебаний сопротивление окружающей среды вносит свои коррективы. А именно, свободная составляющая вынужденных колебаний со временем затухает (исчезает), и остается лишь вынужденная составляющая этих колебаний.

Попробуем во всем этом разобраться подробнее. То есть опять рассмотрим задачу о гармоническом осцилляторе. Но теперь уже рассмотрим эту задачу при учете сопротивления осциллятору окружающей среды.

Рассмотрим рис. 6. Но только теперь к центральной силе $F=-kx$ добавим силу $R$ сопротивления среды движущемуся телу (материальной точке массы $m$). Как показывает опыт, эту силу можно приближенно считать пропорциональной скорости движения тела. То есть

$$R=-\mu x' \quad (\mu \succ 0) \quad \text{- формула Стокса.} \tag{2.24}$$

Здесь $\mu$ - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств сопротивляющейся среды (её плотности, вязкости), размеров и формы движущегося сквозь неё тела, и т.д. Определяется этот коэффициент экспериментально. Знак (-) берется потому, что сила сопротивления $R$ всегда направлена против скорости $x'$ движения тела.

Согласно второму закону Ньютона, имеем:

$$ma=F+R; \quad mx''=-kx-\mu x'; \quad x''+\frac{\mu}{m}x'+\frac{k}{m}x=0 \tag{2.25}$$

Введя обозначения

$$\frac{k}{m}=\omega^2; \quad \frac{\mu}{m}=2n, \tag{2.26}$$

получим окончательно:

$$x''+2nx'+\omega^2 x=0 \tag{2.27}$$

Уравнение (2.27) является дифференциальным уравнением для координаты $x$ точки $m$. Это – дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Схема решения таких уравнений хорошо разработана (возможно, читатель с ней знаком из курса дифференциальных уравнений). Не расписывая процесс решения уравнения (2.27) – он довольно громоздок, мы сразу приведем результаты этого решения:

1) Если $n^2-\omega^2 \prec 0$ (это будет иметь место, если сопротивление среды невелико), то

$$x=Ae^{-nt}\cos(\omega_* t+\alpha), \quad \text{где } \omega_*=\sqrt{\omega^2-n^2} \tag{2.28}$$

Здесь $A$ и $\alpha$ - константы, которые находятся из начальных условий задачи. Формула (2.28) показывает, что в случае малого сопротивления среды имеем дело с затухающими колебаниями с круговой частотой $\omega_*$. То есть с колебаниями с постепенно убывающей амплитудой. Действительно, амплитуда этих колебаний $Ae^{-nt}\to 0$ при $t\to\infty$.

2) Если $n^2-\omega^2 \succ 0$ (сопротивление большое), то

$$x=C_1e^{-(n+\omega_*)t}+C_2e^{-(n-\omega_*)t}, \quad \text{где } \omega_*=\sqrt{n^2-\omega^2} \tag{2.29}$$

Здесь $C_1$ и $C_2$ - константы, которые находятся из начальных условий задачи. Так как в этом варианте $n\succ\omega_*$, то $n\pm\omega_*\succ 0$. То есть оба показателя в экспонентах (2.29) отрицательны. Движение точки в этом случае не имеет колебательного характера. Просто при $t \to \infty$ точка $x \to 0$. То есть точка стремится к положению равновесия. Она «застревает» в вязкой среде.

3) Аналогичным предыдущему будет случай $n^2 - \omega^2 = 0$. Здесь

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t) \tag{2.30}$$

В этом случае тоже $x \to 0$ при $t \to \infty$.

### 5. Свободные колебания токов и напряжений в колебательном контуре

Среди различных электрических явлений особое место занимают *электромагнитные колебания*, при которых электрические величины (токи, напряжения) периодически меняются. Такие колебания, в частности, возникают в колебательном контуре, который представляет собой цепь, состоящую из последовательно соединенных катушки индуктивностью $L$, конденсатора емкостью $C$ и резистора сопротивлением $R$ (рис. 8). Конденсатор предварительно заряжают, и в момент времени $t = 0$ цепь замыкается. Заряд $Q$ с обкладок конденсатора начинает распространяться по цепи – в ней возникает переменный ток $I = I(t)$.

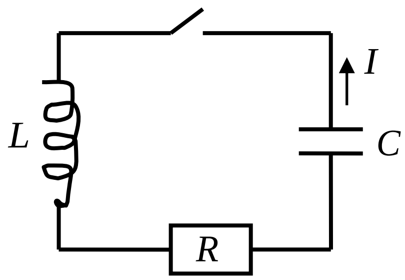


Рис. 8

Катушка и конденсатор являются обязательными элементами колебательного контура, ибо в них происходит преобразование электрического поля конденсатора в магнитное поле катушки, и наоборот. А вот резистор как отдельный элемент цепи может и отсутствовать. В этом случае роль резистора играют соединительные провода контура, сопротивлением $R$ которых, как правило, можно пренебречь.

Выясним, как именно со временем $t$ изменяется заряд $Q = Q(t)$ на обкладках конденсатора, напряжение $U = U(t)$ на конденсаторе и ток $I = I(t)$, возникающий в цепи. Для этого применим закон Ома для полной цепи в его известной формулировке: сумма напряжений на всех элементах цепи равна полной электродвижущей силе (ЭДС), имеющейся в цепи:

$$IR + U_C = E_s \tag{2.31}$$

Здесь $IR$ - напряжение на резисторе, $U_C = \dfrac{Q}{C}$ - напряжение на конденсаторе, $E_s = -L\dfrac{dI}{dt}$ - ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при протекании по ней переменного тока $I$ ($E_s$ - единственная ЭДС в контуре). Следовательно,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0 \tag{2.32}$$

Разделив обе части равенства (2.32) на $L$ и учитывая, что $I=\frac{dQ}{dt}=Q'$, $\frac{dI}{dt}=Q''$, получим дифференциальное уравнение для определения заряда $Q=Q(t)$ на обкладках конденсатора:

$$Q''+\frac{R}{L}Q'+\frac{1}{LC}Q=0 \tag{2.33}$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{LC}=\omega^2,\quad \frac{R}{L}=2n, \tag{2.34}$$

то уравнение (2.33) принимает вид:

$$Q''+2nQ'+\omega^2Q=0 \tag{2.35}$$

А это уравнение по своей форме полностью совпадает с уравнением (2.27) для свободных механических колебаний материальной точки при наличии сопротивления её движению. Только вместо отклонения $x=x(t)$ колеблющейся точки от центра колебаний в уравнении (2.35) фигурирует заряд $Q=Q(t)$ на конденсаторе. Ну и смысл величин $2n$ и $\omega$, согласно (2.34), другой, чем смысл этих же величин (2.26) для механических колебаний.

Сопротивление колебаниям заряда $Q$ на пластинах конденсатора (сопротивление процессу регулярной перезарядки его пластин) будет иметь место, если $n\neq 0$, то есть если в контуре имеется резистор с сопротивлением $R\neq 0$. Тогда в резисторе происходят постоянные потери электрической энергии протекающего через него тока из-за нагрева этого резистора, и колебания заряда $Q$ в конденсаторе постепенно затухают (тормозятся). Если же резистор отсутствует ($R=0$), то $n=0$, потерь электромагнитной энергии в колебательном контуре не будет, и свободные колебания, возникающие в колебательном контуре, будут незатухающими. Уравнение (2.35) в этом случае примет вид:

$$Q''+\omega^2Q=0 \tag{2.36}$$

А это значит, что заряд $Q$ будет меняться гармонически по закону

$$Q=Q_0\cos\omega t\ , \tag{2.37}$$

с круговой частотой $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ и периодом колебаний $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{LC}$ (формула Томсона). Амплитуда этих колебаний будет равна исходной величине заряда $Q_0$, который наносят на обкладки конденсатора и который находится на них в момент времени $t=0$. В формуле (2.37) уже учтены начальные условия: $Q(0)=Q_0$; $Q'(0)=0$.

Но если величиной $R$ сопротивления резистора (а, значит, и потерями энергии на нем) пренебречь нельзя – их надо учитывать, то, согласно уравнению (2.35) и формуле (2.28), при не слишком больших значениях $R$ в контуре будут осуществляться свободные затухающие колебания по закону

$$Q = Ae^{-nt}\cos(\omega_* t+\alpha), \quad \text{где } \omega_* = \sqrt{\omega^2 - n^2} \tag{2.38}$$

Параметры $A$ и $\alpha$ этой формулы найдутся из начальных условий: $Q(0)=Q_0$; $Q'(0)=0$. И значения этих параметров таковы (попробуйте показать это самостоятельно):

$$\alpha = -arctg\frac{n}{\omega_*}; \quad A = \frac{\omega}{\omega_*}Q_0 \tag{2.39}$$

При больших сопротивлениях $R$ резистора колебания в контуре совсем не возникают. Конденсатор просто разрядится, и его перезарядка не произойдет. Точно так же, как при большом сопротивлении не возникает и свободных механических колебаний.

Зная закон изменения заряда $Q$ на обкладках конденсатора, будем знать и закон изменения напряжения $U_C = \dfrac{Q}{C}$ на конденсаторе. А также можем установить и закон изменения тока $I = I(t)$ в цепи, ибо $I = Q'$, и действующую в цепи ЭДС $E_s$.

В частности, для случая $R=0$ имеем выражение (2.37) для $Q$. Поэтому

$$I = I(t) = Q' = -Q_0\omega\sin\omega t = Q_0\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) = I_m\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.40}$$

Здесь $I_m = \omega Q_0$ - максимальное значение тока в цепи, который, как и заряд $Q$, колеблется в контуре по гармоническому закону. Но начальная фаза тока на $\dfrac{\pi}{2}$ больше, чем у заряда. То есть ток по фазе на четверть периода опережает заряд. Это значит, что когда ток достигает своего максимального значения, заряд на конденсаторе равен нулю. И наоборот. А вот электродвижущая сила самоиндукции $E_s$, создаваемая в катушке индуктивности, совпадает по фазе с напряжением на обкладках конденсатора. Действительно, при $R=0$

$$E_s = IR + U_C = U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C}\cos\omega t = E_m\cos\omega t \tag{2.41}$$

Здесь $E_m = \dfrac{Q_0}{C}$ - максимальное значение этой ЭДС. То есть максимальное значение ЭДС, возникающей в катушке, равно максимальному напряжению на обкладках конденсатора.

Для случая $R \neq 0$ всё будет существенно сложнее, ибо и выражение (2.38) для заряда $Q$ конденсатора сложнее, чем выражение (2.37), имеющее место при $R=0$. Соответствующие случаю $R \neq 0$ выражения для тока $I = I(t)$ и ЭДС самоиндукции $E_s$ читателю предлагаем получить самостоятельно. Впрочем, в нахождении всех этих величин мало смысла, так как они, как и заряд $Q$, быстро затухают со временем.

## 6. Вынужденные колебания токов и напряжений в колебательном контуре

Ситуация с колебаниями в колебательном контуре усложнится, если в состав контура ввести внешний источник переменного напряжения $U$, меняющегося, например, по закону

$$U = U_m \cos\omega t \qquad (2.42).$$

В этом случае колебания в контуре станут вынужденными и уже незатухающими, так как внешний источник напряжения будет постоянно восполнять потери той энергии в колебательном контуре, которая растрачивается на нагрев резистора. В этом случае вместо уравнения (2.31) будем иметь:

$$IR + U_C = E_s + U \qquad (2.43)$$

А вместо линейного однородного уравнения (2.33) – линейное неоднородное уравнение

$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{1}{LC}Q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t \qquad (2.44)$$

То есть уравнение

$$Q'' + 2nQ' + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t, \qquad (2.45)$$

где

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2; \quad \frac{R}{L} = 2n \qquad (2.46)$$

Общее решение этого уравнения, как и любого линейного неоднородного дифференциального уравнения, состоит из двух слагаемых:

$$Q = Q_1(t) + Q_2(t) \qquad (2.47)$$

Первое слагаемое $Q_1(t)$ - это общее решение линейного однородного уравнения

$$Q'' + 2nQ' + \omega_0^2 Q = 0 \qquad (2.48)$$

Если сопротивление $R$ резистора невелико $\left(n^2 \prec \omega_0^2\right)$, то, согласно (2.28)

$$Q_1(t) = Ae^{-nt}\cos(\omega_* t + \alpha), \quad \text{где } \omega_* = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} \qquad (2.49)$$

Функция $Q_1(t)$ - это так называемая *свободная составляющая* колебания заряда конденсатора. Она описывает свободные затухающие колебания этого заряда – те колебания, которые имели бы место в контуре, если бы в нем не было источника внешнего напряжения. А функция $Q_2(t)$ - это *вынужденная составляющая* колебания заряда конденсатора, связанная с действием источника внешнего напряжения и удовлетворяющая неоднородному уравнению (2.45). Мы не будем её выводить, приведем лишь готовое её выражение (см., например, [2]):

$$Q_2(t) = Q_m \cos(\omega t - \alpha), \text{ где } Q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad tg\alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \qquad (2.50)$$

Функция $Q_2(t)$ представляет собой *стационарное колебание* заряда на конденсаторе. После того, как свободная составляющая колебания $Q_1(t)$ затухнет, установится именно это стационарное колебание. Ибо, согласно (2.47), $Q = Q_2(t)$ при $Q_1(t) = 0$.

Продифференцировав выражение $Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha)$ по $t$, найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (2.51)$$

где $I_m$ - максимальное значение тока в контуре:

$$I_m = \omega Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (2.52)$$

Выражение (2.51) может быть записано в виде

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi) \qquad (2.53)$$

где $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ - сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (2.42)). В соответствии с выражением (2.50)

$$tg\varphi = tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{tg\alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad (2.54)$$

Из формулы (2.54) вытекает, что ток отстает по фазе от напряжения $(\varphi \succ 0)$, если $\omega L \succ \frac{1}{\omega C}$, и опережает напряжение $(\varphi \prec 0)$, если $\omega L \prec \frac{1}{\omega C}$.

## 7. Резонанс в электрической цепи

При изучении вынужденных механических колебаний осциллятора мы рассмотрели такое важное явление, как резонанс. Резонанс имеет место, когда собственная частота колебаний осциллятора совпадает с частотой изменения внешней силы. А так как имеется прямая аналогия между механическими колебаниями осциллятора и электромагнитными колебаниями в колебательном корпусе, то должен иметь место резонанс и в колебательном контуре. И такое явление в нем действительно наблюдается.

Рассмотрим, например, такую важнейшую характеристику колебательного контура, как протекающий по нему ток $I$. Если в контуре имеется источник переменного внешнего напряжения $U$, меняющегося по гармоническому закону (2.42) с круговой частотой $\omega$, то в контуре устанавливается переменный гармонический ток той же круговой частоты. И описывается он формулой (2.53). Амплитуда $I_m$ этого тока имеет вид (2.52). И зависит она от частоты $\omega$ внешнего напряжения. Если частоту этого напряжения менять таким образом, что подкоренное выражение в формуле (2.52) будет уменьшаться, то амплитуда тока в контуре будет расти. Резонанс тока возникнет, когда эта амплитуда станет максимальной. А максимальной она будет при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Но, согласно (2.46), $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ - частота собственных гармонических колебаний контура. Таким образом, резонанс тока в колебательном контуре возникает, когда частота переменного напряжения, приложенного к контуру, равна собственной частоте колебательного контура:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.55}$$

В условиях резонанса амплитуда силы тока в контуре, согласно (2.52), равна $I_m = \frac{U_m}{R}$. При $R \to 0$ резонансное значение силы тока неограниченно возрастает: $\left(I_m\right)_{рез} \to \infty$. Резонанс тока с уменьшением $R$ становится всё ярче выраженным. Наоборот, с увеличением $R$ максимальное значение силы тока уменьшается, и при больших $R$ говорить о резонансе уже не имеет смысла.

Вместе с резонансом тока, естественно, будет иметь место и резонанс заряда на обкладках конденсатора, и резонанс напряжения между его обкладками, и резонанс ЭДС самоиндукции в катушке. Причем резонансные напряжения на конденсаторе и катушке при малых $R$ могут во много раз (в десятки и сотни раз) превосходить внешнее напряжение. Поэтому резонанс в электрической цепи может принести большой вред. Чрезмерно большие токи могут перегреть провода и вызвать возгорание. А большие напряжения приведут к пробою изоляции.

Но явление резонанса можно использовать и с пользой. В частности, это делается в радиосвязи. Колебательный контур радиоприемника резко усиливает в нем лишь те индуцированные радиоволнами ЭДС, частота которых совпадает с собственной частотой контура. Настройка контура на нужную частоту $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ происходит путем изменения емкости конденсатора $C$. И осуществляется это поворотом ручки приемника.

## 8. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций

К математической модели о колебаниях той или иной формы приводят не только задачи физики. Рассмотрим пример из биологии.

Пусть на одной и той же территории проживают две биологические популяции с численностями $N(t)$ и $M(t)$. Причем первая из них растительноядная, а вторая питается представителями первой популяции. Требуется построить математическую модель изменения численности этих популяций.

*Решение*. Пусть за малое время $\Delta t$, прошедшее с момента времени $t$, родилось $(\Delta N)_1$ и погибло (было съедено) $(\Delta N)_2$ животных первой популяции. За это же время $\Delta t$ какое-то количество животных первой популяции умерло своей смертью, но мы этой величиной пренебрежем. То есть полагаем, что мало кто из животных первой популяции доживает до старости и умирает своей смертью. Очевидно, что величина $(\Delta N)_1$ пропорциональна как исходной (в момент времени $t$) численности $N(t)$ первой популяции, так и времени $\Delta t$. А величина $(\Delta N)_2$ пропорциональна и $N(t)$, и $M(t)$. То есть пропорциональна произведению $N(t)\cdot M(t)$, а также времени $\Delta t$. Таким образом,

$$(\Delta N)_1 = \alpha_1 N \Delta t; \quad (\Delta N)_2 = \beta_1 N M \Delta t \ , \tag{2.56}$$

где $\alpha_1 \succ 0$ и $\beta_1 \succ 0$ - некие коэффициенты пропорциональности. Тогда общее изменение $\Delta N$ количества животных первой популяции за время $\Delta t$ равно:

$$\Delta N = (\Delta N)_1 - (\Delta N)_2 = (\alpha_1 - \beta_1 M) N \cdot \Delta t \tag{2.57}$$

Из полученного равенства следует:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = (\alpha_1 - \beta_1 M) N \tag{2.58}$$

Переходя в (2.58) к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M) N \,, \text{ или } \; N' = (\alpha_1 - \beta_1 M) N \tag{2.59}$$

Теперь перейдем ко второй популяции (к хищникам). Пусть за время $\Delta t$ родилось $(\Delta M)_1$ животных этой популяции, и умерло (от старости, от болезней) $(\Delta M)_2$ животных. Очевидно, можно считать, что

$$(\Delta M)_1 = \alpha_2 MN\Delta t; \quad (\Delta M)_2 = \beta_2 M\Delta t \quad (\alpha_2 \succ 0 \text{ и } \beta_2 \succ 0) \tag{2.60}$$

Тогда общее изменение $\Delta M$ количества животных второй популяции за время $\Delta t$ равно:

$$\Delta M = (\Delta M)_1 - (\Delta M)_2 = (\alpha_2 N - \beta_2)M \cdot \Delta t \tag{2.61}$$

Из полученного равенства следует:

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = (\alpha_2 N - \beta_2)M \tag{2.62}$$

Переходя в (2.62) к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$\frac{dM}{dt} = (\alpha_2 N - \beta_2)M, \text{ или } M' = (\alpha_2 N - \beta_2)M \tag{2.63}$$

Очевидно, что система «травоядные – хищники» находится в равновесии при $M_0 = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ и $N_0 = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$, когда $N' = 0$ и $M' = 0$. А теперь рассмотрим малые отклонения системы от равновесных значений. То есть пусть $N = N_0 + n; \quad M = M_0 + m$, где $n \prec\prec N_0; \quad m \prec\prec M_0$.

Подставляя эти выражения для $N$ и $M$ в уравнения (2.59) и (2.63) и отбрасывая слагаемые, содержащие произведения $mn$ малых величин $n$ и $m$, придем к следующим двум уравнениям:

$$n' = -\beta_1 N_0 m; \qquad m' = \alpha_2 M_0 n \tag{2.64}$$

Дифференцируя каждое из них и подставляя результат во второе уравнение, придем к двум одинаковым уравнениям

$$n'' + \omega^2 n = 0; \quad m'' + \omega^2 m = 0, \text{ где } \omega = \sqrt{\alpha_1 \beta_2} \tag{2.65}$$

Оба эти уравнения являются уравнениями гармонических колебаний. Следовательно, в системе «травоядные - хищники» отклонения численности обеих популяций от их равновесных состояний имеют характер малых гармонических колебаний с круговой частотой $\omega$, зависящей лишь от коэффициента рождаемости $\alpha_1$ травоядной популяции и коэффициента смертности $\beta_2$ хищников. Эти коэффициенты определяются опытным путем.

Заметим, что эти отклонения колеблются со сдвигом фаз в четверть периода колебаний, причем колебания величины $n$ опережают колебания величины $m$. Об свидетельствуют уравнения (2.64). Действительно, из второго из этих уравнений следует, что когда величина $n$ будет максимальной, то скорость $m'$ изменения величины $m$ будет максимальной и положительной. Значит, колеблющаяся величина $m$ проходит через 0 и меняется в сторону увеличения. Через четверть периода колебаний величина $m$ достигнет своего максимального значения, а величина $n$ будет проходить через 0, имея при этом максимальную по величине и отрицательную скорость изменения. И т. д. Таким образом, колебания величины $n$ на четверть периода опережают колебания величины $m$. То есть имеет место запаздывание реакции численности хищников на изменение численности травоядных.

## Упражнения

1. Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой $\nu = 2\,Гц$, в момент времени $t = 0$ проходит положение, определяемое координатой 6 см, со скоростью 14 см/сек. Определить амплитуду колебаний.

<u>*Ответ*</u>: $\approx 6{,}1$см.

2. При подвешивании грузов массами $m_1 = 500$г и $m_2 = 400$г к свободным пружинам последние удлинились одинаково – на 15 см. Пренебрегая массой пружин, определить периоды колебаний грузов.

<u>*Ответ*</u>: $T_1 = T_2 = 0{,}78$сек.

3. Колебательный контур содержит катушку индуктивности 25 мГн, конденсатор емкостью 10 мкФ и резистор сопротивлением 1ом. Определить частоту колебаний контура.

<u>*Ответ*</u>: 400 Гц.

4. Последовательно соединенные резистор с сопротивлением 110 ом, и конденсатор подключены к внешнему переменному напряжению с амплитудным значением 110 В. Оказалось, что амплитудное значение установившегося тока в цепи равно 0,5А. Определить разность фаз между током и внешним напряжением.

<u>*Ответ*</u>: $60^0$.

5. Генератор, частота которого составляет 32 кГц и амплитудное значение напряжения 120 В, включен в резонирующую цепь, емкость которой равна 1нФ. Определить амплитудное значение напряжения на конденсаторе, если активное сопротивление цепи равно 5 ом.

<u>*Ответ*</u>: 119 кВ.

# ГЛАВА 2.
# ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

## §1. Функции и их производные в экономике

### 1. Общий обзор экономических функций

При анализе экономических явлений и процессов, как и при исследовании процессов любой другой природы, основным математическим инструментом являются функции – одной или нескольких переменных. Наиболее широко в экономико-математических моделях применяются самые простые из них – ***линейные функции***. То есть функции вида

$$y = kx + b \quad \text{или} \quad y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + .... + a_n x_n + b \tag{1.1}$$

Среди других функций, применяемых в экономико-математических моделях, выделяются ***мультипликативные функции***

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n, \tag{1.2}$$

представляющие зависимую переменную $y$ в виде произведения факторных переменных. Такая функция $y$ обращается в нуль при отсутствии действия (при нулевом уровне) хотя бы одного из факторов.

В ряде экономических задач находят свое применение и другие нелинейные функции – дробно-рациональные, степенные, показательные, логарифмические, и т.д.

Наиболее часто исследуются в экономике следующие функции:

1. *Производственная функция* – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.
2. *Функции спроса и предложения* – зависимости объема потребляемой или производимой продукции от рыночной цены единицы такой продукции.
3. *Функция полезности* (функция предпочтений) – зависимость полезности товара или услуги от их объема.
4. *Функции потребления и сбережения* – функции, определяющие долю доходов граждан, которую они используют на потребление и сбережение соответственно.

Наряду с самими функциями в экономике широко используются и их ***производные***.

1. Пусть, например, производственная функция $y = f(t)$ представляет собой количество $y$ произведенной продукции за время $t$. Тогда за время $\Delta t$, прошедшее с момента $t$ до момента $t + \Delta t$, будет произведено $\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t)$ единиц продукции. При этом отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ – это, очевидно, *средняя производительность труда* на промежутке времени $[t; t + \Delta t]$

длительностью $\Delta t$. Она выражает среднее количество продукции, произведенной за единицу времени этого промежутка. А тогда предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y' = f'(t) \tag{1.3}$$

– это так называемая *предельная (истинная) производительность труда в момент времени t.* Она представляет собой производную от производственной функции $y = f(t)$.

2. Пусть $x$ – количество выпускаемой продукции (в некоторых единицах), а $y$ – соответствующие издержки на ее производство (в рублях). То есть $y$ – себестоимость продукции $x$. Тогда $y = f(x)$ – зависимость себестоимости продукции $y$ от ее объема $x$.

Если объем продукции вырастет с $x$ до $x + \Delta x$, то есть вырастет на $\Delta x$ единиц, то ее себестоимость вырастет на $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ рублей. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя себестоимость продукции, приходящаяся на единицу ее прироста. А

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x), \tag{1.4}$$

то есть производная функции $y = f(x)$ – это так называемая *предельная себестоимость* продукции, определяющая затраты на производство единицы дополнительной продукции, если достигнутый объем производства составляет $x$ единиц.

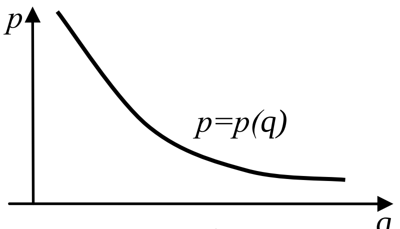


Рис. 1

3. Пусть $p = p(q)$ – так называемая *кривая спроса*, определяющая связь между ценой $p$ единицы товара и спросом $q$ на этот товар ($q$ – количество товара, который может быть продан при цене $p$ за его единицу) – рис. 1.
Кривая спроса, естественно, является убывающей кривой. Ее форма зависит от потребительских свойств товара, от финансового состояния покупателей и от других факторов. При этом

$$R = pq = q \cdot p(q) \tag{1.5}$$

– суммарный доход от продаж. А

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R' = [q \cdot p(q)]' \tag{1.6}$$

– так называемый *предельный доход*. Он определяет доход, полученный от единицы проданной продукции, если эта единица продана дополнительно к объему продаж $q$.

Эти и другие *предельные величины* широко используются в так называемом *предельном экономическом анализе*. В экономической литературе предельные величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква *M*. Например, *MR* – предельный доход *R*. И так как $R = q \cdot p(q)$, то

$$MR = R' = [q \cdot p(q)]' \tag{1.7}$$

## 2. Функции спроса и предложения

Эти функции являются основными для рыночной экономики.

<u>Определение</u> 1. ***Спросом*** называется количество товара, которое покупатели приобретают на рынке в единицу времени в данных условиях.

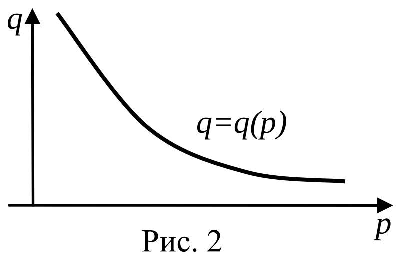



Рис. 2

Спрос является функцией целого ряда факторов. Например, на спрос на бензин в данном регионе, кроме его цены, влияют и другие факторы – количество и социальный состав жителей, населяющих регион, их доходы, цены на автомобили, пробег этих автомобилей на 10 литров бензина, цены на общественный транспорт, и т.д. Однако в простейшем случае (на достаточно коротком временном интервале) считают, что все факторы, кроме цены, являются неизменными, что вполне оправдано. Тогда спрос $q$ на бензин в данном регионе (продаваемое его количество за единицу времени – например, за сутки) будет зависеть лишь от его цены $p$ за литр. То есть будет являться функцией этой цены:

$$q = q(p) \tag{1.8}$$

Аналогично спрос $q$ на любой другой товар тоже полагается зависящим лишь от цены $p$ за единицу этого товара. Функция (1.8) называется ***функцией спроса.***

Аналитический вид функции спроса $q = q(p)$ зависит от потребительских свойств товара, и для разных товаров и вид этой функции разный. Чем более товар необходим человеку, тем менее изменчива величина спроса при изменении цены на него. Например, пятикратный рост цен на театральные билеты и на хлеб может привести к пустым театральным залам, но объем покупателей хлеба, очевидно, сильно не изменится, хотя и он сократится. И вообще, независимо от товара, повышение цены $p$ на этот товар приведет к неизбежному падению спроса на него. То есть функция спроса $q = q(p)$ на любой товар является убывающей – рис. 2.

Отметим, что часто функцию спроса представляют в виде обратной зависимости $p = p(q)$. Эта функция тоже является убывающей (рис. 1).

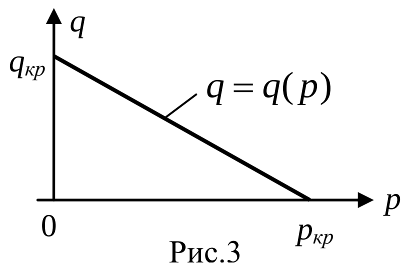


Рис.3

Функцию спроса на конкретный товар определяют, как правило, опытным путем (эмпирически). При этом часто, для упрощения, её представляют в линейном виде – рис. 3. Здесь $p_{кр}$ – та максимальная (критическая) цена единицы товара, при которой товар перестанут покупать вообще. А $q_{кр}$ – это тот максимальный (критический) объем товара, который потребители возьмут при нулевой цене на него, то есть даром.

<u>*Определение* 2</u>. ***Предложением*** называется количество товара, которое производители выставят на продажу в единицу времени в данных условиях.

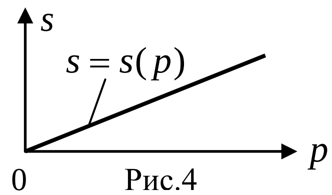


Рис.4

Предложение, как и спрос, является функцией целого ряда факторов. Но главный из этих факторов – это рыночная цена на товар. Ибо чем она выше, тем больше стимулов у производителей производить этот товар, и тем больше, следовательно, поступит его на рынок. Обычно предложение $s$ считается функцией лишь цены $p$ единицы производимого товара:

$$s = s(p) \tag{1.9}$$

Функция (3.9) называется ***функцией предложения***. При $p = 0$ обычно и $s = 0$ (если только нет предварительно поставленной в торговлю нереализованной продукции), ибо у производителей нет никакого стимула производить этот товар. А при росте $p$ растет, естественно, и предложение $s$. Зависимость $s = s(p)$ предложения товара от цены на него, как и зависимость $q = q(p)$ спроса от цены, определяют эмпирическим путем. В простейшем случае эту зависимость считают линейной – рис.4.

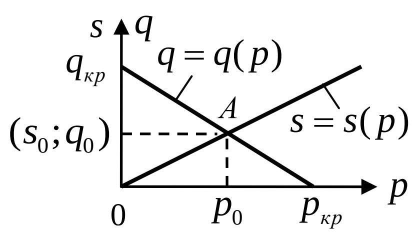


Рис.5

Цену товара $p_0$, при которой спрос равен предложению $(q = s)$, называют ***равновесной ценой*** этого товара – рис.5. Спрос $q_0$ при равновесной цене $p_0$ называют ***равновесным спросом***, а предложение $s_0$ при равновесной цене $p_0$ - ***равновесным предложением***. Фактически и равновесный спрос, и равновесное предложение представляют собой ***равновесный объем продаж*** данного товара.

<u>*Пример.*</u> Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q = 1275 - 25p$ единиц товара в месяц, а функция предложения на этот товар имеет вид $s = 60p$ единиц товара в месяц, где $p$ - цена единицы товара в рублях. Найти равновесную цену и равновесный объем продаж данного товара.

*Решение.* Приравнивая друг другу $s$ и $q$, получим уравнение: $60p = 1275 - 25p$. Решая его, находим: $p = 15$ руб. Это и есть равновесная цена $p_0$ единицы товара. При этой цене равновесный объем продаж $q_0 = s_0 = 900$ ед. товара в месяц.

Равновесная цена – главный координатор на рынке товаров. Она информирует и производителей, и покупателей о том, при какой цене реализуются в данный момент товары на рынке. Эта цена устойчива. Ибо если цену товара изменить, то произойдет рассогласование между спросом и предложением. При повышении цены выше равновесной уменьшится спрос и увеличится предложение, а, следовательно, образуется излишек товаров – произойдет затоваривание, что бьет по интересам производителей. В этой ситуации производители вынуждены снижать цены, увеличивая этим самым спрос. Затоваривание ликвидируется, а цена товара возвращается к равновесной. А если цену снизить – увеличится спрос и уменьшится предложение, что ведет к дефициту товаров. При дефиците покупатели готовы платить за товар больше, что стимулирует производителей увеличить производство товаров, ибо их будут покупать и по более высокой цене. Цена на товар снова возвращается к равновесной. Такую способность рынка самостоятельно, без вмешательства государства, регулировать производство товаров и цены на них, Адам Смит, основоположник экономической теории, назвал *невидимой рукой рынка*.

Но все это имеет место, если есть свободная конкуренция производителей, отсутствует монополизм в производстве товаров, и государство не вмешивается в производство и распределение товаров. В противном случае «невидимая рука рынка» неспособна осуществлять свою регулирующую миссию. Такая ситуация имела место, в частности, в директивной планово-распределительной советской экономике, когда нередки были и дефицит товаров, и их перепроизводство.

Впрочем, современная экономическая теория не отрицает необходимости вмешательства государства в экономику тогда, когда это нужно. Но обсуждать этот специальный вопрос здесь мы не будем.

## 3. Функция полезности. Кривые безразличия

Пусть потребитель может потратить некоторую денежную сумму $R$ на приобретение набора товаров. Величину $R$ обычно называют *бюджетным ограничением*. Математическая модель поведения потребителя называется *моделью потребительского выбора*.

Рассмотрим случай, когда приобретаемый потребителем набор состоит из двух товаров (например, из хлеба и молока). Обозначим через $x_1$ количество единиц первого приобретенного товара, а через $x_2$ - второго. Если цена единицы первого товара равна $p_1$ (цена буханки хлеба), а цена единицы второго товара равна $p_2$ (цена литра молока), то бюджетное ограничение $R$ примет вид:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq R \tag{1.10}$$

При осуществлении набора имеющуюся денежную сумму $R$ можно распределить разными способами: купить больше первого товара и меньше второго, и наоборот. И каждый возможный набор товаров имеет в глазах покупателя разную степень ценности (*полезности*). Например, если на все деньги купить хлеба и совсем не купить молока, или, наоборот, купить только молока без хлеба, то такие продуктовые наборы по своей полезности явно уступают набору, в котором есть и хлеб, и молоко. А среди наборов, содержащих и хлеб, и молоко, есть такой набор, который признается покупателем максимально полезным. Именно этот набор и старается приобрести (выбрать) покупатель.

Если каждому набору товаров $(x_1, x_2)$ ставится в соответствие некоторая числовая оценка его полезности $u$, то тем самым на координатной плоскости с осями координат $x_1$ и $x_2$ задается функция

$$u = u(x_1, x_2), \tag{1.11}$$

которая называется ***функцией полезности***.

Сформулируем **основные свойства функции полезности**.

1. *Увеличение количества одного товара в наборе при постоянном количестве другого приводит к увеличению функции полезности*. То есть при $\Delta x_1 \succ 0$ и $\Delta x_2 \succ 0$ имеют место равенства:

$$u(x_1 + \Delta x_1, x_2) \succ u(x_1, x_2); \qquad u(x_1, x_2 + \Delta x_2) \succ u(x_1, x_2) \tag{1.12}$$

Из этих равенств следует, что частные производные функции полезности $u = u(x_1, x_2)$ по обеим переменным положительны в любой точке $x_1, x_2)$. То есть

$$u'_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \succ 0; \quad u'_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \succ 0 \tag{1.13}$$

Эти частные производные функции полезности в экономике называют *предельными (маржинальными) полезностями товаров.* Для них используют и соответствующие обозначения:

$M_{x_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ - предельная (маржинальная) полезность первого товара

$M_{x_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_{21}}$ - предельная (маржинальная) полезность второго товара (1.14)

2. *Предельная полезность товара уменьшается при росте его количества в наборе*. Это свойство означает, что одинаковое приращение количества товара дает большее приращение функции полезности при меньшем исходном количестве товара в наборе.

И это совершенно естественно. Если в продуктовом наборе хлеба мало, то каждый дополнительный его кусок весьма ценен и существенно увеличивает полезность продуктового набора. А если хлеба уже достаточно, то дополнительные порции хлеба уже не так ценны и полезность продуктового набора увеличивают незначительно.

С математической точки зрения свойство 2 означает, что производные предельных полезностей, то есть частные производные функции полезности второго порядка, отрицательны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \prec 0\,; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \prec 0 \qquad (1.15)$$

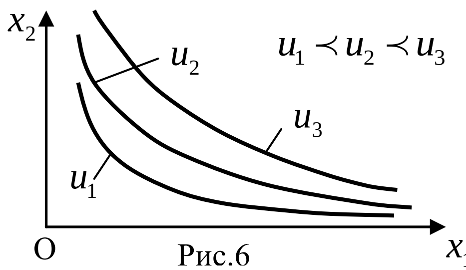


Рис.6

Если на координатной плоскости $x_1ox_2$ соединять точки с одинаковым уровнем полезности $u$, то мы получим так называемые *кривые безразличия.* Уравнения этих кривых имеют вид:

$$u(x_1, x_2) = u = const \qquad (1.16)$$

Можно доказать, что из свойств (1.13) и (1.15) следует, что кривые безразличия являются вогнутыми убывающими линиями. На рис.6 изображены кривые безразличия для значений функции полезности $u_1$, $u_2$, $u_3$ при условии, что $u_1 \prec u_2 \prec u_3$.

## 4. Задача наилучшего потребительского выбора

Эта задача состоит в определении такого набора товаров $\left(x_1^*, x_2^*\right)$, который дает максимальное значение функции полезности $u = u(x_1, x_2)$ при заданном бюджетном ограничении $R$. То есть её математическая формулировка такова:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 \le R \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.16)$$

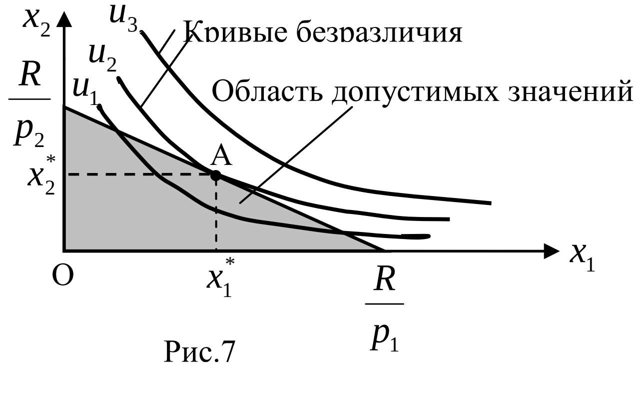


Рис.7

Множество точек на координатной плоскости $x_1ox_2$, координаты $(x_1, x_2)$ которых удовлетворяют системе ограничений, содержащихся в (1.16) (два последних условия), называется *областью допустимых значений*. Очевидно, эта область представляет собой заштрихованный прямоугольный треугольник, изображенный на рис. 7.

Из рис.7 очевидно, что для решения задачи потребительского выбора нужно найти точку $A$, которой и соответствует решение $\left(x_1^*, x_2^*\right)$ этой задачи. Точка $A$ должна принадлежать одновременно и области допустимых значений (треугольнику), и кривой безразличия с максимальным значением функции полезности $u = u(x_1, x_2)$. Следовательно, точка $A$ должна лежать на гипотенузе треугольника, а кривая безразличия должна касаться гипотенузы в этой точке. То есть задача (1.16) о поиске оптимального (наиболее полезного) товарного набора сводится к задаче (1.17):

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.17)$$

<u>*Пример*</u>. Функция полезности потребителя имеет вид: $u = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$. Цена единицы товара $x_1$ равна $p_1 = 20$руб. Цена единицы товара $x_2$ равна $p_2 = 10$ руб. Бюджетное ограничении на приобретение товаров $x_1$ и $x_2$ равно 200 руб. Найти оптимальный (максимально полезный) набор товаров.

<u>*Решение*</u>. Система (1.17), формулирующая поставленную задачу, имеет вид:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x_1 x_2} \to \max \\ 20x_1 + 10x_2 = 200 \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Выражая $x_2$ из второго равенства: $x_2 = 20 - 2x_1$, и подставляя это значение в первое условие системы, получим:

$$u = \sqrt{x_1(20 - 2x_1)} \to \max; \;\Rightarrow\; y = 20x_1 - 2x_1^2 \to \max; \;\Rightarrow\; y' = 20 - 4x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 5$$

При этом $x_2 = 10$. Таким образом, товарный набор $\left(x_1 = 5; x_2 = 10\right)$ имеет максимальную полезность (является оптимальным).

Если $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ (это одна из наиболее часто используемых функций полезности), то задача (1.17) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.18)$$

При решении задачи (1.18) используем следующий известный и легко доказываемый факт, справедливый для любых неотрицательных чисел $x_1$ и $x_2$: если $x_1 + x_2 = R$, то произведение $x_1 \cdot x_2$ этих чисел будет максимальным при равенстве чисел, то есть при $x_1 = x_2 = \dfrac{R}{2}$. Это обстоятельство позволяет сразу решить задачу (1.18):

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 = R \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{p_1p_2} \cdot p_1x_1 \cdot p_2x_2 \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 = R \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1x_1 = \dfrac{R}{2} \\ p_2x_2 = \dfrac{R}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{R}{2p_1} \\ x_2 = \dfrac{R}{2p_2} \end{cases} \quad (1.19)$$

<u>*Пример*</u>. Функция полезности имеет вид: $u = x_1 \cdot x_2$. Цена единицы первого товара равна 10 рублям, а второго 40 рублям. То есть $p_1 = 10$, $p_2 = 40$. Бюджетное ограничение $R = 400$руб. Найти оптимальный (максимально полезный) товарный набор.

<u>*Решение*</u>. Пользуясь формулами (3.19), сразу получаем: $x_1 = \dfrac{400}{20} = 20$; $x_2 = \dfrac{400}{80} = 5$. Таким образом, максимально полезный товарный набор состоит из 20 ед. первого товара и 5 ед. второго товара.

Если товарный набор состоит из $n$ товаров $\{x_1, x_2, .... x_n\}$ при ценах $\{p_1, p_2, .... p_n\}$ за единицу товара и бюджетном ограничении $p_1x_1 + p_2x_2 + .... + p_nx_n \le R$, и $u = u(x_1, x_2 .... x_n)$ - функция полезности, то задача наилучшего потребительского выбора принимает следующий вид:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, .... x_n) \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = R \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; .... \; x_n \ge 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Общим методом решения такой задачи является метод множителей Лагранжа (на нем не останавливаемся), который реализуется по стандартной программе на ЭВМ. Но если функция полезности имеет мультипликативный вид $u = x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n$, то задача (1.20) имеет явное и простое решение:

$$x_1 = \frac{R}{np_1}; \quad x_2 = \frac{R}{np_2}; \; ...... \; x_n = \frac{R}{np_n} \quad (1.21)$$

Кстати, последние формулы (1.19) – это частный случай формул (1.21).

## 5. Эластичность функций

При математическом исследовании различных экономических процессов часто используется понятие *эластичности функции*.

Определение. Эластичностью $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ относительно аргумента $x$ называется предел отношения относительного приращения функции (в %) к относительному приращению аргумента (в %) при приращении аргумента, стремящемся к нулю. То есть

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' \qquad (1.22)$$

Эластичность функции $y$ относительно ее аргумента $x$ показывает, на сколько процентов изменится функция при изменении ее аргумента на 1 %.

а) Если $|E_x(y)| > 1$, то есть если $E_x(y) > 1$ или $E_x(y) < -1$, то функция $y = f(x)$ считается *эластичной в точке* $x$.

б) Если $|E_x(y)| < 1$, то есть если $-1 < E_x(y) < 1$, то функция $y = f(x)$ считается *неэластичной в точке* $x$.

в) Если $|E_x(y)| = 1$, то есть если $E_x(y) = 1$ или $E_x(y) = -1$, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке $x$ *единичную эластичность*.

Функция, эластичная (неэластичная) в каждой точке $x$ некоторого интервала $(a;b)$ оси *ox*, называется эластичной (неэластичной) на этом интервале.

Эластичная функция изменяется (растет или убывает) относительно быстрее изменения ее аргумента. Неэластичная функция, наоборот, меняется относительно медленнее изменения ее аргумента. Функция единичной эластичности изменяется с той же относительной скоростью, что и ее аргумент.

Направление изменения функции зависит от знака ее эластичности. В частности, если $x$ и $y$ – положительны, что обычно и бывает в экономических задачах, то знак $E_x(y)$, согласно (1.22), определяется знаком производной $y'$ функции $y = f(x)$. И если $E_x(y) > 0$, то $y' = f'(x) > 0$. А это значит, что функция $y = f(x)$ растет с ростом $x$. А если $E_x(y) < 0$, то $y' = f'(x) < 0$, и функция $y = f(x)$ убывает с ростом $x$.

### Свойства эластичности функции

1. Эластичность функции $y = f(x)$ равна произведению независимой переменной $x$ на так называемый *темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$:

$$E_x(y) = x \cdot (\ln y)' = x \cdot T_y \tag{1.23}$$

2. Эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций:

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v) \tag{1.24}$$

3. Эластичность частного двух функций равна разности эластичностей этих функций:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v) \tag{1.25}$$

Отметим, что последние два свойства – прямое следствие формулы (1.23) и свойств логарифма:

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v\,; \quad \ln\frac{u}{v} = \ln u - \ln v$$

4. Эластичность взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_y(x) = \frac{1}{E_x(y)} \tag{1.24}$$

Действительно,

$$E_y(x) = \frac{y}{x} \cdot x' = \frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}} = \frac{1}{E_x(y)}$$

## 6. Эластичный и неэластичный спрос

В качестве примера рассмотрим вопрос об эластичности одной из важнейших экономических функций – функции спроса $q = q(p)$ (рис. 2).

С изменением цены $p$ единицы товара меняется и спрос $q$ на этот товар, то есть меняется объем продаж товара. Причем реагирует спрос $q$ на изменение цены $p$ для разных товаров по-разному. Если даже небольшое изменение цены товара вызывает существенное изменение спроса на него, то спрос на такой товар называется *эластичным*. А если даже существенное изменение цены слабо влияет на спрос товара, то спрос на этот товар называется *неэластичным*. Например, неэластичным является спрос на хлеб. И это понятно, потому что хлеб является жизненно важным продуктом, его будут покупать и при значительном повышении цены на него, и почти столько же. А вот спрос на пирожные гораздо более эластичен – пирожные не являются жизненно важным продуктом, и спрос на них в гораздо большей степени зависит от их цен. При достаточно высоких ценах этот спрос вообще может прекратиться.

Выясним, как влияет фактор эластичности или неэластичности спроса $q$ на товар относительно цены $p$ единицы товара на суммарный доход от продаж $R = pq$ . Подсчитаем предельный (маржинальный) доход от продаж:

$$R' = R'_p = \left[p \cdot q(p)\right]' = 1 \cdot q(p) + p \cdot q'(p) = q(p)\left[1 + \frac{p}{q(p)} \cdot q'(p)\right] = q(p)\left[1 + E_p(q)\right], \quad (1.25)$$

где

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{q(p)} \cdot q'(p)$$

– эластичность спроса $q$ относительно цены $p$. Так как и $p$, и $q$ неотрицательны, а $q'(p)$, как производная убывающей функции, отрицательна, то $E_p(q) < 0$.

Подсчитаем заодно и эластичность дохода от продаж $R = pq$ относительно цены $p$ единицы товара:

$$E_p(R) = \frac{p}{R} \cdot R'_p = \frac{p}{pq} \cdot q\left[1 + E_p(q)\right] = \left[1 + E_p(q)\right] \quad (1.26)$$

Если спрос эластичен, то есть если $\left|E_p(q)\right| > 1$ (а значит, $E_p(q) < -1$), то, согласно (1.25), $R'_p < 0$. А это значит, что зависимость дохода $R$ от цены $p$ является убывающей. То есть с увеличением цены $p$ единицы продукции суммарный доход $R$ от продаж будет уменьшаться. А с уменьшением цены $p$ – наоборот увеличиваться. И на сколько процентов изменится этот доход при изменении цены $p$ на 1% - определяется формулой (1.26). Но уменьшение цены $p$ автоматически ведет к увеличению спроса $q$. Таким образом, при эластичном спросе с увеличением спроса $q$ увеличивается и доход $R$. То есть *при эластичном спросе каждая дополнительно проданная единица продукции приносит дополнительный доход*.

Если спрос неэластичен, то есть если $\left|E_p(q)\right| < 1$ (а значит, $-1 < E_p(q) < 0$), то, согласно (1.25), $R'_p > 0$. То есть зависимость $R$ от $p$ будет возрастающей. Иначе говоря, с увеличением цены $p$ единицы продукции суммарный доход от продаж $R$ будет увеличиваться. А с уменьшением цены – уменьшаться. И на сколько процентов будет происходить это изменение дохода при изменении цены $p$ на 1% - это опять будет определяться формулой (1.26). Но уменьшение цены автоматически ведет к увеличению спроса, то есть к увеличению объема продаж. И при этом, тем на менее, доход $R$ будет уменьшаться! То есть *при неэластичном спросе каждая дополнительно произведенная и проданная единица продукции будет приносить не доход, а убыток*.

Наконец, если $\left|E_p(q)\right| = 1$ ($E_p(q) = -1$), то есть если спрос имеет единичную эластичность, то $R'_p = 0$. А это значит, что с изменением цены $p$ (а значит, и с изменением объема продаж $q$) суммарный доход от продаж $R$ не изменится.

Если изобразить зависимости $q = q(p)$, $R = R(p)$ и $R = R(q)$ графически, то результаты проведенного исследования предстанут на рис. 8 (а-в). Здесь $p_0$ и $q_0$ – оптимальная цена и оптимальный спрос (объем продаж), обеспечивающие максимум дохода $R$. Им соответствует единичная эластичность спроса. То есть оптимальная цена $p_0$ единицы товара может быть найдена из уравнения:

$$E_p(q) = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{q(p)} \cdot q'(p) = -1 \Rightarrow p = p_0 \tag{1.27}$$

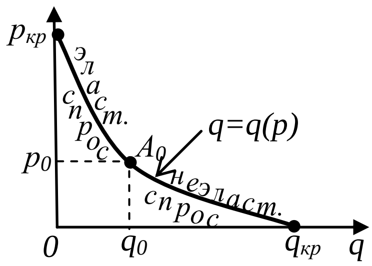


Рис. 8(а)

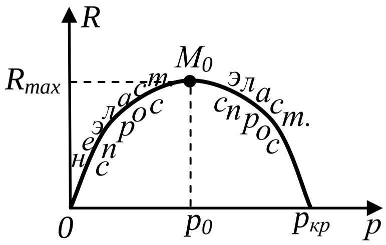


Рис. 8(б)

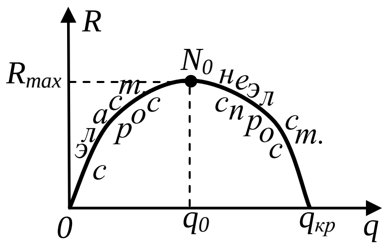


Рис. 8(в)

А оптимальный спрос $q_0$ может быть найден из уравнения кривой спроса: $q_0 = q(p_0)$.

Впрочем, если известны явные выражения $R = R(p)$ и $R = R(q)$, то значения $p_0$ и $q_0$ проще найти из равенств:

$$R'_p = 0 \Rightarrow p = p_0; \quad R'_q = 0 \Rightarrow q = q_0 \tag{1.28}$$

Согласно рис. 8(б), дохода не будет вообще ($R = 0$), когда товар ничего не стоит ($p = 0$), или когда цена $p$ достигнет критического значения $p_{кр}$, при котором товар перестанут покупать вообще (этой цене соответствует спрос $q = 0$ – см. рис. 8(а). А согласно рис. 8(в) доход от продаж товара будет нулевым, если объем продаж $q$ будет нулевым (этому соответствует критическая цена товара $p_{кр}$), или если объем продаж $q$ достигнет некоторого значения $q_{кр}$, которому, очевидно, соответствует нулевая цена $p = 0$ единицы товара. То есть $q_{кр}$ – это тот максимальный объем товара, который покупатели возьмут, если он отдается даром. Имея явные зависимости $R = R(p)$ и $R = R(q)$, можно найти и $p_{кр}$, и $q_{кр}$. Впрочем, естественнее они находятся из уравнения $q = q(p)$ кривой спроса.

_Пример_. Пусть уравнение кривой спроса $q = q(p)$ – линейная убывающая функция $q = a - bp$, где $a > 0$ и $b > 0$. При этом и функция $p = p(q) = \frac{a}{b} - \frac{q}{b}$ – линейная и убывающая. Суммарный доход от продаж $R = pq$ можно выразить двояко:

$$\text{а) } R = R(p) = ap - bp^2; \text{ б) } R = R(q) = \frac{aq}{b} - \frac{q^2}{b} \tag{1.29}$$

Графики обеих этих функций – параболы, направленные ветвями вниз, то есть они представляют собой кривые типа тех, что изображены на рисунках 8(б) и 8(в). Оптимальную цену $p_0$ и оптимальный спрос $q_0$ легко найти по схемам (1.30):

$$\text{а) } R'_p = 0 \Rightarrow a - 2bp = 0 \Rightarrow p = p_0 = \frac{a}{2b} \tag{1.30}$$

$$\text{б) } R'_q = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{2q}{b} = 0 \Rightarrow q = q_0 = \frac{a}{2}$$

При этом

$$R_{\max} = p_0 q_0 = \frac{a^2}{4b} \tag{1.31}$$

Критические значения $p_{кр}$ и $q_{кр}$ цены и спроса найдем, приравняв доход $R$ к нулю:

$$\text{а) } R = 0 \Leftrightarrow ap - bp^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \text{ и } p_2 = p_{кр} = \frac{a}{b} \tag{1.32}$$

$$\text{б) } R = 0 \Leftrightarrow \frac{aq}{b} - \frac{q^2}{b} = 0 \Rightarrow q_1 = 0 \text{ и } q_2 = q_{кр} = a$$

Эластичность $E_p(q)$ спроса $q$ относительно цены $p$ тоже можно выразить двояко – и через $p$, и через $q$:

$$\text{а) } E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{a - bp} \cdot (a - bp)' = \frac{-bp}{a - bp}; \tag{1.33}$$

$$\text{б) } E_p(q) = \frac{-bp}{a - bp} = \left| \text{учтем, что } p = \frac{a}{b} - \frac{q}{b} \right| = \frac{q - a}{q}.$$

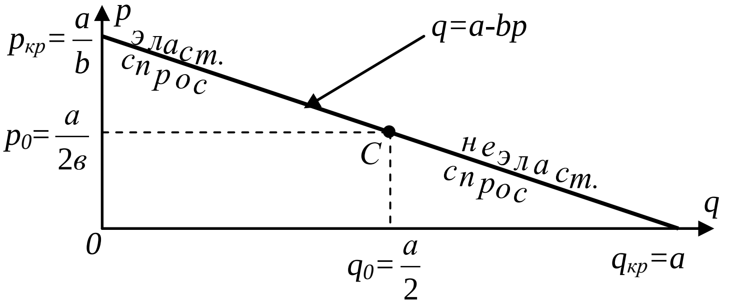



Рис. 9

На основании формул (1.33) легко убедиться в том, что при оптимальной цене $p_0 = \frac{a}{2b}$ (или, что одно и то же, при оптимальном спросе $q_0 = \frac{a}{2}$) эластичность спроса $E_p(q)=-1$, то есть спрос имеет единичную эластичность. При $0<q<q_0$ ($p_0<p<p_{кр}$) эластичность $E_p(q)<-1$, то есть спрос будет эластичным. При $q_0<q<q_{кр}$ ($0<p<p_0$) имеем $-1<E_p(q)<0$, то есть спрос будет неэластичным.

Все установленное выше можно наглядно проиллюстрировать и на кривой спроса $q=a-bp$ (рис. 9).

Отметим, что значение $q_0$ объема продаж, обеспечивающее ***максимум дохода*** от продаж $R$, еще не обеспечивает ***максимума прибыли П*** от продаж данного товара. Действительно, $П=R-C$, где $C$ – издержки производства (себестоимость товара):

$$П(q)=R(q)-C(q) \tag{1.34}$$

Прибыль $П(q)$ будет максимальной при том $q$, при котором $П'(q)=0$:

$$П'(q)=0 \Leftrightarrow R'(q)=C'(q) \tag{1.35}$$

Таким образом, прибыль от производства будет максимальной при том объеме продаж $q$, при котором предельный доход $R'(q)$ равен предельным издержкам $C'(q)$. А это – известный экономический закон.

Наконец, рассмотрим прибыль $П$ предприятия, если кроме издержек производства с каждой единицы произведенной продукции берется налог $t$. Тогда при объеме $q$ произведенной продукции суммарный налог $T$ составит $T=tq$ рублей, а общая прибыль предприятия $П$ выразится формулой:

$$П=П(q;t)=R(q)-C(q)-tq \tag{1.36}$$

Максимум прибыли при заданном налоге $t$ предприятие будет иметь при том объеме продаж $q$, который соответствует уравнению:

$$П'_q=0 \Rightarrow R'(q)-C'(q)-t=0 \Rightarrow q=q(t) \tag{1.37}$$

При этом суммарный налог $T$ с проданной продукции составит

$$T=tq=t\cdot q(t) \tag{1.38}$$

Можно поставить вопрос: при каком $t$, то есть при какой ставке налога, суммарный налог $T$ будет максимальным? (в этом заинтересованы налоговые органы). Это будет то значение $t$, при котором $T'=0$:

$$T'=[t\cdot q(t)]'=0 \Rightarrow t=t_0$$

Подставляя найденное значение $t = t_0$ в выражение (1.37) для $q = q(t)$, получим: $q_0 = q(t_0)$. Это тот объем производства, при котором при максимуме суммарной прибыли *П* предприятия будет максимальным и суммарный налог *T* на продукцию этого предприятия.

*Пример*. Пусть

$R(q) = 16q - q^2$; $C(q) = q^2 + 1$. Тогда

$$П = П(q;t) = R(q) - C(q) - tq = 16q - 2q^2 - 1 - tq$$

$$П'_q = 0 \Leftrightarrow 16 - 4q - t = 0 \Leftrightarrow q = q(t) = \frac{16 - t}{4} = 4 - \frac{1}{4}t$$

$$T = qt = 4t - \frac{1}{4}t^2; \;\; T' = 0 \Rightarrow 4 - \frac{1}{2}t = 0 \Rightarrow t = t_0 = 8$$

$$q_0 = q(t_0) = 4 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

Таким образом, максимальная прибыль $П_{\max}$ составит:

$$П_{\max} = П(2;8) = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 1 - 8 \cdot 2 = 7.$$

А максимальный налог *T* составит:

$$T_{\max} = t_0 \cdot q_0 = 8 \cdot 2 = 16.$$

Интересно сопоставить эти цифры с цифрами при отсутствии налогообложения, то есть при $t = 0$. В этом случае (убедитесь в этом самостоятельно), $q_0 = 4$; $П_{\max} = 31$. Следовательно, уменьшение налогообложения стимулирует выпуск дополнительной продукции и приводит при этом к резкому увеличению прибыли от ее реализации. Отсюда ясно, почему производители прикладывают столько усилий, чтобы снизить ставку налога *t*.

## 7. Производственная функция Кобба - Дугласа

Производственная функция представляет собой зависимость объема производимой продукции от объема затрачиваемых на производство ресурсов (денежных, материальных, людских, и т.д.).

Пусть для производства продукции требуются лишь два вида ресурсов – капитал (денежные или материальные средства) и труд (отработанные человеко-дни). Если $K$ - объем капитала, $L$ - объем труда, а $Y$ - объем производимой продукции, то производственная функция будет функцией двух переменных и будет иметь вид:

$$Y = Y(K, L) \qquad (1.39)$$

Производственная функция (1.39), по своему смыслу, должна обладать следующими ***свойствами:***

1. При отсутствии одного из производственных ресурсов производство невозможно. То есть

$$Y(0, L) = Y(K, 0) = 0 \tag{1.40}$$

2. С ростом объема каждого из ресурсов объем производства растет. С точки зрения математики это значит, что частные производные первого порядка функции (1.39) положительны:

$$MY_K = Y'_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \succ 0; \quad MY_L = Y'_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \succ 0 \tag{1.41}$$

Первая из этих производных называется *предельной (маржинальной) капиталоотдачей*, а вторая - *предельной (маржинальной) производительностью труда*.

3. С ростом объема ресурсов скорость роста выпуска продукции замедляется (в экономике это положение называется *законом убывающей доходности)*. А это значит, что вторые частные производные производственной функции отрицательны:

$$Y''_{K^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} \prec 0; \quad Y''_{L^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} \prec 0 \tag{1.42}$$

Всем этим свойствам (проверьте это самостоятельно) удовлетворяет мультипликативная функция вида

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} \ \left(0 \prec \alpha \prec 1; \quad 0 \prec \beta \prec 1\right), \tag{1.43}$$

где $A$ - положительная константа. Функция (1.43) называется ***производственной функцией Кобба – Дугласа***.

Вычислим эластичность производственной функции Кобба - Дугласа.

*а*) Эластичность по капиталу:

$$E_K(Y) = \frac{K}{Y} Y'_K = \frac{K}{AK^{\alpha} L^{\beta}} A\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} = \alpha \tag{1.44}$$

*б*) Эластичность по труду:

$$E_L(Y) = \frac{L}{Y} Y'_L = \frac{L}{AK^{\alpha} L^{\beta}} A\beta K^{\alpha} L^{\beta-1} = \beta \tag{1.45}$$

Таким образом, параметр $\alpha$ в формуле (1.43) показывает, на сколько процентов увеличится объем выпускаемой продукции при увеличении объема $K$ капитала на 1% при неизменном объеме труда $L$. А параметр $\beta$ показывает, на сколько процентов увеличится объем выпускаемой продукции при увеличении объема $L$ труда на 1% при неизменном капитале $K$. Так как

$(0 \prec \alpha \prec 1; \quad 0 \prec \beta \prec 1)$, то функция Кобба – Дугласа неэластична и по капиталу, и по труду.

Линии уровня производственной функции (1.39) называются *изоквантами*. Для производственной функции Кобба – Дугласа (1.43) изоквантами будут являться линии, имеющие уравнения

$$AK^{\alpha}L^{\beta} = Y = Const. \tag{1.46}$$

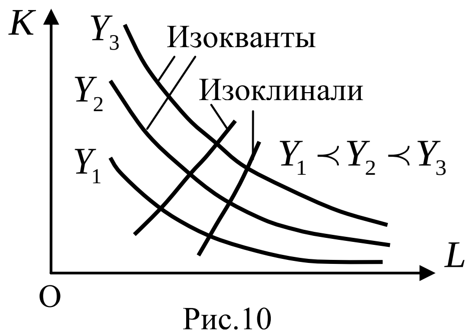



Рис.10

По своей форме эти линии похожи на школьные гиперболы, асимптотами которых служат оси координат – рис. 10.

На изокванте производственная функция $Y$ сохраняет постоянное значение при разных значениях капитала $K$ и труда $L$. Движение по изокванте показывает, как должны меняться значения $K$ и $L$, чтобы объем $Y$ производимой продукции не менялся.

Так как на изокванте $Y = Y(K, L) = Const$, то при движении по изокванте

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial K}dK + \frac{\partial Y}{\partial L}dL = 0, \tag{1.47}$$

откуда

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\partial Y / \partial L}{\partial Y / \partial K} = -\frac{Y'_L}{Y'_K}; \qquad \frac{dL}{dK} = -\frac{\partial Y / \partial K}{\partial Y / \partial L} = -\frac{Y'_K}{Y'_L} \tag{1.48}$$

*Предельной нормой замены труда капиталом* $S_K$ называется отношение абсолютных величин дифференциалов капитала $K$ и труда $L$:

$$S_K = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \frac{Y'_L}{Y'_K} \tag{1.49}$$

Аналогично определяется *предельная норма замены капитала трудом* $S_L$:

$$S_L = \left|\frac{dL}{dK}\right| = \frac{Y'_K}{Y'_L} \tag{1.50}$$

Для производственной функции Кобба – Дугласа (1.43) формулы (1.49) и (1.50) дают:

$$S_K = \frac{\beta K}{\alpha L}; \qquad S_L = \frac{\alpha L}{\beta K} \tag{1.51}$$

Предельная норма замены труда капиталом $S_K$ и предельная норма замены капитала трудом $S_L$ показывают, на сколько единиц увеличатся затраты заменяющего ресурса, если затраты заменяемого ресурса уменьшатся на единицу при неизменном выпуске продукции.

<u>*Пример*</u>. Производственная функция имеет вид $Y = AK^{0,75}L^{0,25}$(функция Кобба - Дугласа). При неизменном выпуске продукции на сколько единиц должны увеличиться затраты труда $L$ при уменьшении затрат капитала на единицу, если отношение затрат капитала к затратам труда $\frac{K}{L}$ равно 6?

<u>*Решение.*</u> Искомое число равно предельной норме замены капитала трудом $S_L$. Так как $\alpha = 0{,}75$, $\beta = 0{,}25$, то по второй из формул (1.51) получаем: $S_L = 0{,}5$. То есть затраты труда следует увеличить на пол-единицы.

Кроме изоквант, на рис. 10 показаны *изоклинали* - линии наискорейшего роста производственной функции $Y$. Они перпендикулярны изоквантам. Движение по изоклиналям (снизу вверх) обеспечивает наиболее быстрое увеличение объема $Y$ производимой продукции.

## Упражнения

1. Опытным путем установлено, что объем $q$ продукции, производимой на предприятии в течение рабочей смены, определяется формулой:

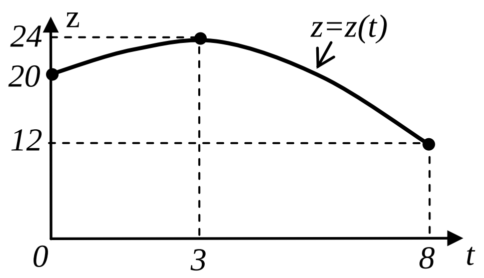



Рис. 11

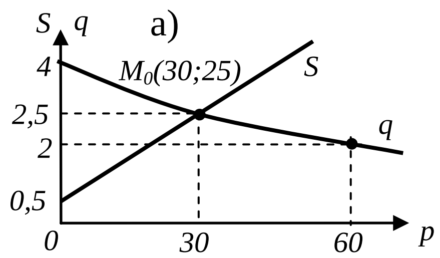
$$q = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 20t \text{ (ед.)}$$

Здесь $0 \le t \le 8$ – рабочее время в часах. Исследовать зависимость $z = z(t)$ производительности труда на этом предприятии от времени и построить график этой зависимости.

<u>*Ответ*</u>:

$$z = z(t) = q' = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 20 \text{ (ед./час)}$$

2. Опытным путем установлены уравнения кривых спроса и предложения:




$$q = \frac{p+120}{p+30}; \quad s = \frac{1}{15}p + 0{,}5.$$

Здесь $q$ и $s$ – это соответственно количества продаваемого и предлагаемого к продаже товара при цене единицы товара $p$.

а) Построить кривые спроса и предложения.

б) Найти равновесную цену $p_0$ единицы товара, при которой спрос равен предложению.

в) Найти эластичность спроса и эластичность предложения относительно цены $p$ при этой равновесной цене и прокомментировать их экономический смысл.

г) Найти, на сколько % изменится доход $R = pq$, если цена товара изменится на 1% по сравнению с равновесной.

*<u>Ответ</u>*:

б) $p_0 = 30$; при этом $q = s = 2{,}5$ (ед.)

в) $E_p(q) = \dfrac{-90p}{(p+120)(p+30)}$; $E_p(s) = \dfrac{2p}{2p+15}$.

При равновесной цене $p_0 = 30$ получаем: $E_{p_0}(q) = -0{,}3$; $E_{p_0}(s) = 0{,}8$. И спрос, и предложение при цене $p_0$ неэластичны. При увеличении цены $p$ единицы товара на 1% от равновесной цены (с 30 до 30,3) спрос на товар $q$ уменьшится на 0,3%, а предложение от производителей товара $s$ увеличится на 0,8 %. То есть появится товарный излишек в объеме 1,1 %.

Обратно, если цена $p$ уменьшится на 1%, то спрос $q$ увеличится на 0,3%, а предложение уменьшится на 0,8 %. То есть возникнет товарный дефицит в объеме 1,1%.

г) Согласно (1.26), $E_p(R) = \lfloor 1 + E_p(q) \rfloor$. И так как $E_{p_0}(q) = -0{,}3$, то $E_{p_0}(R) = 0{,}7$. Это значит, что при увеличении цены $p$ единицы товара на 1% от равновесной цены (с 30 до 30,3) доход от продаж увеличится на 0,7%. И, наоборот, при уменьшении цены на 1% доход от продаж уменьшится на 0,7%.

3. Функция спроса на товар имеет вид $q = 247 - 6p$ (штук в час), а функция предложения $s = p^2$ (штук в час), где $p$ - цена единицы товара в рублях. Найти: *а)* равновесную цену товара $p_0$; *б)* равновесный объем спроса и предложения $q_0 = s_0$; *в)* установить, эластичным или неэластичным будет спрос при равновесной цене.

*<u>Ответ</u>*: *а)* $p_0 = 13$(руб/штуку); *б)* $q_0 = s_0 = 169$ штук; *в)* спрос будет неэластичным.

4. Найти эластичность функции $y = \dfrac{x^3 + 2}{x + 8}$ при $x = 2$.

*<u>Ответ</u>*: $E_{x=2}(y) = 2{,}2$.

5. Исследованиями работы торговой фирмы установлено, что спрос $q$ на штучный товар $A$ этой фирмы может быть описан формулой $q = 432 - p^2 + 15p$, где $p$ рублей - стоимость одного изделия. При какой цене $p$ неэластичный спрос переходит в эластичный?

*<u>Ответ</u>*: $p = 18$ руб.

6. Производственная функция имеет вид $Y = 0{,}7K^{0{,}5}L^{0{,}3}$, где $K$ - объем капитала, а $L$ - объем труда. На сколько % увеличится объем производства $Y$, если: *а*) объем капитала увеличится на 1%? *б*) объем труда увеличится на 1%?

*Ответ*: *а*) на 0,5%. *б*) на 0,3%.

7. Производственная функция имеет вид $Y = AK^{0{,}75}L^{0{,}25}$(функция Кобба - Дугласа). Если отношение затрат капитала к затратам труда $\frac{K}{L}$ равно 2, то при неизменном выпуске продукции: *а*) на сколько единиц должны увеличиться затраты труда $L$ при уменьшении затрат капитала на единицу? *б*) на сколько единиц должны увеличиться затраты капитала $K$ при уменьшении затрат труда на единицу?

*Ответ*: *а*) на 1,5 ед; *б*) на 2/3 ед.

## §2. Некоторые экономико-математические модели

### 1. Математическая модель естественного роста выпуска продукции

Пусть $y = y(t)$ - объем продукции некоторого предприятия, реализованной к моменту времени $t$. Будем считать, что вся продукция реализуется по некоторой фиксированной цене $p$ за единицу продукции независимо от объема продаж $y(t)$. Это значит, что рынок данной продукции длительное время является ненасыщенным – удается продавать по фиксированной цене $p$ практически любые объемы этой продукции.

Доход $R$ от продаж составит: $R = R(t) = p \cdot y(t)$. Будем считать, что некоторая часть этого дохода используется в качестве инвестиций в производство выпускаемой продукции. То есть объем инвестиций $I(t)$ составит:

$$I(t) = m \cdot R(t) = mpy(t) \tag{2.1}$$

Здесь $0 < m < 1$ – так называется *норма инвестиций.* Она показывает, какая часть дохода возвращается в производство.

Чем больше объем инвестиций $I(t)$, тем быстрее растёт объем производимой продукции $y(t)$. В модели естественного роста это значит, что скорость роста объема этой продукции $y'(t)$ (так называемая *акселерация производства*) пропорциональна объему инвестиций $I(t)$:

$$y'(t) = l \cdot I(t). \tag{2.2}$$

Здесь

$$\frac{1}{l} = \frac{I(t)}{y'(t)} \tag{2.3}$$

- так называемая *норма акселерации*, которая показывает, каким должен быть объём инвестиций $I(t)$, чтобы обеспечить единичную скорость роста объема производства (обеспечить рост на единицу продукции за единицу времени). Подставляя (2.1) в (2.2), получим

$$y' = ky, \tag{2.4}$$

где $k = mpl$ – положительный числовой коэффициент. Равенство (2.4) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка для функции $y(t)$. Дополняя его некоторым начальным условием $y(0) = y_0$, получим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Решим эту задачу.

1. Сначала решим дифференциальное уравнение $y' = ky$. Функция $y = 0$ является его очевидным частным решением. Но это, очевидно, не та функция, которую мы ищем. Будем искать те решения дифференциального уравнения $y' = ky$, для которых $y \neq 0$:

$$\begin{gathered} y' = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = k\int dt \Leftrightarrow \ln|y| = kt + C \Leftrightarrow |y| = e^{kt+C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^{kt} \Leftrightarrow y = \pm e^C \cdot e^{kt} \Leftrightarrow \left| \pm e^C - \text{это } C \right| \Leftrightarrow y = Ce^{kt} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Итак, $y = Ce^{kt}$ - общее решение уравнения $y' = ky$, включающее в себя бесчисленное количество частных решений этого уравнения. В него при $C = 0$ входит и отмеченное ранее нулевое решение $y = 0$. То есть в найденном общем решении содержатся все частные решения дифференциального уравнения $y' = ky$.

2. Используем начальное условие $y(0) = y_0$ и найдём $C$:

$$y_0 = Ce^{k \cdot 0} \Rightarrow C = y_0.$$

3. Подставим $C = y_0$ в общее решение $y = Ce^{kt}$ и получим искомое решение задачи Коши:

$$y = y_0 e^{kt} \tag{2.7}$$

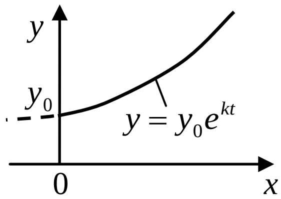


Рис. 12

Это и есть искомая зависимость $y = y(t)$ объема производимой продукции (объема производства) от времени $t$. Согласно (2.7), объем производимой продукции будет расти по экспоненциальному закону (рис. 12).

Заметим, что условие постоянства цены $p$ единицы продаваемой продукции, то есть условие ненасыщенности рынка, не может выполняться всегда, при любых $t$. С увеличением объема продаж $y(t)$ на некотором этапе рынок насыщается, спрос на товар падает, и дальнейшее увеличении объема продаж возможно лишь при снижении цены $p$ на него – в соответствии с классической убывающей кривой спроса $p = p(y)$ (рис.13).

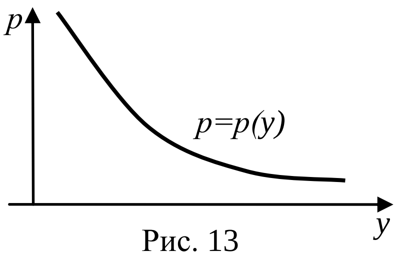



Рис. 13

Если учесть эту зависимость $p$ от $y$, то выражение (2.1) для $I(t)$ примет вид:

$$I(t) = mp(y)y(t) \tag{2.8}$$

А вместо (2.4) из (2.2) получим:

$$y' = np(y)y(t), \tag{2.9}$$

где $n = ml$. Это дифференциальное уравнение вместе с начальным условием $y(0) = y_0$ составит задачу Коши

$$\begin{cases} y' = np(y)y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

для определения функции $y(t)$, характеризующей объем продаж при насыщенном спросе, когда рост объема продаж возможен лишь при снижении цены $p$ на продаваемую продукцию. Эта функция, естественно, будет отличаться от функции (2.7) (будет более сложной).

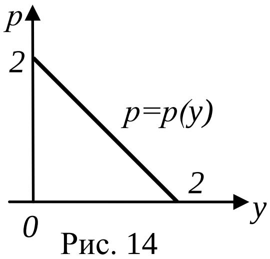



Рис. 14

Получим, например, эту функцию при следующих данных: кривая спроса $p = p(y)$ задается уравнением $p = 2 - y$ (рис. 14); норма инвестиций $m = 0{,}5$; норма акселерации $\frac{1}{l} = 2$; $y(0) = 0{,}5$ - начальное условие.

*<u>Решение</u>*. Для указанных данных задача Коши (2.10) примет вид:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{4}(2 - y)y \\ y(0) = 0{,}5 \end{cases} \tag{2.11}$$

Решим эту задачу.

1. Решим дифференциальное уравнение $y' = \frac{1}{4}(2 - y)y$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}(2 - y)y; \quad \frac{dy}{(2 - y)y} = \frac{1}{4}dt; \quad \int \frac{dy}{(2 - y)y} = \int \frac{1}{4}dt$$

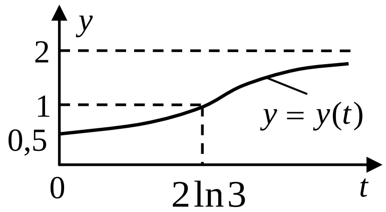
$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2 - y} + \frac{1}{y}\right)dy = \frac{1}{4}t + C; \quad \frac{1}{2}\left(-\ln|2 - y| + \ln|y|\right) = \frac{1}{4}t + C;$$

$$\ln\left|\frac{y}{2 - y}\right| = \frac{1}{2}t + C; \quad \left|\frac{y}{2 - y}\right| = e^{\frac{t}{2}} \cdot e^C; \quad \frac{y}{2 - y} = \pm e^C \cdot e^{\frac{t}{2}} = \left|\pm e^C - \text{это } C\right| = Ce^{\frac{t}{2}};$$

$$y = \frac{2Ce^{\frac{t}{2}}}{1 + Ce^{\frac{t}{2}}}. \qquad (2.12)$$

- общее решение дифференциального уравнения.

2. Используя начальное условие $y(0) = 0{,}5$, найдем константу $C$: $C = \dfrac{1}{3}$. В итоге получим окончательно:




$$y = y(t) = \frac{2e^{\frac{t}{2}}}{3 + e^{\frac{t}{2}}} = \frac{2}{1 + 3e^{-\frac{t}{2}}} \qquad (2.13)$$

*Ответ*: $y = y(t) = \dfrac{2}{1 + 3e^{-\frac{t}{2}}}$; см. также график функции $y = y(t)$.

## 2. Межотраслевая модель Леонтьева

Предположим, что рассматривается $n$ отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции, произведенной отраслью, идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, за год). Введем следующие обозначения:

$x_i$ – общий (валовой) объем продукции $i$-ой отрасли ($i = 1, 2, \ldots n$);

$x_{ij}$ – объем продукции $i$-ой отрасли, потребляемой $j$-ой отраслью в процессе производства ($i,j = 1, 2, \ldots n$);

$y_i$ –объем продукции $i$-ой отрасли для непроизводственного (личного и общественного) потребления ($i = 1, 2, \ldots n$).

Указанные величины можно свести в таблицу:

| Производственное потребление | Конечный продукт | Валовой выпуск |
|---|---|---|
| $x_{11}$ $x_{12}$ …… $x_{1n}$ | $y_1$ | $x_1$ |
| $x_{21}$ $x_{22}$ …… $x_{2n}$ | $y_2$ | $x_2$ |
| -------------------- | ----- | ----- |
| $x_{n1}$ $x_{n2}$ …… $x_{nn}$ | $y_{\text{n}}$ | $x_{\text{n}}$ |

Так как валовой объем продукции любой $i$-ой отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой всеми $n$ отраслями, и конечного продукта, то должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

или, в сокращенной форме

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{2.14}$$

Уравнения (2.14) (их $n$ штук) называются *соотношениями межотраслевого баланса*. Единицы измерения содержащихся в уравнениях (2.14) величин могут быть натуральными и для каждого уравнения свои (кубометры, тонны, штуки и т.п.). Но они могут быть и универсальными (стоимостными). В зависимости от этого различают *натуральный* и *стоимостной* межотраслевые балансы. Для определенности рассмотрим далее стоимостной баланс (все величины, входящие в уравнения (2.14), выражены в рублях).

Введем *коэффициенты прямых затрат*

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \qquad (i; j = 1, 2, \ldots n), \tag{2.15}$$

показывающие затраты $i$-ой отрасли на производство единицы продукции $j$-ой отрасли. То есть $a_{ij}$ – стоимость продукции отрасли $i$, вложенной в 1 рубль продукции отрасли $j$. Так как эти коэффициенты зависят в основном от существующей технологии производства в производящих отраслях, а эта технология меняется достаточно медленно и за рассматриваемый относительно короткий период времени может считаться неизменной, то их можно считать постоянными. Это означает линейную зависимость объема $x_{ij}$ продукции $i$-ой отрасли, потребляемой $j$-ой отраслью, от валового объема $x_j$ $j$-ой отрасли:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \qquad (i; j = 1, 2, \ldots n). \tag{2.16}$$

Построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название *линейной, или модели Леонтьева* (американский экономист русского происхождения, лауреат Нобелевской премии по экономике).

С учетом линейных соотношений (2.16) равнения межотраслевого баланса (2.14) примут вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{2.17}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \ldots a_{2n} \\ -------- \\ a_{n1} \ a_{n2} \ \ldots a_{nn} \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -- \\ x_n \end{pmatrix}; \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -- \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

где $A$ – так называемая матрица прямых затрат, $X$ – матрица-столбец валового выпуска, $Y$ – матрица-столбец конечного продукта. Тогда систему (2.17) $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными ($x_1$; $x_2$; $\ldots x_n$) можно записать в матричном виде:

$$X = AX + Y \tag{2.19}$$

Система (2.19) представляет собой математическую формулировку модели Леонтьева межотраслевого баланса в матричной форме. А задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такой матрицы-столбца валового выпуска $X$, который при известной матрице прямых затрат $A$ обеспечивает заданный вектор-столбец конечного продукта $Y$.

В соответствии с экономическим смыслом задачи искомые элементы $x_i$ столбца $X$ должны быть неотрицательны при любых неотрицательных значениях $y_i$ и $a_{ij}$ ($i$ = 1, 2,… $n$). В таком случае модель Леонтьева называется *продуктивной.*

Существует несколько различных по форме *критериев продуктивности модели Леонтьева.* Один из них формулируется так (доказательство опускаем): если максимум сумм элементов столбцов матрицы $A$ прямых затрат не превосходит единицы, то есть если

$$\max_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1 \qquad (2.20)$$

и существует номер $j$ такой, что эта сумма строго меньше единицы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \qquad (2..21)$$

то модель Леонтьева (2.19) (или, что одно и то же, (2.17)) является продуктивной. Отметим, что условия (2.20) и (2.21) естественны, так как они имеют наглядный экономический смысл. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ij}}{x_j} = \frac{x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj}}{x_j} \quad - \qquad (2.22)$$

– это доля, которую составляет суммарная стоимость продукции всех отраслей, вложенная в продукцию $j$-ой отрасли, по отношению к общей стоимости продукции $j$-ой отрасли. И эта доля для любой отрасли, естественно, не должна превосходить единицу. А точнее, для рентабельной отрасли должна быть меньше единицы, ибо общая стоимость $x_j$ продукции $j$-ой отрасли включает в себя и другие затраты – стоимость рабочей силы, амортизацию основных фондов и т.д., а также прибыль, получаемую отраслью от продажи продукции.

*Пример 1*. В таблице ниже содержатся данные баланса промышленности и сельского хозяйства в некотором регионе за некоторый период (в миллиардах рублей):

| Отрасль производства | Производственное потребление | | Конечный продукт | Валовой выпуск |
|---|---|---|---|---|
| | промышленность | сельское хозяйство | | |
| Промышленность | 0,7 | 2,1 | 7,2 | 10 |
| Сельское хозяйство | 1,2 | 1,5 | 12,3 | 15 |

Требуется вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт промышленности увеличится вдвое, а сельского хозяйства останется на прежнем уровне.

*Решение*. Согласно таблице имеем:

$$x_{11} = 0{,}7; \quad x_{12} = 2{,}1; \quad x_{21} = 1{,}2; \quad x_{22} = 1{,}5;$$
$$x_1 = 10; \quad x_2 = 15; \quad y_1 = 7{,}2; \quad y_2 = 12{,}3.$$

По формуле (2.15) находим коэффициенты прямых затрат:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = 0{,}07; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = 0{,}14; \quad a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = 0{,}12; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = 0{,}10$$

Таким образом, матрица $A$ прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}10 \end{pmatrix}$$

имеет неотрицательные элементы и, очевидно, удовлетворяет критерию продуктивности, выражаемому неравенствами (2.20) и (2.21), ибо

$$0{,}07 + 0{,}12 = 0{,}19 < 1; \quad 0{,}14 + 0{,}10 = 0{,}24 < 1.$$

По условию задачи, в измененных условиях производства конечный продукт промышленности $y_1$ должен составить $7{,}2 \cdot 2 = 14{,}4$ млрд. рублей, а конечный продукт $y_2$ сельского хозяйства должен остаться неизменным и составить 12,3 млрд. рублей. Поэтому для определения соответствующих валовых объемов $x_1$ и $x_2$ этих отраслей получаем, согласно (2.4), следующую систему линейных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}07x_1 + 0{,}14x_2 + 14{,}4 \\ x_2 = 0{,}12x_1 + 0{,}10x_2 + 12{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}93x_1 - 0{,}14x_2 = 14{,}4 \\ -0{,}12x_1 + 0{,}90x_2 = 12{,}3 \end{cases}$$

Ее главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}93 & -0{,}14 \\ -0{,}12 & 0{,}90 \end{vmatrix} = 0{,}93 \cdot 0{,}90 - (-0{,}12) \cdot (-0{,}14) = 0{,}8202 \neq 0$$

Значит, система имеет единственное решение. Вычисляя еще два определителя неизвестных

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 14{,}4 & -0{,}14 \\ 12{,}3 & 0{,}90 \end{vmatrix} = 14{,}4 \cdot 0{,}90 - 12{,}3 \cdot (-0{,}14) = 146{,}82$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 0{,}93 & 14{,}4 \\ -0{,}12 & 12{,}3 \end{vmatrix} = 0{,}93 \cdot 12{,}3 - (-0{,}12) \cdot 14{,}4 = 131{,}67$$

и используя формулы Крамера , получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \approx 17{,}90; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \approx 16{,}05.$$

## 3. Линейная модель международной бездефицитной торговли

Будем считать, что бюджеты ($x_1$; $x_2$; …$x_n$) $n$ стран расходуются этими странами целиком на покупку товаров внутри страны и вне ее (так называемый торговый бюджет). И пусть $x_{ij}$ – сумма, на которую $j$-ая страна закупает товаров у $i$-ой страны. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} = x_j \quad (j = 1, 2, \ldots\ n) \tag{2.23}$$

– бюджет $j$-ой страны, а

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = P_i \quad (i = 1, 2, \ldots\ n) \tag{2.24}$$

– общая выручка $i$-ой страны от внутренней и внешней торговли. При торговом бездефицитном бюджете общая выручка страны и составляет ее бюджет. Поэтому

$$P_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots\ n) \tag{2.25}$$

Далее, пусть

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i,j = 1, 2, \ldots\ n) \tag{2.26}$$

– доля бюджета $x_j$, которую тратит $j$-ая страна на закупку товаров у $i$-ой страны. Тогда

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j \quad (i,j = 1, 2, \ldots\ n), \tag{2.27}$$

причем, в силу (2.23) и (2.26),

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots\ n), \tag{2.28}$$

Подставляя выражения (2.27) для $x_{ij}$ в выражения (2.24) для $P_i$ и учитывая равенства (2.25), приходим к системе и линейных уравнений с $n$ неизвестными ($x_1$; $x_2$; …$x_n$):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots\ n), \tag{2.29}$$

Или, в развернутой форме, к системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases} \tag{2.30}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \ldots a_{2n} \\ -------- \\ a_{n1} \ a_{n2} \ \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

коэффициентов системы (2.30) называется *матрицей структурной торговли*. Ее особенностью, согласно (2.28), является то, что сумма элементов каждого ее столбца равна единице, и все ее элементы неотрицательны. Если она задана, то решив систему (2.30), найдем бюджеты ($x_1$; $x_2$; $\ldots x_n$) всех стран, принимающих участие в бездефицитной торговле.

Отметим, что система (2.30) является однородной. Действительно, перенеся правые части уравнений (2.30) налево, получим следующую однородную систему

$$\begin{cases} (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-1)x_n = 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

Сложив все уравнения этой системы, в силу равенств (2.28) получим тождество $0=0$. Это значит, что каждое отдельное уравнение системы (2.32) можно выразить через другие ее уравнения. То есть каждое уравнение системы (2.32) является следствием остальных. Иначе говоря, оно автоматически будет выполняться, если будут выполняться остальные $n$–1 уравнений. Но это значит, что в системе (2.32) одно уравнение (любое) можно отбросить. Тогда вместо квадратной системы (2.32) получим недоопределенную однородную систему. А недоопределенная система, как мы знаем из теории систем линейных уравнений, может или иметь бесчисленное множество решений, или не иметь их вообще. Но не иметь решений она не может, ибо заведомо одно решение (тривиальное) у нее есть: ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$; …; $x_n = 0$). Значит, система (2.32) имеет бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выделить искомое решение ($x_1$; $x_2$; $\ldots x_n$), необходимо задать некоторое дополнительное условие для ее неизвестных, то есть для бюджетов $x_i$ ($i$ = 1, 2,… $n$) всех стран. Например, задать суммарный бюджет $C$ всех стран:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C \tag{2.33}$$

*Пример 2*. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Найти бюджеты ($x_1$; $x_2$; $x_3$; $x_4$) этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ (усл. ед.).

*Решение*. Составим систему (2.32):

$$\begin{cases} -0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = 0 \\ 0{,}4x_1 - 0{,}7x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4 = 0 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}5x_3 + 0{,}2x_4 = 0 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 - 0{,}6x_4 = 0 \end{cases}$$

Отбросив в этой системе последнее уравнение и решив оставшуюся систему методом Гаусса (выкладки опускаем), получим:

$$x_1 = 140t\,;\quad x_2 = 146t\,;\quad x_3 = 220t\,;\quad x_4 = 121t\,,$$

где $t$ – свободный (произвольный) параметр. Подставив эти выражения в заданную сумму бюджетов, определим величину $t$:

$$140t + 146t + 220t + 121t = 6270 \Leftrightarrow 627t = 6270 \Leftrightarrow t = 10$$

Значит,

$$\{\, x_1 = 1400\,;\quad x_2 = 1460\,;\quad x_3 = 2200\,;\quad x_4 = 1210 \,\} \text{ (усл. ед.).}$$

## Упражнения

1. Сформулировать и решить задачу по определению объема $y=y(t)$ реализованной продукции, если известно, что кривая спроса $p= p(y)$ задаётся уравнением $p=2=Const$; норма инвестиций $m=0{,}5$; норма акселерации $\frac{1}{l} = 1$; $y(0)=5$ – начальное условие.

*Ответ:* $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 5e^t$

2. В таблице приведены данные об исполнении межотраслевого баланса за некоторый отчетный период в условных денежных единицах:

| Отрасль производства | Производственное потребление | | Конечный продукт | Валовой выпуск |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | | |
| 1 | 100 | 160 | 240 | 500 |
| 2 | 275 | 40 | 85 | 400 |

Определить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться на 100 %, а второй отрасли – на 20 %.

*<u>Ответ</u>*: $x_1 = 945{,}6$; $x_2 = 691{,}2$

3. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти бюджеты $(x_1; x_2; x_3)$ этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма их бюджетов равна 90 (усл. ед.).

*<u>Ответ</u>*: $x_1 = 30$; $x_2 = 40$; $x_3 = 20$.

## Литература

1. Попов А.М., Сотников В.Н. Экономико-математические методы и модели. «Юрайт», 2013.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М, «Наука», 1997.
3. Трофимова Т.И. Курс физики. М, «Высшая школа», 1997.
4. Комогорцев В.Ф. Лекции по высшей математике. Брянск, 2009.

Учебное издание

**Комогорцев Владимир Филиппович**

# ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 12.12.2014 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Бумага печатная. Усл. п. л. 4,35. Тираж 100 экз. Изд.2877.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии.
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА