Министерство сельского хозяйства РФ

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Комогорцев В.Ф.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для бакалавров направления подготовки
09.03.03 – прикладная информатика

Брянская область, 2020

УДК 51 (076)
ББК 22.1
К 63

Комогорцев, В. Ф. Математика: учебное пособие для бакалавров направления подготовки 09.03.03 – прикладная информатика / В. Ф. Комогорцев. - Брянск. Изд-во Брянский ГАУ, 2020. – 258 с.

Данное учебное пособие по дисциплине «Математика» предназначено для студентов, обучающихся на бакалавриате по направлению подготовки 09.03.03 – прикладная информатика, профиль обучения – программно-технические средства информатизации. Содержание пособия отражает ПООП - примерную основную образовательную программу для этого направления. Пособие разбито на 9 глав, являющихся классическими для курса вузовской математики:

- аналитическая геометрия;
- линейная алгебра;
- пределы;
- дифференциальное исчисление;
- интегральное исчисление;
- дифференциальные уравнения;
- ряды;
- функции многих переменных.
- комплексные числа и действия над ними.

Пособие содержит теоретический материал и упражнения для практических занятий, а также задания для самостоятельной работы, и может быть использовано студентами как очной, так и заочной форм обучения.

Рецензенты: Яковенко Николай Иванович, к.т.н., доцент кафедры «Электроэнергетика и электротехнологии».

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования Брянского ГАУ, протокол № 4 от 28 февраля 2020 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение…………………………………………………………………………..6

ГЛАВА 1
Аналитическая геометрия на плоскости

§1. Метод координат. Декартовы координаты ....……………...…………… 7
§2. Простейшие задачи на декартовы координаты на плоскости ...……....... 9
2.1. *Нахождение расстояния между точками плоскости* ..………….. 9
2.2. *Деление отрезка в заданном отношении*....……………...…….. 10
§3. Линии на плоскости и их уравнения ....…………… ………...………..12
§4. Первая основная задача аналитической геометрии на плоскости ...…… 16
§5. Вторая основная задача аналитической геометрии на плоскости ...…… 22
§6. Обзор основных линий и их уравнений (обзор основных функций и их графиков) ..………………………………. ………………... 26
6.1. *Прямые на плоскости и их уравнения*…..……………………………26
6.2. *Некоторые важнейшие кривые на плоскости* ......…………...……. 32
§7. Геометрическое представление решений неравенств и систем неравенств ……………………………………………………..34

ГЛАВА 2
Линейная алгебра

§1. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса ....………37
1.1. *Общие понятия и определения* ..……………………………………….37
1.2. *Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными* ……………39
1.3. *Квадратные системы линейных уравнений произвольного порядка* ....………………………………………………........41
1.4. *Переопределенные системы* ..………………………………………………46
1.5. *Недоопределенные системы* ……………………………………………… 47
§2. Понятие о других методах решения систем линейных уравнений……...49
2.1. *Метод определителей* ………………………………………………...49
2.2. *Матричный метод* ..…………………………………………………..……..54

ГЛАВА 3
Пределы

§1. Предел переменной ………………………………………………...59
§2. Предел функции. Непрерывность и разрывы функций ……………… ...66
§3. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций………...76

ГЛАВА 4
Дифференциальное исчисление

§1. Производная функции: определение и смысл 83
§2. Производные основных элементарных функций. Таблица
производных. Правила дифференцирования 90
§3. Исследование функций с помощью производных....................... 100
§4. Некоторые другие приложения производной 108
4.1. *Приближенное решение уравнений методом половинного деления*..108
4.2. *Правило Лопиталя вычисления пределов* 110
§5. Дифференциал функции 112

ГЛАВА 5
Интегральное исчисление

§1. Первообразная для функции и неопределенный интеграл от неё 119
§2. Основные методы интегрирования 125
2.1. *Непосредственное интегрирование* 126
2.2. *Интегрирование с помощью подстановки*
(с помощью замены переменной интегрирования) 127
2.3. *Интегрирование по частям* 129
§3. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла 132
3.1. *Задача о вычислении площади криволинейной трапеции* 132
3.2. *Задача о вычислении пути при переменной скорости движения* 134
3.3. *Задача о вычислении работы переменной силы* 135
3.4. *Задача о нахождении объема производства при заданной*
производительности труда 136
§4. Свойства и вычисление определенных интегралов 138
4.1. *Приближенное и точное вычисление определенных интегралов.*
Формула Ньютона-Лейбница 142
§5. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям.
Использование четности – нечетности подынтегральной функции ..148
§6. Несобственные интегралы 152
6.1. *Несобственные интегралы с бесконечными пределами*
интегрирования 152
6.2. *Несобственные интегралы с конечными пределами*
интегрирования от неограниченных функций.......................160

ГЛАВА 6
Дифференциальные уравнения

§1. Общие понятия и определения 166
§2. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка ...170
§3. Основные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка
и их решение 180

§4. Дифференциальные уравнения второго порядка ……………………..192

ГЛАВА 7
Ряды

§1. Числовые ряды ……………………………………………………..200
§2. Функциональные ряды (общие положения) …………………………..214
§3. Степенные ряды. Ряды Маклорена и Тейлора ………………………..216

ГЛАВА 8
Функции многих переменных

§1. Основные понятия ……………………………………………………226
§2. Частные производные и полный дифференциал функций
многих переменных ……………………………………………………230
§3. Исследование функций многих переменных на экстремум …………235
§4. Понятие о двойных, тройных, криволинейных и поверхностных
интегралах ………………………………………………………….…243

ГЛАВА 9
Комплексные числа и действия над ними

9.1 О причинах введения в математику комплексных чисел …………….246
9.2 Геометрическое изображение и свойства комплексных чисел ………248
9.3 Сложение и вычитание комплексных чисел …………………………..250
9.4 Перемножение комплексных чисел ……………………………………251
9.5 Деление комплексных чисел друг на друга …………………………...252
9.6 Показательная форма записи комплексных чисел ……………………253
9.7 Извлечение корней из комплексных чисел ……………..…………..254
9.8 О практических применениях комплексных чисел …………………...255

Литература ………………………………………………………....... 257

Введение

В наше время нет необходимости убеждать кого бы то ни было в том, что математика – это важная наука. Не владеющий основами математики человек не сможет стать квалифицированным специалистом, какую бы специальность он ни осваивал. Более того, у него будут проблемы даже в повседневном быту.

Математику, изучаемую в школе, называют элементарной, а в вузе – высшей. Элементарная математика берет свое начало с незапамятных времен – с простейших задач арифметики и геометрии, а высшая - с XVII века, когда Рене Декарт создал аналитическую геометрию, а Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц заложили основы математического анализа (анализа бесконечно малых). Эти их открытия революционным образом ускорили как развитие самой математики, так и всего естествознания в целом.

Особенно широкие возможности перед математическим исследованием различных природных и общественных процессов открылись в последние десятилетия в связи с появлением электронных вычислительных машин. Для типичных математических задач, возникающих в различных отраслях науки и техники, созданы и готовые пакеты компьютерных программ их решения. В частности, студенческие задачи помогает решать Интернет. Например, такие его ресурсы, как https://ru.onlinemschool.com, представляющий собой набор онлайн-калькуляторов для решения стандартных школьных и студенческих задач по математике, а также https://math24.biz или https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/, где решаются и более сложные задачи. Многие математические задачи решаются и с помощью всем известных электронных таблиц Excel. Есть и более сложные, но и более богатые по содержанию пакеты математических программ, к числу которых принадлежат Mathcad, MatLab, Mathematica, и др. Но чтобы пользоваться всеми этими программами, нужно, естественно, владеть основными понятиями и фактами соответствующих разделов математики. Изложению этих понятий и фактов и посвящен данный курс. В конце в списке литературы приведены учебники и учебные пособия, дополняющие и расширяющие излагаемый здесь материал.

И, наконец, последнее. Освоение математических методов позволяет приобрести не только расчетный аппарат для профессиональной деятельности специалиста любого профиля. Математика играет большую роль и в формировании общей культуры человека: как никакая другая наука, она учит логически мыслить, анализировать, обобщать, вырабатывает объективность, точность и сжатость мысли, воображение и фантазию. Ее значение, таким образом, выходит далеко за рамки прикладной науки. Однако ее изучение требует и немалого труда. Но, как говорил выдающийся экономист XIX века Карл Маркс, «в науке нет широкой столбовой дороги, и только тот достигнет ее сияющих вершин, кто, не страшась усталости, карабкается по ее каменистым тропам».

ГЛАВА I
Аналитическая геометрия на плоскости

Аналитическая геометрия – это область математики, в которой геометрические задачи решаются не средствами геометрии (построением чертежей и их анализом), а средствами алгебры и математического анализа, в основе использования которых лежит *метод координат*. Или, если коротко, аналитическая геометрия – это геометрия в системе координат.

Различают *аналитическую геометрию на плоскости* (аналитическую планиметрию) и *аналитическую геометрию в пространстве* (аналитическую стереометрию). Мы ограничимся в основном рассмотрением лишь основных понятий и фактов аналитической планиметрии.

§ 1. Метод координат. Декартовы координаты

Метод координат основан на всем известном из курса элементарной математики свойстве числовой оси: *каждой точке M этой оси соответствует некоторое действительно число x, и наоборот* (рис. 1.1).

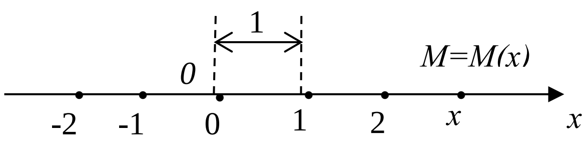


Рис. 1.1

Число x называется *координатой точки M*, и обозначается это так: $M = M(x)$ (читается: точка M – точка с координатой x). Координата x точки M, по определению, есть расстояние от начальной точки O (координата которой равна 0) до точки M, взятое со знаком плюс, если точка M находится справа от точки O, и со знаком минус, если она находится слева от нее.

В числовую ось, при желании, можно превратить любую прямую. Для этого следует:

а) выбрать одно из направлений этой прямой за положительное (поставить стрелку, указывающую это направление);

б) выбрать одну из точек прямой в качестве начальной точки O (с ней связывается число 0);

в) установить на прямой масштаб измерения, то есть определиться, отрезок какой длины будет считаться единичным.

Преобразование обычной прямой в числовую ось, когда каждой точке прямой можно поставить в соответствие некоторое действительное число (координату этой точки), представляет собой введение *системы координат на прямой* (рис. 1.1). После введения на прямой системы координат можно уже, очевидно, говорить не о точках этой прямой (точках M), а о соответствующих им числах x – координатах этих точек.

Далее, с помощью взаимно перпендикулярных числовых осей естественным образом устанавливается система координат на плоскости (рис. 1.2) и система координат в пространстве (рис. 1.3). Рисунок 1.2 демонстрирует, что у каждой точки $M = M\ (x;\ y)$ плоскости имеются две координаты: абсцисса x (проекция точки M на числовую ось ox) и ордината y (проекция точки M на числовую ось oy). Аналогично рис. 1.3 демонстрирует три координаты точки $M = M\ (x;\ y;\ z)$ в пространстве: абсциссу x, ординату y и аппликату z, являющиеся проекциями этой точки на числовые оси $y\ ox$, oy и oz соответственно.

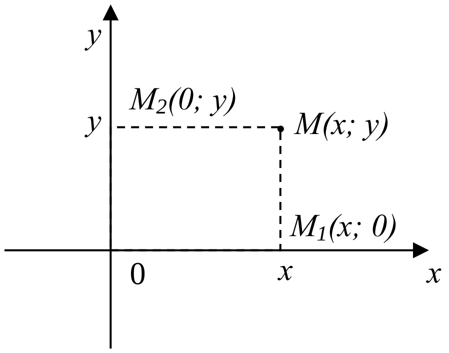


Рис. 1.2

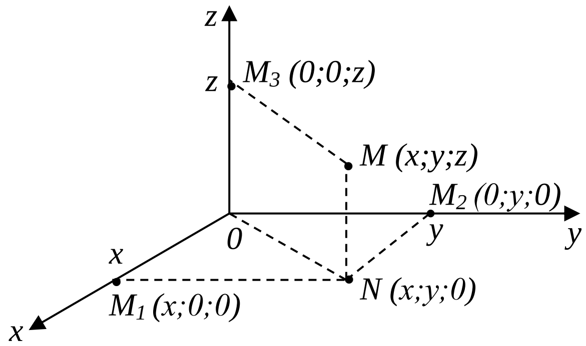


Рис. 1.3

Указанные координаты точек на плоскости и в пространстве называются *прямоугольными* или *декартовыми* – в честь великого французского математика и философа Рене Декарта, который в 17 веке ввел в обиход математики эти координаты.

Опираясь на приведенное выше понятие координат точек прямой, плоскости и пространства (рис. 1.1 – 1.3), можно *любое действительное число x считать точкой числовой оси ox (точкой одномерного пространства); любую пару чисел $(x;\ y)$ – точкой плоскости xoy (точкой двумерного пространства); любую тройку чисел $(x;\ y;\ z)$ – точкой обычного пространства (трехмерного).* И вообще, любую упорядоченную совокупность n действительных чисел $(x_1;\ x_2;\ \dots\ x_n)$ можно считать *точкой некоего n-мерного пространства.* Для $n > 3$ такое пространство является математической абстракцией (физически непредставимо). И, тем не менее, введение в математику таких пространств оказалось очень плодотворным и для дальнейшего развития самой математики, и для ее приложений в других науках.

Обратно, после введения системы координат на прямой, плоскости и в пространстве *каждую точку прямой можно считать просто числом; каждую точку плоскости – парой чисел; каждую точку пространства – тройкой чисел.* Эти числа – координаты соответствующих точек. Таким образом, появляется возможность взамен *точек* (геометрических объектов) рассматривать *числа* (алгебраические объекты). А вместо линий, поверхностей, плоских фигур и пространственных тел, то есть вместо *геометрических объектов* рассматривать функции, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, то есть *алгебраические объекты*. Таким образом, появляется замечательная возможность преобразовывать геометрические задачи в задачи алгебры и математического анализа, которые обычно решаются проще. В этом, в принципе, и состоит идея метода координат.

§ 2. Простейшие задачи на декартовы координаты на плоскости

2.1. Нахождение расстояния между точками плоскости

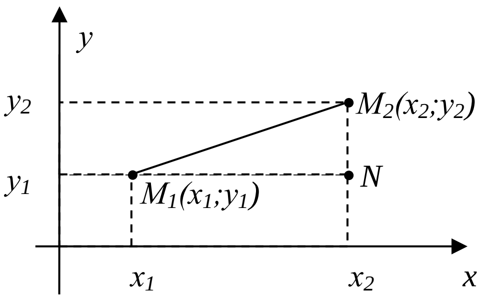


Рис. 1.4

Пусть M_1 $(x_1;\ y_1)$ и M_2 $(x_2;\ y_2)$ – некоторые две точки плоскости в декартовой системе координат (рис. 1.4). Требуется найти формулу, по которой можно было бы находить расстояние $|M_1M_2|$ между этими точками.

Формула эта очевидным образом вытекает из теоремы Пифагора, примененной к треугольнику M_1M_2N. Действительно, по этой теореме (квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов) получаем:

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

откуда $|M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2}$. Но, согласно рис. 1.4, $|M_1N| = x_2 - x_1$, а $|NM_2| = y_2 - y_1$. Поэтому получаем окончательно:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.1}$$

Это и есть та формула, по которой находят расстояние между точками плоскости в декартовой системе координат.

Примечание 1. Формула (2.1) выведена нами для того расположения точек M_1 и M_2, которое указано на рис. 1.4 (то есть когда $x_2 > x_1$ и $y_2 > y_1$). Но она будет верна и при любом другом расположении этих точек (убедитесь в этом самостоятельно).

Пример 1. Найти расстояние между точками $A(0;\ 2)$ и $B(4;\ -1)$.

Решение. Принимая точку A за M_1, а точку B за M_2 и используя формулу (2.1), получим:

$$|AB| = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Естественно, тот же результат мы получим, если за точку M_1 примем точку B, а за точку M_2 – точку A:

$$|BA| = \sqrt{(0-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Примечание 2. Если M_1 (x_1; y_1 ; z_1) и M_2 (x_2; y_2; z_2) – некоторые две *пространственные* точки в декартовой системе координат, то расстояние между ними находится по формуле (2.1*), аналогичной формуле (2.1):

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (2.1^*)$$

(попробуйте вывести эту формулу самостоятельно).

2.2. Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим еще одну простую, но важную задачу. Требуется найти точку M, делящую заданный отрезок $M_1 M_2$ в заданном отношении λ. Это значит, что искомая точка M должна занимать на отрезке $M_1 M_2$ такое положение, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda \quad (0 < \lambda < \infty \text{ – заданное число}) \qquad (2.2)$$

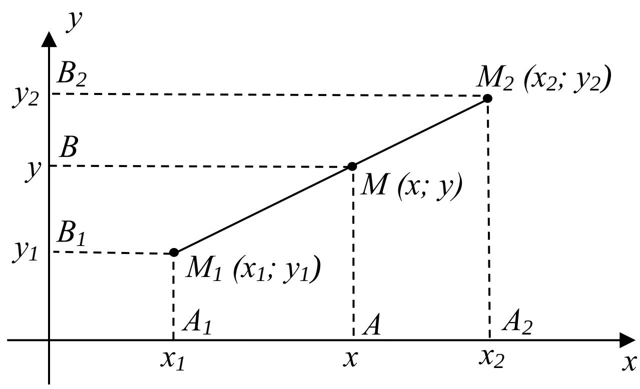


Рис. 1.5

Для решения поставленной задачи рассмотрим рис. 1.5.

На основании известной теоремы Фалеса о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|A_1A|}{|AA_2|} = \lambda$$

Но, согласно рис. 1.5, $|A_1A| = x - x_1$, а $|AA_2| = x_2 - x$. Поэтому получаем:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

Выражая отсюда x, находим:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (2.3)$$

Это – абсцисса искомой точки M. Совершенно аналогично находим ее ординату y:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2.4)$$

Формулы (2.3) и (2.4) и решают поставленную задачу о делении заданного отрезка $M_1 M_2$ в заданном отношении λ.

В частности, если M – середина отрезка $M_1 M_2$, то $\lambda = 1$. Следовательно, координаты $(x;\ y)$ середины отрезка $M_1 M_2$ таковы:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2.5)$$

<u>Примечание</u>. Легко показать, что формулы (2.3), (2.4) и (2.5) верны не только для того расположения точек $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, которое указано на рис. 1.5, но и для любого другого (убедитесь в этом самостоятельно).

<u>*Пример 2*</u>. Даны точки $M_1(-1;\ 3)$ и $M_2(3;\ -2)$. На отрезке M_1M_2 найти точку $M(x;y)$, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2.

<u>*Решение*</u>. По условию задачи, искомая точка M такова, что

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, в данном случае рассматривается задача о делении отрезка $M_1 M_2$ в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Применяя формулы (2.3) и (2.4) при $\lambda = \frac{1}{2}$, находим координаты точки M:

$$x = \frac{-1 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}; \qquad y = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot(-2)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Таким образом, $M = M\left(\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$.

Упражнения

1. Докажите, что треугольник с вершинами $A(-3;\ -2)$, $B(0;\ -1)$ и $C(-2;\ 5)$ прямоугольный.

2. Найдите а) центр; б) радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(4;3)$, $B(-3;2)$, $C(1;-6)$.

<u>*Ответ*</u>: $D(1;\ -1)$ – центр; $R=5$ – радиус.

3. Точка M делит отрезок $M_1 M_2$ пополам. При этом $M_1 = M_1(-1; -1)$ и $M=M(0; 1)$. Найдите координаты точки M_2.
Ответ: $M_2 = M_2(1; 3)$.

4. Даны две точки M_1 (1; 2) и M_2 (4; -1). Найдите отношение λ, в котором делится отрезок $M_1 M_2$ точкой M своего пресечения с осью ox, а также найдите эту точку.
Ответ: $\lambda = 2$; $M(3; 0)$.

5. Два пешехода X и Y отправились из одной точки A в точки B и C противоположно друг другу. Пешеход X, дойдя до точки B, повернул направо и дошел до точки B', расположенной так, что $BB' = AB$. Пешеход Y, дойдя до точки C, повернул налево и дошел до точки C', расположенной так, что $CC' = AC$ (все повороты на 90°). После этого пешеходы пошли навстречу друг другу и встретились в середине отрезка $B'C'$ - в точке D. Если известно, что $BC = 20\sqrt{2}$, то чему равна сумма расстояний $BD + CD$?
Ответ: 40.

§ 3. Линии на плоскости и их уравнения

Пусть на плоскости с декартовой системой координат изображена некоторая линия L (рис. 1.6). И пусть эта линия является графиком некоторой функции $y = f(x)$. Тогда функция y и ее аргумент x являются координатами точек линии L (точек $M(x; y)$).

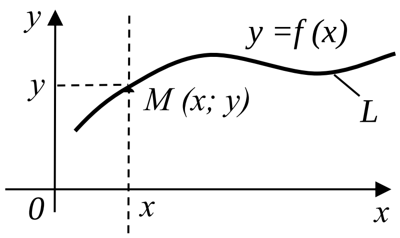


Рис. 1.6

Функция $y = f(x)$ является, по своей форме, уравнением. Ему удовлетворяют координаты $(x; y)$ любой точки линии L, и только они.

Определение. *Уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки линии, и только они, называется* ***уравнением линии***.

Таким образом, уравнением линии L, изображенной на рисунке 1.6, будет уравнение

$$y = f(x) \tag{3.1}$$

Оно представляет собой функцию, графиком которой эта линия является.

Для линий типа той, что изображена на рис. 1.6, термины «линия и ее уравнение» и «функция и ее график» - это, по существу, одно и то же. Уравнениями таких линий являются функции, графиками которых эти линии являются.

Естественно, что у разных линий будут и разные уравнения. Уравнение линии указывается рядом с линией (см. рис. 1.6)).

В уравнении (3.1) ордината y точек линии выражена через их абсциссу x. Но такое условие не обязательно – в уравнении линии, наоборот, абсцисса x

точек линии может быть выражена через их ординату y. То есть уравнение линии может иметь и такой вид:

$$x = g(y) \tag{3.2}$$

(здесь использована другая буква для обозначения зависимости x от y, ибо функции (3.1) и (3.2) – разные даже для одной и той же линии).

Наконец, уравнение линии может иметь и самый общий вид

$$f_1(x;\, y) = f_2(x;\, y) \tag{3.3}$$

Если перенести правую часть этого уравнения налево и ввести обозначение $f_1(x;\, y) - f_2(x;\, y) = F(x;\, y)$, то это уравнение преобразуется к виду

$$F(x;\, y) = 0 \qquad 3.4)$$

Такое уравнение называется *неявным уравнением линии*, ибо в нем ни одна из координат точек линии не выражена через другую – в отличие от *явного уравнения* (3.1) и *явного уравнения* (3.2).

Из различных форм уравнения линии наиболее удобной является форма (3.1), потому что в этом случае уравнение линии представляет собой хорошо известное математическое понятие – функцию. А исследовать такое уравнение – это значит исследовать эту функцию, что является классической и хорошо разработанной математической процедурой. В принципе так же удобно иметь дело и с уравнением линии в форме (3.2). А вот неявное уравнение линии в форме (3.3) и (3.4) гораздо менее удобно для исследования. Поэтому такое уравнение стараются перевести (преобразовать) в явную форму (3.1) или (3.2), выражая из него y через x или x через y (если это возможно). Если это не удается, приходится иметь дело с неявным уравнением, которое труднее, но тоже поддается математическому исследованию.

Пример 1. Пусть $2y - 4x^2 = 0$ – неявное уравнение некоторой линии. Выразив из него y, получим $y = 2x^2$. Это уже явное уравнение той же линии, и теперь даже ясно, какой – параболы.

Примечание. Перенеся в уравнениях (3.1) и (3.2) правую часть налево, мы приведем их к виду (3.4), то есть сделаем эти явные уравнения неявными. Поэтому неявное уравнение линии в форме (3.4) является наиболее общим – в таком виде можно записать уравнение любой линии на плоскости с декартовой системой координат. Но не всякое такое уравнение является уравнением какой-то линии на плоскости. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяется, очевидно, лишь при $x = 0$ и $y = 0$ одновременно и, следовательно, определяет лишь одну точку плоскости – точку $O(0;0)$. А уравнение $x^2 + y^2 = -1$ не может быть удовлетворено ни при каких x и y, а значит, вообще никаких геометрических объектов на плоскости не определяет. Но такие вырожденные случаи малосодержательны, являются исключениями, поэтому мы их во внимание принимать не будем.

Уравнение линии на плоскости может быть записано и в так называемой *параметрической форме*.

Пусть, например, по плоскости с введенной на ней декартовой системой координат движется точка M, положение которой в каждый момент времени t известно. Это значит, что координаты $(x;\ y)$ движущейся точки заданы как некие функции времени:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{3.5}$$

Система (3.5) описывает движение указанной точки $M(x;\ y)$ по плоскости, а значит, определяет и траекторию L движущейся точки. Эта система называется *параметрическим уравнением линии L на плоскости.* В нем координаты $(x;\ y)$ точек линии связаны не непосредственно друг с другом (как в формах (3.1) – (3.4)), а через посредника – через *параметр* t. Исключив из системы (3.5) этот параметр, мы можем связать x и y и непосредственно друг с другом. Кстати, параметр t в системе (3.5) может иметь и какой-то другой смысл, не обязательно представлять собой время.

Пример 2. Материальная точка поднята над поверхностью земли на высоту h и брошена горизонтально со скоростью v. Найти уравнение траектории L брошенной точки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

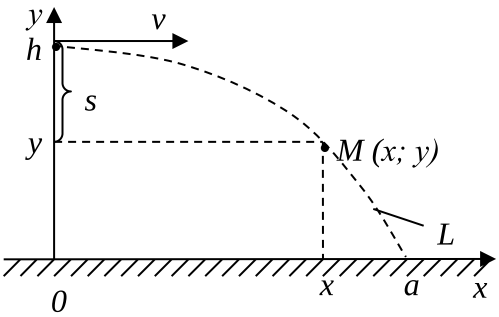


Рис. 1.7

Решение. Рассмотрим рис. 1.7. Так как брошенная точка участвует одновременно в двух независимых движениях – равномерном горизонтально со скоростью v и равноускоренном вертикально вниз с ускорением свободного падения g, то в любой момент времени $t \geq 0$ координаты $(x;\ y)$ движущейся точки M найдутся по хорошо известным из школьной физики формулам:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = h - s = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (t \geq 0) \tag{3.6}$$

Это и есть уравнение траектории L брошенной точки (параметрическое). Его, при желании, можно привести и к явному виду (3.1). Для этого из первого уравнения системы (3.6) выразим параметр $t = \dfrac{x}{v}$ и подставим его во второе уравнение. В итоге получим явное уравнение траектории L (параболы):

$$y = h - \frac{gx^2}{2v^2}. \qquad (3.7)$$

Кстати, положив в (3.7) $y = 0$ и $x = a$, найдем дальность полета a:

$$a = v\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (3.8)$$

Пример 3. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале декартовой системы координат (рис. 1.8). Из рисунка очевидно, что для каждой точки $M(x; y)$ указанной окружности L выполняются равенства:

$$\begin{cases} x = RCos\varphi \\ y = RSin\varphi \end{cases} \quad (-\pi < \varphi \le \pi], \qquad (3.9)$$

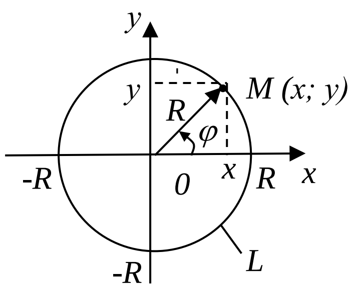


Рис. 1.8

где φ – полярный угол точки M. Система (3.9) имеет вид (3.5) при $t = \varphi$ и, следовательно, представляет собой *параметрическое* уравнение окружности L (параметром здесь является угол φ).

Можно связать x и y и напрямую друг с другом, без посредника φ. Для этого возведем каждое уравнение (3.9) в квадрат и сложим их. В итоге получим:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3.10)$$

Это – уравнение окружности L в декартовых координатах в неявной форме (в форме (3.3)). Выражая из этого уравнения y, можем привести его и к явной форме (форме (3.1)):

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \qquad (3.11)$$

Равенство (3.11) содержит два уравнения. Уравнение $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ – это явное уравнение верхней полуокружности, а $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ – нижней.

В заключение параграфа обратим внимание на исключительную важность введенного в нем понятия «уравнение линии». Уравнение линии содержит в себе информацию сразу о всех точках этой линии. То есть один алгебраический объект (уравнение) описывает бесконечное количество геометрических объектов (точек), из которых линия состоит. Исследование всех этих геометрических объектов (то есть всей линии) сводится лишь к исследованию её уравнения, что кардинально упрощает проблему.

Упражнения

1. Решить задачу, рассмотренную в примере 2, когда точка брошена не горизонтально, а под некоторым углом α к поверхности земли.

Ответ: $\begin{cases} x = vCos\alpha \cdot t \\ y = h + vSin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$ (t ≥ 0 – время).

2. Под каким углом с поверхности земли нужно бросить материальное тело, чтобы дальность его полета была максимальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 45^0

.

§ 4. Первая основная задача аналитической геометрии на плоскости

Основных задач аналитической геометрии на плоскости две. Первая из них: *для заданной линии найти ее уравнение.* Вторая задача – обратная: *по заданному уравнению линии построить линию.*

Начнем с рассмотрения первой, более трудной, задачи. Трудность решения этой задачи очевидна: ведь нужно найти математическое уравнение, которому будут удовлетворять координаты любой точки данной линии, и только они. Для достаточно сложных линий (например, для линии, образованной свободным движением руки) точное решение этой задачи вообще оказывается невозможным – только приближенное. Однако для не слишком сложных линий их уравнения найти можно. Мы, например, без труда сделали это в предыдущем параграфе для линий, изображенных на рис. 1.7 и 1.8. Рассмотрим еще несколько примеров.

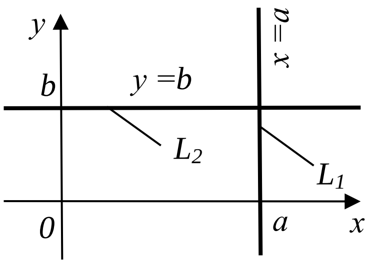


Рис. 1.9

Пример 1. Найти уравнения вертикальной прямой L_1 и горизонтальной прямой L_2, изображенных на рис. 1.9.

Решение. Уравнения этих прямых очевидны: $x = a$ – уравнение прямой L_1, $y = b$ – уравнение прямой L_2. Действительно, этим уравнениям удовлетворяют координаты любой точки соответствующих прямых, и только они. В частности, $y = 0$ – это уравнение оси ox, а $x = 0$ – уравнение оси oy.

Пример 2. Найти уравнение прямой L, изображенной на рис. 1.10.

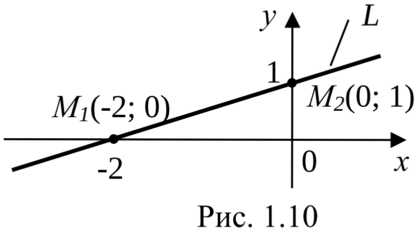


Рис. 1.10

Решение. Как известно из школьного курса математики, наклонная прямая – это график линейной функции вида $y = kx + b$. Значит, уравнение данной прямой L имеет вид $y = kx + b$. Нам только нужно найти параметры k и b этого уравнения.

Используем рис. 1.10. Так как точки M_1(-2; 0) и M_2 (0; 1) лежат на прямой L, то их координаты ($x; y$) должны удовлетворять уравнению этой прямой. Подставляя эти координаты в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему из двух равенств:

$$\begin{cases} 0 = k\cdot(-2) + b \\ 1 = k\cdot 0 + b \end{cases}$$

Решая ее, находим: $k = \frac{1}{2}$; $b = 1$. Следовательно, уравнение данной прямой L таково: $y = \frac{1}{2}x + 1$. Или, в неявной форме, $x - 2y + 2 = 0$.

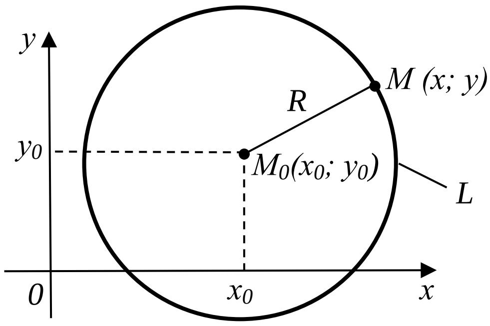


Рис. 1.11

Пример 3. Найти уравнение окружности L с центром в заданной точке $M_0(x_0; y_0)$ и заданным радиусом R (рис. 1.11).

Решение. Для любой точки $M(x; y)$ окружности L, и только для точек этой окружности, имеет место равенство:

$$|M_0M| = R$$

Реализуя это равенство с помощью формулы (2.1) расстояния между двумя точками, получим:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим равносильное равенство:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2. \qquad (4.1)$$

Это и есть искомое уравнение указанной окружности L.

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$), то ее уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (4.2)$$

Это уравнение, кстати, совпадает с уравнением (3.10), полученным ранее другим путем.

Пример 4. Найти уравнение линии, состоящей из точек, равноудаленных от оси ox и от точки $F(0;\frac{1}{2})$.

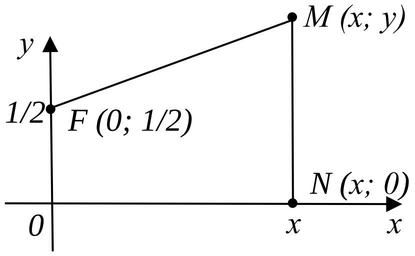


Рис. 1.12

Решение. Пусть $M(x;\, y)$ – произвольная точка указанной линии, а $N\,(x;\,0)$ – проекция точки $M(x;\,y)$ на ось ox (рис. 1.12). По условию задачи $|FM| = |NM|$ для любой точки $M(x;\,y)$ линии и только для точек этой линии. Если использовать формулу (3.1) расстояния между двумя точками, то это равенство примет вид:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2}$$

После возведения в квадрат обеих частей и очевидных упрощений оно примет вид:

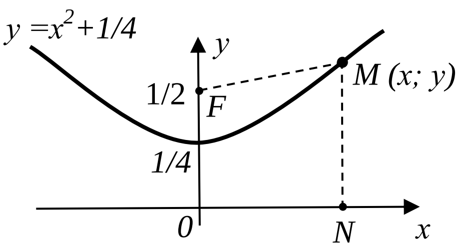


Рис. 1.13

$y = x^2 + \frac{1}{4}$. Это и есть уравнение рассматриваемой линии. Судя по полученному уравнению, данная линия является параболой $y = x^2$, поднятой на $\frac{1}{4}$ вдоль оси oy (рис. 1.13).

Приближенные уравнения линий

А теперь рассмотрим вопрос о *приближенных уравнениях линий*. Чаще всего этот вопрос возникает, когда речь идет о линиях, полученных в результате экспериментов.

А именно, пусть экспериментальным путем изучается зависимость $y = f(x)$ между двумя величинами. Например, зависимость урожайности культуры y от количества внесенных под нее удобрений x; пройденного пути y от времени движения x; прибыли предприятия y от величины затрат x и т.д. В ходе эксперимента для ряда значений x определяются соответствующие значения y, что приводит к экспериментальной таблице вида

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

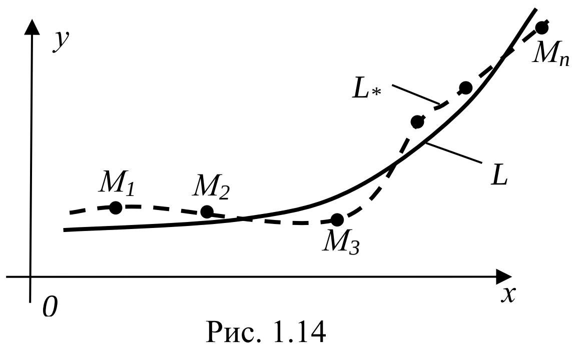


Рис. 1.14

Данные этой таблицы можно изобразить и графически в виде системы экспериментальных точек M_1 (x_1; y_1), M_2 (x_2; y_2), … M_n (x_n; y_n) (рис. 1.14). По этим экспериментальным данным нужно получить искомое уравнение $y = f(x)$, связывающее y с x. Такое уравнение называется *эмпирической формулой*, а сама задача получения такой формулы называется *задачей построения эмпирической формулы.*

В этой задаче фактически идет речь о нахождении уравнения $y = f(x)$ линии L по точкам M_1, M_2, … M_n, которые, вообще говоря, на этой линии не лежат, так как они содержат в себе неизбежные погрешности эксперимента и, кроме того, содержат результат влияния других факторов (помех). Поэтому искомая линия L может отличаться от линии L_*, непосредственно соединяющей экспериментальные точки. В частности, линия L_* может иметь весьма причудливую форму, в то время как сама линия L будет простой и гладкой (например, прямой). Линия L должна как бы сглаживать линию L_*, устраняя ее незначительные перепады, связанные с неточным положением экспериментальных точек.

При нахождении эмпирической формулы $y = f(x)$, а значит, и соответствующей ей линии L, приходится решать две частные задачи.

Первая из них – выбор *типа эмпирической формулы*. То есть выбор того класса функций, к которому принадлежит искомая функция $y = f(x)$. Во многих случаях класс функций, из которого подбирается эмпирическая формула, подсказывается теоретическими представлениями о характере изучаемой зависимости (зависимость линейная вида $y = kx$ или $y = kx + b$, квадратичная вида $y = ax^2 + bx + c$, обратно-пропорциональная вида $y = \frac{k}{x}$, показательная вида $y = ke^{ax}$ и т.д.). Или, если указанные теоретические представления отсутствуют, то класс функций для эмпирической формулы подбирают по характеру расположения экспериментальных точек.

После того, как вид эмпирической формулы выбран, то есть первая частная задача решена, остается определить *наилучшие значения входящих в эту формулу числовых коэффициентов.* Эта задача (вторая частная задача) уже более легкая, ибо решается стандартным методом – *методом наименьших квадратов*. В соответствии с этим методом наилучшими значениями параметров эмпирической формулы считаются те, при которых сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от эмпирической кривой $y = f(x)$ была бы минимальной.

Эмпирическая линия L, построенная на основе метода наименьших квадратов, называется *линией регрессии*. А её уравнение $y = f(x)$ – *уравнением регрессии*. Уравнения и линии регрессии строятся с помощью компьютерных программ.

Например, команда «Добавить линию тренда» в Excel позволяет построить уравнения регрессии в следующих формах:

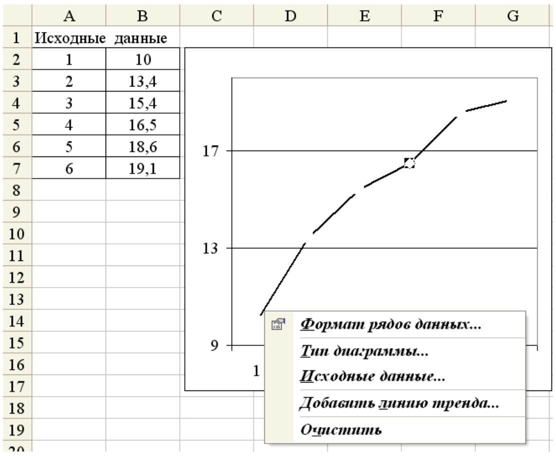
- линейное $y = b_0 + b_1 x$;

- полиноминальное $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_k x^k \quad (k \le 6)$;
- логарифмическое $y = b_0 + b_1 \ln x$;
- степенное $y = b_0 x^{b_1}$;
- экспоненциальное $y = b_0 e^{b_1 x}$.

Построение любого из этих уравнений регрессии с помощью электронных таблиц Excel осуществляется с помощью следующих шагов:

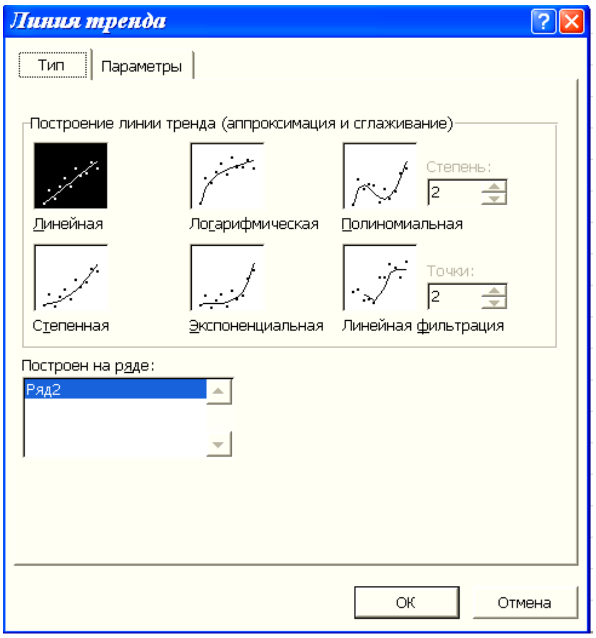
Шаг 1. На лист Excel вводим в виде двух столбцов исходные данные $(x_i; y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$ экспериментальной таблицы.

Шаг 2. С помощью Мастера диаграмм по этим данным строим в декартовой системе координат точечную диаграмму ломаной экспериментальной линии (как на рис. ниже).



Шаг 3. Устанавливаем курсор на построенном графике, делаем щелчок правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выполняем команду «Добавить линию тренда».

Шаг 4. В появившемся диалоговом окне активизируем закладку «Тип» и выбираем нужное уравнение регрессии.



Шаг 5. Активизируем закладку «Параметры» и включаем необходимые для нас опции:

- «Показать уравнение на диаграмме» - на диаграмме будет показано выбранное уравнение регрессии с вычисленными коэффициентами.
- «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)» - на диаграмме будет показано значение *коэффициента детерминации* R^2, который характеризует близость построенной линии регрессии к исходным экспериментальным точкам. Максимально возможное значение R^2 равно единице. При таком R^2 эта близость стопроцентная. То есть линия регрессии L, изображенная на рис. 1.14, проходит через все экспериментальные точки M_i $(i = 1, 2, \dots n)$. При меньшем R^2 и указанная близость соответственно меньше.

Шаг 6. После задания всех перечисленных опций щелкаем по кнопке «ОК», и на диаграмме появиться формула построенного уравнения регрессии и значение коэффициента детерминации R^2 (на рисунке ниже в качестве примера построено степенное уравнение регрессии).

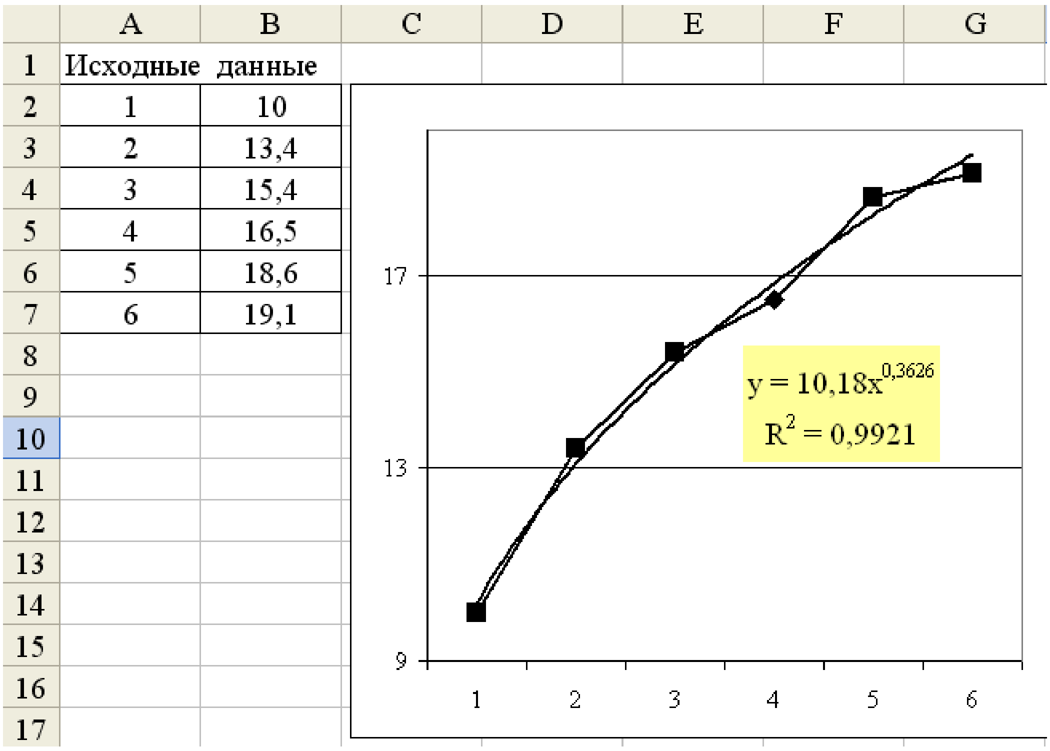


Рис. 1.15

Упражнения

1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(-2;3)$.

<u>*Ответ*</u>: $y = -1{,}5x$

2. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, постоянно равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4; 2)$. Лежат ли на этой линии точки $B(-2;1)$, $C(2;3)$, $D(1;7)$?

Ответ: $y = 2x + 5$. Точки B и D лежат на линии, C – не лежит.

3. Найти уравнение линии, по которой движется точка, оставаясь постоянно вдвое ближе к оси ox, чем к оси oy. Построить линию по ее уравнению.

Ответ: $y = \pm\frac{1}{2}x$ – крест из прямых $y = \frac{1}{2}x$ и $y = -\frac{1}{2}x$.

4. Найти уравнение линии, состоящей из таких точек, что разность расстояний от каждой из них до точек $F_1(-2;-2)$ и $F_2(2;2)$ равна 4. Построить линию по ее уравнению.

Ответ: $y = \frac{2}{x}$ – гипербола.

5. Парк развлечений освещают две осветительные установки высотой 12 и 15 метров, расположенные на расстоянии 96 метров друг от друга. Устройство этих установок таково, что наилучшая освещенность достигается в точках, отстоящих в два раза дальше от источника света, установленного на более низкой установке, чем на высокой. Пусть L - длина дорожки в парке в метрах, которую проложили через все такие точки (поверхность парка горизонтальна). Тогда значение $\frac{1}{\pi}L$ равно (…).

Ответ: 124 *м.*

6. По данным эксперимента, представленным в таблице, с помощью Excel построить линейную эмпирическую формулу (линейное уравнение регрессии) вида $y = kx + b$.

x	-0,20	0,20	0,40	0,60	0,70	0,80
y	0,96	1,40	1,56	1,74	1,92	2,04

Ответ: $y = 1{,}05x + 1{,}17$. $R^2 = 0{,}99$.

§ 5. Вторая основная задача аналитической геометрии на плоскости

Эта задача - обратная первой. То есть уравнение линии L дано, а по нему эту линию нужно построить. Указанная задача существенно проще первой основной задачи, и решается она стандартными методами.

Пусть, например, уравнение некоторой линии L задано в декартовых координатах в виде функции $y = f(x)$ (в явном виде).

Требуется по данному уравнению линии L построить саму линию L. В данном случае линия L – это просто график функции $y = f(x)$, который и нужно построить.

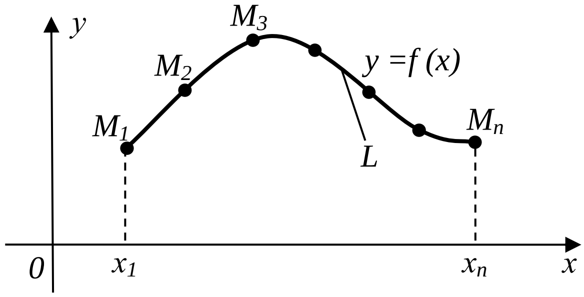


Рис.1.16

В принципе, построить линию – это значит нанести на плоскость все точки линии, совокупность которых и образует линию. Точками, лежащими на линии, будут те и только те точки $M(x; y)$, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют уравнению линии $y = f(x)$. Так как на любой линии лежит бесчисленное множество точек, то определить координаты каждой из них и нанести все их на плоскость невозможно. Поэтому на практике при построении линии по ее уравнению $y = f(x)$ часто поступают так. Из области определения функции $y = f(x)$ (то есть из множества всех тех значений x, для которых можно найти y) на выбранном участке оси ox выбирают ряд значений $(x_1; x_2; \ldots x_n)$ аргумента x, и по уравнению линии $y = f(x)$ вычисляют соответствующий им набор значений $(y_1; y_2; \ldots y_n)$ функции y. В итоге получают таблицу вида

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

(5.1),

содержащую координаты n точек (M_1 $(x_1; y_1)$; M_2 $(x_2; y_2)$; … M_n $(x_n; y_n)$) искомой линии. Нанося эти точки на плоскости xoy и соединяя их плавной кривой, строят искомую линию L (рис. 1.16). Этот хорошо известный способ называется *построением линии по точкам.*

По точкам можно построить и линию, заданную уравнением в параметрической форме, то есть заданную системой уравнений вида (3.5). Для этого для ряда выбранных значений $(t_1; t_2; \ldots t_n)$ параметра t вычисляют соответствующие значения x и y, что приводит к таблице вида:

t	t_1	t_2	…	t_n
x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

(5.2)

В итоге находятся точки линии (M_1 $(x_1; y_1)$; M_2 $(x_2; y_2)$; … M_n $(x_n; y_n)$), по которым строят и саму линию.

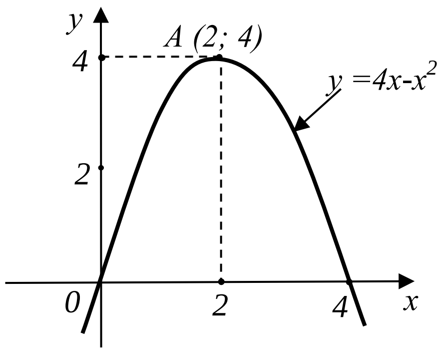
Отметим, что качество построенной по точкам линии будет выше, если в состав точек, по которым строится линия, будут включены наиболее интересные и важные точки этой линии – ее вершины, впадины, точки пересечения линии с осями координат, точки разрыва линии, и т. д., а также будет учтена возможная симметрия линии, ее повторяемость (периодичность) и другие ее особенности. Получение всей этой важной информации о линии связано с предварительным математическим исследованием уравнения линии. Это исследование опирается, главным образом, на использование *производных функций*, о чем, надеемся, читатель имеет некоторое представление из школьного курса математики. Впрочем, ниже, в главе «дифференциальное исчисление» мы это вспомним еще раз.

Примечание. Если уравнение линии задано в неявной форме (например, в виде $F(x;y)=0$), то и математическое исследование такого уравнения, и нахождение точек такой линии существенно усложняется. Например, задав в уравнении $F(x;y)=0$ значение x, нам придется для нахождения соответствующего значения (значений) y решать это уравнение относительно y. А это может оказаться сделать и непросто. Возможно, даже придется решать это уравнение машинным путем – с помощью компьютера.

Отметим еще следующее. Построение линии по ее уравнению значительно упрощается, если это уравнение принадлежит к известному типу. Например, если уравнение линии представляет собой линейную функцию вида $y=kx+b$, квадратичную функцию вида $y=ax^2+bx+c$, показательную функцию вида $y=a^x$, логарифмическую функцию вида $y=\log_a x$ и т.д. Тогда сразу становится известен тип самой линии (прямая, парабола, показательная кривая, логарифмическая кривая и т.д.). Остается лишь установить детали этой линии. Скажем, для параболы – это направление ее ветвей, координаты вершины, точки пересечения с осями координат. После получения этой информации легко строится и сама парабола.

Пример 1. Построить линию, имеющую уравнение $y=4x-x^2$.

Решение. Уравнение линии представляет собой квадратичную функцию вида $y=ax^2+bx+c$, где a = -1; b = 4; c = 0, поэтому данная линия – парабола. Ветви этой параболы направлены вниз, т.к. $a=-1<0$. Найдем вершину параболы. Абсциссу $x_в$ вершины найдем по известной школьной формуле:



$$x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot(-1)}=2$$

А ординату вершины $y_в$ найдем по уравнению параболы: $y_в=4\cdot 2-2^2=4$. Итак, точка $A(2;4)$ – вершина параболы.

Теперь найдем точки пересечения параболы с осью ox. На этой оси y=0, поэтому получаем:

$$y=0 \Rightarrow 4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0 \Rightarrow (x_1=0 \text{ и } x_2=4).$$

Итак, парабола пересекает ось ox в двух точках: x_1 = 0 и x_2 = 4. А теперь строим параболу (данных для ее построения достаточно).

Определение точек пересечения линий

При построении на одном чертеже нескольких линий может возникнуть *вопрос об определении точек пересечения этих линий*.

Пусть, например, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ – уравнения некоторых двух линий, и требуется найти точки их пересечения. Так как искомые точки должны одновременно принадлежать обеим линиям, то и их координаты $(x; y)$ должны одновременно удовлетворять уравнениям обеих линий. То есть они должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases} \qquad (5.3)$$

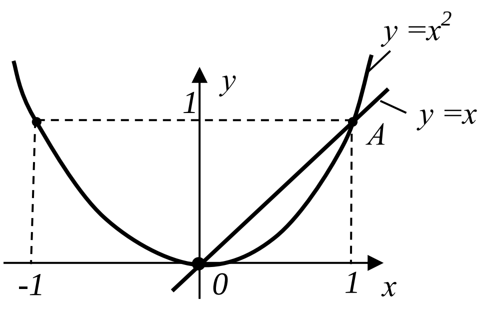
из уравнений этих линий. Обратно, решив систему (5.3), мы найдем такую пару (или такие пары) значений $(x; y)$, которые будут одновременно удовлетворять обоим уравнениям этой системы. А это значит, что точки с найденными координатами $(x; y)$ лежат на обеих линиях, то есть являются точками пересечения этих линий.

Таким образом, *найти точки пересечения линий – это значит решить систему из уравнений этих линий*.

<u>Пример 2</u>. Найти точки пересечения прямой $y = x$ и параболы $y=x^2$. Сделать иллюстрирующий чертеж.

<u>Решение</u>. Составим и решим систему из уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases} -$$



- два решения системы. Таким образом, имеются две точки пересечения данных прямой и параболы: точка $O(0;0)$ и точка $A(1;1)$. Иллюстрация этого представлена на рисунке.

Упражнения

1. Постройте линию, имеющую уравнение $xy = 0$.
   <u>Ответ</u>: крест из координатных осей *ox* и *oy*.

2. Постройте линию, имеющую уравнение $2x – 3y = 6$.
   <u>Ответ</u>: прямая, пересекающая ось *ox* в точке $x=3$ и ось *oy* в точке $y=-2$.

3. Найдите точки пересечения прямой $y = x$ и кубической параболы $y = x^3$.
   Ответ: $O(0; 0)$; $M_1(1; 1)$; $M_2(-1; -1)$.

4. Постройте линию, имеющую следующее уравнение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$$

Ответ: правая ветвь параболы $y = x^2$.

§ 6. Обзор основных линий и их уравнений (*обзор основных функций и их графиков*)

6.1. Прямые на плоскости и их уравнения

Как мы уже отмечали в §4, уравнения горизонтальных, вертикальных и наклонных прямых имеют соответственно вид:

$$y = b;\ \ x = a;\ \ y = kx + b \tag{6.1}$$

Все эти уравнения – частные случаи уравнения вида

$$ax + by + c = 0, \tag{6.2}$$

которое называется *общим уравнением прямой на плоскости.* Общим оно называется потому, что в таком виде можно записать уравнение любой прямой на плоскости. Впрочем, для горизонтальных, вертикальных и наклонных прямых удобнее записывать их конкретные уравнения (6.1).

Остановимся подробнее на уравнениях наклонных прямых $y = kx + b$, хорошо известных еще из школьного курса математики. Прямая L с уравнением $y = kx + b$ изображена на рис. 1.17:

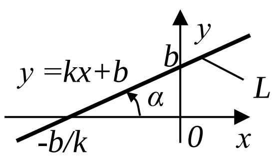


Рис. 1.17

$k = tg\alpha$ – см. рис.
b – см. рис.

Величина $k = tg\alpha$ называется *угловым коэффициентом прямой* L (прямой $y = kx + b$), а величина b определяет точку пересечения этой прямой с осью *оу*. Само уравнение $y = kx + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Для построения прямой по ее уравнению $y = kx + b$ достаточно найти и нанести на плоскость *xoy* любые две ее точки. Удобнее всего в качестве этих точек взять точки пересечения прямой с осями координат.

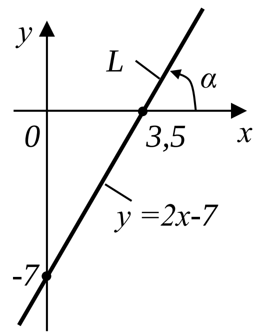


Рис. 1.18

<u>*Пример 1*</u>. Построить линию *L*, имеющую уравнение $y = 2x - 7$ (или, что то же самое, построить график функции $y = 2x - 7$).

<u>*Решение*</u>. Данное уравнение $y = 2x - 7$ – это уравнение вида $y = kx + b$ при $k = 2$ и $b = -7$. Но уравнение вида $y = kx + b$ – уравнение наклонной прямой. Значит, наша линия *L* – наклонная прямая. Найдем точки ее пересечения с осями координат.

а) *С осью ox*: на оси *ox* $y = 0$, поэтому из уравнения прямой получаем: $y = 0 \Rightarrow 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = 3{,}5$ - точка пересечения прямой с осью *ox*.

б) *С осью oy*: на оси *oy* $x = 0$, поэтому из уравнения прямой получаем: $x = 0 \Rightarrow y = -7$ - точка пересечения прямой с осью *oy*.

А теперь строим прямую *L* (рис. 1.18).

Стандартные задачи на прямые на плоскости

<u>**Задача 1**</u>. Пусть на прямой *L* известна только одна ее точка $M_0(x_0; y_0)$. Каким будет уравнение этой прямой?

<u>*Решение*</u>. Если эта прямая вертикальная, то ее уравнением будет, очевидно, уравнение $x = x_0$, а если горизонтальная – то уравнение $y = y_0$. Если же прямая *L* наклонная, то знания только одной точки $M_0(x_0; y_0)$, через которую проходит прямая, очевидно, недостаточно. Нужно задать еще и угол α – угол наклона прямой к оси *ox*. Или, что более удобно, нужно задать угловой коэффициент $k = tg\alpha$ этой прямой (см. рис. 1.19).

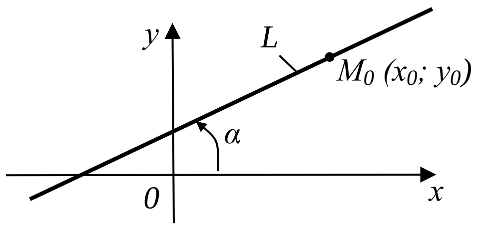


Рис. 1.19

$$\begin{cases} M_0(x_0; y_0) \text{ – задана;} \\ k = tg\alpha \text{ – задан} \end{cases}$$

Уравнение изображенной на рис. 1.19 прямой *L* будем искать в виде $y = kx + b$. Величина *k* уже известна. А для определения величины *b* подставим в это уравнение координаты $(x_0; y_0)$ точки M_0, лежащей на прямой. В результате найдем *b*:

$$y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - kx_0$$

Подставляя найденное значение *b* в уравнение $y = kx + b$, получим:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (6.3)$$

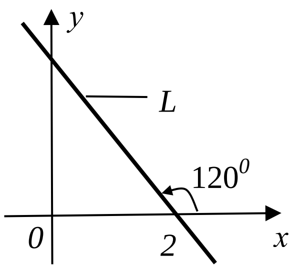


Рис 1.20

Это и есть искомое уравнение прямой L, изображенной на рис. 1.19. То есть уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k.

Пример 3. Найти уравнение прямой L, изображенной на рис. 1.20.

Решение. Данная прямая L проходит через точку $M_0(2; 0)$ и имеет угловой коэффициент

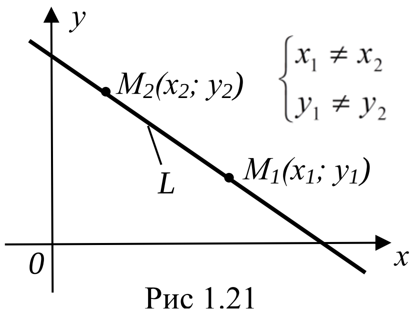
$$k = tg\alpha = tg120° = tg(180° - 60°) = tg(-60°) = -tg60° = -\sqrt{3}$$

Поэтому, согласно (6.3), получаем следующее уравнение прямой L:

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

Задача 2. Пусть теперь на наклонной прямой L заданы две какие-либо ее точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Нужно найти уравнение этой прямой (рис. 1.21).

Решение. Уравнение данной наклонной прямой L будем искать в виде $y = kx + b$. Здесь ни k, ни b не известны. Но зато на прямой L известны две ее точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Подставляя координаты каждой из них в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными k и b. Решая ее, получим:



$$\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

Рис 1.21

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \end{cases} \qquad (6.4)$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y = kx + b$, после упрощений получим легко запоминающееся уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (6.5)$$

Это и есть уравнение наклонной прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Пример 4. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 2)$ и $B(2; 0)$, и найти точку пересечения этой прямой с осью oy.

Решение. Приняв точку $A(-1; 2)$ за точку $M_1(x_1; y_1)$, точку $B(2; 0)$ за точку $M_2(x_2; y_2)$ (а можно и наоборот!) и воспользовавшись уравнением (6.5), получим:

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2} \Leftrightarrow 2x+3y-4=0$$

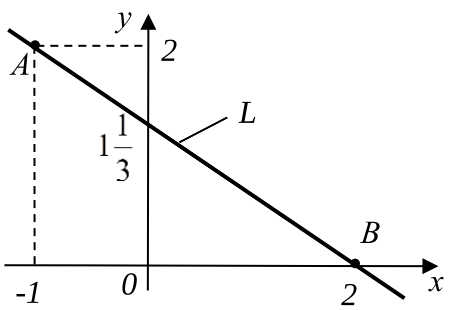


Рис.1.22

Это и есть искомое уравнение прямой (в форме общего уравнения (5.2)). Выразив из него y, можем записать это уравнение и в явном виде $y=kx+b$:

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}.$$

Величина $b=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ и определяет точку пересечения данной прямой с осью oy. Эта прямая L изображена на рис. 1.22.

<u>Задача 3</u>. Пусть $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ – уравнения некоторых двух данных наклонных прямых. Требуется установить:

а) параллельны они или нет?

б) перпендикулярны или нет?

в) если не параллельны и не перпендикулярны, то каков угол α между ними?

<u>Решение</u>. а) Пусть прямые L_1 и L_2 параллельны (рис. 1.23 (а)).

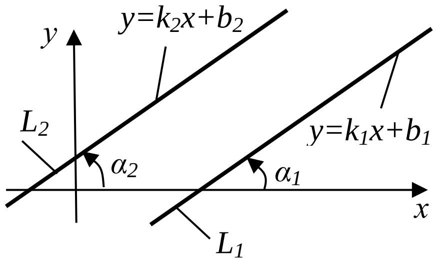


Рис. 1.23 (а)

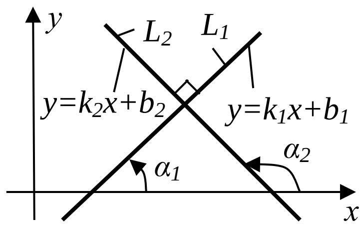


Рис. 1.23 (б)

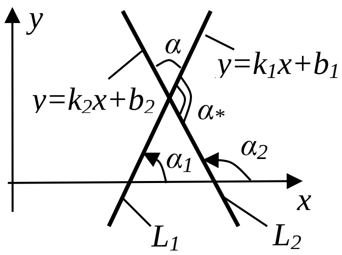


Рис. 1.23 (в)

Тогда $\alpha_1=\alpha_2$, а значит, $k_1=k_2$, ибо $k_1=tg\alpha_1$, а $k_2=tg\alpha_2$. Обратно, если $k_1=k_2$, то $tg\alpha_1=tg\alpha_2$, откуда следует, что $\alpha_1=\alpha_2$, или что α_1 отличается от α_2 на угол, кратный 180^0. В любом из этих двух случаев прямые L_1 и L_2 одинаково наклонены к оси ox, а значит между собой параллельны.

Таким образом, *прямые* $y=k_1x+b_1$ *и* $y=k_2x+b_2$ *параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты*:

$$k_1=k_2 \tag{6.6}$$

Условие (6.6) называется *условием параллельности прямых*.

<u>Пример 5</u>. Показать, что прямые $y=\frac{1}{2}x$ и $x-2y+4=0$ параллельны.

<u>Решение</u>. Из уравнения первой прямой $y=\frac{1}{2}x$ сразу следует, что ее угло-

вой коэффициент $k_1 = \frac{1}{2}$. Чтобы получить угловой коэффициент k_2 другой прямой $x - 2y + 4 = 0$, нужно привести её уравнение к виду $y = kx + b$ - к виду с угловым коэффициентом. Делая это, получаем $y = \frac{1}{2}x + 2$, откуда следует: $k_2 = \frac{1}{2}$. Так как $k_1 = k_2$, то указанные прямые действительно параллельны.

б) Пусть прямые L_1 и L_2 перпендикулярны (рис. 1.23 (б)). Тогда углы их наклона к оси *ox* отличаются один от другого на прямой угол. То есть $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. А значит, в любом случае имеет место равенство: $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}$. Но тогда

$$k_2 = tg\alpha_2 = tg(\alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}) = -Ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1} = -\frac{1}{k_1}$$

То есть получаем:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{6.7}$$

Условие (6.7) и является *условием перпендикулярности прямых*.

<u>Пример 6</u>. Подтвердить перпендикулярность прямых $x - 3y = 4$ и $3x + y - 1 = 0$.

<u>Решение.</u> Преобразуя уравнения этих прямых к виду $y = kx + b$ (к виду с угловым коэффициентом), находим:

$$x - 3y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}; \qquad k_1 = \frac{1}{3}$$
$$3x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -3x + 1; \quad k_2 = -3.$$

Так как условие (6.7) выполняется, то указанные прямые перпендикулярны.

в) Пусть теперь прямые L_1 и L_2 составляют между собой угол α (рис. 1.23 (в)), отличный от прямого. Впрочем, углом между прямыми можно, при желании, считать и угол α_*. Но так как в сумме α и α_* составляют, очевидно, 180°, то зная α, можно найти и α_*: $\alpha_* = 180^\circ - \alpha$.

Угол α, согласно рис. 1.23 (в), представляет собой разность углов α_1 и α_2. То есть или $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, или $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Найдя α_1 и α_2 по тангенсам этих углов (по угловым k_1 и k_2 прямых L_1 и L_2), найдем и α.

<u>Задача 4</u>. Пусть $ax + by + c = 0$ – уравнение некоторой прямой L на плоскости, заданное в общем виде. И пусть $M_0(x_0; y_0)$ – некоторая точка плоскости, не лежащая на этой прямой. Требуется найти расстояние d от указанной точки до указанной прямой.

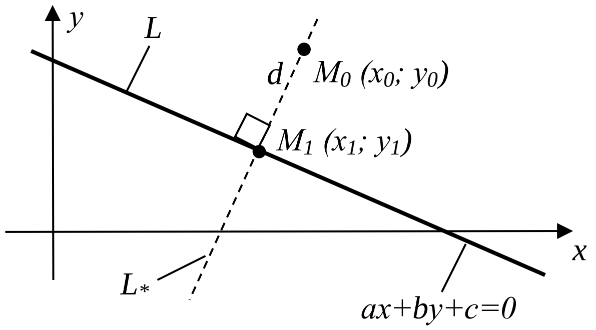


Рис. 1.24

Решение. Рассмотрим рис. 1.24. Если данная прямая L горизонтальна или вертикальна, то решение поставленной задачи труда, естественно, не представляет. Поэтому будем считать, что L – наклонная прямая. В этом случае задачу можно решить по следующей схеме:

1. Из заданного уравнения $ax+by+c=0$ прямой L находим ее угловой коэффициент k.

2. Находим $k_*=-\frac{1}{k}$ – угловой коэффициент прямой L_*, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно прямой L.

3. Используя равенство (6.3), записываем уравнение прямой L_*:

$$y-y_0=k_*(x-x_0)$$

4. Решаем систему

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ y-y_0=k_*(x-x_0) \end{cases}$$

из уравнений прямых L и L_* и находим точку $M_1(x_1;\, y_1)$ – точку их пересечения.

5. Наконец, используя формулу (2.1) для нахождения расстояния между двумя точками плоскости, находим искомое расстояние $d=|M_0M_1|$.

Если осуществить приведенную выше схему (попробуйте сделать это самостоятельно), то в итоге получается следующая простая формула:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{6.8}$$

Это и есть формула расстояния от заданной точки $M_0(x_0;y_0)$ до заданной прямой $ax+by+c=0$ (рис.1.24). Кстати, эта формула оказывается справедливой не только для наклонной, но и для горизонтальной и для вертикальной прямой (убедитесь в этом самостоятельно).

Пример 7. В треугольнике ABC с вершинами A(-3;0), B(2;5), C(3;2) найти длину h высоты BD.

Решение. Искомая высота h есть расстояние от точки B до прямой L, проходящей через точки A и C. Чтобы найти это расстояние, нужно сначала найти уравнение этой прямой L. Его найдем, используя уравнение (6.5) прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \quad \frac{x+3}{3+3}=\frac{y-0}{2-0}\Rightarrow\frac{x+3}{6}=\frac{y}{2}\Rightarrow x-3y+3=0.$$

Итак, $x-3y+3=0$ – уравнение прямой AC (в общем виде). А теперь по формуле (6.8) найдем расстояние h от точки B до этой прямой:

$$h=\frac{|2-3\cdot 5+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\approx 3{,}16.$$

6. 2. Некоторые важнейшие кривые на плоскости

К числу важнейших и наиболее простых кривых линий на плоскости относятся линии со следующими уравнениями:

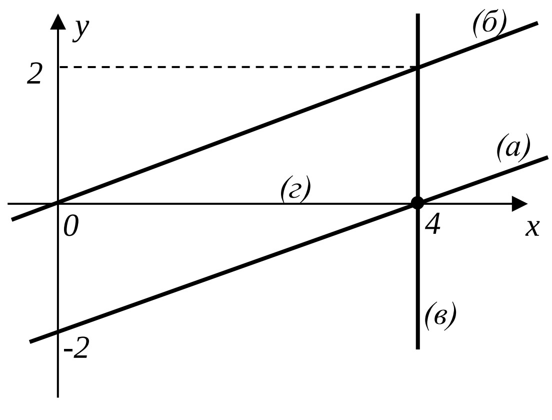
1. Парабола $y=ax^2+bx+c$.
2. Гипербола $y=\dfrac{k}{x}$.
3. Окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.
4. Показательная кривая $y=a^x$. Важнейшая из них – экспонента $y=e^x$.
5. Логарифмическая кривая $y=\log_a x$. Важнейшая из таких кривых – кривая натурального логарифма $y=\ln x$.
6. Тригонометрические кривые: синусоида $y=\sin x$; косинусоида $y=\cos x$; тангенсоида $y=tgx$; котангенсоида $y=ctgx$.
7. Обратные тригонометрические кривые: $y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=arctgx$; $y=arcctgx$ (кривые без специальных названий).

Вид всех этих кривых известен из школьного курса математики, поэтому на них останавливаться не будем.

Упражнения

1. Постройте прямые: а) $x-2y=4$; б) $x-2y=0$; в) $x-4=0$; г) $2y=0$.

<u>*Ответ:*</u> - см. рис. ниже.



2. Напишите уравнение прямой, пересекающей ось ox в точке $x=3$ и составляющей с этой осью угол 120°. Найдите точку A пересечения этой прямой с осью oy.

<u>*Ответ*</u>: $y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$; $A(0;3\sqrt{3})$.

3. Напишите уравнение прямой, пересекающей оси координат в точках $x=4$ и $y=2$. Найдите угол α между прямой и осью *ox*.

Ответ: $x+2y-4=0$; $\alpha=153°26'$.

4. Напишите уравнения прямых, проходящих через начало координат: а) параллельно прямой $2x+y=2$; б) перпендикулярно этой прямой.

Ответ: а) $y=-2x$; б) $y=\frac{1}{2}x$.

5. Покажите, что прямые $2x-3y=6$ и $4x-6y=25$ параллельны, и найдите расстояние h между ними.

Ответ: $h=\frac{\sqrt{13}}{2}\approx 1{,}803$.

6. Даны прямая $x+2y-4=0$ и точка $A(5;\ 7)$. Найдите проекцию B точки A на данную прямую.

Ответ: $B(2;\ 1)$.

7. Напишите уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(1;2)$.

Ответ: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ и $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

8. Покажите, что уравнение $x^2+y^2-4x-14y+28=0$ является уравнением окружности. Найдите её центр и радиус.

Ответ: центр $M_0(2;\ 7)$, радиус $R=5$.

9. Найдите расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2-8x-4y=0$ и $x^2+y^2+6x-8y=0$.

Ответ: $\sqrt{53}$.

10. Найдите а) центр; б) радиус; в) уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(4;3)$, $B(-3;2)$, $C(1;-6)$.

Ответ: а) центр $M_0(1;\ -1)$; *б*) радиус $R=5$; в) уравнение $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

11. Определите тип кривых а) $x=-\sqrt{-y}$; б) $y=-\sqrt{-x}$ и постройте эти кривые.

Ответ: а) левая половина параболы $y=-x^2$; б) нижняя половина параболы $x=-y^2$.

§7. Геометрическое представление решений неравенств и систем неравенств

Как мы уже знаем из §3, уравнение $F(x;\, y) = 0$ в обычных случаях (кроме вырожденных) определяет на плоскости xoy некоторую линию L, координаты $(x;\, y)$ точек которой этому уравнению удовлетворяют. Для координат $(x;\, y)$ всех других точек плоскости xoy, не лежащих на линии L, будет либо выполняться неравенство $F(x;\, y) \succ 0$, либо неравенство $F(x;\, y) \prec 0$, либо выражение $F(x;\, y)$ не будет существовать.

Возникает естественный вопрос: как рассортировать эти точки? То есть где именно на плоскости xoy будут находиться точки, координаты которых удовлетворяют, например, неравенству $F(x;\, y) \succ 0$? Или неравенству $F(x;\, y) \prec 0$?

Начнем с рассмотрения этих вопросов для простейших, очевидных случаев.

1) Неравенствам $x \succ 0$ и $x \prec 0$ удовлетворяют, очевидно, координаты $(x;\, y)$ точек правой и левой полуплоскости соответственно. Для точек оси oy, разделяющей правую и левую полуплоскости, имеет место уравнение $x = 0$, которое является уравнением этой оси oy.

2) Неравенствам $y \succ 0$ и $y \prec 0$ удовлетворяют, очевидно, координаты $(x;\, y)$ точек верхней и нижней полуплоскости соответственно. Для точек оси ox, разделяющей верхнюю и нижнюю полуплоскости, имеет место уравнение $y = 0$, которое является уравнением этой оси.

3) Неравенствам $x \succ a$ и $x \prec a$ соответственно удовлетворяют, очевидно, координаты $(x;\, y)$ точек, находящихся правее вертикальной прямой, имеющей уравнение $x = a$, и точек, находящихся левее этой прямой.

4) Неравенствам $y \succ b$ и $y \prec b$ соответственно удовлетворяют, очевидно, координаты $(x;\, y)$ точек, находящихся выше горизонтальной прямой, имеющей уравнение $y = b$, и точек, находящихся ниже этой прямой.

5) Теперь рассмотрим линейные неравенства вида $y \succ kx + b$ и $y \prec kx + b$. Вспоминая, что $y = kx + b$ - уравнение наклонной прямой L, делящей плоскость xoy на две полуплоскости – верхнюю и нижнюю (рис. 1.25), приходим к очевидному выводу: неравенству $y \succ kx + b$ удовлетворяют точки верхней полуплоскости, а неравенству $y \prec kx + b$ - нижней.

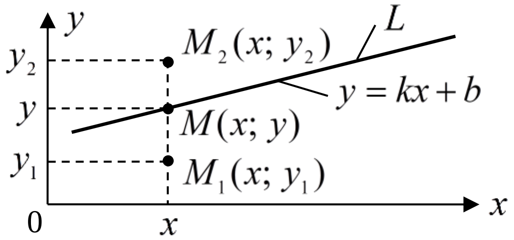


Рис. 1.25

$y = kx + b$

$y_1 \prec kx + b$

$y_2 \succ kx + b$

Таким образом, из рассмотренных выше случаев (1) – (5) получаем следующий вывод. Если в уравнении любой прямой (вертикальной $x = a$, горизонтальной $y = b$, наклонной $y = kx + b$) заменить знак равенства на знак неравенства, то получающемуся неравенству будут удовлетворять координаты $(x;\, y)$ всех точек одной из тех двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит плоскость. Какой именно из полуплоскостей = это зависит от знака неравенства.

6) Наконец, рассмотрим линейные неравенства с двумя переменными x и y общего вида:

$$a)\ ax+by+c \succ 0 \ \text{ и } \ б)\ ax+by+c \prec 0. \qquad (7.1)$$

Так как равенство $ax+by+c=0$ - это уравнение прямой на плоскости при любых значениях числовых параметров a, b и c, то переход от этого уравнения к неравенствам (7.1) означает переход с прямой на одну из тех полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю плоскость xoy. Чтобы выяснить, на какую именно, есть два способа.

Способ первый. Он состоит в преобразовании неравенства (7.1) к одной из тех форм (1) – (5), которые были рассмотрены выше. После этого искомая полуплоскость становится очевидной.

Способ второй. Следует построить прямую $ax+by+c=0$. Затем взять пробную точку $M(x;\, y)$ в одной из полуплоскостей, на которые эта прямая разобьет плоскость xoy, и подставить координаты $(x;\, y)$ этой точки в данное неравенство. Если неравенство удовлетворится, то оно будет удовлетворяться и для всех точек выбранной полуплоскости. А если не удовлетворится, то оно будет удовлетворяться в другой полуплоскости.

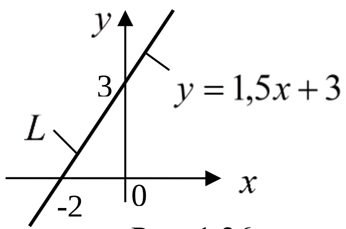


Рис. 1.26

Примечание. Нестрогие неравенства вида

$$a)\ ax+by+c \ge 0 \ \text{ и } \ б)\ ax+by+c \le 0. \qquad (7.2)$$

будут выполняться в одной из полуплоскостей, включая саму прямую.

Пример 1. Выяснить, для каких $(x;\, y)$ будет выполняться неравенство $3x-2y+6 \succ 0$.

Решение.

Первый способ. Преобразуем данное неравенство:

$$3x-2y+6 \succ 0; \ \Leftrightarrow \ 2y \prec 3x+6; \ \Leftrightarrow \ y \prec 1{,}5x+3.$$

Построим прямую L, имеющую уравнение $y=1{,}5x+3$ (построим по точкам ее пересечения с осями координат) – рис. 1.26. Неравенство $y \prec 1{,}5x+3$, а, значит, и исходное неравенство $3x-2y+6 \succ 0$, выполняется в полуплоскости ниже прямой L.

Второй способ. Построим прямую $3x-2y+6=0$ (это та же прямая L), и возьмем в качестве пробной точки какую-либо точку, не лежащую на этой прямой. Например, точку $O(0;0)$, лежащую ниже прямой L. Координаты точки $O(0;0)$ удовлетворяют данному неравенству $3x-2y+6 \succ 0$. Значит, это неравенство выполняется в полуплоскости ниже прямой L.

<u>*Пример 2*</u>. Выяснить, для каких $(x; y)$ будет выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} 3x-2y+6 \succ 0 \\ x \prec 0 \\ y \succ 0 \end{cases}$$

<u>*Решение*</u>. Используя результат, полученный в предыдущем примере, приходим к очевидному выводу: данная система выполняется внутри треугольника, ограниченного прямой L и осями координат (рис. 1.26).

<u>*Пример 3*</u>. Выяснить, для каких $(x; y)$ будет выполняться неравенство $x^2+y^2-9 \le 0$.

<u>*Решение*</u>. Преобразуем данное неравенство к виду: $x^2+y^2 \le 3^3$. А теперь рассмотрим уравнение $x^2+y^2=3^3$. Это – уравнение окружности с центром в начале координат и с радиусом $R=3$ (см. формулу 3.10 или формулу 4.2). Для координат $(x; y)$ любой точки M, лежащей на этой окружности, выполняется равенство: $x^2+y^2=3^3$. А для координат $(x; y)$ любой точки N, лежащей внутри окружности, то есть ближе к ее центру (см. рис.1.27), будет, очевидно, выполняться строгое неравенство $x^2+y^2 \prec 3^3$. То есть неравенство $x^2+y^2 \le 3^3$, а, значит, и исходное неравенство $x^2+y^2-9 \le 0$, будет выполняться для всех точек круга, ограниченного окружностью L, включая и саму эту окружность.

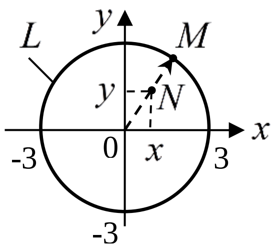


Рис. 1.27

Упражнения

1. Найти и изобразить на плоскости xoy множество всех решений следующих неравенств:

а) $x+1 \prec 0$; б) $y-2 \ge 0$; *в*) $y-x \succ -1$; *г*) $y+x \le 3$.
д) $x-2y+4 \succ 0$; *е*) $x-2y \le -4$.

2. Найти и изобразить на плоскости xoy множество всех решений следующих систем неравенств:

а) $\begin{cases} x-y \succ 0 \\ y+x \succ 0; \\ x \ge -1 \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} x+y \le 3 \\ y \ge 0 \quad ; \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} x \prec y^2 \\ x \succ 0 \; ; \\ y \prec 2 \end{cases}$ *г*) $\begin{cases} x^2+y^2 \prec 2 \\ y \prec x^2 \\ x \succ 0 \end{cases}$.

ГЛАВА 2
Линейная алгебра

Слово «алгебра» всем известно из школы. Это раздел математики, изучающий функции, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств.

Функции, уравнения и неравенства разделяют на: *а*) линейные; *б*) нелинейные. В линейную функцию $y = kx + b$ переменные x и y входят *линейно* (в первой степени) без их произведений. Аналогично и в линейные уравнения и неравенства все неизвестные входят исключительно в *первой степени* без своих произведений. А нелинейные функции, уравнения и неравенства – это все остальные.

Например:

а) $2x + 1 = 0$ - линейное уравнение с одной неизвестной x.

б) $2x + 1 \succ 0$ - линейное неравенство с одной неизвестной x.

в) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ - система линейных уравнений с двумя неизвестными x и y.

г) $\begin{cases} x + 3y \prec -1 \\ 2x - y \succ 5 \end{cases}$ - система линейных неравенств с двумя неизвестными x и y.

д) $x^2 - 3x - 4 = 0$ - нелинейное (квадратное) уравнение с неизвестной x.

е) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x^2 + 5y - 1 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ - система трех уравнений с двумя неизвестными x и y, в которой первое и третье уравнения линейные, а второе уравнение нелинейное.

Из всех функций, уравнений, неравенств и их систем линейные являются наиболее простыми и в то же время наиболее востребованными. Вслед за древнегреческим философом Эпикуром «поблагодарим мудрую природу за то, что она сделала всё ненужное сложным и всё сложное ненужным».

Раздел математики, в котором изучаются линейные функции, уравнения, неравенства и их системы, называется «**линейная алгебра**».

Развитие методов решения систем линейных уравнений привело еще и к таким понятиям, как *матрицы* и *определители*. Поэтому они тоже являются объектами изучения в линейной алгебре. Обо всем этом и будет идти речь в этой главе.

§ 1. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса.

1.1 Общие понятия и определения

Наряду с решением отдельных уравнений решение различного рода систем уравнений – классическая математическая проблема. В данном параграфе мы остановимся на простейших из систем – *на системах линейных уравнений*. Именно они чаще других находят применение в научных и практических задачах.

Системой линейных уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ -------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

В этой системе m уравнений с n неизвестными (x_1; x_2; …x_n). А линейными уравнения, входящие в систему (1.1), называются потому, что неизвестные (x_1; x_2; …x_n) этих уравнений входят в них в первой степени (линейно). То есть аналогично тому, как входят в линейную функцию $y = kx + b$ величины x и y.

Систему (1.1) можно записать и в сжатой (сокращенной) форме, используя знак суммирования $\sum$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2,\ldots\ m) \qquad (1.2)$$

Числа a_{ij} (i = 1, 2,… m; j = 1, 2,… n) – это заданные коэффициенты при неизвестных x_j (j = 1, 2,… n); числа b_i (i = 1, 2,… m) – так называемые свободные члены системы, которые тоже заданы.

Определение. *Любой набор значений неизвестных* (x_1; x_2; ...x_n)*, удовлетворяющих всем уравнениям системы, называется ее решением (частным решением). Система считается решенной, если найдены все ее частные решения (или доказано, что никаких решений у нее нет).*

В частности, если все свободные члены системы {b_1; b_2; …b_m} равны нулю, то система (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

и называется *линейной однородной* системой (а все прочие системы (1.1) являются *линейными неоднородными*).

Любая линейная однородная система по крайне мере одно частное решение заведомо имеет. И это решение очевидно: {x_1= 0; x_2= 0; …x_n= 0}. Это так называемое нулевое (*тривиальное*) решение. Тривиальное решение у однородной системы (1.3) может оказаться единственным. Но не исключено, что у неё есть и другие (нетривиальные) решения. Сколько всего решений у различных систем линейных уравнений может быть и как их найти – об этом ниже.

1.2. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Детальное рассмотрение систем линейных уравнений начнем с наиболее простой из них – с системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. То есть с системы вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1.4}$$

Сколько решений $(x;\ y)$ у этой системы может в принципе быть, и как их найти? Ответ на этот вопрос можно получить, рассмотрев процесс решения системы.

Решать и анализировать систему (1.4) наиболее удобно самым очевидным и хорошо известным всем школьникам путем – последовательным исключением неизвестных (методом Гаусса). Этот метод состоит в следующем. Выразив из первого уравнения системы (3.7) одну неизвестную через другую (например, y через x) и подставив ее во второе уравнение, после приведения подобных получим линейное уравнение вида $ax = b$ с одной неизвестной x. При этом возможны три варианта:

1) $a \neq 0$. Тогда из уравнения $ax = b$ однозначно находится неизвестная x: $x = \frac{b}{a}$, а затем по этой x из первого уравнения системы однозначно находится и неизвестная y. В итоге получим единственное решение $(x;\ y)$ системы (1.4).

2) $a = 0$, $b \neq 0$. Тогда уравнение $ax = b$ оказывается противоречивым (не имеет решений). А вместе с ним не имеет решений и система (1.4).

3) $a = 0$, $b = 0$. Тогда уравнение $ax = b$ принимает вид $0 \cdot x = 0$ и удовлетворяется при любых x. При этом для каждого конкретного значения x из первого уравнения системы найдется и соответствующее ему конкретное значение y. В итоге будем иметь бесчисленное множество $(x;\ y)$ системы (1.4).

Итак, система (1.4) в принципе может:

а) иметь одно решение;

б) не иметь решений;

в) иметь бесчисленное множество решений.

Первый из этих случаев (единственное решение) осуществляется как правило. А второй и третий – как исключения.

Действительно, лишь когда в уравнении $ax = b$ величина a окажется равной нулю, будет иметь место либо второй, либо третий случай. Во всех остальных вариантах, когда $a \neq 0$, будет иметь место первый случай.

Полученные выше выводы имеют и ясную геометрическую интерпретацию. Действительно, каждое из двух уравнений системы (1.4) представляет собой уравнение вида $ax + by + c = 0$. То есть каждое из них представляет собой уравнение некоторой прямой на плоскости, где $(x;\ y)$ - координаты точек этой прямой. Значит, решая систему (1.4), мы определяем координаты $(x;\ y)$ общих точек этих двух прямых, то есть точек их пересечения. Но таких точек у двух прямых, очевидно, может быть:

а) одна (когда прямые пересекаются);

б) ни одной (когда прямые параллельны);

в) бесчисленное множество (когда прямые совпадают).

Соответственно этим случаям система (1.4) будет иметь или одно решение, или ни одного, или бесчисленное множество. При этом для произвольно взятых прямых случай (а) будет, очевидно, осуществляться как правило, а случаи (б) и, особенно, (в) – как исключение.

Пример 1. Найти точки пересечения прямых $x-y=2$ и $x-5y+6=0$.

Решение. Для нахождения этих точек составим и решим систему из уравнений указанных прямых:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x-5y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ y+2-5y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ -4y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}.$$

Как выяснилось, данная система имеет единственное решение ($x=4\,;y=2$). Значит, указанные выше прямые пересекаются в единственной точке – точке $A(4;2)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}5x-y=2 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

и дать полученному результату геометрическую интерпретацию.

Решение.

$$\begin{cases} 1{,}5x-y=2 \\ 3x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1{,}5x-2 \\ 3x-2(1{,}5x-2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1{,}5x-2 \\ 4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

– нет решений, ибо последнее уравнение остается неверным независимо от значений неизвестных *x* и *y*. Геометрически полученный результат означает, что прямые с уравнениями $1{,}5x-y=2$ и $3x-2y=2$ параллельны. И это действительно так, так как их угловые коэффициенты одинаковы: $k_1=k_2=1{,}5$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}5x-y=1 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

и дать полученному результату геометрическую интерпретацию.

Решение.

$$\begin{cases} 1{,}5x-y=1 \\ 3x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1{,}5x-1 \\ 3x-2(1{,}5x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1{,}5x-1 \\ 2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1{,}5x-1 \\ x-\text{\textit{любое}} \end{cases}$$

Мы получили бесчисленное множество решений. Действительно, второе уравнение системы, из которого должно было быть определено значение x, привело к числовому равенству 2=2, верному независимо от x (x сократилось и исчезло из уравнения). Следовательно, величина x может быть любой. А другая неизвестная y, если выбрано значение x, найдется по первому уравнению $y = 1{,}5x - 1$ В итоге получаем бесчисленное множество решений системы. Например, таких:

$$1)\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases};\ 2)\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0{,}5 \end{cases};\ 3)\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases};\ \ldots$$

Все эти решения являются координатами точек пересечения тех двух прямых, уравнения которых входят в исходную систему. В силу бесчисленного количества таких точек указанные прямые совпадают.

Да, но тогда должны совпадать и их уравнения! И это действительно так: умножая на 2 обе части уравнения $1{,}5x - y = 1$ первой прямой, получим равносильное уравнение $3x - 2y = 2$, полностью совпадающее с уравнением второй прямой.

1.3. Квадратные системы линейных уравнений произвольного порядка

Вопрос о решении системы (1.4), являющейся простейшей из систем линейных уравнений, мы исчерпали. Перейдем теперь к общему случаю (1.1), но пока только при условии, что $m = n$, то есть при условии, что количество уравнений системы равно количеству ее неизвестных. Иначе говоря, перейдем к квадратным системам произвольного размера $n \times n$ (n = 3, 4,…), то есть *к системам n-го порядка* вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ---------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.5}$$

Заметим, что при небольших n (при небольших значениях порядка системы (1.5)) неизвестные системы можно обозначать не (x_1; x_2; …x_n), а, например, (x; y; z;…). Но это, естественно, не принципиально.

Систему (1.5) произвольного порядка n, как и простейшую систему (1.4) второго порядка, наиболее естественно и просто решать методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). А именно, из первого уравнения системы выражаем какую-либо неизвестную, например x_1, через остальные неизвестные (x_2; x_2; …x_n)

$$x_1 = a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1$$

и подставляем ее во все остальные уравнения системы (второе, третье, … n-е). В итоге во всех уравнениях системы, начиная со второго, будет уже на одну неизвестную (неизвестную x_1) меньше. Далее, из второго уравнения выражаем следующую неизвестную, например x_2, через оставшиеся неизвестные (x_3; x_4; $\dots x_n$)

$$x_2 = a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \dots + a'_{2n}x_n + b'_2$$

и подставляем ее во все ниже лежащие уравнения (третье, четвертое, … n-е). Ну и так далее до конца. В итоге, если не возникнет сбоев в этой схеме (каких – скажем ниже) мы преобразуем систему (1.5) к следующему равносильному треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n + b'_1 \\ x_2 = a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \dots + a'_{2n}x_n + b'_2 \\ ------------------- \\ x_{n-1} = a'_{n-1,n}x_n + b'_{n-1} \\ x_n = b'_n \end{cases} \tag{1.6}$$

Преобразование квадратной системы (1.5) к равносильной ей треугольной системе (1.6) называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Примечание. Мы указали лишь идею прямого хода метода Гаусса, целью которого является последовательное исключение неизвестных из уравнений системы. На практике же этой цели можно добиться и несколько иначе, причем значительно проще.

Например, чтобы исключить неизвестную x_1, содержащуюся в первом уравнении системы (1.5), из второго уравнения, можно обе части первого уравнения разделить на a_{11}, затем обе его части умножить на $-a_{21}$, и после этого первое уравнение сложить со вторым. В итоге неизвестная x_1 во втором уравнении исчезнет (исключится). Аналогично с помощью первого уравнения можно исключить неизвестную x_1 и из остальных уравнений системы (третьего, четвертого, …, последнего). Далее, по аналогичной схеме, с помощью второго уравнения можно исключить из всех нижележащих уравнений неизвестную x_2. И так далее до конца. В итоге мы опять придем к треугольной системе типа (1.6), но только существенно быстрее.

Кстати, неизвестную, исключаемую из других уравнений системы, часто называют *опорной неизвестной*, а уравнение, содержащее эту опорную неизвестную и с помощью которого исключается эта опорная неизвестная из других уравнений системы, называется *опорным уравнением*. При осуществлении прямого хода метода Гаусса и опорное уравнение, и опорную неизвестную удобно, для наглядности, подчеркивать.

И еще одно существенное замечание: для облегчения работы в качестве опорной неизвестной, выбираемой на каждом этапе прямого хода метода Гаусса, удобно выбирать ту, перед которой нет числового коэффициента – только знак (+) или (–) (если, конечно, такая неизвестная есть). В этом случае треугольная система типа (1.6) будет иметь другой порядок расположения неизвестных, что, конечно, не принципиально.

А вообще-то лучше всего в качестве опорной неизвестной выбирать ту, коэффициент при которой максимален по модулю - в этом случае погрешности от округлений при текущих вычислениях будут меньше влиять на итоговые погрешности в найденных значениях неизвестных. Особенно важным является это замечание, если коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы получены опытным путем и, следовательно, имеют свои погрешности.

Пойдем далее. Будем считать, что мы (в той или иной форме) реализовали прямой ход метода Гаусса, сбоев в этой работе не было (осуществился так называемый *стандартный вариант*), и нам удалось привести исходную систему (1.5) к равносильной системе типа (1.6) (или такой же, как (1.6), системе, только с другим порядком расположения неизвестных). После этого система (1.6) решается уже просто с помощью *обратного хода метода Гаусса.*

Суть его в следующем. Последнее уравнение $x_n = b'_n$ сразу дает значение неизвестной x_n. Далее, из предпоследнего уравнения, используя найденное значение x_n, вычисляем значение x_{n-1}. Потом из третьего снизу уравнения, используя найденные x_n и x_{n-1}, находим x_{n-2}. Двигаясь таким образом снизу вверх и дойдя до первого уравнения, последовательно определим все неизвестные системы (1.6), а значит, и неизвестные равносильной ей системы (1.5). Набор найденных значений всех неизвестных оказывается единственным, а, значит, единственным окажется и полученное в итоге решение $\{x_1; x_2; \ldots x_n\}$ системы (1.5).

Все это будет в стандартном варианте. Но возможны и два варианта нестандартных, когда появляются сбои в изложенной выше схеме.

Нестандартный вариант 1. На каком-то этапе осуществления прямого хода метода Гаусса в каком-то из уравнений системы (или даже в нескольких уравнениях) могут исчезнуть (сократиться) все неизвестные, кроме свободных от неизвестных чисел, которые образуют неверное равенство типа $0=1$, $2=5$ и т.д. Так как в таком уравнении нет неизвестных, то и невозможно сделать его верным за счет какого-то подбора неизвестных. Система, содержащая хотя бы одно такое уравнение, естественно, не имеет решений. А значит, не будет иметь решений и исходная система (1.5).

Нестандартный вариант 2. Этот вариант, в отличие от первого нестандартного варианта, будет иметь место, если на каком-то этапе прямого хода метода Гаусса в каком-то из уравнений системы все его члены сократятся, и останется верное числовое равенство $0=0$. Это, кстати, может случиться и с несколькими уравнениями системы. Отбросив их, мы получим систему, в которой количество уравнений станет меньше количества неизвестных (получим так называемую *недоопределенную систему*). Кстати, если в системе окажется два или более одинаковых уравнения, то отбросив из дублирующих друг друга уравнений все, кроме одного, мы также получим недоопределенную систему.

Завершив прямой ход метода Гаусса в недоопределенной системе, в последнем уравнении системы мы будем иметь не одну неизвестную (как это получается в стандартном варианте (1.6)), а две или более. Это последнее уравнение имеет бесчисленное множество решений, ибо в нем все неизвестные, кроме одной, можно задать произвольно (это – так называемые *свободные неизвестные*), а оставшаяся неизвестная (*связанная*) уже однозначно выражается через свободные неизвестные. После этого в процессе обратного хода метода Гаусса через свободные неизвестные однозначно выражаются и остальные неизвестные системы (остальные связанные неизвестные). В итоге мы получим бесчисленное множество решений исходной системы.

Подведем итог. Квадратные системы линейных уравнений вида (1.5) при любом их порядке n ($n = 2,3,\ldots$) могут в принципе:

1) иметь единственное решение (стандартный вариант);
2) не иметь решений (нестандартный вариант 1);
3) иметь бесчисленное множество решений (нестандартный вариант 2).

Стандартный вариант на практике встречается как правило, нестандартные – как исключения.

<u>*Пример 4*</u>. Решить квадратную систему 3-го порядка

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$$

<u>*Решение*</u>. Применим метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса) по схеме, указанной в примечании выше. Опорное уравнение и опорную неизвестную на каждом шаге прямого хода этого метода будем подчеркивать.

а) Прямой ход:

$$\begin{cases} \underline{2x-3y+\underline{z}=2} \quad (4) \quad (3) \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 9x-7y=3 \\ 10x-8y=2 \quad (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ \underline{-x+\underline{y}=1} \quad (8) \\ 10x-8y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ -x+y=1 \\ 2x=10 \end{cases}$$

б) Обратный ход:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ -x+y=1 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ y=1+x=1+5=6 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2+3y-2x \\ y=6 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \\ z=10 \end{cases}$$

Итак, у данной системы оказалось единственное решение ($x=5$; $y=6$; $z=10$). Если подставить эти значения неизвестных в уравнения исходной системы, то можно убедиться в том, что все уравнения превращаются в верные числовые равенства. То есть решение системы найдено верно.

<u>*Пример 5*</u>. Решить систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+4y+6z=3 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$$

Решение.

а) Прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} \underline{\underline{x}+2y+3z=4} \quad (-2) \quad (-3) \\ 2x+4y+6z=3 \\ 3x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 0=5 \\ -5y-10z=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

По второму уравнению получившейся системы ясно, что система не имеет решений. Это и отмечено значком $\varnothing$ («нет решений»).

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y-5z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$$

Решение. Данная система 3-го порядка однородная, так как столбец ее свободных членов состоит из одних нулей. Значит, по крайней мере, одно решение она заведомо имеет – это тривиальное решение ($x=0$; $y=0$; $z=0$). Поищем возможные другие ее решения (мы говорим осторожно – поищем, а не найдем, ибо их может и не быть). Применим метод Гаусса.

а) Прямой ход:

$$\begin{cases} \underline{2x-\underline{y}+3z=0} \quad (2) \quad (1) \\ x+2y-5z=0 \\ 3x+y-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 5x+z=0 \\ 5x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 5x+z=0 \end{cases}.$$

б) Обратный ход:

$$\begin{cases} z=-5x \\ y=2x+3z=-13x \\ x-\text{любое число} \\ \ (x-\text{свободная неизвестная}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\text{любое число} \\ \ (\text{свободная неизвестная}) \\ y=-13x \\ z=-5x \end{cases}$$

Таким образом, у системы оказалось бесчисленное множество решений. В их число при значении $x=0$ свободной неизвестной входит и тривиальное решение ($x=0$; $y=0$; $z=0$).

Кстати, найденные решения можно представить и в более удобной симметричной форме, если ввести обозначение $x=C$ ($C-$ произвольная константа). Тогда получим окончательно

$$\begin{cases} x = C \\ y = -13C \\ z = -5C \end{cases} \quad (C \text{ – произвольная константа})$$

Вопрос о квадратных системах линейных уравнений мы исчерпали. Перейдем теперь к общему случаю (1.1), когда в системе любое число m уравнений и любое число n неизвестных, причем $m \neq n$. То есть перейдем к так называемым *прямоугольным системам*. Естественно, следует рассмотреть и случай $m > n$, и случай $m < n$.

1.4. Переопределенные системы

Таковыми называются системы (1.1) в случае, когда $m > n$ (когда количество уравнений больше количества неизвестных). Переопределенные системы, как правило, не имеют решений. Но, как исключение, они могут иметь единственное решение и даже бесчисленное множество решений.

Проиллюстрируем это на примере трех уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases} \tag{1.7}$$

Решая эту систему, мы фактически ищем координаты (x; y) точек, в которых пересекаются сразу три прямые. Но таких точек у трех произвольных прямых, скорее всего, не будет. А значит, скорее всего, система (1.7) не будет иметь решений. Однако все-таки возможен случай, когда все три заданные прямые пересекаются в одной точке. Тогда система (1.7) будет иметь единственное решение (x; y), определяющее координаты этой точки.

Более того, все три прямые могут и совпадать! Тогда у них бесчисленное количество общих точек, а значит, в этом случае система (1.7) будет иметь бесчисленное множество решений. Этими решениями будут координаты (x; y) точек всех трех совпадающих прямых.

Пример 7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$$

Решение. Данная система является переопределенной (в ней три уравнения и лишь две неизвестные). Поэтому следует ожидать, что она, скорее всего, не будет иметь решений. Так ли это, выясним с помощью метода Гаусса:

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+2y=4 \\ x-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x+2y=4} & (-2) \quad (-1) \\ 2x-3y=6 \\ x-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ -7y=-2 \\ -7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

Система действительно не имеет решений, так как два последних ее уравнения противоречат друг другу.

1.5. Недоопределенные системы

Таковыми называются системы (1.1) в случае, когда $m < n$ (когда количество уравнений меньше количества неизвестных). Недоопределенные системы, как правило, имеют бесчисленное количество решений. Но, как исключение, они могут не иметь решений. Вариант единственного решения для таких систем исключается.

Проиллюстрируем сказанное на примере двух уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \tag{1.8}$$

Применяя к ней метод Гаусса, можем с помощью первого уравнения исключить какую-либо неизвестную из второго уравнения системы. Но все равно, вообще говоря, во втором уравнении останутся две неизвестные. Одну из них можно объявить свободной (она может принимать любые значения), тогда другая (связанная) неизвестная однозначно выразится через свободную. А затем из первого уравнения системы (1.8) однозначно выразится через свободную неизвестную и оставшаяся третья неизвестная (тоже связанная). В итоге получим бесчисленное количество решений недоопределенной системы (1.8).

Впрочем, может случиться и так, что после исключения какой-то неизвестной из второго уравнения системы в нем останется не две, а одна неизвестная. Тогда эта неизвестная найдется однозначно. Но после подстановки этой неизвестной в первое уравнение системы в этом первом уравнении окажется две неизвестных, одну из которых (любую) можно считать свободной. В итоге, очевидно, опять получим бесчисленное множество решений.

Наконец, во втором уравнении системы (1.8) после исключения из него какой-то неизвестной могут заодно исключиться и две другие неизвестные, так что оно примет вид числового равенства: верного типа $2=2$ или неверного типа $5=2$. Второй из этих двух случаев будет, очевидно, означать, что система (1.8) не имеет решений. А первый – что все три неизвестные этой системы должны быть найдены из одного ее первого уравнения, ибо ее второе уравнение – прямое следствие первого. В этом первом уравнении две неизвестные из трех оказываются свободными, одна связанная, а система (3.11) в этом случае, естественно, имеет бесчисленное множество решений.

Ситуацию с решениями недоопределенной системы (3.11) и с их количеством можно очень наглядно проиллюстрировать геометрически. Как известно еще из школьного курса математики, уравнение вида $ax+by+cz+d=0$ является *уравнением плоскости в пространстве*. В нем (x; y; z) – это координаты точек этой плоскости. Поэтому, решая систему (3.11), мы ищем координаты (x; y; z) общих точек (точек пересечения) двух плоскостей в пространстве. Но таких точек (а значит, и решений системы (1.8)) может, в принципе, быть:

а) бесчисленное множество (плоскости пересекаются или совпадают);

б) не быть вообще (плоскости параллельны).

Вариант (а) имеет место как правило, вариант (б) – как исключение.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ 5x+2y+3z=0 \end{cases}$$

Решение. Данная система является недоопределенной (в ней три неизвестные и лишь два уравнения). Поэтому следует ожидать, что она, скорее всего, будет иметь бесчисленное количество решений. Одно из них, в силу однородности системы, уже очевидно – это тривиальное решение ($x=0$; $y=0$; $z=0$). Найдем остальные решения (они обязательно будут):

$$\begin{cases} 3x+2\underline{y}+2z=0 \quad (-1) \\ 5x+2y+3z=0 \quad + \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \textit{свободная неизвестная} \\ z=-2x \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Получили, как и ожидали, бесчисленное количество решений. Их можно представить и в более удобной симметричной форме, если ввести обозначение $\frac{1}{2}x=C$ (C –произвольная константа). Тогда получим окончательно

$$\begin{cases} x=2C \\ y=C \\ z=-4C \end{cases} \quad (C \text{ – произвольная константа})$$

В этом множестве решений, заметим, содержится и тривиальное решение – оно получается при $C=0$.

Общий итог

Любая система линейных уравнений (1.1) (с любым количеством уравнений и любым количеством неизвестных) может, в принципе:

а) иметь единственное решение;

б) не иметь решений;

в) иметь бесчисленное множество решений.

При этом квадратные системы (у которых количество уравнений равно количеству неизвестных) имеют, *как правило*, одно решение.

Системы, у которых количество уравнений больше количества неизвестных (переопределенные системы), *как правило*, не имеют решений.

Системы, у которых количество уравнений меньше количества неизвестных (недоопределенные системы), *как правило*, имеют бесчисленное множество решений.

Окончательно вопрос о количестве решений и о самих решениях каждой конкретной системы может быть выяснен в процессе решения системы. При этом наиболее естественным, универсальным, экономным методом решения систем линейных (да и не только линейных!) уравнений является метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

Однако метод Гаусса определяет лишь *схему* (процесс) решения систем линейных уравнений, но не указывает каких-то готовых формул для искомых неизвестных системы. А такие формулы во многих случаях иметь желательно – чтобы подставить их в какие-то другие формулы, проанализировать их, и т.д. В связи с этим был разработан ряд других, отличных от метода Гаусса, методов решения систем линейных уравнений, приводящих к такого рода формулам. С двумя такими методами сейчас кратко и познакомимся.

§ 2. Понятие о других методах решения систем линейных уравнений

2.1 Метод определителей

Этот метод может быть применен лишь к квадратным системам линейных уравнений, да и то не к любым из них. Рассмотрим его на примере простейшей из квадратных систем – на примере системы размером 2х2:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

а) Умножая обе части первого уравнения этой системы на b_2, а второго на $(-b_1)$ и складывая эти уравнения, получим уравнение–следствие системы (2.1), не содержащее y:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\cdot x=c_1b_2-c_2b_1 \tag{2.2}$$

б) Умножая обе части первого уравнения системы (1.4) на $(-a_2)$, а второго на a_1 и складывая эти уравнения, получим уравнение–следствие системы (2.1), не содержащее x:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\cdot y=a_1c_2-a_2c_1 \tag{2.3}$$

А теперь введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 ;\ \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 ;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 \quad (2.4)$$

Число Δ называется *главным определителем системы* (2.1). Числа (a_1; a_2; b_1; b_2) называются *элементами* этого определителя. Они представляют собой коэффициенты при неизвестных системы (2.1). В исходной записи, согласно (2.4), главный определитель системы имеет вид таблицы с двумя строками и двумя столбцами, ограниченными вертикальными линиями, и раскрывается он по принципу, указанному в (2.4) – по диагоналям.

В (2.4) представлены еще два определителя: Δ_x - *определитель неизвестной x,* и Δ_y - *определитель неизвестной y*. Принцип их формирования очевиден: определитель Δ_x получается из главного определителя Δ заменой его первого столбца (столбца коэффициентов при неизвестной *x* в системе (2.1)) на столбец свободных членов этой системы. А определитель Δ_y получается из главного определителя Δ заменой его второго столбца (столбца коэффициентов при неизвестной *y* в системе (2.1)) на столбец свободных членов этой системы. Раскрываются (вычисляются) определители неизвестных Δ_x и Δ_y по тому же принципу, что и главный определитель системы Δ .

С учетом обозначений (2.4) уравнения – следствия (2.2) и (2.3) системы (2.1) примут вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \quad (2.5)$$

Сразу обратим внимание на то, что система (2.5), являясь следствием исходной системы (2.1), вообще говоря, не равносильна последней. То есть каждое решение системы (2.1) будет и решением системы (2.5), но не каждое решение системы (2.5) обязательно будет решением исходной системы (2.1).

В частности, это совершенно очевидно, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. В этом случае система (2.5) удовлетворяется абсолютно при любых (*x*; *y*). То есть ее решениями являются все точки (*x*; *y*) плоскости *xoy*. А исходная система (2.1), при решении которой определяются точки пересечения некоторых двух прямых на плоскости *xoy*, ни в каком случае не может иметь в качестве своих решений любые точки этой плоскости.

Однако если $\Delta \neq 0$, то при любых возможных значениях Δ_x и Δ_y системы (2.5) и (2.1) равносильны. Действительно, в случае $\Delta \neq 0$ система (2.5) имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases} \quad (2.6)$$

Формулы (2.6), выражающие это решение, называются *формулами Крамера*. Подставляя эти значения x и y в уравнения исходной системы (2.1) (проделайте это самостоятельно), убеждаемся, что оба ее уравнения удовлетворяются. То есть значения (x; y), определяемые по формулам Крамера (2.6), являются решением исходной системы (2.1). И это решение будет для нее единственным, так как оно является единственным и для системы (2.5), являющейся следствием исходной системы.

Если же $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, то системы (2.1) и (2.5) тоже равносильны: обе они не имеют решений. Действительно, в этом случае заведомо не имеет решений система (2.5), а значит, не может их иметь и исходная система (2.1).

Наконец, рассмотрим подробно случай, когда $\Delta = 0$; $\Delta_x = 0$; $\Delta_y = 0$, то есть тот случай, когда системы (2.1) и (2.5) заведомо не равносильны. Итак, пусть одновременно

$$\begin{cases} \Delta \ = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ \Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1 = 0 \\ \Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Отметим, что из четырех элементов (a_1; a_2; b_1; b_2) главного определителя системы Δ хотя бы один заведомо не нуль, иначе в исходной системе (2.1) просто не останется неизвестных и система потеряет смысл. Пусть, например, этот ненулевой элемент есть a_1. Тогда из первого равенства системы (2.7) получаем:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow b_2 = \frac{a_2}{a_1}b_1 \Leftrightarrow b_2 = \lambda b_1 \qquad \left(\lambda = \frac{a_2}{a_1}\right)$$

Подставляя выражения $a_2 = \lambda a_1$ и $b_2 = \lambda b_1$ в два других уравнения системы (2.7), получим:

$$\begin{cases} c_1\lambda b_1 - c_2b_1 = 0 \\ a_1c_2 - \lambda a_1c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(\lambda c_1 - c_2) = 0 \\ a_1(c_2 - \lambda c_1) = 0 \end{cases}$$

Так как во втором из этих равенств $a_1 \neq 0$, то $c_2 = \lambda c_1$. При этом автоматически выполняется и первое равенство. Итак, имеем:

$$a_2 = \lambda a_1;\ b_2 = \lambda b_1;\ c_2 = \lambda c_1 \tag{2.8}$$

а) Если $\lambda = 0$, то $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, и в системе (2.1) пропадет второе уравнение. Оставшееся первое уравнение $a_1x + b_1y = c_1$ имеет, очевидно, бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} y - \textit{любое} \\ x = \dfrac{c_1 - b_1 y}{a_1} \end{cases} \tag{2.9}$$

б) Если $\lambda \neq 0$, то подставляя выражения (2.8) во второе уравнение исходной системы (2.1) и сокращая обе его части на λ, получим в системе (2.1) два одинаковых уравнения:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases} \tag{2.10}$$

Эта система равносильна одному уравнению $a_1 x + b_1 y = c_1$, которое опять имеет бесчисленное множество решений, выражаемое формулами (2.9).

Подведем итог решения системы (2.1) методом определителей.

1) Если ее главный определитель $\Delta \neq 0$, то она имеет единственное решение, выражаемое формулами Крамера (2.6).

2) Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей неизвестных, Δ_x или Δ_y, отличен от нуля, то система не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$, а также $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система (2.1) вырождается в одно уравнение с двумя неизвестными и, таким образом, имеет бесчисленное множество решений.

Метод определителей может быть применен и к квадратной системе линейных уравнений любого порядка *n*. Пусть, например,

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \tag{2.11}$$

– квадратная система линейных уравнений 3-го порядка. По той же схеме, по которой из системы (2.1) выделялись уравнения (2.2) и (2.3), содержащие лишь по одной неизвестной, мы можем и из системы (2.11) выделить такие уравнения. Если это сделать (выкладки опускаем), то из системы (2.11) получим систему вида

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases}, \tag{2.12}$$

являющуюся системой-следствием системы (2.11) и аналогом системы (2.5) для системы (2.1). Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

– так называемый *главный определитель системы* (2.11). Он, как и главный определитель (2.4) системы (1.1), состоит из коэффициентов при неизвестных. Но он, в отличие от определителей (2.4), не второго, а *третьего порядка*. Схема его вычисления указана в формуле (2.13).

Формулу эту легко усвоить: нужно взять элементы $\{a_1; b_1; c_1\}$ первой строки определителя Δ, последовательно умножить их на так называемые *миноры этих элементов*, то есть на определители меньшего (второго) порядка, получающиеся из определителя Δ вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент, и затем сложить все эти произведения, взяв лишь второе из них с обратным знаком. Такое вычисление определителя третьего порядка Δ называется *разложением его по первой строке*.

Это вычисление существенно упрощается, если в первой строке определителя имеются нули. Если же их там нет, то можно, при желании, их там и образовать, если использовать *свойства определителей*. Перечислим некоторые из них (приведенные ниже свойства справедливы для определителей любого порядка):

1. Если поменять местами любые две строки или любые два столбца определителя, то его знак изменится на противоположный.
2. Если поменять местами строки и столбцы определителя (провести так называемое *транспонирование определителя*), то его величина не изменится.
3. Если к элементам какой-либо строки или столбца определителя прибавить соответственно другую строку или столбец этого же определителя, все элементы которой (которого) умножить предварительно на произвольное число, то величина определителя не изменится.
4. Если у определителя имеются две одинаковых строки или два одинаковых столбца, то этот определитель равен нулю.
5. Если у определителя какая-то строка или столбец целиком состоит из одних нулей, то этот определитель равен нулю.

Для определителей второго и третьего порядка все эти свойства можно подтвердить, опираясь на правила (2.4) и (2.13) их вычисления, но на этом не останавливаемся.

В системе (2.12) фигурируют еще три определителя третьего порядка – *определители неизвестных* Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

Схема их формирования очевидна: чтобы записать определитель какой-либо неизвестной, нужно взять за основу главный определитель системы Δ и заменить в нем столбец коэффициентов при этой неизвестной столбцом свободных членов системы (2.11). Вычисляются они по той же схеме (2.13), что и главный определитель Δ.

Связь систем (2.11) и (2.12) аналогична связи систем (2.1) и (2.5). А именно:

1) Если $\Delta \neq 0$, то система (2.11), как и система (2.12), имеет единственное решение, определяемое *формулами Крамера*:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{2.15}$$

2) Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей неизвестных Δ_x, Δ_y или Δ_z отличен от нуля, то система (2.12) не имеет решений, а вместе с ней не имеет решений и система (2.11).

3) Если $\Delta = 0$ и также $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то, как показывает дополнительный анализ (его опускаем), система (2.11) или не имеет решений, или имеет их бесчисленное множество. Какой из этих двух вариантов будет иметь место - можно выяснить, решив систему методом Гаусса.

Все, что сказано выше о применении метода определителей к решению квадратных линейных систем второго и третьего порядков, по аналогии может быть распространено и на квадратные системы 4-го, 5-го и т.д. порядков. При этом появляются и определители соответствующих порядков - 4-го, 5-го и т.д. Но подробности этого мы опускаем, ибо вручную такие большие системы гораздо удобнее и быстрее решать методом Гаусса.

2.2 Матричный метод

Вернемся к системе (1.1) – к произвольной системе m линейных уравнений с n неизвестными. Таблица коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \dots \; a_{2n} \\ -------- \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \dots \; a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

называется *матрицей коэффициентов при неизвестных.* А столбцы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -- \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -- \\ x_m \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

составленные из свободных членов и неизвестных системы (1.1), называются соответственно *матрицей-столбцом (вектором-столбцом)* свободных членов системы и *матрицей-столбцом) (вектором-столбцом)* неизвестных системы.

Если определить произведение AX матрицы A на столбец X как столбец, состоящий из сумм произведений элементов отдельных строк матрицы A на элементы столбца X, то систему (1.1) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$AX = B \tag{2.18}$$

Из этого матричного уравнения при заданных матрице A и матрице-столбце B должна быть определена матрица-столбец X, содержащая неизвестные.

Для решения матричных уравнений типа (2.18) разработана специальная *теория матриц*, подробности которой опускаем. В этой теории определены действия с матрицами (сложение матриц, вычитание матриц, умножение их на число, произведение матриц, понятие нулевой и единичной матриц и т.д.). Если матрица A квадратная ($m = n$) и ее определитель Δ не равен нулю, то как показывается в этой теории, можно построить такую матрицу A^{-1}, называемую обратной к матрице A, что

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{2.19}$$

– решение матричного уравнения (2.18), а значит, и решение системы (1.1). Это решение, по сути, равносильно тому, которое может быть найдено методом определителей по формулам Крамера.

Например, для системы (2.1), которая в матричной форме имеет вид $AX=C$, из этой теории следует:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; \; A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_2}{\Delta} & -\dfrac{b_1}{\Delta} \\ -\dfrac{a_2}{\Delta} & \dfrac{a_1}{\Delta} \end{pmatrix}; \; X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Если же матрица A системы (1.1) не квадратная, или она квадратная, но с нулевым определителем Δ, то обратная к ней матрица A^{-1} не существует, и решения матричного уравнения (2.18) в матричной форме найдены быть не могут (даже если они и существуют). Это обстоятельство сильно снижает ценность матричного метода решения систем линейных уравнений. Он, как и метод определителей, не является универсальным методом их решения (в отличие от метода Гаусса). Но зато, когда эти методы могут быть применены (для квадратных систем, имеющих единственное решение), то они позволяют получить это решение по *готовым формулам.* А именно, по формулам Крамера в методе определителей, или по формуле (2.19) в матричном методе. Формулы эти, кстати, легко программируются для ЭВМ и содержатся в любом математическом пакете программ.

В частности, электронные таблицы Excel в своем наборе математических программ содержит следующие необходимые для решения квадратных систем линейных уравнений программы:

МОПРЕД ( ) – нахождение определителя матрицы;
МОБР ( ) – нахождение обратной матрицы;
МУМНОЖ (;) - перемножение матриц.

Поэтому матричное решение (2.19) матричного уравнения (2.18) в Excel примет вид:

$$X=МУМНОЖ(МОБР(A);B) \qquad (2.21)$$

В эту формулу нужно лишь вставить матрицу А коэффициентов при неизвестных и столбец В свободных членов системы, предварительно записанные на лист Excel. Все остальное компьютерная программа сделает сама.

Еще удобнее решать системы линейных уравнений с помощью интернета. Зайдя, например, на сайт https://ru.onlinemschool.com или на сайт https://math24.biz, мы найдем там программы решения систем линейных уравнений и методом Гаусса, и методом определителей, и матричным методом. Причем с подробным объяснением тех операций, которые будут выполнены.

Упражнения

1. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 30 дней. После шестидневной совместной работы первый рабочий (работая один) может закончить её за 40 дней. За какое число дней второй рабочий, работая один, может выполнить всю работу?

Ответ: за 75 дней.

2. Решить систему $\begin{cases} ax-3y=1 \\ ax-2y=2 \end{cases}$, где a – некоторый числовой параметр. Указать, при каких значениях a система: а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: а) При $a \neq 0$ система имеет единственное решение ($x=\frac{4}{a}$; $y=1$); б) при $a=0$ система не имеет решений; в) бесчисленного количества решений система ни при каких значениях a иметь не может.

3. При каких значениях параметра α система $\begin{cases} x+\alpha y=1 \\ \alpha x+y=\alpha^2 \end{cases}$ *а*) имеет единственное решение; *б*) не имеет решений; *в*) имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: *а*) $\alpha \neq \pm 1$; *б*) $\alpha=-1$; *в*) $\alpha=1$.

4. Методом Гаусса вручную решить системы:

$$a)\ \begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 2x+3y-5z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases};\quad б)\ \begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases};\quad б)\ \begin{cases} -2x+3y-2z=2 \\ 3x-2y+z=2 \\ -5x+10y-7z=3 \end{cases}.$$

Проверить свое решение, получив его с помощью интернета.
<u>*Ответ*</u>: *а*) ($x=0$; $y=0$; $z=0$); *б*) $(x=1;\ y=3;\ z=5)$; *в*) Нет решений.

5. Показать, что переопределенная система

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+2y=4 \\ x-5y=a \end{cases}$$

может иметь решение. При каком значении параметра *a* это будет иметь место?

<u>*Ответ*</u>: при $a=2$ система имеет единственное решение ($x=\frac{24}{7}$; $y=\frac{2}{7}$). При $a\neq 2$ система не имеет решений.

6. Решить недоопределенную систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

<u>*Ответ*</u>: система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}+5C \\ y=\dfrac{5}{3}-7C \\ z=3C \end{cases}\quad (C - \text{произвольная константа}).$$

7. С помощью интернета решить системы уравнений:

$$a)\ \begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=2 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \\ -4x_1-3x_2+x_3=1 \end{cases};\quad б)\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases};$$

$$в)\ \begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7 \end{cases};\quad г)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4=20 \\ 5x_1-x_2+2x_3-x_4=17 \\ -3x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_1-x_2+4x_3-2x_4=-4 \end{cases};\quad д)\ \begin{cases} 6x_1+9x_2+2x_3=0 \\ -4x_1+x_2+x_3=0 \\ 5x_1+7x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+3x_3=0 \end{cases}.$$

<u>*Ответы*</u>: *а*) Система несовместна; *б*) $(x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3)$;

в) $\left(x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = \frac{1}{3};\ x_4 = -\frac{3}{2}\right)$; *г*) $\left(x_1 = 5;\ x_2 = 7;\ x_3 = 0;\ x_4 = 1\right)$;

д) только нулевое (тривиальное) решение.

8. Методом определителей решить систему

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 5y = 6 \end{cases}.$$

Для сравнения решить эту же систему методом Гаусса.

<u>*Ответ*</u>: $x = 1$; $y = -1$.

9. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} Sin\alpha & Cos\alpha \\ Sin\beta & Cos\beta \end{vmatrix}$, если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

<u>*Ответ*</u>: 1.

10. Сколько решений имеет система $\begin{cases} 2x + (m-1)y = 3 \\ (m+1)x + 4y = -3 \end{cases}$?

<u>*Ответ*</u>: m=3 –нет решений; m=-3 – бесчисленное множество решений; $m\neq 3$ и $m\neq -3$ – единственное решение.

11. Доказать, что если однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение, то решений у нее бесконечно много.

12*. Некоторая система линейных уравнений 2020-го порядка имеет единственное решение. Все коэффициенты и все значения неизвестных в её решении ненулевые. При решении студент неверно записал один из коэффициентов системы и решил её (она имела единственное решение). Каково количество совпадающих неизвестных в решениях первой и второй системы?

<u>*Ответ*</u>: 0.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Следующие три главы посвящены *математическому анализу*. Со времен создания основ математического анализа берет свое начало вся высшая математика.

Главное содержание математического анализа составляют *дифференциальное исчисление* и *интегральное исчисление,* основу которых в конце 17 века заложили Исаак Ньютон (великий английский математик и физик) и Готфрид Лейбниц (великий немецкий математик и философ). Дифференциальное и интегральное исчисления составляют, можно сказать, стены и крышу здания математического анализа. Есть в этом здании и пристройки, появившиеся позже - например, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, ряды. А теоретическим фундаментом математического анализа является *теория пределов*, которая создавалась уже позже возведения самого здания этого анализа. И создавалась другими учеными, из которых в первую очередь следует назвать французского математика начала 19 века Огюстена Коши.

Отличительной чертой математического анализа является то, что в нем, в отличие от элементарной математики, изучаются не установившиеся, неизменные *состояния,* характеризуемые некоторыми постоянными величинами, а несравненно более сложные *процессы*, в ходе которых ключевые величины, характеризующие рассматриваемый процесс, меняют свои значения.

Например, не требует, очевидно, высшей математики задача об определении пути при постоянной скорости движения. И даже если эта скорость переменна, но сила, действующая на тело, постоянна (а, значит, при постоянной массе постоянно и ускорение тела), то математическое исследование такого движения тоже легко осуществляется с помощью элементарной математики. Но если, например, речь идет о математическом исследовании движения ракеты, у которой и масса меняется (из-за сгорания топлива), и сила тяги ее двигателей, и окружающая ракету среда не является неизменной, то тут уже элементарной математикой не обойдешься – нужно привлекать высшую. И в первую очередь – математический анализ.

Собственно говоря, математический анализ - это *анализ переменных величин и связей между ними*. Причем в математическом анализе при рассмотрении переменных величин ключевую роль играют *бесконечно малые изменения* этих величин. В связи с этим до недавних времен математический анализ называли *анализом бесконечно малых*.

ГЛАВА 3

Пределы

Предел – это одно из самых фундаментальных понятий высшей математики вообще и математического анализа в частности. Различают две основные разновидности пределов: 1) предел переменной величины; 2) предел функции.

§ 1. Предел переменной величины

Переменная величина x – это величина, которая может менять свои значения. Этим она принципиально отличается от любой *постоянной величины* a, которая своего неизменного значения не меняет.

Одна и та же величина в одних условиях может быть постоянной, а в других переменной. Например, в процессе движения тела его скорость может быть постоянной (если движение равномерное), а может быть и переменной, если движение неравномерное. То же самое касается и других величин, характеризующих движение тела: ускорения тела (оно постоянно при равноускоренном движении и переменно в более сложных случаях), кинетической энергии тела, и даже массы тела (у падающего кирпича она постоянная, у летящей ракеты из-за постоянно сгорающего топлива - переменная).

Постоянные величины считаются простейшими частными случаями величин переменных. В частности, высота дерева, если оно перестанет расти и засохнет, из переменной становится постоянной. Ясно, что переменные величины и сложнее, и интереснее постоянных величин, ибо всякое движение, всякая жизнь и интереснее, и сложнее неизменного покоя.

Переменная величина может меняться плавно (непрерывно), а может меняться и скачкообразно (дискретно). В первом случае переменная величина называется *непрерывной*, а во втором *дискретной*. Например, путь, проходимый движущимся пешеходом, меняется, очевидно, непрерывно, ибо траектория движения пешехода – сплошная (непрерывная) линия. То есть этот путь – непрерывная переменная величина. А если отмечать этот путь лишь по оставляемым пешеходом следам на дороге, то в этом случае путь уже будет меняться скачкообразно (дискретно), и он будет дискретной переменной величиной. Аналогично скорость движущегося по дороге автомобиля меняется, очевидно, непрерывно. А скорость хаотичного движения молекулы газа, сталкивающейся с соседними молекулами, меняется в результате этих столкновений скачкообразно (дискретно). То есть скорость автомобиля - непрерывная переменная величина, а скорость молекулы – дискретная. И т.д.

В математическом анализе в основном рассматриваются непрерывные переменные величины. А с дискретными величинами систематически оперируют не в математическом анализе, а в так называемой *дискретной математике*.

Предел дискретной переменной величины

Пусть x – переменная величина. Причем будем считать, что x – дискретная переменная величина. То есть x – переменная величина, меняющаяся скачкообразно. Она считается заданной, если задана *последовательность*

$$\{x_n\} = x_1; x_2; x_3; \ldots x_n; \ldots \tag{1.1}$$

ее значений. То есть тех значений x_1; x_2; x_3;…, которые она последовательно, одно за другим, принимает в процессе своего скачкообразного изменения (x_1 - первое значение переменной x, x_2 - второе, и т.д.).

Будем считать, что этот процесс изменения переменной величиной x своих значений ни на каком этапе не прекращается. То есть у этой переменной нет последнего значения, после которого она перестает меняться и превращается в постоянную величину. Ибо в таком застывшем, «мертвом» виде она уже не будет нам интересна. А это значит, что последовательность (1.1) её значений имеет бесконечное число членов, что и отмечено в (1.1) многоточием.

Естественно, возникает интерес относительно характера изменения величиной x своих значений. То есть возникает вопрос: меняются эти значения бессистемно, хаотически или все же как-то целенаправленно?

В принципе, для переменной x возможно и то, и другое. Основной интерес представляет, конечно, второй вариант.

А именно, пусть значения x_n переменной x в процессе их изменения, то есть по мере увеличения их номера n, неограниченно приближаются (*стремятся*) к некоторому конкретному числу a. Это значит, что разность (расстояние) $|x_n - a|$ между значениями x_n переменной x и числом a сокращается, стремясь к нулю при увеличении n (при $n \to \infty$). Заменяя слово «стремится» стрелкой, сказанное выше можно записать так:

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty \quad <=> \quad |x_n - a| \to 0 \text{ при } n \to \infty \qquad (1.2)$$

Если имеет место (1.2), то говорят, что *переменная x стремится к числу a*. Это число a называется *пределом переменной x*. И записывается это в следующих равносильных вариантах:

$$\lim x = a \quad <=> \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad <=> \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty; \quad <=> \quad x \to a \qquad (1.3)$$

Соответственно читаются эти записи так: *предел переменной x равен a*; или: *предел числовой последовательности x_n при $n \to \infty$ равен a*; или: *числовая последовательность x_n стремится к a при $n \to \infty$*; или: *переменная x стремится к a*.

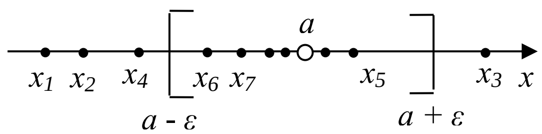


Рис. 1.1

Стремление дискретной переменной x к своему пределу a можно наглядно проиллюстрировать на числовой оси. Точный математический смысл этого стремления x к a состоит в том, что какое бы малое положительное число ε ни взять, а значит, каким бы малым промежутком $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]$ ни окружить на числовой оси число a, в этот промежуток (в так называемую ε-окрестность числа a) попадут, начиная с некоторого номера N, все значения x_n переменной x. В частности, на рис. 1.1 в изображенную ε-окрестность числа a попали все значения x_n переменной x, начиная с номера $N = 5$.

Отметим, что совершенно не важно, стремится ли переменная x к своему пределу a монотонно (так, что каждое следующее ее значение находится ближе к пределу, чем предыдущее), или она делает это немонотонно - то приближаясь к своему пределу, то несколько удаляясь от него; находятся ли все значения переменной с одной стороны предела или с разных; достигает ли в каких–то своих значениях переменная своего предела или нет. Существенно лишь то, о чем говорится в определении предела: переменная x в конце концов должна подойти как угодно близко к своему пределу a и после этого (для всех более поздних своих значений) дальше от него уже ни с какой стороны не отходить.

Переменная x, имеющая своим пределом нуль (то есть стремящаяся к нулю) называется *бесконечно малой*. А переменная x, неограниченно растущая по абсолютной величине, называется *бесконечно большой* (ее модуль стремится к бесконечности).

Итак, если $x \to 0$, то x – бесконечно малая переменная величина. А если $|x| \to \infty$, то x – бесконечно большая переменная величина. В частности, если $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то x – бесконечно большая переменная величина.

Если $x \to a$, то $x - a = \alpha \to 0$. И обратно, если $x - a = \alpha \to 0$, то $x \to a$. Отсюда получаем следующую важную связь между переменной x и ее пределом a:

$$\lim x = a \ (x \to a) \ \Leftrightarrow \ x = a + \alpha \ (\alpha \to 0) \tag{1.4}$$

Отметим, что не всякая переменная x имеет предел. У многих переменных нет предела. Есть он или нет – это зависит от того, какова последовательность (1.1) значений этой переменной.

<u>*Пример 1*</u>. Пусть

$$\{x_n\} = 1{,}9;\ 1{,}99;\ 1{,}999;\ 1{,}9999;...$$

- последовательность значений переменной x. Совершенно очевидно, что при такой последовательности своих значений переменная $x \to 2$, то есть $\lim x = 2$.

<u>*Пример 2*</u>. Пусть

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};...$$

- последовательность значений переменной x. Здесь, очевидно, $x \to 0$, то есть $\lim x = 0$. Значит, переменная x с такой последовательностью значений – бесконечно малая переменная.

<u>*Пример 3.*</u> Пусть

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1 + (-1)^n}{n}\right\} = 0;\ \frac{2}{2};\ 0;\ \frac{2}{4};\ 0;\ \frac{2}{6};\ 0;\ \frac{2}{8};...$$

Очевидно, что и здесь, как и в предыдущем примере, $x \to 0$. То есть и здесь переменная x - бесконечно малая. Но тут есть своя особенность: в примере 2 переменная x никогда не достигает своего предела, а в данном примере переменная x через раз своего предела достигает.

<u>*Пример 4*</u>. Пусть

$$\{x_n\} = \{n^2\} = 1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;...$$

Здесь, очевидно, $x \to +\infty$, то есть $\lim x = +\infty$. Переменная x из этого примера – бесконечно большая.

<u>*Пример 5*</u>. Пусть

$$\{x_n\} = 1;\ -1;\ 1;\ -1;...$$

Здесь, очевидно, переменная x ни к чему не стремится. То есть предела у нее нет ($\lim x$ не существует).

Пример 6. Пусть

$$\{x_n\} = \left\{\frac{3n}{2n-1}\right\} = \frac{3}{1}; \frac{6}{3}; \frac{9}{5}; \frac{12}{7}; \ldots$$

Здесь ситуация с пределом переменной x не так очевидна, как в предыдущих пяти примерах. Для прояснения этой ситуации преобразуем значения x_n переменной x:

$$x_n = \frac{3n}{2n-1} = \left| \begin{array}{l} \textit{разделим числитель} \\ \textit{и знаменатель на } n \end{array} \right| = \frac{3}{2-1/n}.$$

Очевидно, что $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $x_n = \frac{3}{2-1/n} \to \frac{3}{2-0} = \frac{3}{2}$ при $n \to \infty$.

А это значит, что переменная $x \to \frac{3}{2} = 1{,}5$, то есть $\lim x = 1{,}5$.

Предел непрерывной переменной величины

Пусть теперь x - непрерывная переменная величина. Это значит, что если эту величину представить себе как точку x числовой оси, то эта точка перемещается по числовой оси плавно, без скачков, оставляя после себя сплошной след. И если в процессе своего движения она все ближе и ближе приближается к некоторой неподвижной точке с координатой a, так что расстояние $|x-a|$ от точки x до точки a сокращается, стремясь к нулю, то такое число a является пределом переменной x. При этом, как и в случае дискретной переменной величины, пишут:

$$\lim x = a \quad <=> \quad x \to a \tag{1.5}$$

Иначе говоря, число a будет пределом переменной величины x, если какое бы малое положительное число ε ни взять и каким бы малым промежутком $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]$ ни окружить на числовой оси число a, наступит такой момент (такой этап) в изменении переменной x, после которого переменная x попадет в этот промежуток (в так называемую ε-окрестность числа a) и уже не будет выходить из нее. При этом совершенно не важно, движется ли точка x к своему пределу a монотонно или нет, и с какой стороны движется, и достигает ли когда-нибудь своего предела или нет. Главное, что такое число a существует. Если же такого числа не существует, то непрерывная переменная x предела не имеет.

В частности, если $\lim x = 0$, то есть если $x \to 0$, то непрерывная переменная x (как и дискретная) называется *бесконечно малой*. А если $|x| \to \infty$, то непрерывная переменная x, как и дискретная, называется *бесконечно большой.*

Основные свойства переменных величин и их пределов

Указанные ниже свойства имеют место как для дискретных, так и для непрерывных переменных величин. Они почти очевидны, хотя их можно и строго доказать.

1) Если $x = a$ (переменная x неизменна и равна постоянной a), то естественно считать, что и $\lim x = a$. То есть предел постоянной равен ей самой:

$$\lim a = a \tag{1.6}$$

2) Если $x \to a$, $y \to b$, и числа a и b конечны, то $z = x \pm y \to a \pm b$. То есть

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y \tag{1.7}$$

(предел суммы или разности переменных величин равен сумме или разности их пределов).

3) Если $x \to a$, $y \to b$, и числа a и b конечны, то $z = xy \to ab$. То есть

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y \tag{1.8}$$

(предел произведения переменных величин равен произведению их пределов).

4) Если $x \to a$, $y \to b$, a и b конечны и $b \neq 0$, то $z = \dfrac{x}{y} \to \dfrac{a}{b}$. То есть

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \tag{1.9}$$

(предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю).

5) Если $x \to a$, и C - любая константа, то $Cx \to Ca$. То есть

$$\lim Cx = C \lim x \tag{1.10}$$

(постоянный множитель можно выносить за знак предела).

6) Если x – бесконечно малая переменная величина ($x \to 0$), то $y = \dfrac{1}{x}$ – бесконечно большая переменная величина ($|y| \to \infty$).

7) Если x – бесконечно большая переменная величина ($|x| \to \infty$), то $y = \dfrac{1}{x}$ – бесконечно малая переменная величина ($y \to 0$).

8) Если переменная x ограничена (это значит, что все ее значения расположены в некотором конечном числовом промежутке $[c_1; c_2]$), а переменная y бесконечно малая ($y \to 0$), то переменная $z = xy$ – бесконечно малая ($z \to 0$).

9) Если переменная x ограничена, а переменная y бесконечно большая ($|y| \to \infty$), то переменная $z = \dfrac{x}{y}$ – бесконечно малая ($z \to 0$).

10) <u>*Теорема Вейерштрасса*</u>.

а) Пусть значения переменной x монотонно возрастают и при этом все они меньше некоторой постоянной величины C. Такая переменная x называется *монотонно возрастающей и ограниченной сверху* (числом C). Она заведомо имеет конечный предел a, причем $a \le C$. Наглядную иллюстрацию этой ситуации для случая дискретной переменной величины дает рис. 1.2.

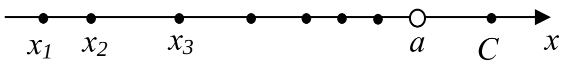


Рис. 1.2

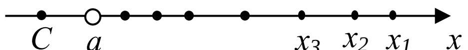


Рис. 1.3

б) Пусть значения переменной x монотонно убывают и при этом все они больше некоторой постоянной величины C. Такая переменная x называется *монотонно убывающей и ограниченной снизу* (числом C). Она заведомо имеет конечный предел a, причем $a \ge C$. Наглядную иллюстрацию этой ситуации для случая дискретной переменной величины дает рис. 1.3.

Упражнения

1. $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{\cos n\pi}{n} \right\}$ (n = 1, 2, 3,…). Развернуть эту последовательность значений переменной x и найти ее предел.

<u>*Ответ*</u>: $\{x_n\} = -1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; \ldots$. $\lim x = 0$.

2. $\{x_n\} = 0{,}6;\ 0{,}66;\ 0{,}666; \ldots$. Найти $\lim x$.

<u>*Ответ*</u>: $\lim x = \dfrac{2}{3}$.

3. $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{n^2 - 4}{2n + n^2} \right\}$ (n = 1, 2, 3,…). Найти $\lim x$.

<u>*Ответ*</u>: $\lim x = 1$.

4. $\{x_n\} = \left\{ 1 + \left(-\dfrac{1}{2} \right)^n \right\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Найти $\lim x$.

<u>*Ответ*</u>: $\lim x = 1$.

5. $\{x_n\} = \{(-1)^n (2n+1)\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Найти $\lim x$.

<u>*Ответ*</u>: $\lim x$ не существует.

6. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n+(-1)^n}{n}\right\}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$. Найти $\lim x$.

<u>*Ответ*</u>: $\lim x = 2$.

7. Точка *x* движется по оси *ox* по закону $x = \dfrac{2t+1}{t}$ $(t \geq 1, t$ - время). Построить график зависимости *x* от *t*. Показать, что точка непрерывно и монотонно движется по оси *ox* справа налево и стремится к точке 2, хотя и никогда не достигает ее.

§ 2. Предел функции. Непрерывность и разрывы функций

Пусть $y = f(x)$ – некоторая функция, рассматриваемая на некотором промежутке оси *ox* (например, на отрезке $[a;b]$ или на интервале $(a;b)$ этой оси). То есть функцию $y = f(x)$ будем рассматривать лишь для значений *x*, принадлежащих этому промежутку. При этом предполагается, что функция определена (может быть вычислена) для любого значения *x* из этого промежутка, за исключением, может быть, одной или нескольких точек этого промежутка. И пусть x_0 – некоторая внутренняя или граничная точка этого промежутка. Для отрезка $[a;b]$ такой точкой x_0 может быть любая точка этого отрезка. А для интервала $(a;b)$ – любая точка этого интервала, включая не принадлежащие ему его границы a и b.

Будем рассматривать значения функции $y = f(x)$ для аргумента *x*, стремящегося к x_0. Как при этом будет осуществляться это стремление, непрерывно или дискретно – это для нас неважно. При стремлении x к x_0 значения y функции $y = f(x)$ могут стремиться к некоторому значению y_0, конечному или бесконечному. И если это стремление *y* к y_0 осуществляется *при любом способе* стремления *x* к x_0, то число y_0 называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$. И записывается это так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \tag{2.1}$$

(читается: предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен y_0). Обратно, равенство (2.1) означает, что при $x \to x_0$ функция $y = f(x) \to y_0$. Причем стремление *y* к y_0 осуществляется *при любом способе* стремления *x* к x_0.

Отметим, что если x_0 – граничная точка числового промежутка оси *ox*, на котором рассматривается функция $y = f(x)$ (крайняя левая или крайняя правая

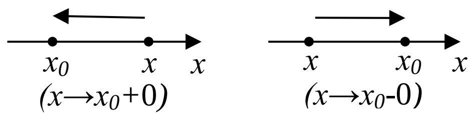


Рис.1.4

его точка), то x может стремиться к x_0 либо только справа, либо только слева. Такое стремление x к x_0 обозначают соответственно $x \to x_0 + 0$ (x стремится к x_0 справа) и $x \to x_0 - 0$ (x стремится к x_0 слева) – рис. 1.4. А соответствующие пределы функции $y = f(x)$ называют соответственно пределами справа и слева:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = y_1 \text{ – предел функции } y = f(x) \text{ при } x \to x_0 \text{ справа;} \qquad (2.2)$$

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = y_2 \text{ – предел функции } y = f(x) \text{ при } x \to x_0 \text{ слева.}$$

Такие пределы функции называются *односторонними.* А предел (2.1) называют *общим* (или *двусторонним*).

Если x_0 – внутренняя точка числового множества оси ox, на котором рассматривается функция $y = f(x)$, то для нее можно искать оба односторонних предела – и предел справа (при $x \to x_0 + 0$), и предел слева (при $x \to x_0 - 0$). Кроме того, можно искать и общий (двусторонний) предел (2.1). Естественно, что если этот двусторонний предел существует и равен y_0, то существуют и оба односторонних, и оба они равны y_0. Обратно, если оба односторонних предела (2.2) существуют и равны, то существует и равен им и двусторонний предел (2.1). Если же односторонние пределы существуют, но не равны, или один существует, а другой нет, то общий (двусторонний) предел, естественно, не существует.

Суть пределов функции, как двустороннего, так и односторонних, можно наглядно проиллюстрировать. В частности, сделаем это для двустороннего предела (2.1).

Согласно определению этого предела, при любом способе стремления x к x_0 соответствующее значение функции $y = f(x)$ стремится к y_0. То есть если x подойдет достаточно близко к x_0, то и $y = f(x)$ подойдет достаточно близко к y_0. Иначе говоря, как бы ни была мала ε-окрестность $[y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon]$ точки y_0, должна найтись такая соответствующая ей δ-окрестность $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ точки x_0, что как только x в своем стремлении к x_0 попадет в δ-окрестность точки x_0, соответствующее этому x значение функции $y = f(x)$ попадет в ε-окрестность точки y_0 (рис. 1.5).

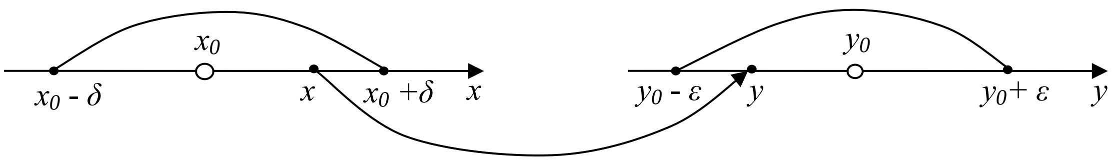


Рис. 1.5

Для иллюстрации же односторонних пределов (2.2) в рис. 1.5 нужно заменить двустороннюю δ-окрестность точки x_0 на соответствующую одностороннюю $[x_0;\ x_0+\delta]$ или $[x_0-\delta;\ x_0]$.

Теперь перейдем к рассмотрению такого важнейшего понятия, как *непрерывность функции.*

Непрерывность и разрывы функций

Если функция $y=f(x)$ определена для всех x из некоторого отрезка $[a;b]$ или интервала $(a;b)$ оси ox, и ее график для указанных x – сплошная (непрерывная) линия, то такая функция называется *непрерывной на этом отрезке или интервале*. Непрерывная на отрезке или интервале функция считается непрерывной в любой конкретной точке x_0 этого отрезка или интервала.

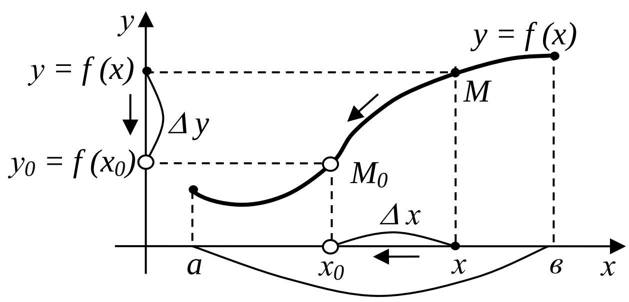


Рис. 1.6

Если функция $y=f(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0, то очевидно, что при $x\to x_0$ значение функции $y=f(x)\to y_0=f(x_0)$ (рис. 1.6). Причем это стремление y к y_0 при $x\to x_0$ будет иметь место и при $x\to x_0+0$, и $x\to x_0-0$. Действительно, стремление x к x_0 вызывает для непрерывной функции стремление (приближение) точки M к точке M_0, а значит, и стремление ординаты y точки M к ординате y_0 точки M_0, с какой бы стороны от точки M_0 ни находилась точка M.

Стремление $y=f(x)$ к $y_0=f(x_0)$ при $x\to x_0$ означает, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (2.3)$$

Если ввести обозначения (см. рис. 1.6)

$$\begin{cases} x-x_0=\Delta x \text{ – приращение аргумента } x \text{ в точке } x_0; \\ y-y_0=f(x)-f(x_0)=\Delta y \text{ – приращение функции } y=f(x) \text{ в точке } x_0, \end{cases} \qquad (2.4)$$

то стремление $y=f(x)$ к $y_0=f(x_0)$ при $x\to x_0$, то есть выполнение равенства (2.3), означает, что $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$. И обратно, если при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, то это означает, что при аргументе $x\to x_0$ функция $y\to y_0$, а значит, выполняется равенство (2.3). Таким образом, условие

$$\Delta y\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0 \quad (\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0) \qquad (2.5)$$

и условие (2.3) *равносильны.* Оба они, в разной форме, представляют собой *математическое определение непрерывности функции* $y = f(x)$ *в заданной точке* x_0.

Если условие непрерывности (2.3) (или равносильное ему условие (2.5)) функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 не выполняется, то функция называется *разрывной в точке* x_0. А сама такая точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$. Например, точка x_0 является точкой разрыва функции $y = f(x)$ и на рис. 1.7(а), и на рис. 1.7(б), и на рис. 1.7(в).

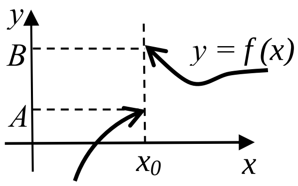


Рис. 1.7 (а)

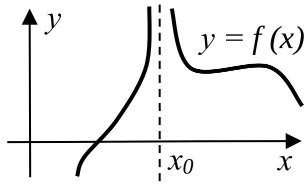


Рис. 1.7 (б)

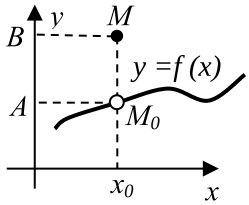


Рис. 1.7 (в)

Действительно, для рис. 1.7 (а) условие непрерывности (2.3) не выполняется сразу по двум причинам:

1) $f(x_0)$ – не существует; 2) $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = B$; $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$; $B \neq A$. Значит, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – не существует.

Для рис. 1.7 (б) условие непрерывности (2.3) тоже, очевидно, не выполняется. Действительно,

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (существует, хоть и не является конечным числом), но $f(x_0)$ – не существует.

На рис. 1.7 (в) из сплошного (непрерывного) графика функции $y = f(x)$ вырезана точка M_0 и перемещена по вертикали в другое положение M. В итоге точка x_0 становится точкой разрыва функции $y = f(x)$, ибо для неё получаем:

1) $f(x_0) = B$ – существует; 2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ – существует; 3) Однако $B \neq A$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Если вернуть точку M на место (в точку M_0), то функция $y = f(x)$ опять станет непрерывной в точке x_0. Поэтому разрыв этой функции в точке x_0, изображенный на рис. 1.7 (в), называется *устранимым*, а сама точка x_0 - *устранимой точкой разрыва*.

Разрывы же функции $y = f(x)$, изображенные на рисунках 1.7 (а) и 1.7 (б), являются, очевидно, неустранимыми. Причем эти разрывы по-разному называются: на рисунке 1.7 (а) точка x_0 - это точка разрыва 1-го рода, а на рисунке 1.7 (б) – 2-го рода. Разница здесь в том, что в точках разрыва первого рода при переходе x через x_0 происходит *конечный скачок* значения функции, а в точках разрыва второго рода – *бесконечный*.

Но какого бы рода ни была точка разрыва функции, суть этой точки во всех случаях одна и та же: *точкой разрыва функции* $y = f(x)$ *является такое* *значение x_0 аргумента x этой функции, при котором нарушается сплошность (непрерывность) ее графика.*

Вспомним, что графики всех основных элементарных функций (линейной $y=kx+b$, квадратичной $y=ax^2+bx+c$, обратно-пропорциональной зависимости $y=\frac{k}{x}$, показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических) являются сплошными (непрерывными) линиями для всех *x*, для которых эти функции определены. И разрыв указанные линии терпят лишь при тех изолированных значениях $x=x_0$, при которых соответствующие им функции не определены. Такие x_0 и являются точками разрыва элементарных функций.

Например, квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ определена для любых *x*. И ее график (парабола) является сплошной (непрерывной) линией при любых *x*. То есть точек разрыва у функции $y=ax^2+bx+c$ нет. А вот функция $y=\frac{k}{x}$ определена для любых *x*, кроме $x=0$. И соответственно ее график (гипербола) является сплошной (непрерывной) линией для любых *x*, кроме $x=0$, где она терпит разрыв (рис. 1.8 (а) и 1.8 (б)). Причем разрыв 2-го рода.

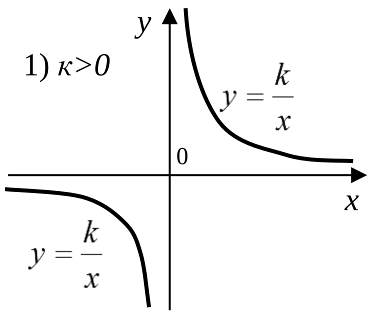


Рис.1.8 (а)

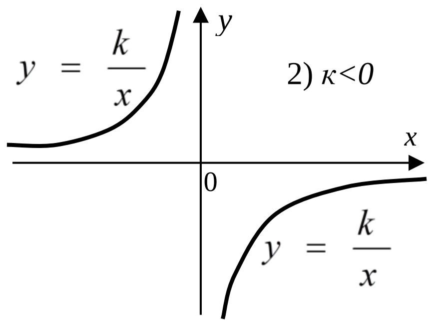


Рис.1.8 (б)

Указанным выше свойством основных элементарных функций обладают, как можно доказать, и любые конечные комбинации этих функций (их суммы, произведения, функции от функций, то есть сложные функции, и т.д.). То есть любые функции $y=f(x)$, составленные из основных элементарных функций (а с другими функциями, собственно говоря, мы встречаться практически и не будем) *будут непрерывны для всех значений аргумента x, для которых они определены*. А следовательно, *точками их разрыва будут лишь те отдельные изолированные точки x_0, в которых они не определены*. Изолированные – это значит такие точки x_0, что в окрестности $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ этих точек функция определена, и лишь в самих точках x_0 она не определена.

Например, функция $y=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ определена, а следовательно, и непрерывна для любых *x*, кроме точек $x_1=0$ и $x_2=1$. В окрестности каждой из этих точек функция определена, и только в самих этих точках она не определена. Значит, эти точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ и есть точки разрыва данной функции y.

Выясним, заодно, и характер поведения этой функции возле каждой из ее точек разрыва – и справа, и слева.

1) Пусть $x \to 0+0$; тогда $y \to \left(\dfrac{1}{-0}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0} y = -\infty$.

2) Пусть $x \to 0-0$; тогда $y \to \left(\dfrac{1}{-0}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-0} y = -\infty$.

3) Пусть $x \to 1+0$; тогда $y \to \left(\dfrac{2}{+0}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0} y = +\infty$.

4) Пусть $x \to 1-0$; тогда $y \to \left(\dfrac{2}{-0}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0} y = -\infty$.

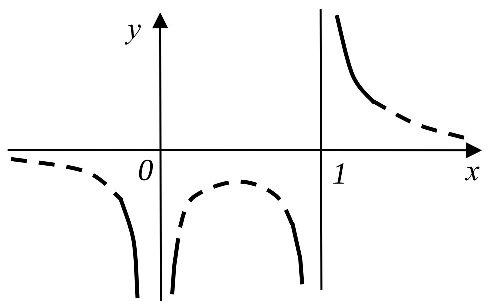


Рис. 1.9

Отобразив установленное поведение функции y возле ее точек разрыва, получим важные фрагменты графика функции (они изображены на рис. 1.9 сплошными линиями). Другие же части графика функции (обозначенные пунктиром) требуют для своего детального изображения дополнительного исследования. Но об этом поговорим позже, когда будет рассмотрена полная схема исследования функций (глава 4, § 3).

Рассмотрим теперь несколько примеров вычисления пределов функций.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2} x^2$.

Решение. Функция $y = x^2$ определена, а, следовательно, и непрерывна в любой точке x, в том числе и в точке $x = 2$. Поэтому, пользуясь равенством (2.3) для непрерывных функций, получаем:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

Впрочем, этот результат и так очевиден, ибо естественно, что при $x \to 2$ функция $y = x^2 \to 4$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

Решение. Функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ определена, а, следовательно, и непрерывна для всех x, кроме $x = 0$. То есть $x = 0$ – точка разрыва этой функции. Поэтому найти искомый предел при $x \to 0$ по формуле (2.3), которая применяется лишь для непрерывных в точке x_0 функций, нельзя. Но это в данном случае и не важно – значение предела и так очевидно. Действительно, совершенно очевидно, что при любом способе стремления $x \to 0$ функция $y = \frac{1}{x^2} \to +\infty$. То есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty.$$

<u>Пример 3</u>. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x}}$.

<u>Решение</u>. При $x \to \infty$ функция $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$, очевидно, стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x}} = \left(\frac{3}{\infty}\right) = 0.$$

<u>Пример 4</u>. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$.

<u>Решение</u>. Как и в примере 2, воспользоваться равенством (2.3) здесь нельзя, так как $x = 2$ – точка разрыва функции $y = \frac{1}{x-2}$. Однако очевидно, что при $x \to 2+0$ функция $y \to +\infty$, а при $x \to 2-0$ функция $y \to -\infty$:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty; \quad \lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty.$$

Это односторонние пределы, и они разные. А это значит, что общий $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ не существует.

<u>Пример 5</u>. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3x-x^2}$.

<u>Решение</u>. Воспользоваться равенством (2.3) и здесь нельзя, так как при $x = 3$ функция $y = \frac{x^2-9}{3x-x^2}$ не определена (при $x = 3$ выражение $\frac{x^2-9}{3x-x^2}$ дает неопределенное выражение $\frac{0}{0}$). Значит, как и в примерах (2) – (4), нужно анализировать поведение функции при $x \to 3$.

Функция $y = \frac{x^2-9}{3x-x^2}$ представляет собой дробь, у которой при $x \to 3$ и числитель, и знаменатель одновременно стремятся к нулю. Но стремление числителя дроби к нулю ведет к уменьшению этой дроби, а стремление знаменателя к нулю – наоборот, к ее увеличению. Какой фактор перевесит – пока неясно, в разных случаях бывает по-разному (как в басне Крылова о лебеде, раке и щуке, тянущих повозку в разные стороны). То есть в данном пределе имеется неясность (неопределенность) типа $\frac{0}{0}$. Кстати, это не единственный возможный тип неопределенности, но о прочих типах – позже.

Неопределенность, встретившуюся при вычислении предела, нужно *раскрывать*. То есть как-то так преобразовать выражение под знаком предела, чтобы неопределенность исчезла и предел стал очевиден. В частности, раскроем нашу неопределенность:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3x-x^2}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(3-x)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{-x}=\frac{3+3}{-3}=-2$$

<u>Пример 6</u>. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-9}{x+4}$.

<u>Решение</u>. Здесь при $x\to\infty$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечности. Но стремление числителя дроби к бесконечности ведет к неограниченному росту дроби, а стремление знаменателя дроби к бесконечности, наоборот, ведет к неограниченному уменьшению дроби (к стремлению ее к нулю). Эти два фактора, как и в предыдущем примере, работают друг против друга, приводя к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем её:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-9}{x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\left|\begin{matrix}\textit{разделим числитель}\\ \textit{и знаменатель на } x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2-9/x}{1+4/x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{учтем, что при } x\to\infty\\ 9/x\to 0 \textit{ и } 4/x\to 0\end{matrix}\right|=\frac{2-0}{1+0}=2.$$

Неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ принадлежат к числу наиболее часто встречающихся при вычислении пределов неопределенностей. Но есть и другие типы неопределенностей. Всего этих типов семь:

$$1)\ \frac{0}{0}=?;\ 2)\ \frac{\infty}{\infty}=?;\ 3)\ 0\cdot\infty=?;\ 4)\ \infty-\infty=?;\qquad (2.6)$$
$$5)\ \infty^0=?;\ 6)\ 0^0=?;\ 7)1^\infty=?.$$

Эти записи нужно понимать не буквально, не как арифметические операции с символами 0 и ∞, а как *предельные ситуации при вычислении пределов*. Для сравнения приведем другие предельные ситуации, неопределенностями не являющиеся:

$$1)\ \infty+\infty=\infty;\ 2)\ \infty\cdot\infty=\infty;\ 3)\ \frac{0}{\infty}=0;\ 4)\ \frac{\infty}{0}=\infty$$

$$\left(\frac{+\infty}{+0}=+\infty;\quad \frac{+\infty}{-0}=-\infty;\quad \frac{-\infty}{+0}=-\infty;\quad \frac{-\infty}{-0}=+\infty\right) \qquad (2.6^*)$$

$$5)\ 0^{+\infty}=0;\ 6)\ 0^{-\infty}=\frac{1}{0^{+\infty}}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

Если при вычислении предела функции возникает какая-либо из неопределенностей (2.6), ее нужно как-то раскрывать. Если неопределенности нет, значит, ситуация ясная, и результат следует записать сразу.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-x^2)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}(2x-x^2)=(\infty-\infty=?)=\lim_{x\to\infty}x(2-x)=\big(\infty\cdot(-\infty)=-\infty\big)=-\infty$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg x}{x}=\left|\textit{Учтем, что } \lg x\to-\infty \textit{ при } x\to 0\right|=\left(\frac{-\infty}{+0}\right)=-\infty$$

Два замечательных предела

Вычислению многих пределов, содержащих неопределенности, часто помогает использование двух так называемых *замечательных пределов*:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=1\ (x\text{ – угол в радианах}) \qquad (2.7)$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1^\infty=?)=e,\text{ где } e=2{,}71828...\approx 2{,}72.$$

Докажем первый замечательный предел. Для этого вспомним школьную формулу для длины l произвольной дуги окружности (рис. 1.10):

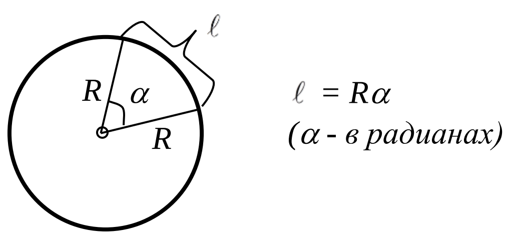


Рис. 1.10

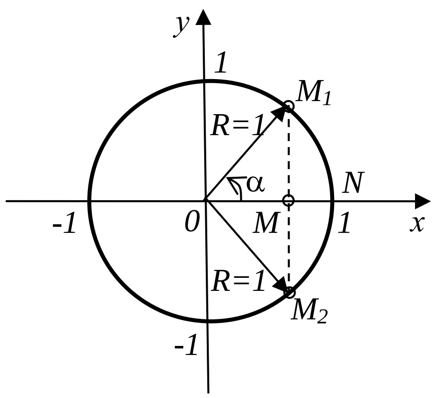


Рис. 1.11

А теперь рассмотрим рис. 1.11:

$$M_1M=\sin\alpha\,;\quad M_1M_2=2MM_1=2\sin\alpha\,;\quad \cup M_1N=R\alpha=\alpha\,;$$

$$\cup M_1NM_2=2\cdot\cup M_1N=2\alpha\,;\quad \frac{M_1M_2}{\cup M_1NM_2}=\frac{2\sin\alpha}{2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ \ (\alpha\text{ – в радианах}).$$

При $\alpha\to 0$ хорда M_1M_2 и дуга M_1NM_2, неограниченно уменьшаясь, практически становятся неразличимыми (малая дуга практически не отличается от стягивающей ее хорды). То есть их отношение стремится к единице. Таким образом, при $\alpha\to 0$ дробь $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\to 1$. А это и означает, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$. Полученный результат совпадает (при другом обозначении) с первым замечательным пределом (2.7).

Второй замечательный предел, приводящий к числу e (к Неперову числу – по имени шотландского математика 16–го века Джона Непера, введшего в математику это число), оставим без доказательства.

Число $e\approx 2{,}72$, как и число $\pi\approx 3{,}14$, принадлежит к числу важнейших математических констант. А такие функции, как $y=e^x$ и $y=\log_e x=\ln x$, принадлежат к числу важнейших элементарных функций, используемых в высшей математике. Графики этих функций показаны на рисунках (1.12) и (1.13). При этом показательная функция $y=e^x$ называется *экспоненциальной*, а ее график называется *экспонентой*. А логарифмическая функция $y=\ln x=\log_e x$ называется *функцией натурального логарифма*, а ее график называется *натуральной логарифмической кривой*. Эти функции играют большую роль при математическом описании различного рода природных процессов. Именно поэтому, в частности, логарифм по основанию e назвали натуральным – от слова «Natur» (природа).

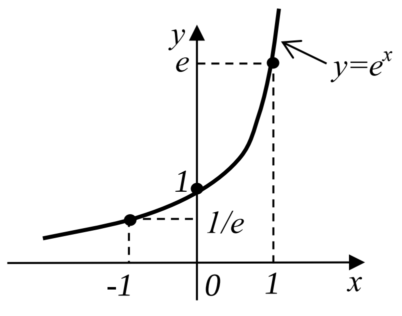


Рис. 1.12

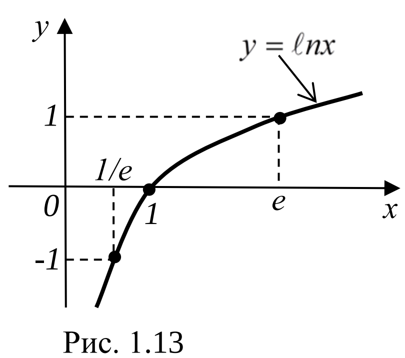


Рис. 1.13

Значения этих функций можно получать на инженерном калькуляторе – для этого на нем есть специальные клавиши.

Кстати, не следует путать натуральный логарифм $\ln x=\log_e x$ с десятичным логарифмом $\lg x=\log_{10} x$. Для десятичных логарифмов на инженерном калькуляторе тоже есть своя клавиша.

Упражнения

1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. Указание: положить $x-2=\alpha$. Или разложить квадратный трехчлен в знаменателе на множители. *Ответ*: 1.

2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x}{3x-1}$. *Ответ*: ∞.

3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$. *Ответ*: $1/2$.

4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$. *Ответ*: $1/\sqrt{e}$.

5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$. *Ответ*: 0.

6. Найти: *а*) $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}$. *Ответ*: *а*) $+\infty$; *б*) 0.

7. Указать точный смысл условных записей:

   1) $\dfrac{2}{\infty}=0$; 2) $\dfrac{2}{0}=\infty$ $\left(\dfrac{2}{+0}=+\infty;\quad \dfrac{2}{-0}=-\infty\right)$; 3) $3^{\infty}=\infty$; 4) $3^{-\infty}=0$;

   5) $\ln 0=-\infty$; 6) $tg90^0=\pm\infty$.

8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. *Ответ*: 1.

9. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{3}$.

§ 3. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

1. Бесконечно малые функции и их сравнение

Пусть $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ – некоторые две функции, а x стремится к некоторому x_0 (конечному или бесконечному). Если при этом $f_1(x)\to 0$ и $f_2(x)\to 0$, то есть если

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)=0, \tag{3.1}$$

то обе эти функции называются *бесконечно малыми при* $x \to x_0$. Возникает вопрос: как их сравнить (кто из них меньше?). Ответ на этот вопрос мы получим, если исследуем отношение этих функций $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ при $x \to x_0$, то есть найдем $\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$. При этом возможны следующие варианты:

<u>Вариант 1:</u>

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 0 \text{ при } x \to x_0 \qquad (3.2)$$

Это значит, что $f_2(x)$ стремится к нулю при $x \to x_0$ несравненно быстрее, чем $f_1(x)$. А, стало быть, бесконечно малая функция $f_2(x)$ является лишь малой частью (бесконечно малой частью!) другой бесконечно малой функции $f_1(x)$ при $x \to x_0$. Или, как говорят, функция $f_2(x)$ является *бесконечно малой функцией более высокого (высшего) порядка малости, чем функция* $f_1(x)$, *при* $x \to x_0$. И обозначают этот факт так:

$$f_2(x) = o(f_1(x)) \text{ при } x \to x_0 \qquad (3.3)$$

(читается: $f_2(x)$ есть «*о* малое» от $f_1(x)$ при $x \to x_0$).

<u>Вариант 2:</u>

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 1 \text{ при } x \to x_0 \qquad (3.4)$$

Это значит, что при $x \to x_0$ бесконечно малые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ практически не отличаются друг от друга. В этом случае говорят, что *функция* $f_2(x)$ *эквивалентна (равносильна) функции* $f_1(x)$ *при* $x \to x_0$. И обозначается это так:

$$f_2(x) \sim f_1(x) \text{ при } x \to x_0 \qquad (3.5)$$

($\sim$ – это знак эквивалентности).

<u>Вариант 3:</u>

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = A \Leftrightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to A \text{ при } x \to x_0, \qquad (3.6)$$

где *A* – конечное число, не равное ни нулю, ни единице (эти два случая мы рассмотрели выше). Тогда, очевидно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{Af_1(x)}=1 \Leftrightarrow f_2(x)\sim Af_1(x) \text{ при } x\to x_0. \qquad (3.7)$$

В этом случае говорят, что бесконечно малые при $x\to x_0$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – *одного порядка малости*. И записывают этот факт так:

$$f_2(x)=O(f_1(x)) \text{ при } x\to x_0 \qquad (3.8)$$

(читается: $f_2(x)$ есть «O большое» от $f_1(x)$ при $x\to x_0$).

Вариант 4:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=\pm\infty \Leftrightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\to\pm\infty \text{ при } x\to x_0, \qquad (3.9)$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}=\frac{1}{\pm\infty}=0$$

А это значит, что $f_1(x)=o(f_2(x))$ при $x\to x_0$.

Пример 1. Показать, что

а) $\sin x\sim x$ при $x\to 0$ (x – угол в радианах); б) $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$;

в) $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$ при $x\to 0$; г) $tg\,x\sim x$ при $x\to 0$ (x – угол в радианах);

д) $arctg\,x\sim x$ при $x\to 0$; е) $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$;

ж) $\frac{\pi}{2}-\arccos x\sim x$ при $x\to 0$. (3.10)

Решение. Эквивалентность (3.5) означает выполнение предельного равенства (3.4). Поэтому для подтверждения эквивалентностей (а) - (ж) вычислим пределы (3.4) и покажем, что все они равны 1:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ – согласно (2.7);

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$ – согласно (2.7);

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{2}{1+1}=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}=?\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}=?\right)=\left|\begin{array}{l} \text{сделаем подстановку:} \\ arctg\,x=\alpha;\ \text{тогда}\ x=tg\,\alpha; \\ \alpha\to 0,\ \text{т.к.}\ x\to 0 \end{array}\right|=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{tg\,\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha}}=$

$=\dfrac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha}}=\left|\text{учтем (г)}\right|=\dfrac{1}{1}=1$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}=?\right)=\left|\begin{array}{l} \text{сделаем подстановку:} \\ \arcsin x=\alpha;\ \text{тогда}\ x=\sin\alpha; \\ \alpha\to 0,\ \text{т.к.}\ x\to 0 \end{array}\right|=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}=\dfrac{1}{1}=1$;

ж)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arccos x}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\left|\begin{array}{l} \text{сделаем подстановку:} \\ \dfrac{\pi}{2}-\arccos x=\alpha;\ \text{тогда}\ \arccos x=\dfrac{\pi}{2}-\alpha. \\ x=\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha;\ \alpha\to 0,\ \text{т.к.}\ x\to 0 \end{array}\right|=$$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1$. Итак, все эквивалентности (3.10) доказаны.

Свойства бесконечно малых функций

1. Если $f_2(x)=o(f_1(x))$ при $x\to x_0$, то $f_1(x)\pm f_2(x)\sim f_1(x)$ при $x\to x_0$.

Или, что то же самое,

$$f_1(x)\pm o(f_1(x))\sim f_1(x)\ \text{при}\ x\to x_0 \qquad (3.11)$$

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)\pm f_2(x)}{f_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[1\pm\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]=1\pm 0=1$$

2. Если $f_2(x)\sim f_1(x)$ при $x\to x_0$, то

$$f_2(x) - f_1(x) = o(f_1(x)) \text{ при } x \to x_0 \tag{3.12}$$

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x) - f_1(x)}{f_1(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f_2(x)}{f_1(x)} - 1\right] = 1 - 1 = 0$$

3. Если $f_2(x) \sim f_1(x)$ и $g_2(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{3.13}$$

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Этими свойствами бесконечно малых функций (особенно последним из них) часто пользуются при вычислении различного рода пределов, в которых фигурируют такие функции.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 8x}{4x^2} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \left| \begin{array}{l} \textit{учтем, согласно } (3.10), \textit{ что } \sin 8x \sim 8x, \\ \textit{а значит, } \sin^2 8x \sim 64x^2 \textit{ при } x \to 0 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{64x^2}{4x^2} = \lim_{x\to 0} 16 = 16$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \left| \begin{array}{l} \textit{учтем, что при } x \to 0 \\ \sin^2 \frac{x}{2} \sim \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x^3 - 2x^2} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \left| \begin{array}{l} \textit{учтем, согласно } (3.10), \textit{ что} \\ \ln(1-x^2) \sim -x^2 \textit{ при } x \to 0 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{2}$$

2. Бесконечно большие функции и их сравнение

Пусть

$$\lim_{x\to x_0} |f_1(x)| = \infty \text{ и } \lim_{x\to x_0} |f_2(x)| = \infty, \tag{3.14}$$

то есть функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ при $x \to x_0$ по абсолютной величине стремятся к бесконечности. Тогда они называются *бесконечно большими при*

$x \to x_0$. Сравнивают бесконечно большие функции по тому же принципу, что и бесконечно малые. А именно:

1) Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0, \qquad (3.15)$$

то функция $f_2(x)$ называется бесконечно большой функцией *низшего порядка роста*, чем бесконечно большая функция $f_1(x)$. А функция $f_1(x)$ – соответственно *высшего порядка роста*, чем $f_2(x)$.

В частности, очевидно, что функции $y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = e^x$ являются бесконечно большими при $x \to +\infty$, причем каждая последующая из них – высшего порядка роста, чем предыдущая. И вообще, с помощью правила Лопиталя (см. главу 4, §4) можно доказать, что при $x \to +\infty$ любая показательная функция $y = a^x$ ($a > 1$) является бесконечно большой функцией высшего порядка роста, чем любая степенная функция $y = x^n$ ($n > 0$). То есть

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (n > 0;\ a > 1) \qquad (3.16)$$

Иначе говоря, *любая показательная функция* $y = a^x$ *(*$a > 1$*) при* $x \to +\infty$ *растет быстрее, чем любая степенная функция* $y = x^n$ ($n > 0$).

2) Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1, \qquad (3.17)$$

то бесконечно большие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называется *эквивалентными (равносильными)*, и обозначается это так:

$$f_2(x) \sim f_1(x) \text{ при } x \to x_0 \qquad (3.18)$$

3) Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = A, \qquad (3.19)$$

где *A* – конечное число, $A \neq 0$ и $A \neq 1$, то функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называется функциями *одного порядка роста*. При этом, очевидно, что

$$f_2(x) \sim A \cdot f_1(x) \text{ при } x \to x_0 \qquad (3.20)$$

4) Если $f_2(x) \sim f_1(x)$ и $g_2(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$, то, как и для бесконечно малых функций, для бесконечно больших функций получаем равенство, аналогичное (3.13):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{3.21}$$

<u>Пример 5</u>. Показать, что при $x \to +\infty$:

а) $ax + b \sim ax$; б) $ax^2 + bx + c \sim ax^2$; в) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$

<u>Доказательство</u>. Учтем, что (3.18) равносильно (3.17). Поэтому вычислим соответствующие пределы (3.17) и убедимся, что все они равны 1:

а) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax + b}{ax} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + \dfrac{b}{ax}) = 1 + 0 = 1$;

б) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax^2 + bx + c}{ax^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + \dfrac{b}{ax} + \dfrac{c}{ax^2}) = 1 + 0 + 0 = 1$;

в)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = \lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + ... + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}) = 1 + 0 + ... + 0 = 1.$$

<u>Пример 6</u>.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{1 - 4x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ? \right) = \left| \begin{array}{l} \textit{учтем, что при } x \to \pm\infty \\ 2x^2 - 3x + 5 \sim 2x^2 \textit{ и } 1 - 4x^2 \sim -4x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{-4x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Упражнения

1. Показать, что сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций тоже являются бесконечно малыми функциями.

2. Показать, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

3. Доказать, что бесконечно малые при $x \to 0$ функции $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = x \cos \frac{1}{x}$ несравнимы между собой, то есть что предел их отношения при $x \to 0$ не существует.

4. Показать, что функция $4\sin^3 2x \sim 32x^3$ при $x \to 0$.

5. Показать, что $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x$ при $x \to 0$.

6. Сравнить бесконечно большие функции $f_1(x) = 2x^3 + 3x$ и $f_2(x) = (x+2)^3$ при $x \to +\infty$.

<u>*Ответ*</u>: $f_1(x) \sim 2 f_2(x)$ при $x \to +\infty$.

В заключение этой главы отметим, что пределы функций можно вычислять и с помощью интернета. Зайдя, например, на сайты https://math24.biz или https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/.

ГЛАВА 4
Дифференциальное исчисление

Дифференциальное исчисление – это раздел высшей математики, базирующийся на использовании таких ключевых для всей высшей математики понятий, как производные и дифференциалы функций. Эти понятия были введены в математику в конце 17 века Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем.

§ 1. Производная функции. Определение и смысл (геометрический и физический)

Производная функции рассматривалась в школьном курсе математики. Кратко повторим пройденное.

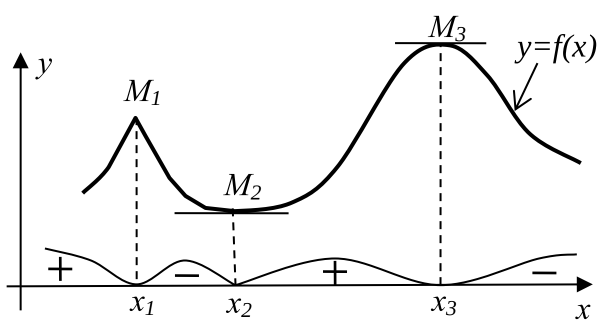


Рис. 2.1

Пусть $y = f(x)$ – некоторая непрерывная функция (ее график – сплошная линия) – рис. 2.1. Здесь (M_1, M_2, M_3,…) – вершины и впадины графика функции. А их проекции (x_1, x_2, x_3,…) на ось *ox* называются соответственно *точками максимума и минимума* функции. Эти точки имеют и общее название: *точки экстремума функции*. Или, как иногда добавляют, точки *локального* экстремума. Ну и, соответственно, точки *локального* максимума и точки *локального* минимума. Но мы это слово «локального» добавлять обычно не будем.

Повторим еще раз: точки экстремума (точки максимума и минимума) функции – это не вершины и впадины графика функции, а *только их абсциссы, то есть их проекции на ось ох.*

Интервал оси *ох*, на котором с увеличением аргумента x растет и функция y, называется *интервалом возрастания функции*. А интервал оси *ох*, на котором с увеличением аргумента x функция y убывает, называется *интервалом ее убывания.* В частности, на рис. 2.1 интервалы $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; x_3)$ – интервалы возрастания функции $y = f(x)$, они помечены знаком (+). А интервалы $(x_1; x_2)$ и $(x_3; +\infty)$ – интервалы ее убывания, они помечены знаком (-) .

Функция, возрастающая (убывающая) на некотором интервале, считается возрастающей (убывающей) *в каждой точке* x этого интервала.

Заметим, что возрастая или убывая, функция делает это для разных x, вообще говоря, неодинаково быстро. Например, возрастающая на интервале $(x_2; x_3)$ функция $y = f(x)$ (рис. 2.1) сначала для x, близких к x_2, растет медленно (график функции поднимается медленно); затем, по мере увеличения x, крутизна подъема графика функции возрастает, а значит, увеличивается и скорость роста функции; затем, по мере приближения x к x_3, скорость роста функции снижается. В точке x_3 рост функции прекращается и затем, для $x > x_3$, начинается убывание функции. И оно тоже, очевидно, происходит для разных x с разной скоростью.

Возникает естественная задача: оценить скорость изменения функции (скорость ее роста или убывания) в каждой точке x *численно*. Эта задача решена в конце 17 века Ньютоном и Лейбницем путем введения в математику понятия *производной функции*.

Вспомним, как вводится это понятие. Пусть $y = f(x)$ – некоторая непрерывная на интервале $(a; b)$ оси *ох* функция. Если на этом интервале взять конкретное значение аргумента x (конкретную точку x), то в этой точке функция y получит конкретное значение $y = f(x)$. А теперь изменим x на некоторое $\Delta x > 0$, то есть перейдем от x к $x + \Delta x$. Причем возьмем Δx такое, чтобы и точка $x + \Delta x$ тоже принадлежала интервалу $(a; b)$ (рис. 2.2).

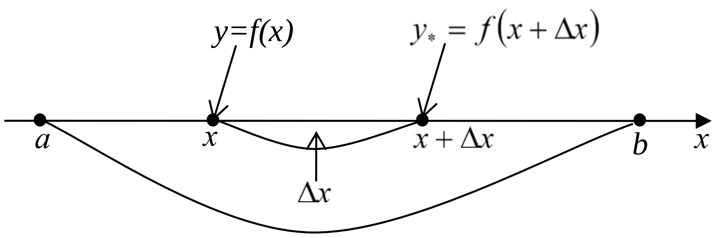


Рис. 2.2

Переход от x к $x + \Delta x$ означает, что аргумент x получил *приращение* (изменение) Δx. При этом, естественно, и функция $y = f(x)$ получит некоторое изменение (*приращение*) Δy :

$$\Delta y = y_* - y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1.1}$$

В силу непрерывности функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ (см. (2.5) главы 3).

Приращение Δy функции $y = f(x)$ зависит от исходного значения аргумента x и его приращения Δx. Оно может оказаться как положительным, так и отрицательным. Если окажется, что $\Delta y \succ 0$, то Δy - это действительно приращение функции, ибо функция приросла на положительную величину Δy. А если окажется, что $\Delta y \prec 0$, то, наоборот, функция получила не приращение, а убыль на величину Δy. Но и в этом случае величину Δy будем называть приращением функции. Просто это приращение будет не положительным, а отрицательным.

<u>*Пример 1*</u>. Найти приращение Δy функции $y = x^2$ при $a) x = 2$; $\Delta x = 0{,}1$ и *б*) $x = -3$; $\Delta x = 0{,}1$.

<u>*Решение.*</u> В данном случае $f(x) = x^2$. А значит, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$. Применяя формулу (1.1), получим:

$$a)\ \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2 + 0{,}1)^2 - 2^2 = 0{,}41$$
$$б)\ \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (-3 + 0{,}1)^2 - (-3)^2 = -0{,}59$$

Таким образом, при переходе от $x = 2$ к $x = 2 + 0{,}1 = 2{,}1$ функция $y = x^2$ получила приращение Δy=0,41, то есть возросла на 0,41. А при переходе от $x = -3$ к $x = -3 + 0{,}1 = -2{,}9$ эта функция получила приращение $\Delta y = -0{,}59$, то есть уменьшилась на 0,59. И это совершенно естественно, если вспомнить график функции $y = x^2$ (параболу), которая убывает при $x \prec 0$ и возрастает при $x \succ 0$.

Вычислив при данных *x* и Δx приращение Δy данной функции $y = f(x)$, мы должны как-то оценить величину этого приращения - много это или мало. Для этого его нужно с чем-то сравнить. Самый естественный путь – это сравнить приращение Δy функции с приращением Δx ее аргумента. Для этого рассматривается отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть рассматривается отношение приращения функции к приращению ее аргумента. Это отношение показывает, на сколько единиц *в среднем* изменится *y*, если *x* увеличится на единицу длины участка $[x; x + \Delta x]$. То есть отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ определяет *среднюю скорость* изменения функции $y = f(x)$ на участке $[x; x + \Delta x]$ оси *ox*.

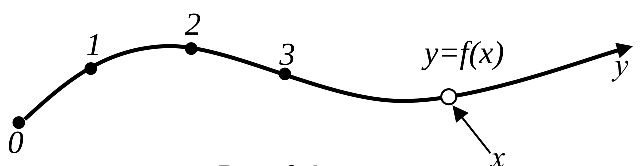


Рис. 2.3

Проиллюстрируем оправданность этого термина «средняя скорость» на механическом примере. Пусть функция $y = f(x)$ определяет *закон движения некоторой материальной точки по траектории ее движения*, где *x* – время, а *y* – координата точки на ее траектории (рис. 2.3). Как и на реальной дороге, координату *y* точки на траектории ее движения можно понимать как удаленность этой точки от некоторой начальной точки *O* (от стартовой точки). Зная закон движения $y = f(x)$ движущейся точки, мы можем определить координату *y* этой точки в любой интересующий нас момент времени *x*. Тогда за время Δx, прошедшее с момента *x* до момента

$x+\Delta x$, координата y движущейся точки изменится со значения $y=f(x)$ до значения $y_*=f(x+\Delta x)$, то есть точка пройдет путь (точнее, получит перемещение) Δy, определяемое формулой (1.1). Заметим, что это перемещение может быть и положительным, и отрицательным. Положительным оно будет, если точка удаляется от начальной точки *O* (у нее тогда будет расти *y*), а отрицательным – если точка приближается к точке *O* (у нее тогда *y* будет убывать). При этом средняя скорость движения за время Δx (с момента *x* до момента $x+\Delta x$) будет равна

$$v_{cp}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1.2}$$

Таким образом, выражение (1.2) действительно имеет смысл средней скорости изменения функции $y=f(x)$ на участке $[x;x+\Delta x]$.

Однако нас в конечном итоге интересует не средняя скорость изменения функции на участке, а истинная (мгновенная) скорость её изменения *в заданной точке x*. В частности, нас интересует *мгновенная скорость* движения точки по ее траектории (скорость *в заданный момент времени x*).

Чтобы получить эту скорость, нужно, очевидно, стянуть промежуток $[x;x+\Delta x]$ в точку *x*. А для этого длину Δx этого промежутка нужно устремить к нулю. При этом, в силу непрерывности функции $y=f(x)$, и Δy устремится к нулю, а отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ устремится к искомой мгновенной скорости изменения функции $y=f(x)$ в точке *x*. То есть мгновенная скорость $v(x)$ изменения функции $y=f(x)$ в точке *x* - это

$$v(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1.3}$$

В частности, $v(x)$ - это мгновенная скорость движения точки по ее траектории в момент времени *x,* если $y=f(x)$ - закон движения точки.

<u>Определение</u>. Предел (1.3), представляющий собой мгновенную скорость изменения функции $y=f(x)$ в точке *x,* называется *производной функции* $y=f(x)$ *в точке x*. Используется несколько различных обозначений этой производной:

$$y'=y'_x=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\dot{y} \tag{1.4}$$

Последнее из этих обозначений использовал Ньютон, предпоследнее - Лейбниц, а первые три ввел французский математик Коши. В дальнейшем для обозначения производной функции $y=f(x)$ мы в основном будем использовать обозначение Коши y' (или $f'(x)$), а при необходимости и y'_x (читается: производная функции y по переменной x). В скором будущем нам понадобится и обозначение Лейбница. А обозначение Ньютона использовать не будем – его в основном любят использовать физики.

Итак,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1.5}$$

или подробнее

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.6}$$

– *математическое определение* производной функции $y = f(x)$ в заданной точке x. Читается это определение так: *производная функции – это предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

Если x – время, а y – координата движущейся точки на траектории ее движения (рис. 2.3), то функция $y = f(x)$ определяет закон движения точки, а производная этой функции – мгновенную скорость движения точки по ее траектории в различные моменты времени x:

$$y' = f'(x) = v(x) \tag{1.7}$$

В этом состоит *физический смысл производной функции*.

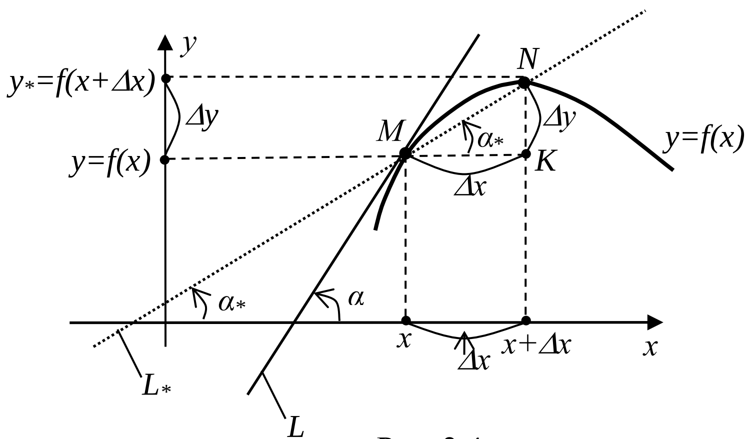


Рис. 2.4

Но у производной функции есть и наглядный *геометрический смысл*. Для его выяснения рассмотрим рис.2.4. Проведем к графику функции $y = f(x)$ через точку $M(x; f(x))$ и точку $N(x+\Delta x; f(x+\Delta x))$ секущую L_*, а через точку $M(x; f(x))$ касательную L. Их углы наклона к оси ox обозначим соответственно α_* и α. Из $\Delta\, MNK$ следует:

$$\frac{NK}{MK} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha_* \tag{1.8}$$

Если устремить Δx к нулю, то и Δy устремится к нулю, а точка N устремится к точке M. Соответственно секущая L_* устремится к касательной L, проведенной в точке *M*, а угол наклона α_* секущей устремится к углу наклона α касательной. То есть $\alpha_* \to \alpha$ при $\Delta x \to 0$. Но тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha_* \to tg\,\alpha \text{ при } \Delta x \to 0 \qquad (1.9)$$

Иначе говоря,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha, \qquad (1.10)$$

что с учетом (1.5) дает

$$y' = f'(x) = tg\,\alpha \qquad (1.11)$$

То есть *производная функции* $y = f(x)$ *в точке x – это тангенс угла наклона к оси ох касательной, проведенной к графику функции в точке, у которой абсцисса x* (см. рис. 2.5). В этом и состоит *геометрический смысл производной функции.*

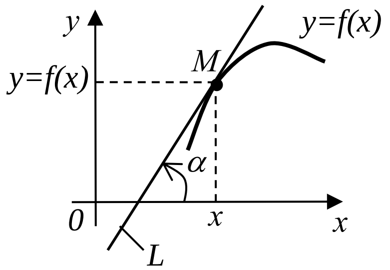


Рис. 2.5

Дифференцируемость функции в точке и на промежутке

Производная функции, согласно ее математическому определению (1.5) и (1.6) – это некий предел. Но, как и всякий предел, он может оказаться: а) конечным; б) бесконечным; в) вообще не существовать. Если для данного *x* имеет место вариант (а), то есть если при заданном *x* производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ *существует и конечна*, то эта функция называется *дифференцируемой в точке x*.

Функция, дифференцируемая в *каждой точке x* некоторого промежутка оси *ох* (например, интервала (*a*; *b*) или отрезка [*a*; *b*]) называется *дифференцируемой на этом промежутке*. Кстати, сама процедура вычисления производной функции называется ее *дифференцированием* (продифференцировать функцию – это значит найти ее производную).

Из геометрического смысла производной функции, определяемого равенством (1.11) и рис. 2.5, вытекают следующие два наглядных *необходимых и достаточных условия* дифференцируемости заданной функции $y = f(x)$ в заданной точке *x*:

1) Существование касательной к графику функции, проведенной в той точке этого графика, которая имеет абсциссу *x*.

2) Невертикальность этой касательной (ибо если $\alpha = 90^0$, то $tg\,\alpha = tg\,90°$ - не существует).

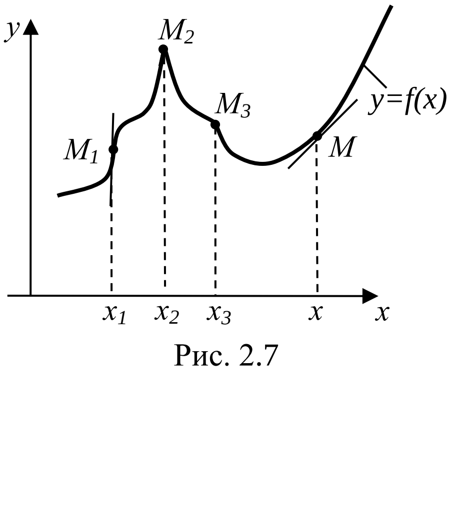


Рис. 2.7

Например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 2.7, не дифференцируема в точках x_1, x_2 и x_3.

Действительно, точке x_1 соответствует на графике функции точка M_1 с вертикальной касательной. Точке x_2 (точке максимума функции) соответствует остроконечная вершина M_2, касательная в которой не существует. Точке x_3 соответствует точка M_3 – точка излома графика функции, в которой тоже касательная не существует.

Во всех же остальных точках M графика функции касательную к графику провести можно, и она невертикальна. Значит, для всех остальных x, отличных от (x_1; x_2; x_3), существует производная функции. То есть во всех остальных точках x функция $y = f(x)$ дифференцируема.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке. Обратное не гарантировано.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Это значит, что ее производная $y' = f'(x)$ существует в точке x и конечна. То есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

существует и конечен. По определению предела это значит, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y' = f'(x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

То есть при малых Δx имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y'$, откуда $\Delta y \approx y' \cdot \Delta x$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем меньше Δx. Устремляя в нем $\Delta x \to 0$, получаем, что и $\Delta y \to 0$. А это, в силу (2.5) главы 3, и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x. Первая часть теоремы доказана.

Обратно, если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке x, то это еще не значит, что она дифференцируема в этой точке. Например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 2.7, непрерывна в любой точке x, ибо её график сплошной (без разрывов). И тем не менее в точках x_1, x_2 и x_3, как было показано выше, она не дифференцируема.

Упражнения

1. Опираясь на геометрический смысл производной показать, что
   а) производная функции $y = 2x - 3$ для любого x равна 2;
   б) производная функции $y = -3$ для любого x равна 0;
   в) производная функции $y = x^2$ для $x > 0$ положительна, а для $x < 0$ отрицательна.

2. Уравнение движения точки по ее траектории (рис. 2.3) имеет вид: $y=\sqrt{x}$. Показать, что точка тормозит при своем движении.

3. Доказать, что производная четной функции есть функция нечетная. И показать, что производная нечетной функции есть функция четная.

§ 2. Производные основных элементарных функций. Таблица производных. Правила дифференцирования

Опираясь на математическое определение производной (1.6), а также используя ее физический (1.7) и геометрический (1.11) смысл, можно найти производные всех основных элементарных функций.

Пример 1. Пусть $y=f(x)=C$ (*C* – произвольная константа). Найдем производную y' этой функции. То есть найдем производную C' константы *C*.

Решение. Её можно получить тремя способами.

а) Способ 1 – геометрический.

Графиком функции $y=C$ является горизонтальная прямая. Касательной к этой прямой, проведенной в любой ее точке, будет сама эта прямая. Ее угол наклона α к оси *ox* равен нулю. Но $tg\,0=0$. Значит, согласно (1.11), $y'=C'=0$.

б) Способ 2 – физический.

Функция $y=C$ от *x* не зависит, то есть с изменением *x* не меняется. А значит, скорость *v*(*x*) ее изменения равна нулю. Но ведь скорость изменения функции, согласно (1.7) – это производная функции. Таким образом, если $y=C$, то $y'=C'=0$. Физический смысл этого вывода очевиден: если координата *y* движущейся точки неизменна, то точка стоит. А значит, скорость ее движения равна нулю.

в) Способ 3 – математический.

Воспользуемся математическим определением (1.6) производной функции:

$$y'=C'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left|\begin{array}{l}\text{у нас } f(x)=C;\\ \text{тогда } f(x+\Delta x)=C\end{array}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

Итак, разными способами получаем один и тот же вывод: если $y=C$, то $y'=C'=0$.

Пример 2. Пусть $y=f(x)=x$. Найдем производную $y'=x'$ этой функции.

Решение. Его наиболее просто получить геометрическим способом. Графиком функции $y=x$ является прямая, представляющая собой биссектрису первого и третьего координатных углов. Ее угол наклона к оси *ox* составляет 45°. Касательная к этой прямой в любой ее точке (при любом *x*) совпадает с этой же прямой. Поэтому, опираясь на геометрический смысл производной (1.11), получаем: $y' = x' = tg\,45° = 1$. То есть $x' = 1$. Этот же результат, заметим, следует и из математического определения производной (1.6):

$$y' = x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \text{у нас } f(x) = x; \\ \text{тогда } f(x+\Delta x) = x + \Delta x \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

<u>Пример 3</u>. Пусть $y = f(x) = x^2$. Найдем производную $y' = (x^2)'$ этой функции.

<u>Решение</u>. Графиком функции $y = x^2$ является парабола. Касательная к ней в разных ее точках имеет разное направление (разный угол наклона α к оси *ox*). Поэтому использовать геометрическую формулу (1.11) для нахождения производной этой функции в данном случае затруднительно. Затруднительно использовать и физический смысл производной (1.7). Тогда остается воспользоваться её математическим определением (1.6):

$$y' = (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \text{у нас } f(x) = x^2; \\ \text{тогда } f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\cdot x \cdot \Delta x - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, если $y = x^2$, то $y' = (x^2)' = 2x$.

Используя математическое определение производной (1.6), можно найти производные всех основных элементарных функций. Приведем уже в готовом виде таблицу производных этих функций.

<u>Таблица производных основных элементарных функций</u>

1. $C' = 0$; 2. $x' = 1$; 3. $(x^2)' = 2x$; 4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$; 4*. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

4**. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$; 5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; 5*. $(e^x)' = e^x$; 6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

6*. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; 7. $(\sin x)' = \cos x$; 8. $(\cos x)' = -\sin x$; 9. $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10. $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; 11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 14. $(arcctg\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. (2.1)

Таблицу производных желательно выучить наизусть!

Обратим внимание на то, что: *а*) производные степенной и показательной функции (формулы 4 и 5) находятся по разным формулам; *б*) что из всех показательных функций a^x наиболее простую производную имеет функция e^x; *в*) что из всех логарифмических функций $\log_a x$ наиболее простую производную имеет натуральный логарифм $\ln x$.

Нахождение производных многих других элементарных функций (более сложных, не входящих в эту таблицу) осуществляется на основе следующих правил вычисления производных (*правил дифференцирования функций*):

$$1.\ (u+v)'=u'+v'; \quad 2.\ (u-v)'=u'-v'; \quad 3.\ (C\cdot u)'=C\cdot u';$$
$$4.\ (u\cdot v)'=u'\cdot v+uv'; \quad 5.\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \tag{2.2}$$

Здесь $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – любые две дифференцируемые функции, а C – любая константа.

Таблица производных (2.1) и правила дифференцирования (2.2) известны еще из курса школьной математики, поэтому их вывод, основанный на использовании математического определения производной (1.6), приводить не будем.

<u>*Пример 4*</u>. $y=2x^2-3x+5$; $y'=?$

<u>*Решение*</u>.

$$y'=(2x^2-3x+5)'=(2x^2)'-(3x)'+(5)'=2(x^2)'-3(x)'+(5)'=2\cdot 2x-3\cdot 1+0=4x-3$$

<u>*Пример 5*</u>. $y=\sqrt{x}$; $y'=?$

<u>*Решение*</u>.

$$y'=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\left|\text{учтем, что } (x^n)'=nx^{n-1}\right|=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

<u>*Пример 6*</u>. $y=(2x+3)\sin x$; $y'=?$

<u>*Решение*</u>.

$$y'=((2x+3)\cdot\sin x)'=\left|\begin{matrix}\text{учтем, что}\\ (u\cdot v)'=u'v+uv'\end{matrix}\right|=(2x+3)'\cdot\sin x+(2x+3)\cdot(\sin x)'=$$
$$=2\sin x+(2x+3)\cos x.$$

<u>*Пример 7*</u>. $y=\dfrac{1}{x}$; $y'=?$

<u>*Решение*</u>.

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=\left|\text{учтем, что } (x^n)'=nx^{n-1}\right|=-1\cdot x^{-2}=\frac{-1}{x^2}. \tag{2.3}$$

Другой способ:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left|\begin{matrix}\text{учтем, что}\\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}\end{matrix}\right| = \frac{1'\cdot x - 1\cdot x'}{x^2} = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad (2.4)$$

Производная сложной функции

Пусть $y = y(u)$, а $u = u(x)$ – любые две дифференцируемые функции своих аргументов. Тогда функция $y = y(u(x))$ – это так называемая *сложная функция от x* (она представляет собой функцию от функции). Найдем ее производную $y' = y'_x$ (производную от y по x). Для этого дадим аргументу x некоторое приращение Δx, то есть перейдем от x к $x + \Delta x$. Приращение Δx величины x вызовет некоторое приращение Δu величины u, а то, в свою очередь, вызовет некоторое приращение Δy величины y. Так как функции $y = y(u)$ и $u = u(x)$ являются, по условию, дифференцируемыми функциями своих аргументов, то они являются и непрерывными функциями своих аргументов (см. теорему в § 1). То есть при $\Delta x \to 0$ и $\Delta u \to 0$, и $\Delta y \to 0$. А тогда, согласно (1.5), получаем:

$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta u\to 0)}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u\cdot u'_x.$$

Итак, если $y = y(u(x))$ – сложная функция от x, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Или, опуская значок x (но подразумевая его), запишем короче:

$$y'_x = y'_u\cdot u'_x \Leftrightarrow y' = y'_u\cdot u' \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) представляет собой *правило вычисления производной (правило дифференцирования) сложной функции*.

Собственно говоря, суть правила (2.5) проста. А именно, если функция $y = y(x)$ – простая функция от x (из числа основных элементарных функций, чьи производные содержатся в таблице (2.1)), то ее производная и выглядит, и находится просто: $y' = y'_x$. А если $y = y(u)$, где $u = u(x)$ – две простых функции, то $y = y(u(x))$ – уже сложная функция от x. Ее производная $y' = y'_x$ по x находится уже по формуле (2.5): сначала находим производную функции $y = y(u)$ по переменной u (точно так же, как находим производную от функции $y = y(x)$ по переменной x), а затем умножаем ее на производную функции $u = u(x)$ по переменной x.

Чтобы сделать наглядным применение этого правила, приведем таблицу сравнения, содержащую производные простых и аналогичных им сложных функций от x:

Производные простых функций (x – независимая переменная)	Производные сложных функций ($u=u(x)$ – любая дифференцируемая функция)
1. $(x^2)'=2x$	1. $(u^2)'=2u\cdot u'$
2. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	2. $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$
4. $(e^x)'=e^x$	4. $(e^u)'=e^u\cdot u'$
5. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	5. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
6. $(\sin x)'=\cos x$	6. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
(……)	(……)

(2.6)

Таблица (2.6) наглядно иллюстрирует разницу между производными простых и сложных функций.

<u>*Пример 8*</u>. $y=\ln\sin x$; $y'=?$

<u>*Решение*</u>.

$$y'=(\ln\sin x)'=\left|\begin{array}{l}\text{учтем, что } (\ln x)'=1/x;\\ \text{значит, } (\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u';\\ \text{у нас } u=\sin x\end{array}\right|=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=ctg\,x$$

<u>*Пример 9*</u>. $y=\cos 3x$; $y'=?$

<u>*Решение*</u>.

$$y'=(\cos 3x)'=\left|\begin{array}{l}\text{учтем, что } (\cos x)'=-\sin x;\\ \text{значит, } (\cos u)'=-\sin u\cdot u';\\ \text{у нас } u=3x;\end{array}\right|=-\sin 3x\cdot(3x)'=-3\sin 3x$$

<u>*Пример*</u> *10*. $y=\sqrt{1-x^2}$; $y'=?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \left| \begin{array}{l} \textit{учтем, что } (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \\ \textit{значит, } (\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'; \\ \textit{у нас } u = 1-x^2; \end{array} \right| = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>Пример</u> 11. $y = tg^3 4x$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = \left(tg^3 4x\right)' = \left((tg\,4x)^3\right)' = \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что } (x^3)' = 3x^2; \\ \text{значит, } (u^3)' = 3u^2 \cdot u'; \\ \text{у нас } u = tg\,4x \end{array} \right| = 3(tg\,4x)^2 \cdot (tg\,4x)' =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что } (tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}; \\ \text{значит, } (tg\,u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'; \\ \text{у нас } u = 4x \end{array} \right| = 3tg^2 4x \cdot \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot (4x)' = \frac{12tg^2 4x}{\cos^2 4x}.$$

<u>Производная функции, заданной неявно</u>

Если функция $y = f(x)$ задана в неявном виде, то есть задана уравнением $F(x;y) = 0$ (в этом уравнении *y* не выражен через *x*, и выразить его не удается), то при нахождении производной y' такой функции поступают следующим образом:

1) Дифференцируют обе части уравнения $F(x;y) = 0$ по *x*, помня при этом, что *y* – это функция от *x*. В результате появляется некоторое равенство $\Phi(x;y;y') = 0$, содержащее искомую производную y'.

2) Выражают из полученного равенства эту производную.

Таким образом, производную y' функции *y*, заданной неявно уравнением $F(x;y) = 0$, находят по схеме:

$$F(x;y) = 0 \Rightarrow \left(F(x;y)\right)'_x = (0)'_x \Rightarrow \Phi(x;y;y') = 0 \Rightarrow y' = \varphi(x;y) \qquad (2.7)$$

<u>*Пример 12*</u>. Найти производную y' функции *y*, заданной неявно уравнением $\sin xy + y - x^2 = 0$.

<u>*Решение*</u>.

$$\sin xy + y - x^2 = 0 \Rightarrow (\sin xy + y - x^2)'_x = (0)'_x \Rightarrow \cos xy \cdot (xy)'_x + y' - 2x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos xy \cdot (x'y + xy') + y' - 2x = 0 \Rightarrow \cos xy \cdot (y + xy') + y' - 2x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xy'\cos xy + y' = 2x - y\cos xy \Rightarrow y' = \frac{2x - y\cos xy}{x\cos xy + 1}$$

<u>Производная функции, заданной параметрически</u>

Если функция задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \text{ - независимый параметр}), \tag{2.8}$$

то ее производную $y' = y'_x$ находят по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{2.9}$$

Подтвердим эту формулу. Пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – дифференцируемые функции параметра *t*. Зафиксируем некоторое *t*, а затем придадим ему приращение Δt. При этом *x* и *y* получат некоторые приращения Δx и Δy, причем при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$, и $\Delta y \to 0$ (функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – дифференцируемые, а значит, и непрерывные). А тогда

$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta t \to 0)}} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

<u>*Пример 13*</u>. Функция $y = y(x)$, заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},$$

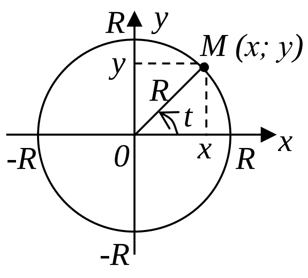


Рис. 2.8

представляет собой параметрическое уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом *R* (рис. 2.8).

Найдем производную $y' = y'_x$ этой функции. Используя формулу (2.9), получаем:

$$y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(R\sin t)'_t}{(R\cos t)'_t} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -ctg\, t$$

<u>Производные высших порядков</u>

Пусть $y = f(x)$ – некоторая заданная функция, а $y' = f'(x)$ – ее производная. Тогда $(y')' = y''$ – *производная второго порядка* функции y. Применяют и другие обозначения этой производной:

$$(y')' = y'' = y''_{x^2} = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \ddot{y} \tag{2.10}$$

Далее,

$$(y'')' = y''' = y'''_{x^3} = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \dddot{y} \tag{2.11}$$

– *производная третьего порядка* функции y. И т.д. Кстати, обычную производную $y' = f'(x)$ часто называют *производной первого порядка*.

Пример 14. $y = \sin x$; $y''' = ?$

Решение. Чтобы найти y''', сначала нужно найти y' и y'':

$$y' = (\sin x)' = \cos x\,;\ y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x\,;\ y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x\,.$$

Пример 15. Функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 = 4$. Найти y''.

Решение. Сначала найдем y':

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (x^2 + y^2)'_x = (4)'_x \Rightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}\,.$$

Теперь найдем и y'':

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{1 \cdot y - x \cdot (-x/y)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = \left|\begin{matrix}\text{учтем, что}\\ x^2 + y^2 = 4\end{matrix}\right| = -\frac{4}{y^3}$$

Пример 16. Функция $y = f(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$.

Найти $y'' = y''_{x^2}$.

Решение. Сначала найдем $y' = y'_x$: $y'_x = -ctg\, t$ (см. пример 13). А теперь найдем $y'' = y''_{x^2}$, опять используя формулу (2.9):

$$y'' = y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-ctg\, t)'_t}{(R\cos t)'_t} = \frac{1/\sin^2 t}{-R\sin t} = -\frac{1}{R\sin^3 t}\,.$$

Физический смысл производной второго порядка

Если $y = f(x)$ – уравнение движения точки по ее траектории (см. рис. 2.3), то, как мы знаем, ее производная $y' = f'(x)$ (производная первого порядка) представляет собой скорость $v(x)$ движения точки (мгновенную скорость движения) – см. (1.7). Но тогда производная второго порядка $y''=(y')'=v'(x)$ будет иметь смысл «скорость изменения скорости» движения точки. В физике такая величина называется ускорением. Поэтому

$$y''=f''(x)=v'(x)=a(x) \tag{2.12}$$

– *ускорение движения точки* в момент *x*. В этом и состоит физический смысл производной второго порядка.

Пример 17. Как известно, уравнение движения свободно падающего в безвоздушном пространстве тела, начавшего свое падение в момент $t=0$, имеет вид: $s=\dfrac{gt^2}{2}$ (*s* – путь, пройденный падающим телом за время *t*). Найдем скорость $v=v(t)$ и ускорение $a=a(t)$ падающего тела:

$$v=s'=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=\frac{g}{2}(t^2)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt;$$

$$a=s''=(s')'=v'=(gt)'=g.$$

То есть ускорение *a* падающего тела неизменно и равно *g* – ускорению свободного падения ($g\approx 9{,}8$ м/сек^2). А скорость *v* падающего тела возрастает пропорционально времени по формуле $v=gt$.

Упражнения

1. Найти угол наклона к оси *ox* касательной, проведенной к параболе $y=x^2$ в точке $M(2;4)$.

Ответ: $\alpha=arctg\,4\approx 76^\circ$.

2. Найти на параболе $y=x^2$ такую точку $M(x;y)$, чтобы касательная к параболе, проведенная в этой точке, составила с осью *ox* угол $\alpha=45^\circ$.

Ответ: $M(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$.

3. В момент времени $t=1$ найти скорость *v* и ускорение *a* точки, движущейся по оси *ox* по закону $x=5-2t+10t^2$.

Ответ: $v(1)=18$; $a(1)=20$.

4. Найти производную $y'=y'_x$ функций:

а) $y=\dfrac{1}{x^2}$; б) $y=\sqrt{8-x^3}$; в) $y=xe^{-3x}$; г) $y+arctg\,y=x$; д) $\begin{cases} x=R(t-\sin t) \\ y=R(1-\cos t) \end{cases}$

Ответ: а) $y' = -\dfrac{2}{x^3}$; б) $y' = \dfrac{-3x^2}{2\sqrt{8-x^3}}$; в) $y' = (1-3x)e^{-3x}$;

г) $y' = \dfrac{y^2+1}{y^2+2}$; д) $y' = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

5. Найти производную $y'' = y''_{x^2}$ функций:

а) $y = \cos^2 4x$; б) $x - \sin 2y = 0$; в) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$.

Ответ: а) $y'' = -32\cos 8x$; б) $y'' = \dfrac{\sin 2y}{2\cos^3 2y}$; в) $y'' = \dfrac{t^2+1}{4t^3}$.

9. Найти производную функции $y = (a+bx)^2$. Причем сделать это двумя способами: 1) раскрыв квадрат разности; 2) не раскрывая его.
Ответ: $y' = 2b(ax+b)$.

10. Найти производные функций: а) $y = (a-bx)^3$; б) $y = (1-5x^2)^{10}$.
Ответ: а) $y' = -3b(a-bx)^2$; б) $y' = -100x(1-5x^2)^9$.

11. Найти производные функций: а) $y = Sin^2 4x$; б) $y = \sqrt{1+Cos^3 2x}$.
Ответ: а) $y' = 4Sin8x$; б) $y' = -\dfrac{3Cos^2 2x \cdot Sin2x}{\sqrt{1+Cos^3 x}}$.

12. Найти производные функций: а) $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$; б) $y = 2xe^{-x^2}$;

в) $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$.

Ответ: а) $y' = \dfrac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$; б) $y' = 2(1-2x^2)e^{-x^2}$; в) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

13. $f(x) = \dfrac{Cos^2 x}{1+Sin^2 x}$. Показать, что $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$.

14. Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$. Найти $y'(0)$. *Ответ*: $y'(0) = \dfrac{1}{3}$.

15. Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x\ln y - y\ln x = 1$. Найти $y'(1)$. *Ответ*: $y'(1) = e^2$.

16. Показать, что функция $y = -\dfrac{e^{-x^2}}{2x^2}$ удовлетворяет уравнению $xy' + 2y = e^{-x^2}$.

17. Показать, что функция $y = xe^{-\frac{1}{x}}$ удовлетворяет уравнению $x^3y'' - xy' + y = 0$.

18. Точка движется по оси ox по закону $x = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ (x - координата движущейся точки, t - время). Определить скорость и ускорение точки. В какие моменты времени точка меняет направление своего движения? Показать на оси ox схему движения точки.

В заключение этого параграфа отметим, что тем, кто затрудняется вычислить нужную ему производную, может помочь интернет. Например, могут помочь уже неоднократно упоминавшиеся выше сайты https://ru.onlinemschool.com, https://math24.biz или https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/.

§ 3. Исследование функций с помощью производных

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ возрастает на некотором интервале $(a;b)$ оси ox (с ростом x растет и y) и дифференцируема на этом интервале, то для любого x из этого интервала $y' = f'(x) > 0$ (производная имеет знак (+)). А если она убывает на этом интервале (y убывает с ростом x) и дифференцируема на нем, то для любого x из этого интервала $y' = f'(x) < 0$ (производная имеет знак (–)).

Доказательство.

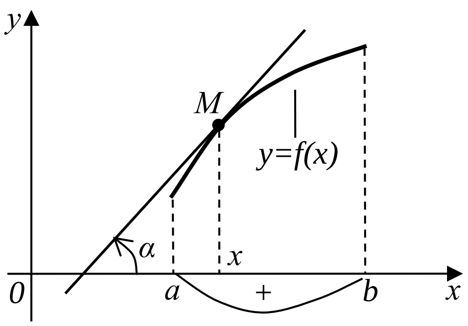


Рис. 2.9

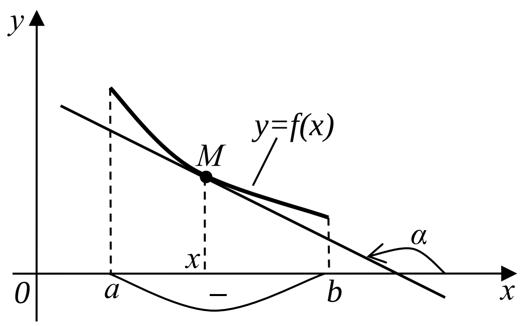


Рис. 2.10

Рассмотрим сначала рис. 2.9. На нем изображен график возрастающей и дифференцируемой на интервале $(a;b)$ функции $y = f(x)$. В каждой точке M

этого графика касательная составляет с осью *ох* острый угол α ($0° < \alpha < 90°$). Но тангенсы острых углов, как известно, положительны. Значит, согласно геометрическому смыслу производной (1.11), и производная $y' = f'(x)$ положительна для любых x из интервала $(a;b)$ возрастания функции.

А теперь рассмотрим рис. 2.10, на котором изображен график убывающей на интервале $(a;b)$ функции $y = f(x)$. Здесь для любой точки *М* графика функции (а значит, для любого x из интервала $(a;b)$) угол α наклона касательной, проведенной к графику функции, тупой ($90° < \alpha < 180°$). Но тангенсы таких углов отрицательны. А значит, согласно (1.11), и производная $y' = f'(x)$ отрицательна.

Следствие теоремы 1. Если на некотором интервале $(a;b)$ оси *ох* в любой его точке x производная функции $y = f(x)$ положительна, то функция возрастает на этом интервале. А если отрицательна – то убывает. Это следствие играет очень важную роль в исследовании функций. Оно позволяет по знаку производной функции определять, растет или убывает функция, и где именно (для каких x) растет, и где (для каких x) убывает.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Ее производная $y' = 2x$. Она положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$. Значит, при $x > 0$ функция $y = x^2$ возрастает, а при $x < 0$ она убывает. График этой функции (всем известная парабола) наглядно подтверждает сказанное.

Применение производной функции к нахождению точек экстремума функции

Напомним (см. § 1), что термин «точки экстремума» – это общее название точек максимума и минимума функции. А под ними, в свою очередь, понимаются абсциссы вершин и впадин графика функции (то есть проекции вершин и впадин на ось оx). Или, если не прибегать к геометрической трактовке, точки экстремума функции – это те значения ее аргумента x, при которых функция $y = f(x)$ принимает экстремальные (пиковые) значения – максимальные или минимальные. Точек экстремума у функции $y = f(x)$ столько, сколько вершин и впадин у ее графика.

Рассмотрим рис. 2.11. На нем изображен график непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей и интервалы возрастания, и интервалы убывания, и точки экстремума:

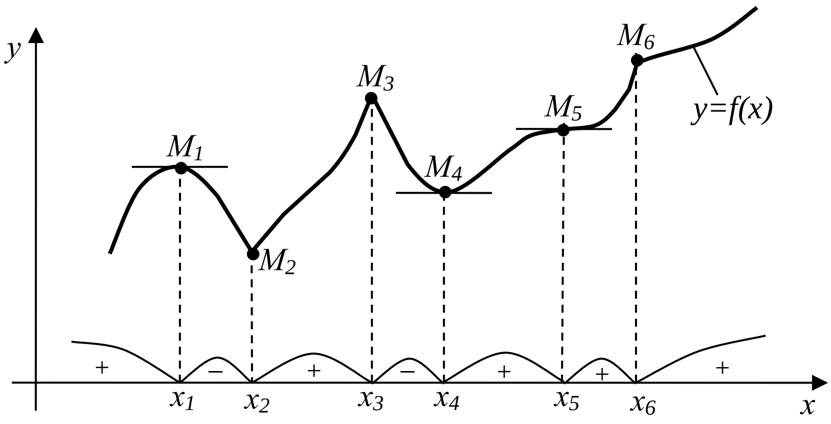


Рис. 2.11

Интервалы возрастания функции помечены знаком (+), а интервалы убывания – знаком (–). Согласно доказанной выше теореме 1, это заодно и знаки производной функции $y = f(x)$.

Точками экстремума данной функции являются точки (x_1, x_2, x_3, x_4). Причем точки x_1 и x_3 – точки максимума, а x_2 и x_4 – точки минимума. Точки x_5 и x_6 точками экстремума функции не являются, так как соответствующие им точки графика M_5 и M_6 – не вершины и не впадины этого графика.

Точки экстремума разделяют собой интервалы возрастания и убывания функции. В точках максимума совершается переход от возрастания функции (слева от точки максимума) к ее убыванию (справа от точки максимума). То есть в точках максимума знак производной функции меняется с (+) слева на (–) справа. А в точках минимума, наоборот, совершается переход от убывания функции к ее возрастанию. То есть в точках минимума знак производной функции меняется с (–) слева на (+) справа.

Сами же точки экстремума не принадлежат ни к интервалам возрастания, ни к интервалам убывания функции. Потому в точках экстремума производная не может быть ни положительной, ни отрицательной. Значит, в этих точках она или равна нулю, или ее не существует вообще.

Этот вывод понятен и с геометрической точки зрения. Действительно, производная функции, согласно ее геометрическому смыслу (1.11) и рис. 2.5, связана с касательной к графику функции. А именно, представляет собой тангенс угла наклона этой касательной к оси *ox*. Но точкам экстремума функции соответствуют на ее графике вершины и впадины, в которых касательная к графику или параллельна оси *ox* (если вершина или впадина графика округлая, то есть гладкая), или эта касательная отсутствует вообще (если вершина или впадина острая). В первом случае угол наклона α касательной к оси *ox* равен нулю. Значит, и $tg\,\alpha = 0$, а значит, и производная $y' = f'(x) = 0$. Во втором случае угол α не существует вообще, а значит, не существует для данной точки экстремума *x* и производная $y' = f'(x)$. В частности, для рис. 2.11 имеем:

$$y'(x_1) = 0; \quad y'(x_2) \text{ – не сущ.}; \quad y'(x_3) \text{ – не сущ.}; \quad y'(x_4) = 0.$$

Итак, в точках экстремума производная функции или равна нулю, или не существует.

Однако не любая точка x, в которой производная равна нулю или не существует, непременно будет точкой экстремума. В частности, на рис. 2.11 $y'(x_5)=0$; $y'(x_6)$ не существует, и тем не менее ни точка x_5, ни точка x_6 не являются точками экстремума функции $y=f(x)$.

Все сказанное выше о точках экстремума функции можно оформить в виде теоремы.

Теорема 2. Необходимое условие экстремума.

Для того, чтобы некоторая точка x являлась точкой экстремума функции $f(x)$, *необходимо, чтобы в этой точке производная* $y'=f'(x)$ *функции или равнялась нулю, или не существовала. Это условие не является достаточным*.

Таким образом, лишь те точки (значения x), в которых производная $y'=f'(x)$ функции равна нулю или не существует, могут быть точками экстремума этой функции. Но еще не факт, что все такие точки будут точками экстремума. Иначе говоря, точки (значения x), в которых $y'=f'(x)=0$ или $y'=f'(x)$ не существует, являются *лишь подозрительными на экстремум*. Чтобы выяснить суть каждой подозрительной точки, нужно посмотреть знак производной слева и справа от неё. Здесь возможны три варианта:

1) Если слева от подозрительной на экстремум точки x знак производной (+), а справа (–), то эта точка – точка максимума функции.
2) Если слева от подозрительной на экстремум точки x знак производной (–), а справа (+), то эта точка – точка минимума функции.
3) Если слева и справа от подозрительной на экстремум точки x знак производной один и тот же, то это не точка экстремума функции.

Сказанное наглядно иллюстрирует рис. 2.11. Таким образом, становится понятной и очевидной следующая

Схема исследования функции $y=f(x)$ *на возрастание-убывание и точки экстремума*

1. Стандартное начало исследования любой функции таково: находим область ее определения. То есть находим все те значения x, для которых существует (можно найти) значение функции $y=f(x)$. Заодно устанавливаем интервалы непрерывности и точки разрыва функции.

2. Находим производную $y'=f'(x)$.

3. Находим значения x (точки x), подозрительные на экстремум. То есть находим те точки оси *ox*, в которых производная функции или равна нулю, или не существует:

а) $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=(x_1;x_2;...)$

б) y' не существует $\Rightarrow x=(x_1^*;x_2^*;...)$

4. Наносим все найденные в пунктах (а) и (б) подозрительные на экстремум точки на область определения функции (на ось *ох*) и фиксируем (например, дугами) интервалы, на которые разобьется область определения этими точками. Так как внутри каждого такого интервала производная функции существует и не обращается в нуль, то в каждом интервале производная сохраняет свой знак, который может измениться лишь при переходе к другому интервалу. С помощью вычисления производной в пробных внутренних точках интервалов определяем знак производной в каждом интервале. По найденным знакам производной устанавливаем интервалы возрастания и убывания функции, а по смене знака производной определяем точки экстремума функции (точки максимума и минимума).

5. В найденных точках максимума и минимума вычисляем значения функции $y = f(x)$ и тем самым определяем вершины и впадины графика функции, отмечая заодно, гладкие они или острые.

Пример 1. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2$ на возрастание-убывание и точки экстремума.

Решение. Действуем по изложенной выше схеме.

1. Находим область определения функции. Функция $y = x^3 - 3x^2$ определена (а следовательно, и непрерывна) для любых *x*, то есть на всей числовой оси *ох* $(-\infty < x < \infty)$. Значит, её график – сплошная (без разрывов) линия.

2. Найдем производную y':

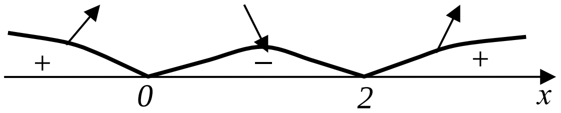
$$y' = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

3. Найдем точки *x* (значения *x*), подозрительные на экстремум:

$$\text{а) } y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0;\ x_2 = 2).$$

$$\text{б) } y' \text{ не существует} \Rightarrow \text{таких } x \text{ нет.}$$

4. Нанесем найденные подозрительные на экстремум точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ на область определения функции (на ось *ох*). Ось *ох* этими точками разобьется на три интервала:



$$y' = 3x(x-2)$$

С помощью пробных точек, взятых на каждом интервале, определяем знаки производной $y' = 3x(x-2)$ в этих интервалах (они отмечены на рис. выше). Тем самым устанавливаем интервалы возрастания функции $y = x^3 - 3x^2$ (они помечены стрелкой вверх) и интервал ее убывания (стрелка вниз), а также устанавливаем, что точка $x_1 = 0$ – точка максимума функции, а точка $x_2 = 2$ – точка ее минимума.

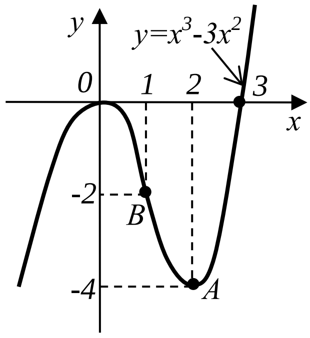


Рис. 2.12

5. Находим (вычисляем) значения функции $y = x^3 - 3x^2$ в точках ее максимума и минимума, устанавливая тем самым вершины и впадины графика функции:

$$x = x_{\max} = 0 \Rightarrow y = y_{\max} = 0;$$

Точка $O(0;0)$ – вершина графика функции (гладкая, т.к. $y'(0) = 0$).

$$x = x_{\min} = 2 \Rightarrow y = y_{\min} = -4;$$

Точка $A(2;4)$ – впадина графика функции (гладкая, т.к. $y'(2) = 0$).

6. В дополнение к проведенному исследованию найдем еще точки пересечения графика функции с осями координат:

а) С осью *ox*:

$$y = 0 \Leftrightarrow y = x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0;\ x_2 = 3)$$

б) С осью *oy*: $x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.

А теперь строим этот график (рис. 2.12).

Заметим, что анализировать функции и строить их графики сейчас помогает интернет. Для этого можно, например, использовать сайт https://math24.biz.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции (глобального максимума и глобального минимума)

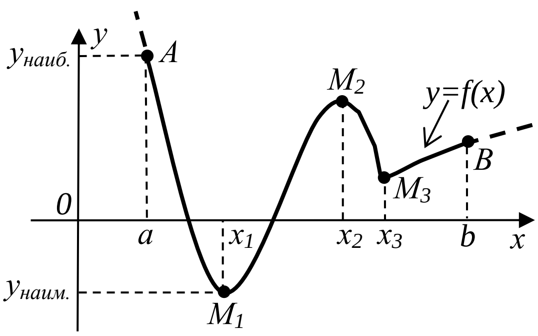


Рис 2.13

Пусть $y = f(x)$ – функция, непрерывная на некотором отрезке $[a;b]$ оси *ox* (рис. 2.13)

Ставится задача: указать схему нахождения тех точек отрезка $[a;b]$ оси *ox*, в которых функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего значения $y_{наиб.}$ и своего наименьшего значения $y_{наим.}$, и найти эти $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$.

Кстати, эти $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$ называют *глобальным максимумом и глобальным минимумом* функции.

Сразу отметим, что такие точки x, в которых имеет место (достигается) и глобальный максимум, и глобальный минимум, на отрезке $[a;b]$ заведомо существуют (это доказано). А вот на интервале $(a;b)$ их может и не быть. То есть на интервале функция своих наибольшего и наименьшего значений может и не иметь. Например, функция $y=x^2$ на отрезке $[0;2]$ имеет свое наименьшее значение (глобальный минимум) $y_{наим.}=0$, и достигает она его в точке $x=0$. И она имеет свое наибольшее значение (глобальный максимум) $y_{наиб.}=4$, и достигает она его в точке $x=2$. А вот на интервале $(0;2)$ своих наибольшего и наименьшего значений функция $y=x^2$, очевидно, не имеет (не достигает).

Вернемся к рис. 2.13, на котором изображена произвольная непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$. Здесь $y_{наиб.}$ достигается функцией на конце a отрезка $[a;b]$, а $y_{наим.}$– в точке x_1, являющейся одной из точек минимума функции. И вообще, очевидно, что и при любой другой форме графика непрерывной функции наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a;b]$ достигаются ею или в её точках экстремума, содержащихся на этом отрезке, или на концах отрезка. Отсюда вытекает следующая

схема нахождения $y_{наиб.}$ *и* $y_{наим.}$ *функции* $y=f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$:

1. Находим производную $y'=f'(x)$.

2. Находим принадлежащие отрезку $[a;b]$ точки, подозрительные на экстремум.

3. Не исследуя этих точек, вычисляем значение функции $y=f(x)$ во всех найденных подозрительных точках, а также на концах a и b отрезка $[a;b]$. Из всех найденных значений y выбираем $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$. А заодно устанавливаем, в каких точках отрезка $[a;b]$ эти $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$ достигаются.

Пример 2. На отрезке $[-1;3]$ найти наибольшее $y_{наиб.}$ и наименьшее $y_{наим.}$ значения функции $y=x^4-8x^2$.

Решение. Реализуем изложенную выше схему.

1. Найдем y':

$$y'=(x^4-8x^2)'=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x-2)(x+2).$$

2. Найдем на отрезке $[-1;3]$ точки (значения x), подозрительные на экстремум:

а) $y'=0 \Leftrightarrow 4x(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow (x_1=0;\ x_2=2;\ x_3=-2)$.

б) y' не существует $\Rightarrow$ таких x нет.

На отрезке $[-1;3]$ содержатся лишь две подозрительные на экстремум точки: это $x_1=0$ и $x_2=2$.

3. Вычисляем значении функции $y = x^4 - 8x^2$ в обеих найденных подозрительных точках, а также на концах отрезка, и выберем из найденных значений функции наибольшее и наименьшее:

$$y(0) = 0;\ y(2) = -16;\ y(-1) = -7;\ y(3) = 9$$

Ответ: $y_{наиб.} = y(3) = 9$; $y_{наим.} = y(2) = -16$.

Упражнения

1. Сеткой длиной 60 метров нужно огородить прямоугольную площадку, примыкающую к стене. Каковы должны быть размеры этой площадки, чтобы ее площадь была максимальной?

Ответ: 30 м × 15 м.

2. Из квадратного листа картона со стороной *a* вырезаются по углам одинаковые квадраты, а из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был максимальным?

Ответ: $\frac{1}{6}a$.

3. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была максимальной.

Ответ: 20 см.

4. В полукруг радиуса *R* вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить размеры и площадь этого треугольника.

Ответ: $S_{\max} = R^2$ при высоте прямоугольника $\frac{R}{\sqrt{2}}$ и длине $R\sqrt{2}$.

5. Из круга вырезается сектор, содержащий угол α, а затем сектор сворачивается в конус (в кулек). При каком значении угла α объем конуса будет наибольшим?

Ответ: при $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 294^0$.

6. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом $32\,м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ: 4×4×2 *м*.

7. Вблизи завода *A* проходит железная дорога к городу *B*. Под каким углом α к железной дороге нужно провести шоссе, соединяющее завод *A* с железной

дорогой, чтобы доставка продукции до города *B* была максимально дешевой, если стоимость 1 тонны-километра при перевозке по шоссе в m раз дороже, чем по железной дороге?

<u>*Ответ*</u>: $\cos\alpha = \frac{1}{m}$.

8. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему силой F. Под каким углом α к горизонту нужно направить силу F, чтобы величина ее была наименьшей? Коэффициент трения покоя между грузом и плоскостью равен k.

<u>*Ответ*</u>: $tg\alpha = k$. При этом $F = \frac{kP}{Cos\alpha + kSin\alpha}$.

9*. Известно, что произведение двух положительных чисел не меньше их суммы. Каково наименьшее возможное значение суммы таких чисел?

<u>*Ответ*</u>: 4.

§ 4. Некоторые другие приложения производной

4.1 Приближенное решение уравнений методом половинного деления

Пусть требуется решить некоторое уравнение $f(x)=0$. Решить его – это значит найти все его корни. То есть найти те значения неизвестной *x*, которые удовлетворят уравнению. Корни уравнения $f(x)=0$ имеют и наглядный геометрический смысл: это точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью *ox*.

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная на заданном отрезке $[a;b]$ функция, то есть ее график – сплошная (непрерывная) линия для всех *x* этого отрезка. Тогда очевидно следующее: если на концах этого отрезка (в точках a и b) функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков, то график этой функции непременно пересечет отрезок $[a;b]$ оси *ox* хотя бы один раз. А значит, уравнение $f(x)=0$ заведомо будет иметь на этом отрезке хотя бы один корень (один корень x_1 на рис. 2.14 (*а*) и три корня (x_1, x_2, x_3) на рис. 2.14 (*б*)).

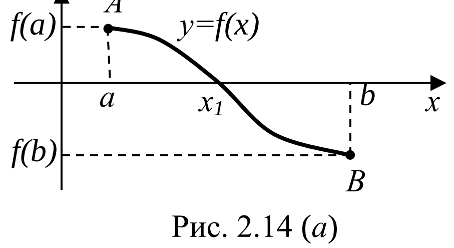


Рис. 2.14 (*а*)

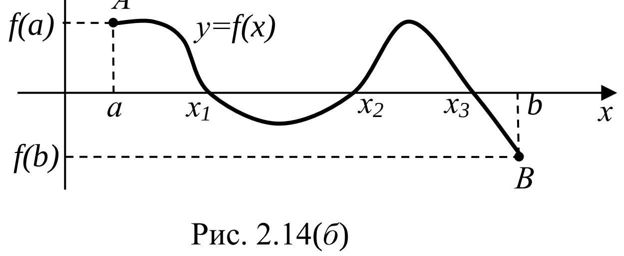


Рис. 2.14(*б*)

В частности, если на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$ дифференцируема (это значит, что на отрезке $[a;b]$ в каждой его точке x существует производная $y'=f'(x)$), и эта производная на всем отрезке сохраняет свой знак, то при знаке (+) этой производной функция $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ монотонно растет, а при знаке (–) монотонно убывает. В любом из этих вариантов график функции $y=f(x)$, имеющей на концах отрезка $[a;b]$ значения разных знаков, пересечет этот отрезок только один раз (как, например, на рис. 2.14 (*а*)). А значит, уравнение $f(x)=0$ будет иметь на отрезке $[a;b]$ только один корень x_1.

Простейшим и вместе с тем эффективным методом численного нахождения этого корня x_1 является *метод половинного деления*. Суть его в следующем:

1) Находим середину c_1 отрезка $[a;b]$ и вычисляем $f(c_1)$. Искомый корень x_1 окажется, очевидно, в той из половин $[a;c_1]$ или $[c_1;b]$ отрезка $[a;b]$, на концах которой функция $y=f(x)$ имеет разные знаки. Выбираем эту половину.

2) Находим середину c_2 той половины отрезка $[a;b]$, на которой находится искомый корень x_1, и вычисляем $f(c_2)$. Выбираем ту половину найденной в пункте 1 половины, на концах которой функция $y=f(x)$ имеет разные знаки. Именно на ней находится искомый корень x_1 уравнения $f(x)=0$.

3) Потом полученный отрезок (четвертинку исходного отрезка $[a;b]$) опять делим пополам, и т.д.

В итоге, последовательно сужая промежуток оси *ox*, на котором содержится искомый корень x_1 уравнения $f(x)=0$, через несколько шагов получим достаточно узкий промежуток. Например, через 10 шагов исходный промежуток $[a;b]$ уменьшится в $2^{10}\approx 1000$ раз, через 20 шагов – в $2^{20}\approx 1$ миллион раз, и т.д. Любая точка этого промежутка (например, его середина) может быть принята за приближенное значение искомого корня x_1. И корень этот, очевидно, может быть найден с любой заданной точностью.

Если известно, что уравнение $f(x)=0$ имеет несколько корней (x_1, x_2, …) – см. например, рис. 2.19 (*б*), то отделяя каждый из них своим промежутком и используя для каждого такого промежутка изложенную выше схему половинного деления, можно найти все эти корни. А чтобы узнать, сколько корней имеется у данного уравнения $f(x)=0$, следует представлять себе, хотя бы в общих чертах, график функции $y=f(x)$. То есть нужно исследовать эту функцию. И в этом исследовании главное – это определение интервалов непрерывности и точек разрыва функции, определение интервалов возрастания-убывания и точек экстремума.

Пример 1. Определить количество корней уравнения $x^3-3x^2+2=0$ и отделить некоторым промежутком каждый из них – с тем, чтобы в дальнейшем можно было определить эти корни методом половинного деления.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^3 - 3x + 2$. Эта функция определена (а, следовательно, и непрерывна) для всех x, $-\infty < x < +\infty$. Исследуя ее на возрастание-убывание и точки экстремума (проделайте это по изложенной выше схеме самостоятельно), устанавливаем, что интервалы $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ являются интервалами возрастания функции, а интервал $(0; 2)$ – интервал ее убывания; $x = 0$ – точка максимума функции, а точка $A(0; 2)$ – вершина ее графика; $x = 2$ – точка минимума функции, а точка $B(2; -2)$ – впадина ее графика. При $x \to +\infty$ функция $y \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ функция $y \to -\infty$. По этим результатам можно уже схематично построить график функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (рис. 2.15). Из этого графика видим, что он пересекает ось *ox* три раза – в точках (x_1, x_2, x_3). То есть уравнение $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ имеет три корня (x_1, x_2, x_3). Корень x_1 находится на промежутке $[-1; 0]$; корень x_2 – на промежутке $[0; 2]$, корень x_3 – на промежутке $[2; 3]$. Каждый из них с любой заданной точностью может быть найден изложенным выше методом половинного деления.

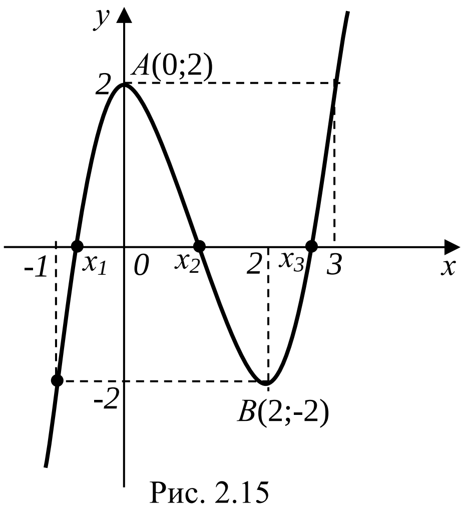


Рис. 2.15

Впрочем, так как $x_2 = 1$ – точное значение второго корня, то можно точно найти и значения корней x_1 и x_3:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left\{ x_2 = 1;\ x_1 = 1 - \sqrt{3};\ x_3 = 1 + \sqrt{3} \right\}$$

Кроме метода половинного деления, есть и другие методы решения различных уравнений. Например, метод хорд и касательных, метод последовательных приближений (итерационный метод), и др. В настоящее время интернет избавил нас от необходимости вникать в тонкости всех этих методов. Просто вбиваем в строку поисковика запрос «решить уравнение онлайн», выбираем подходящий сайт, например https://math24.biz, вводим свое уравнение и получаем его корни.

4.2 Правило Лопиталя вычисления пределов

Это правило состоит в следующем. Если требуется найти предел вида

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \tag{4.1}$$

где x_0 – число или символ $\pm\infty$, и этот предел приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}, \tag{4.2}$$

Словесная формулировка правила Лопиталя (4.2) такова: предел отношения бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

Доказательство правила Лопиталя довольно громоздко, поэтому приводить его не будем.

Примечание. Предел отношения производных, стоящий в правой части равенства (4.2), тоже может приводить к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Тогда правило Лопиталя можно применить и к нему. То есть можно применить это правило повторно.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=(....)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)...2\cdot 1\cdot x^0}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!}=\infty.$$

Последние два пример показывают, что при $x \to \infty$ $\ln x$ растет несравненно медленнее, чем x, а e^x – несравненно быстрее, чем x^n при любом значении n.

Упражнения

В примере 1 было показано, что уравнение $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ имеет три корня: $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1 + \sqrt{3}$. Убедиться в том, что и интернет выдает эти же корни.

1. С помощью правила Лопиталя найти пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \to \infty} \frac{3x + e^x}{x^2}$$

<u>*Ответ*</u>: а) $-\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{1}{2}$; в) ∞;

2. С помощью правила Лопиталя доказать второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

§ 5. Дифференциал функции

Понятие дифференциала функции тесно связано с понятием ее производной. Как и производная функции, дифференциал функции принадлежит к числу важнейших понятий математического анализа и введен в математику Ньютоном и Лейбницем параллельно с понятием производной.

Вспомним определение производной функции $y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке x (§ 1, формулы 1.5 и 1.6):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (5.1)$$

Здесь Δx – приращение аргумента x, а $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – соответствующее приращение функции y.

Будем считать, что данная функция $y = f(x)$ дифференцируема в рассматриваемой фиксированной точке x. То есть будем считать, что производная $y' = f'(x)$ в этой точке существует и конечна. Тогда, согласно (5.1),

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y' = f'(x) \text{ при } \Delta x \to 0 \qquad (5.2)$$

А это значит, что при малых значениях Δx будем иметь:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y' \Leftrightarrow \Delta y \approx y' \cdot \Delta x \qquad (5.3)$$

Причем приближенные равенства (5.3) будут тем точнее, чем меньше Δx (и соответственно чем меньше Δy).

А теперь будем считать приращение Δx аргумента функции $y = f(x)$ не просто малым, а *бесконечно малым*, и назовем его *дифференциалом аргумента x*. Введем (следуя Лейбницу) для него и специальное обозначение:

dx – дифференциал аргумента x. (5.4)

Таким образом, *дифференциал dx аргумента x – это бесконечно малое приращение* Δx *этого аргумента*. Конечно, только что введенное понятие дифференциала переменной x – это математическая абстракция (она сродни диаметру точки или толщине линии). Но математика постоянно пользуется абстракциями, поэтому еще одна абстракция пугать нас не должна.

Если приращение Δx аргумента x бесконечно мало ($\Delta x = dx$), то и приращение Δy дифференцируемой функции y тоже будет бесконечно мало. Обозначим его символом dy и будем называть *дифференциалом функции y*. Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то

$dy = f(x + dx) - f(x)$ – дифференциал функции y. (5.5)

Если теперь в приближенных равенствах (5.3) заменить малые, но конечные Δx и Δy на бесконечно малые dx и dy, то эти равенства станут *точными*.

$$\frac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y' \cdot dx \qquad (5.6)$$

Оба равенства (5.6) имеют важный смысл. Первое из них дает выражение производной y' функции y через отношение дифференциалов dy и dx функции и её аргумента. А второе дает выражение дифференциала функции dy через производную функции y' и дифференциал аргумента dx.

Кстати, если учесть, что $y = f(x)$, то последнее равенство (5.6) можно записать подробнее:

$$df(x) = f'(x)dx \qquad (5.7)$$

А если еще учесть исходное выражение (5.5) для дифференциала $dy = df(x)$ функции $y = f(x)$, то из последнего равенства получаем:

$$f(x+dx)=f(x)+f'(x)dx \tag{5.8}$$

Равенство (5.8) позволяет записать значение $f(x+dx)$ функции $f(x)$ в точке $x+dx$, бесконечно близкой к точке *x*, через значение функции и ее производной в самой точке *x*. Эта формула имеет большое теоретическое значение.

Если в равенстве (5.8) заменить бесконечно малое *dx* на малое, но конечное Δx, то вместо точного оно станет приближенным:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \tag{5.9}$$

Эта приближенная формула тем точнее, чем меньше Δx. Она используется для приближенного вычисления значения $f(x+\Delta x)$ по значениям $f(x)$ и $f'(x)$.

В частности, применяя эту формулу для функций $f(x)=\sin x$; $f(x)=\ln x$; $f(x)=x^n$; $f(x)=\sqrt[n]{x}$, и т.д., получим следующие интересные формулы для производства приближенных вычислений:

$$\begin{aligned}
&1)\ \sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\cdot\Delta x;\ (\Delta x \text{ – в радианах})\\
&2)\ \ln(x+\Delta x)\approx\ln x+\frac{\Delta x}{x};\\
&3)\ (x+\Delta x)^n\approx x^n(1+\frac{n}{x}\cdot\Delta x);\ \Rightarrow(1+\alpha)^n\approx1+n\alpha;\\
&4)\ \sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}(1+\frac{\Delta x}{nx});\ \Rightarrow\sqrt[n]{1+\alpha}\approx1+\frac{\alpha}{n};
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Эти формулы тем точнее, чем меньше Δx (или α). В частности, используя последнюю формулу, получим:

$$\sqrt[4]{15{,}6}=\sqrt[4]{16-0{,}4}=\sqrt[4]{16+(-0{,}4)}\approx\sqrt[4]{16}\left(1+\frac{-0{,}4}{4\cdot16}\right)=2(1-0{,}0125)=1{,}9875.$$

Для сравнения: калькулятор дает $\sqrt[4]{15{,}6}=1{,}98738...$. То есть приближенное значение $\sqrt[4]{15{,}6}$, полученное вручную, отличается от его точного значения лишь в четвертом знаке после запятой.

Погрешности вычисления значений функции одной переменной

Пусть $y=f(x)$ - некоторая дифференцируемая функция одной переменной. Поставим вопрос: какова абсолютная и относительная погрешности вычисления функции y, вызываемые некоторой достаточно малой абсолютной погрешностью $\varepsilon_x=|\Delta x|$ аргумента x?

Используя приближенную формулу (5.3) для малых приращений Δx и Δy

аргумента и функции, можем записать: $\Delta y \approx f^{/}(x) \cdot \Delta x$. Отсюда для $\varepsilon_y = |\Delta y|$ - абсолютной ошибки числа y – получаем:

$$\varepsilon_y = |\Delta y| \approx \left| f^{/}(x) \right| \cdot |\Delta x| \tag{5.11}$$

Относительная ошибка $\delta_y = \dfrac{\varepsilon_y}{|y|}$ функции $y = f(x)$ оценивается следующим приближённым равенством:

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|y|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |\Delta x|}{|f(x)|} = \left| \frac{f^{/}(x)}{f(x)} \right| \cdot |\Delta x| \tag{5.12}$$

Формулы (5.11) и (5.12) широко используются при оценке погрешностей, возникающих при производстве приближенных вычислений.

<u>Пример 1</u>. Найти относительную погрешность вычисления функции $y = \sqrt{x}$.

<u>Решение</u>. Применяя формулу (5.12) для функции $f(x) = \sqrt{x}$, получим:

$$\delta_y \approx \left| \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{/}}{\sqrt{x}} \right| \cdot |\Delta x| = \left| \frac{1}{2x} \right| \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\Delta x|}{x} = \frac{1}{2} \delta_x \tag{5.13}$$

Таким образом, $\sqrt{x}$ имеет относительную погрешность в два раза меньшую, чем x, так что при вычислении $y = \sqrt{x}$ число y будет иметь не меньше верных значащих цифр, чем число x. Впрочем, и не больше, ибо лишняя значащая цифра уменьшает относительную ошибку числа сразу на порядок, то есть в 10 раз.

<u>Пример 2</u>. Найти погрешность вычисления функции $y = x^n$.

<u>Решение</u>. Применяя формулу (5.12) для функции $f(x) = x^n$, находим:

$$\delta_y = \left| \frac{\left(x^n\right)'}{x^n} \right| \cdot |\Delta x| = \left| \frac{nx^{n-1}}{x^n} \right| \cdot |\Delta x| = n \cdot \frac{|\Delta x|}{|x|} = n \cdot \delta_x \tag{5.14}$$

То есть относительная ошибка степени x^n в n раз больше, чем относительная ошибка числа x. Это означает, чем больше степень n, тем менее точным, по сравнению с x, получается результат вычисления x^n. Например, при вычислении $y = x^{10}$ результат вычисления будет содержать уже на одну верную значащую цифру меньше, чем исходное число x.

<u>Пример 3</u>. Найти погрешность вычисления функции $y = \ln x$.

<u>Решение</u>. Пользуясь формулой (15) для $f(x) = \ln x,$ находим:

$$\varepsilon_y \approx \frac{|\Delta x|}{x} = \delta_x \tag{5.15}$$

Таким образом, абсолютная ошибка вычисления функции $y = \ln x$ равна относительной погрешности числа x.

Пусть, например, необходимо вычислить $\ln x$ числа x, содержащего три верные значащие цифры. Это значит, что число x задано с относительной погрешностью δ_x порядка $\delta_x \approx 0.001$. Такова же приблизительно и абсолютная погрешность числа $\ln x$. То есть последний разряд, который следует оставить при округлении $\ln x$ - тысячные.

Вернемся все же к формулам (5.6) и (5.7), служащим для нахождения дифференциала функции $y = f(x)$. На базе этих формул можно установить следующие

<u>*Свойства дифференциала функции*</u>:

$$1)\ dC = 0;\quad 2)\ d(C\cdot f(x)) = C\cdot df(x);\quad 3)\ d(u\pm v) = du \pm dv;$$
$$4)\ d(uv) = udv + vdu;\quad 5)\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \qquad (5.16)$$

Здесь C – любая константа, а $f(x)$, $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – любые дифференцируемые функции. Действительно:

1. $dC = C'\cdot dx = 0\cdot dx = 0$;
2. $d(u\pm v) = (u\pm v)'dx = (u'\pm v')dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$.

Совершенно аналогично доказываются и остальные свойства (5.16).

Пусть теперь $y = y(u)$ и $u = u(x)$ – любые две дифференцируемые функции. Тогда $y = y(u(x))$ – сложная функция от x. И ее дифференциал dy, как оказывается, можно найти по любой из двух следующих формул:

$$1)\ dy = y'_x \cdot dx;\qquad 2)\ dy = y'_u \cdot du \qquad (5.17)$$

Формулы (5.17) выражают так называемое *свойство инвариантности формы дифференциала функции*. Согласно этому свойству, дифференциал функции имеет форму произведения производной этой функции на дифференциал ее аргумента независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной (x) или функцией (u) от другого аргумента.

Действительно, если x – независимая переменная, то дифференциал dy функции y, зависящей от x, находится, в соответствии с (5.6), по первой из формул (5.17). Но так как $y = y(u(x))$ – сложная функция от x, то используя формулу (2.5) для производной сложной функции, получим:

$$dy = y'_x \cdot dx = y'_u \cdot u'_x \cdot dx = y'_u \cdot du$$

То есть приходим ко второй формуле (5.17).

Упражнения

1. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; б) $s = \dfrac{gt^2}{2}$; в) $R = 1 - \cos u$, где u – дифференцируемая функция некоторой независимой переменной.

Ответ:

а) $dy = (3x^2 - 6x + 3)dx$; б) $ds = gtdt$; в) $dR = \sin u\, du$

2. При измерении стороны куба вместо истинного значения x получено значение $x + \Delta x$, где Δx - допущенная погрешность, малая по сравнению с x. Найти абсолютную и относительную погрешности вычисления объема куба $y = x^3$. Причем найти их: а) точно; б) приближенно с помощью формулы (5.11) и (5.12). Сравнить приближенные значения с точными.

Решение. Если вместо истинного значения x стороны куба получено ошибочное ее значение $x + \Delta x$, то вместо точного значения $y = x^3$ объема куба будет получено ошибочное его значение $y_* = (x + \Delta x)^3$. Абсолютная ошибка (абсолютная погрешность) $\Delta y = y_* - y$ при нахождении объема куба составит *точно:*

$$\varepsilon = \varepsilon_y = \Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Найдя ее отношение к истинному объему куба $y = x^3$, найдем *точное* значение относительной погрешности вычисления объема куба. Тем самым мы узнаем, какую долю составляет абсолютная погрешность объема куба по отношению к нему самому:

$$\delta = \delta_y = \frac{\varepsilon_y}{y} = 3\frac{\Delta x}{x} + 3\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 = 3\delta_x + 3\delta_x^2 + \delta_x^3$$

А теперь найдем *приближенные значения* этих погрешностей:

$$\varepsilon = \varepsilon_y = \Delta y \approx y'\Delta x = 3x^2 \Delta x; \quad \delta = \delta_y = \frac{\varepsilon_y}{y} \approx \frac{3x^2 \Delta x}{x^3} = 3\frac{\Delta x}{x} = 3\delta_x.$$

Точные и приближенные выражения для обеих этих погрешностей, как видим, не совпадают – приближенные выражения содержат только первое из тех трех слагаемых, которые содержатся в точных выражениях. Но последние два слагаемых в точных выражениях при малых Δx много меньше первого (главного) слагаемого, так что их без большого ущерба можно и отбросить. А отбросив их, как раз и получим приближенные выражения погрешностей. По величине они будут почти такие же, как точные. Но находятся они гораздо проще, чем точные.

Проиллюстрируем это на числовом примере. Пусть ребро куба составляет x =10 см, а при измерении этого ребра допущена погрешность Δx =1мм=0,1см. Тогда:

$y = x^3 = 1000 см^3$ - точное значение объема куба;

$\varepsilon_y = 30+0,3+0,001=30,301\, см^3$ - точно; $\varepsilon_y = 30 см^3$ - приближенно;

$\delta_y = 0,03 + 0,0003 + 0,000001 = 0,030301$ - точно; $\delta_y = 0,03$ - приближенно.

Как видим, действительно точные погрешности вполне можно заменить приближенными.

3. Как известно, площадь круга S радиуса R находится по формуле $S = \pi R^2$, а объем шара V радиуса R – по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Используя приближенную формулу (5.11), найти:

а) площадь тонкого кругового кольца с внутренним радиусом R и шириной ΔR;

б) объем тонкой сферической оболочки с внутренним радиусом R и толщиной ΔR. Сравнить эти приближенные выражения с точными.

<u>Ответ</u>:

$$а)\ \begin{cases} S_{кольца} = \Delta S \approx S'_R \cdot \Delta R = 2\pi R \cdot \Delta R - \text{приближенн о;} \\ S_{кольца} = \pi(R+\Delta R)^2 - \pi R^2 = 2\pi R \cdot \Delta R\left(1 + \dfrac{\Delta R}{2R}\right) - \text{точно.} \end{cases}$$

$$б)\ \begin{cases} V_{оболочки} = \Delta V \approx V'_R \cdot \Delta R = 4\pi R^2 \cdot \Delta R - \text{приближенн о;} \\ V_{оболочки} = \dfrac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3 - \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \cdot \Delta R\left(1 + \dfrac{\Delta R}{R} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\Delta R}{R}\right)^2\right) - \text{точно.} \end{cases}$$

4. Используя формулу (5.9) для функции $f(x) = e^x$, вычислить приближенно $e^{-0,2}$.

<u>Ответ</u>: $e^{-0,2} \approx 0,8$.

5. Период T колебаний маятника длиной l равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Как нужно изменить длину метрового маятника, чтобы его период колебаний уменьшился на 0,1 сек ?

<u>Ответ</u>: маятник нужно сделать короче на $\Delta l \approx 10$ см.

ГЛАВА 5
Интегральное исчисление

Интегральное исчисление, наряду с дифференциальным исчислением, принадлежит к числу важнейших составляющих математического анализа. Это исчисление базируется на понятиях неопределенного и определенного интегралов, введенных в математику Ньютоном и Лейбницем в конце 17-го века параллельно с введением ими же понятий производных и дифференциалов функций.

§1. Первообразная для функции и неопределенный интеграл от нее

В дифференциальном исчислении ставилась задача: для данной функции найти ее производную. В интегральном исчислении ставится обратная задача: по производной функции найти саму функцию.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая заданная функция.

Определение. *Всякая функция $y=F(x)$, производная $y' = F'(x)$ которой совпадает с функцией $y = f(x)$, называется первообразной для функции $y = f(x)$.* То есть если $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x)$ будет первообразной для функции $f(x)$ (а $f(x)$ будет производной своей первообразной $F(x)$).

В частности, функция $y = f(x)$ будет первообразной для своей производной $y' = f'(x)$.

Пример1. Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $\left(x^2\right)' = 2x$.

Отметим, что функция $F(x) = x^2$- не единственная первообразная для функции $f(x) = 2x$. В самом деле, любая функция вида $F(x) = x^2 + C$, где C – произвольная (неопределенная) константа, тоже будет первообразной для функции $f(x) = 2x$. Действительно, $\left(x^2 + C\right)' = 2x$.

И вообще, если $F(x)$ – первообразная для заданной функции $f(x)$, то и все функции вида $F(x)+C$, где C - неопределенная константа, тоже будут первообразными для функции $f(x)$. Действительно, если $F'(x) = f(x)$, то и $\left(F(x) + C\right)' = f(x)$.

Таким образом, найдя какую-либо первообразную $F(x)$ для данной функции $f(x)$, мы сразу можем записать для нее и множество других первообразных:

$$F(x) + C \quad (C \text{ - неопределенная константа}) \qquad (1.1)$$

Более того, мы сейчас докажем, что выражение (1.1) дает множество *всех* первообразных для функции $f(x)$.

Действительно, пусть $F(x)$ – какая-либо конкретная первообразная для функции $f(x)$, а $F_*(x)$– любая другая первообразная для этой же функции $f(x)$. Образуем новую функцию $y = y(x) = F_*(x) - F(x)$ и найдем ее производную:

$$y' = F_*'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Как оказалось, эта функция $y = y(x)$ имеет нулевую производную для любого x. Но, как известно, производная функции характеризует скорость изменения функции. Значит, скорость изменения функции $y = y(x)$ для любого x равна нулю. А это значит, что при изменении x функция $y = y(x)$ не меняется (сохраняет постоянное значение). То есть $y = C$, где C - некоторая постоянная. Таким образом, $F_*(x) - F(x) = C$, откуда $F_*(x) = F(x) + C$. То есть действительно любая первообразная $F_*(x)$ для функции $f(x)$ находится среди функций (1.1). Иначе говоря, множество функций (1.1) действительно представляет собой *множество всех первообразных для функций* $f(x)$. Это множество Лейбниц обозначил специальным символом

$$\int f(x)dx \tag{1.2}$$

и назвал *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$. Здесь знак $\int$ - *знак неопределенного интеграла;* $f(x)$ - *подынтегральная функция;* $f(x)dx$ - *подынтегральное выражение;* x - *переменная интегрирования.*

Так как выражение (1.2) - это лишь другое обозначение выражения (1.1), то можно записать:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.3}$$

Таким образом, *отыскивая (вычисляя) неопределенный интеграл* $\int f(x)dx$*, мы тем самым ищем все первообразные* $F(x)+C$ *для подынтегральной функции* $f(x)$. То есть ищем все функции, производные от которых равны $f(x)$. Или, что одно и то же, ищем все функции, дифференциалы которых равны $f(x)dx$. Эти функции (их бесчисленное множество) представляют собой сумму конкретной функции $F(x)$ (конкретной первообразной для $f(x)$) и неопределенной константы C, которой можно придать любое значение. Из-за наличия этой неопределенной константы в равенстве (1.3) и результат вычисления неопределенного интеграла оказывается неопределенным. Отсюда и термин: неопределенный интеграл.

Если неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ найден верно (то есть множество всех функций $F(x)+C$, являющихся первообразными для подынтегральной функции $f(x)$, найдено верно), то должно выполняться *проверочное для* (1.3) *равенство*:

$$(F(x)+C)' = f(x) \tag{1.4}$$

Пример 2.

$$\int 2x dx = x^2 + C \text{ - верно, так как } (x^2 + C)' = 2x.$$

$$\int (2x-3)dx = x^2 - 3x + C$$ - верно, так как $(x^2 - 3x + C)' = 2x - 3$.

$$\int x^2 dx = x^3 + C$$ - неверно, так как $(x^3 + C)' = 3x^2 \neq x^2$.

Важный частный случай формулы(1.3):

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \tag{1.3*}$$

Это формула показывает суть неопределенного интеграла: с его помощью по производной функции находится сама функция. И как оказывается, находится она неоднозначно – с точностью до произвольной константы.

Основные свойства неопределенных интегралов

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \tag{1.5}$$

Доказательство. Используя (1.3) и (1.4), получим:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \tag{1.6}$$

Доказательство. Вспоминая формулу для нахождения дифференциала функции (формулу (5.7) главы 4), получим:

$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс неопределенная константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C \tag{1.7}$$

Доказательство:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

4. Нахождение функции $F(x)$ по ее дифференциалу $dF(x)$:

$$\text{если } dF(x) = f(x)dx \text{, то } F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx. \qquad (1.8)$$

<u>Доказательство</u>. Если $dF(x) = f(x)dx$, то $f(x) = F'(x)$. А это значит, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Но этих первообразных для функции $f(x)$ имеется бесчисленное количество, и все они находятся посредством вычисления $\int f(x)dx$.

<u>Примечание</u>. Функция $F(x)$ определяется по формуле (1.8) неоднозначно – она определяется с точностью до неопределенной константы C, которая появится после вычисления $\int f(x)dx$. Поэтому для однозначного определения функции $F(x)$ по ее дифференциалу $dF(x) = f(x)dx$ нужно задать некоторое дополнительное условие для этой функции. Таким условием, в частности, может быть следующее условие: $F(x_0) = A$, где x_0 и A - заданные числа.

<u>Пример 3</u>. Найти функцию $F(x)$, если известно, что $dF(x) = \cos x dx$ и что $F(0) = 1$.

<u>Решение</u>. Используя (1.8), получаем:

$$dF(x) = \cos x dx \Rightarrow F(x) = \int dF(x) = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Мы получили бесчисленное множество функций $F(x)$:

$$F(x) = \sin x + C \ \ (C \text{ - неопределенная константа}).$$

Константу C найдем из дополнительного условия $F(0) = 1$:

$$F(0) = 1 \Rightarrow \sin 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Таким образом, получаем окончательно: $F(x) = \sin x + 1$.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \ \ (k \text{ – константа, } k \neq 0) \qquad (1.9)$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим правую часть равенства (1.9):

$$k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC = kF(x) + C_*,$$

где $C_* = kC$ - неопределенная константа (если $k \neq 0$). Таким образом, равенство (1.9) принимает вид:

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C_*.$$

А это равенство верно, что подтверждает его проверка:

$$\left(kF(x)+C_*\right)' = kF'(x)+0 = kf(x)$$

6. Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \right] dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx \qquad (1.10)$$

<u>Доказательство</u>. Вычисляя правую часть равенства (1.10), получаем:

$$\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx =$$
$$= \left[F_1(x)+C_1\right] \pm \left[F_2(x)+C_2\right] \pm \ldots \pm \left[F_n(x)+C_n\right] =$$
$$= \left[F_1(x) \pm F_2(x) \pm \ldots \pm F_n(x)\right] + \left[C_1 \pm C_2 \pm \ldots \pm C_n\right] = F(x)+C,$$

где

$$F(x) = \left[F_1(x) \pm F_2(x) \pm \ldots \pm F_n(x)\right]; \quad C = \left[C_1 \pm C_2 \pm \ldots \pm C_n\right].$$

Таким образом, доказываемое равенство (1.10) принимает вид:

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \right] dx = F(x) + C$$

А оно верно, так как

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = \left[F_1(x) \pm F_2(x) \pm \ldots \pm F_n(x)\right]' = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x).$$

<u>Таблица основных неопределенных интегралов</u>

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

5*. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C \qquad (1.11)$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C \qquad 15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$$

Используя проверку (1.4) для неопределенного интеграла (1.3), легко убедиться в истинности каждого из результатов таблицы (1.11). Проверим, например, первые 4 равенства из (1.11):

1) $C' = 0$ – верно; 2) $(x+C)' = 1$ - верно; 3) $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$ - верно;

4а) Если $x \succ 0$, то $|x| = x$, и (4) принимает вид: $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. А это верно, так как $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.

4б) Если $x \prec 0$, то $|x| = -x$, и (4) принимает вид: $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$. И это верно, так как $(\ln(-x) + C)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Совершенно аналогично дифференцированием правой части можно подтвердить и все остальные равенства в таблице (1.11).

Таблица (1.11) содержит лишь наиболее простые неопределенные интегралы. А в математических справочниках (и в интернете) содержатся многие тысячи наиболее часто встречающихся на практике и уже вычисленных неопределенных интегралов. Таким образом, если требуется вычислить некоторый неопределенный интеграл, то его можно просто поискать в интернете (опять рекомендуем вам сайты https://math24.biz или https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/). Если же в готовом виде он там не найдется, то программа вычисления неопределенных интегралов путем всевозможных преобразований данного неопределенного интеграла будет стараться свести его к одному или нескольким уже известным (табличным) интегралам. Добившись этого (если у неё это получится!), она высвечивает на экране результат.

Отметим следующее важное обстоятельство, связанное с интегрированием функций (с вычислением неопределенных интегралов) и отличающее интегрирование от дифференцирования. Производная $f'(x)$ любой элементарной функции $f(x)$ всегда может быть найдена, и она опять же элементарная функция. А вот неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ не от всякой элементарной функции $f(x)$ может быть записан через элементарные функции вида $F(x)+C$. Иначе говоря, не всякий неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ может быть сведен к табличным. А стало быть, не всякий неопределенный интеграл может быть вычислен в явном виде – даже с помощью компьютера. Такие, не сводимые к табличным, неопределенные интегралы называются *неберущимися* (ибо вычислить неопределенный интеграл – это, на математическом жаргоне, «взять» интеграл). Неберущимися являются многие, даже совсем простые на первый взгляд, неопределенные интегралы. Например, такие:

$$
\begin{aligned}
&1. \int e^{-x^2} dx \text{ - интеграл Пуассона}\\
&2. \int \frac{dx}{\ln x} \text{ - интегральный логарифм}\\
&3. \int \frac{\cos x}{x} dx \text{ - интегральный косинус.}\\
&4. \int \frac{\sin x}{x} dx \text{ - интегральный синус.}
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Эти и другие неберущиеся интегралы не могут быть найдены точно. Они могут быть найдены лишь приближенно. В соответствии с равенством (1.3) нахождение неопределенного интеграла сводится к нахождению какой-либо первообразной для подынтегральной функции. Вот эту первообразную для подынтегральной функции неберущегося интеграла можно либо выразить через так называемые *специальные функции* (гамма-функцию, дзета-функцию, эллиптические функции, и т.д.), либо, используя численные методы, подобрать приближенно с нужной степенью точности. Конкретнее об этом будет сказано в §4.

Упражнения

1. Показать, что на всей числовой оси ox функция $F(x) = \sqrt{1+x^2}$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Найти все первообразные для функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ответ: $F_*(x) = \sqrt{1+x^2} + C$.

3. Верно ли равенство: $\int \sin 2x dx = \sin^2 x + C$?

Ответ: верно.

4.Найти функцию $F(x)$, если $F'(x) = 2x^3$ и $F(1) = 0$.

Ответ: $F(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{2}$.

§2. Основные методы интегрирования

Основных методов интегрирования, то есть основных методов вычисления неопределенных интегралов, *четыре*:

1) Непосредственное интегрирование.

2) Интегрирование с помощью подстановки (с помощью замены переменной интегрирования).

3) Интегрирование по частям.

4) Приближенное интегрирование.

2.1 Непосредственное интегрирование

Этот метод основан на тождественных преобразованиях подынтегральной функции с последующим применением свойств неопределенных интегралов и таблицы основных неопределенных интегралов.

Пример 1.

Вычислить $\int\left(2x^2-3x+5\right)dx.$

Решение. Оно таково:

$$\int\left(2x^2-3x+5\right)dx=\int 2x^2dx-\int 3xdx+\int 5dx=$$

$$=2\int x^2dx-3\int xdx+5\int dx=2\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)-3\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right)+5\left(x+C_3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+\left(2C_1-3C_2+5C_3\right)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

Итак,

$$\int\left(2x^2-3x+5\right)dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

Здесь C - неопределенная константа, представляющая собой комбинацию $2C_1$-$3C_2$+$5C_3$ неопределенных констант (C_1; C_2; C_3).

Проверка:

$$\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C\right)^{/}=\frac{2}{3}\cdot 3x^2-\frac{3}{2}\cdot 2x+5\cdot 1+0=2x^2-3x+5 \text{ - верно.}$$

Этот пример показывает, что при разбиении неопределенного интеграла на сумму или разность нескольких неопределенных интегралов появляется и несколько неопределенных констант. Но они затем объединяются в одну неопределенную константу. Поэтому при записи суммы или разности нескольких интегралов их неопределенные константы можно не писать, а записать лишь одну общую неопределенную константу C в самом конце.

Пример 2. Вычислить $\int tg^2xdx$.

Решение:

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C$$

.

Проверка:

$$(tgx - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 0 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x$$ - верно.

2.2 Интегрирование с помощью подстановки (с помощью замены переменной интегрирования)

Суть этого метода в следующем. Пусть требуется вычислить некоторый неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Нередко его можно упростить, сведя к табличному, путем замены переменной интегрирования x на какую-то новую переменную (на переменную t), используя подходящую подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$- некоторая дифференцируемая функция. Тогда получим следующую *схему вычисления неопределенного интеграла с помощью подстановки*:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} \textit{сделаем подстановку } x = \varphi(t); \\ \textit{тогда } dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{g(t)} dt = \int g(t)dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \textit{вычисляем этот} \\ \textit{упростившийся интеграл} \end{array} \right| = G(t) + C = \; = \left| \begin{array}{c} \textit{делаем обратную к } x = \varphi(t) \\ \textit{подстановку } t = t(x) \end{array} \right| =$$

$$\underbrace{G(t(x))}_{F(x)} + C = F(x) + C \qquad (2.1)$$

Естественно, что применяемая подстановка будет оправданной лишь в том случае, если полученный в результате ее применения интеграл $\int g(t)dt$ будет проще, чем исходный интеграл $\int f(x)dx$.

Примечание. В практических случаях чаще удобнее делать не подстановку вида $x = \varphi(t)$, а подстановку вида $t = \varphi(x)$.

Пример 3. Вычислить $\int \frac{x^2 dx}{x+1}$.

Решение:

$$\int \frac{x^2 dx}{x+1} = \left| \begin{array}{l} \quad \textit{сделаем подстановку}: \; x+1 = t. \; \textit{Тогда } \; x = t-1; \\ x^2 = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1; \quad dx = d(t-1) = (t-1)'dt = dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^2 - 2t + 1)dt}{t} =$$

$$= \int \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \int tdt - 2\int dt + \int \frac{dt}{t} = \left| \textit{эти интегралы табличные} \right| =$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|+C=\left|\begin{matrix}\textit{делаем} & \textit{обратную}\\ \textit{подстановку} & t=x+1\end{matrix}\right| =\frac{(x+1)^2}{2}-2(x+1)+\ln|x+1|+C.$$

Пример 4. Вычислить $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left|\begin{matrix}\textit{сделаем подстановку}: \sqrt{a^2-x^2}=t. \quad \textit{Тогда} \quad a^2-x^2=t^2;\\ d(a^2-x^2)=d(t^2); \quad (a^2-x^2)'dx=(t^2)'dt; \quad -2xdx=2tdt; \quad xdx=-tdt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int \frac{-tdt}{t}=-\int dt=-t+C=\left|\textit{учтем, что} \quad t=\sqrt{a^2-x^2}\right|=-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 5. Вычислить $\int \cos 4xdx$.

Решение:

$$\int \cos 4xdx=\left|\begin{matrix}\textit{сделаем подстановку}: \quad 4x=t. \quad \textit{Тогда} \quad x=\frac{t}{4};\\ dx=d\left(\frac{t}{4}\right); \quad dx=\left(\frac{t}{4}\right)'dt; \quad dx=\frac{1}{4}dt\end{matrix}\right|= =$$

$$\int \cos t\cdot\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int \cos tdt=\frac{1}{4}(\sin t+C)=\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}C= =$$

$$\left|\begin{matrix}\textit{учтем, что} \quad t=4x, \quad \textit{и еще учтем, что} \quad \frac{1}{4}C \quad -\\ \textit{- это неопределенная константа} \quad C\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

Пример 6. Вычислить $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Решение:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=\left|\begin{matrix}\textit{сделаем подстановку}: \quad \ln x=t.\\ \textit{тогда} \quad d(\ln x)=dt; \quad (\ln x)'dx=dt; \quad \frac{1}{x}dx=dt\end{matrix}\right|=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=$$

$$=\left|\textit{учтем, что} \quad t=\ln x\right|=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$$

Пример 7. Вычислить $\int \frac{x^3dx}{x^8+1}$.

Решение:

$$\int \frac{x^3dx}{x^8+1} = \left| \begin{array}{c} \textit{сделаем подстановку}: \quad x^4 = t. \quad \textit{Тогда} \quad d\left(x^4\right) = dt; \\ \left(x^4\right)' dx = dt; \quad 4x^3dx = dt; \quad x^3dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{4}}{t^2+1} = \int \frac{dt}{4\left(t^2+1\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\left(arctgt + C\right) = \frac{1}{4}arctgt + \frac{1}{4}C = \frac{1}{4}arctgx^4 + C.$$

2.3. Интегрирование по частям

Этот метод основан на использовании формулы

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{2.2}$$

которая называется *формулой интегрирования по частям*. В этой формуле $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - любые две дифференцируемые функции, для которых существуют и $\int udv,$ и $\int vdu$.

Докажем эту формулу. Опираясь на формулу для дифференциала произведения двух функций

$$d(uv) = udv + vdu$$

(формула (5.11) главы 2), и интегрируя обе части этого равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

Применяя теперь свойство (1.7) неопределенных интегралов к интегралу слева, получим:

$$uv + C = \int udv + \int vdu, \text{ откуда } \int udv = uv - \int vdu + C.$$

В правой части $\int vdu$ даст, после своего вычисления, некоторую функцию плюс неопределенную константу. Вместе с уже имеющейся там неопределенной константой C этих констант в правой части окажется две. Поэтому одну из них (а именно, константу C) можно отбросить, так как эти две константы все равно объединятся в одну. В итоге как раз и получим формулу (2.2).

Примечание. При вычислении $\int udv$ по формуле интегрирования по частям (2.2) нам придется вычислить два неопределенных интеграла (выполнить работу, состоящую из двух частей). Сначала по имеющемуся дифференциалу dv функции v нужно будет найти саму функцию v. Для этого используем формулу (1.8):

$$\text{если } dv = f(x)dx, \text{ то } v = \int dv = \int f(x)dx = F(x) + C \tag{2.3}$$

Таким образом, получаем: $v = F(x) + C.$ То есть получаем не одну, а множество функций v. Но нам нужна лишь одна из них (любая). Проще всего получить ее, отбросив в (2.3) константу C:

$$v = \int dv = \int f(x)dx = F(x) + C = \left| \text{отбрасываем } C \right| = F(x) \qquad (2.4)$$

По этой схеме находится функция v. Затем, в соответствии с формулой (2.2), нужно выполнить вторую часть работы - вычислить интеграл $\int vdu$.

Формулу (2.2) для вычисления $\int udv$ по частям есть смысл применять, если можно вычислить оба интеграла: и $\int dv$, и $\int vdu$.

<u>*Пример 8.*</u> Вычислить $\int x^2 \ln x dx$.

<u>*Решение*</u>.

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{c} \text{Применим формулу интегрирования по частям.} \\ \text{Пусть } u = \ln x, \text{ а } dv = x^2 dx. \text{ Тогда} \\ du = d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx; \quad v = \int dv = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C = \left|\text{отбросим } C\right| = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int vdu = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

<u>*Пример 9*</u>. Вычислить $\int x \cos 3x dx$.

<u>*Решение*</u>.

$$\int x\cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} \text{Сначала сделаем подстановку: } 3x = t. \\ \text{Тогда } x = \dfrac{t}{3}; \quad dx = d\left(\dfrac{t}{3}\right) = \left(\dfrac{t}{3}\right)' dt = \dfrac{1}{3}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t}{3} \cdot \cos t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{9}\int t \cos t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{А теперь применим интегрирование по частям.} \\ \text{Пусть } u = t, \text{ а } dv = \cos t dt. \text{ Тогда } du = dt; \\ v = \int dv = \int \cos t dt = \sin t + C = \left|\text{отбросим } C\right| = \sin t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{9}\left(uv - \int vdu\right) = \frac{1}{9}\left(t \cdot \sin t - \int \sin t dt\right) = \frac{1}{9}\left(t \sin t + \cos t\right) + C =$$

$$= \left|\text{учтем, что } t = 3x\right| = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$$

В примере 9 применены и подстановка, и интегрирование по частям.

В заключение этого параграфа укажем следующее. Проблема вычисления неопределенных интегралов – гораздо более сложная, чем проблема вычисления производных. Среди неопределенных интегралов и много неберущихся. Однако доказана теорема (см. §4): если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке оси *ox* (например, на отрезке $[a;b]$ оси *ox*), то на этом промежутке существует и $\int f(x)dx$, то есть существует множество первообразных $F(x)+C$ для подынтегральной функции $f(x)$. Но только не всегда эти первообразные можно выразить через элементарные функции. В этих случаях (случаях неберущихся интегралов) применяют приближенное интегрирование. Один из путей такого приближенного интегрирования будет указан в §4.

Упражнения

1. Подтвердить правильность вычисления неопределенных интегралов:

$$а)\ \int 3x^2dx = x^3 + C;\quad б)\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C;\quad в)$$

$$\int arctgxdx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

2. Путем непосредственного интегрирования вычислить следующие неопределенные интегралы:

$$а)\int\left(8x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx;\quad б)\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx;\qquad в)\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx;$$

$$г)\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx;\quad д)\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x};\qquad е)\int\frac{x^4}{1+x^2}dx.$$

Ответы:

$$а)\,2x^4 + 4\sqrt{x} + C;\quad б)\ 2x^5 - \frac{1}{x^3} + C;\quad в)\ e^x + tgx + C;$$

$$г)\ -ctgx - tgx + C;\quad д)\ tgx - ctgx + C;\quad е)\ \frac{x^3}{3} - x + arctgx + C.$$

3. С помощью подходящей подстановки вычислить неопределенные интегралы:

$$а)\int\cos 8xdx;\ б)\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}};\quad в)\int\frac{ctgx}{\sin x}dx;\ г)\int\frac{dx}{x(1+\ln x)};\ д)\int\frac{dx}{(3-2x)^4};$$

$$е)\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}};\quad ж)\ \int\frac{dx}{x^2-4x+4};\quad з)\int\frac{dx}{x^2-4x+3};\quad и)\int\cos^2 xdx;\quad к)\int\cos^3 xdx.$$

Ответы:

$$а)\frac{1}{8}\sin 8x + C;\quad б)\ -\sqrt{3-2x} + C;\quad в)\ -\frac{1}{\sin x} + C;\quad г)\ \ln\left|1+\ln x\right| + C;$$

$$д)\ \frac{1}{6(3-2x)^3} + C;\quad е)\,2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

ж) $\dfrac{1}{2-x}+C$; з) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|+C$; и) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$; к) $\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$.

4. Вычислить интегрированием по частям неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{\ln x}{x^2}dx; \quad \text{б) } \int \arcsin x dx; \quad \text{в) } \int \frac{xdx}{\cos^2 x}; \quad \text{г) } \int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx.$$

Ответы:

$$\text{а) } -\frac{1}{x}(\ln x+1)+C; \quad \text{б) } x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C;$$

$$\text{в) } xtgx+\ln|\cos x|+C; \quad \text{г) } -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+4x+8\right)+C.$$

5. Вычислить с помощью интернета интегралы упражнений (1) – (4).

§3. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Теперь приступим к рассмотрению интегралов другого вида - *определенных*. Определенные интегралы, как и неопределенные интегралы, введены в математику Ньютоном и Лейбницем. К понятию неопределенного интеграла их привела проблема нахождения первообразных для заданной функции, то есть задача, обратная задаче нахождения производных функций. А к понятию определенного интеграла их привела совсем другая проблема - проблема точного решения ряда фундаментальных для практики числовых задач, к рассмотрению которых мы сейчас и переходим.

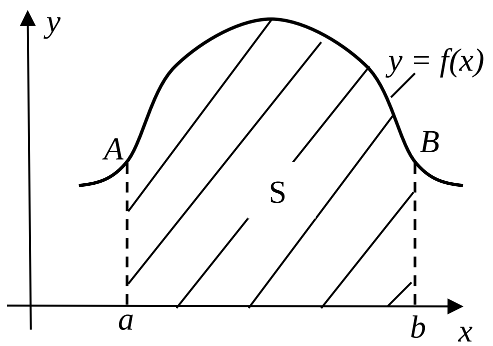


Рис. 3.1(а)

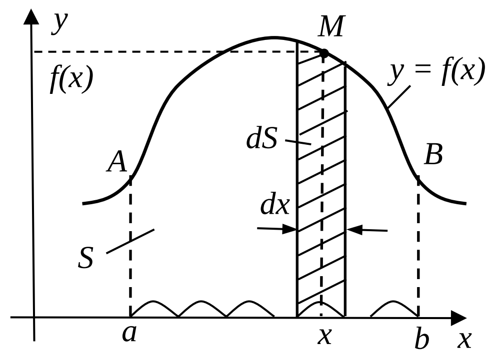


Рис. 3.1(б)

3.1 Задача о вычислении площади произвольной криволинейной трапеции

Рассмотрим рис. 3.1 (а), где $y=f(x)$ – некоторая непрерывная на $[a;b]$ функция.

Заштрихованная на этом рисунке фигура называется *криволинейной трапецией.* А S - площадь этой трапеции. Поставим, вслед за Ньютоном и Лейбницем, задачу: вывести формулу для площади S этой трапеции при заданных a, b и $f(x)$.

Решение. Разобьем мысленно отрезок $[a;b]$ оси ox (основание трапеции) на бесконечно малые участки, как это показано на рис. 3.1(б). Для простоты будем считать их одинаковыми по длине. Эту бесконечно малую длину каждого участка обозначим символом dx. Если через концы этих участков провести вертикальные прямые, то вся криволинейная трапеция разобьется на бесконечно большое число бесконечно узких вертикальных полосок шириной dx. Рассмотрим одну из таких полосок (любую), и найдем ее площадь dS (см. рис. 3.1(б)).

Возьмем в основании полоски некоторую произвольную точку x. Так как полоска бесконечно узкая (то есть она представляет собой вертикальную нить), то x – это точка, являющаяся основанием этой нити. Согласно рис. 3.1(б), площадь dS рассматриваемой полоски (нити) можно найти, умножив ее высоту $f(x)$ на ширину dx. То есть

$$dS = f(x)dx \tag{3.1}$$

Впрочем, такой была бы площадь dS полоски, если бы полоска была прямоугольником с основанием dx и высотой $f(x)$. Но наша полоска имеет сверху криволинейную границу, а $f(x)$- высота, на которой находится лишь одна из точек (точка M) этой границы. Все остальные точки указанной верхней границы полоски находятся, вообще говоря, на другой, хотя и бесконечно близкой к $f(x)$, высоте. Так что формула (3.1) для площади каждой из полосок, на которые мы мысленно разбили криволинейную трапецию, не точная, а приближенная. Но очевидно, чем уже полоска, тем точнее формула для ее площади dS. А так как наша полоска (как и все остальные) не просто узкая, а *бесконечно узкая*, то мы вправе считать формулу (3.1) *точной.*

Складывая теперь площади dS всех вертикальных полосок, найдем, *причем точно*, и всю площадь S криволинейной трапеции:

$$S = \sum dS = \sum f(x)dx \tag{3.2}$$

Эта сумма необычная: слагаемые в ней бесконечно малые, а число слагаемых бесконечно велико (S - сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых). Этой сумме Лейбниц дал специальное обозначение

$$\sum f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{3.3}$$

и назвал ее *определенным интегралом от функции* $f(x)$. Здесь $f(x)$– подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x – переменная интегрирования; a и b - пределы интегрирования (нижний и верхний).

Итак, согласно (3.2) и (3.3),

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{3.4}$$

- площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 3.1(а).

3.2 Задача о вычислении пути при переменной скорости движения

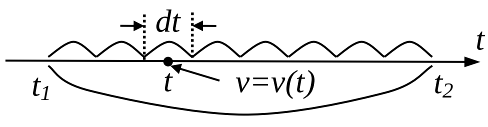


Рис. 3.2

Пусть некоторая материальная точка движется по некоторой траектории с известной в каждый момент времени t переменной скоростью $v = v(t)$. Требуется получить формулу для пути (перемещения) s, пройденного точкой по траектории своего движения с некоторого данного момента времени t_1 до некоторого данного момента времени t_2.

__Решение__. Если бы скорость v движения точки была постоянной, то поставленная задача никакого труда бы не представляла: путь равен скорости, умноженной на время. То есть $s = v(t_2 - t_1)$. Но у нас скорость точки $v = v(t)$ переменная (в разные моменты времени t она разная). Для такого случая разобьем мысленно временной промежуток $[t_1; t_2]$ на бесконечно малые промежутки времени dt и найдем путь ds, проходимый точкой за каждое время dt.

Рассмотрим один из промежутков dt (любой) и выберем на этом промежутке некоторую точку (некоторый момент времени) t. В этот момент времени скорость движения точки равна $v = v(t)$ (рис.3.2). Практически такой же, в силу малости dt, она будет в других точках (в другие моменты времени) этого же промежутка времени. То есть можем считать, что в течение времени dt точка движется практически с постоянной скоростью $v = v(t)$. А тогда путь ds, пройденный точкой за время dt, найдется по формуле:

$$ds = v(t)dt \tag{3.5}$$

Впрочем, таким был бы путь ds, если бы в течение времени dt точка двигалась строго с постоянной скоростью $v = v(t)$. Но эта скорость хоть и незначительно, но все же меняется в течение времени dt. Поэтому формула (3.5) не точная, а приближенная. Однако очевидно, что с уменьшением времени dt она будет становиться все точнее и точнее. А так как наш промежуток времени dt не просто мал, а *бесконечно мал*, то мы вправе считать формулу (3.5) *точной*.

Складывая теперь пути ds, пройденные точкой за все промежутки времени dt, найдем, *причем точно*, и общий путь s (общее перемещение точки по траектории ее движения) за время от момента t_1 до момента t_2:

$$s = \sum ds = \sum v(t)dt \tag{3.6}$$

Формула (3.6) по своей структуре совершенно аналогична формуле (3.2). Она, как и формула (3.2), представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. То есть представляет собой определенный интеграл вида (3.3):

$$\sum v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \tag{3.7}$$

Итак, получаем окончательно: если $v = v(t)$ - переменная скорость движения точки, то перемещение s, пройденное точкой по траектории ее движения за промежуток времени $[t_1; t_2]$ найдется по формуле:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \tag{3.8}$$

3.3 Задача о нахождении работы переменной силы

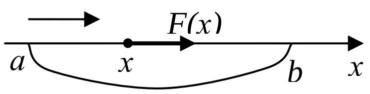


Рис. 3.3

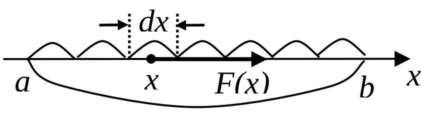


Рис. 3.4

Пусть по оси *ox* из точки *a* в точку *b* под действием заданной переменной силы $F = F(x)$ движется материальная точка x - точка приложения силы $F(x)$ (см. рис. 3.3). Требуется вывести формулу для работы *A*, которую совершит сила $F(x)$ при перемещении точки *x* из положения *a* в положение *b*.

<u>*Решение*</u>. Если бы сила $F = F(x)$, приложенная к движущейся точке x, была постоянной, то мы нашли бы работу A по известной школьной формуле $A = F \cdot s = F \cdot (b - a)$. Но у нас сила переменная - она меняется с изменением координаты x движущейся точки. В связи с этим разобьем мысленно промежуток [*a*; *b*] на бесконечно малые участки длиной dx и найдем работу dA силы $F = F(x)$ на каждом участке (рис. 3.4).

Если x – некоторая точка на участке dx, то очевидно, что

$$dA = F(x)dx \tag{3.9}$$

Мы записали эту формулу, считая, что в любой точке, находящейся на данном участке dx, сила, действующая на движущуюся точку, такая же, как и в выбранной точке x, то есть постоянная. Но это, вообще говоря, не так: во время прохода точкой участка dx действующая на нее сила, хоть и незначительно, но меняется. Впрочем, изменение этой силы на dx тем меньше, чем меньше dx. А значит, с уменьшением dx формула (3.9) будет становиться все точнее и точнее. Но так как наш участок dx не просто мал, а бесконечно мал, то формулу (3.9) мы вправе считать *точной.*

А теперь, складывая работы dA силы $F = F(x)$ на всех участках dx, на которые мы разбили отрезок [*a*; *b*], мы получим, *причем точно*, всю искомую работу *A*:

$$A = \sum dA = \sum F(x)dx \tag{3.10}$$

А так как, по аналогии с равенствами (3.2) и (3.7),

$$\sum F(x)dx = \int_a^b F(x)dx, \tag{3.11}$$

то получим окончательно:

$$A = \int_a^b F(x)dx \tag{3.12}$$

Это и есть формула для работы *A*, которую совершит переменная сила $F = F(x)$, если её точка приложения x переместится вдоль оси *ox* из положения a в положение b (рис. 3.3).

3.4 Задача о нахождении объема производства при заданной производительности труда

Пусть функция $z = f(t)$ описывает изменение производительности труда рабочего, бригады или целого предприятия с течением времени t. Требуется найти формулу для объема R произведенной продукции с момента времени t_1 до момента времени t_2, где t_1 и t_2 - заданные числа.

Решение. Если бы производительность труда $z = f(t)$ (количество продукции, производимой в единицу времени) была постоянной, то искомый объем R произведенной продукции мы нашли бы, умножив производительность труда на время работы, то есть нашли бы по формуле $R = z \cdot (t_2 - t_1)$. Но, по условию, производительность труда $z = f(t)$ меняется со временем. Чтобы в этом случае найти искомый объем R произведенной продукции, нужно, очевидно, разбить промежуток времени $[t_1; t_2]$ на бесконечно малые промежутки времени dt, выбрать внутри каждого dt произвольную точку t, найти объем $dR = z(t)dt$ произведенной за время dt продукции, и сложить все dR - то есть по существу проделать ту же процедуру, что была проделана в предыдущих трех задачах. В итоге получим формулу

$$R = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt, \tag{3.13}$$

совершенно аналогичную формулам (3.4), (3.8) и (3.12). Эта формула выражает объем продукции, произведенной за время от t_1 до t_2, через производительность труда $z = f(t)$.

Итак, мы получим итоговые формулы (3.4), (3.8), (3.12) и (3.13) для четырех рассмотренных выше и имеющих важное практическое значение задач. Можно было бы и продолжить рассмотрение аналогичных задач, но мы ограничимся теми, что уже рассмотрели. Вместо этого осмыслим ту общую идею, которая была заложена при решении всех этих задач. А эта идея следующая: нужную нам величину мы мысленно разбиваем на бесконечно малые части, а затем, складывая все эти части (их бесконечно много!), получаем искомую величину. Эта величина оказывалась выраженной через новое математическое понятие - определенный интеграл. Теперь, очевидно, нужно понять, какими свойствами обладают определенные интегралы и как их вычислять. Этим мы займемся в следующем параграфе.

Упражнения

1. Пусть отрезок $[a; b]$ оси ox – материальная нить, у которой $\rho = \rho(x)$- заданная линейная плотность вещества, распределенного по этой нити (линейная плотность - это масса единицы длины). Получить формулу для массы m всей нити.

<u>*Ответ*</u>:
$$m = \int_a^b \rho(x)dx \tag{3.14}$$

2. Пусть V – объем тела вращения, образованного вращением криволинейной трапеции (рис. 3.1(а)) вокруг оси ox. Получить формулу для объема V этого тела.

<u>*Ответ*</u>:
$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \tag{3.15}$$

3. Пусть L – длина участка AB кривой $y = f(x)$ с абсциссами концов a и b (рис. 3.1(а)). Получить формулу для длины этого участка.

<u>*Ответ*</u>:
$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \tag{3.16}$$

§4. Свойства и вычисление определенных интегралов

Начнем с того, что введем понятие определенного интеграла без привязки его к каким-либо геометрическим, физическим и экономическим задачам. То есть введем его абстрактно, математически.

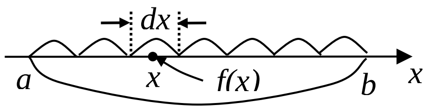


Рис. 3.5

Пусть $y=f(x)$ - некоторая непрерывная функция, заданная на некотором числовом промежутке [*a*; *b*] оси *ox*. Разобьем его на бесконечно большое число бесконечно малых участков длиной dx и выберем на каждом dx некоторую точку x. Так как каждый из этих участков бесконечно мал (то есть фактически представляет собой точку), то x и есть эта точка (рис. 3.5). Тогда $f(x)dx=dM$ - бесконечно малое число (смысл его зависит от смысла функции $f(x)$ и может быть самым разным - см. предыдущий параграф). А сумма всех этих бесконечно малых чисел dM называется *определенным интегралом*

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

от функции $f(x)$ *с пределами интегрирования* a *и* b *(нижним и верхним).*

Ниже мы покажем, что при непрерывной подынтегральной функции $f(x)$ и конечных пределах интегрирования a и b определенный интеграл (4.1) заведомо существует (представляет собой некоторое конечное число M). То есть при указанных условиях

$$\int_a^b f(x)dx=\sum f(x)dx=\sum dM=M \text{ - число.} \qquad 4.2)$$

Равенство (4.2) будем считать *математическим определением определенного интеграла*. Определенным он называется потому, что в отличие от неопределенного интеграла $\int f(x)dx$, представляющего собой бесчисленное множество функций, он представляет собой вполне определенное число. Таким образом, несмотря на внешнее сходство в обозначениях определенного и неопределенного интегралов, это совершенно разные вещи. Впрочем, как это ни удивительно, между ними имеется тесная связь. Но об этом – в конце параграфа.

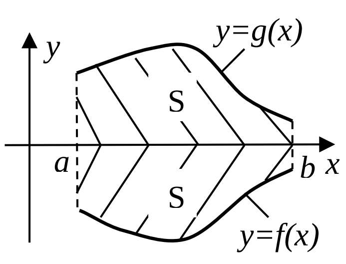


Рис. 3.6

А сейчас подтвердим, что в случае непрерывной подынтегральной функции и конечных пределов интегрирования определенный интеграл (4.1) действительно представляет собой некоторое конечное число. Для этого рассмотрим все возможные случаи относительно функции $f(x)$.

а) Пусть непрерывная функция $f(x)\geq 0$ для всех $x\in[a;b]$. Тогда, согласно (3.4), определенный интеграл (4.1) можно представлять себе как площадь S криволинейной трапеции (рис. 3.1(а)). И эта площадь S заведомо представляет собой число:

$$\int_a^b f(x)dx = S \text{ - число} \tag{4.3}$$

б) Пусть непрерывная функция $f(x) \leq 0$ для всех $x \in [a; b]$. Тогда функция $-f(x) = g(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$ (см. рис. 3.6). В этом случае

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum f(x)dx = \sum -g(x)dx = \\ &= -\sum g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx = -S \end{aligned} \tag{4.4}$$

То есть и в этом случае $\int_a^b f(x)dx$ - число (только отрицательное). А именно, этот интеграл, как и в случае (а), представляет собой площадь S криволинейной трапеции, заключенной между осью ox и графиком функции $y = f(x)$, только со знаком минус (рис. 3.7):

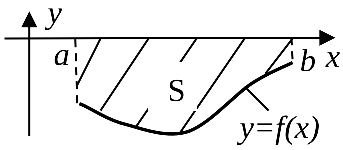


Рис. 3.7

$$\int_a^b f(x)dx = -S \tag{4.5}$$

в) Наконец, если на части $[a; c]$ отрезка $[a; b]$ функция $f(x) \geq 0$, а на другой части $[c; b]$ этого отрезка функция $f(x) \leq 0$ (рис. 3.8), то

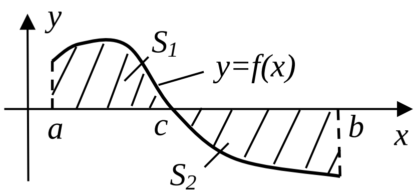


Рис. 3.8

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{(a\leq x\leq b)} f(x)dx = \sum_{(a\leq x\leq c)} f(x)dx + \sum_{(c\leq x\leq b)} f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

То есть и в этом случае $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой число.

Итак, подтверждение получено: *для любой непрерывной на конечном промежутке* $[a; b]$ *функции f(x) определенный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *существует (представляет собой некоторое число).*

Заметим, что определенные интегралы рассматривают и для разрывных подынтегральных функций, а также тогда, когда пределы интегрирования бесконечные. В таких случаях определенные интегралы могут и не существовать.

Такого рода интегралы (их называют *несобственными*) мы рассмотрим в заключительном §6 этой главы.

Основные свойства определенных интегралов

Наиболее просто и естественно установить эти свойства, опираясь на какой-либо наглядный смысл определенного интеграла. Например, на то, что любой определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ связан, согласно (4.3), (4.5) и (4.6), с площадями криволинейных трапеций. Но использовать этот геометрический смысл определенного интеграла для вывода его свойств в самом общем случае, то есть в случае знакопеременной функции $y = f(x)$, не очень удобно. Удобнее и нагляднее установить эти свойства, если, в соответствии с (3.12), считать определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ работой A силы $f(x)$ (силы любого направления, а значит, и любого знака), когда точка приложения x этой силы перемещается вдоль оси ox из положения a в положение b (рис. 3.9).

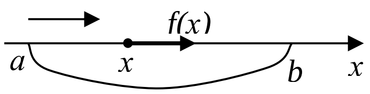


Рис. 3.9

$$\int_a^b f(x)dx = A \tag{4.7}$$

Тогда сразу становятся очевидными следующие

свойства определенных интегралов:

1) $\int_a^b f(x)dx = A$ – число (число A может быть любого знака). (4.8)

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = (...) = A$ (4.9)

(переменную интегрирования в определенном интеграле можно обозначить как угодно – результат от этого не изменится).

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (4.10)

(ибо если перемещение точки отсутствует, то работа любой силы *f(x)* равна нулю).

$$4)\ \int_a^b 0 \cdot dx = 0 \tag{4.11}$$

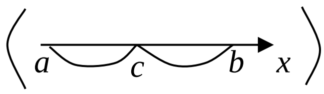
(ибо если сила отсутствует, то и работа отсутствует).

$$5)\ \int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a \tag{4.12}$$

(ибо работа постоянной единичной силы численно равна перемещению точки под действием этой силы).

$$6)\ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \tag{4.13}$$

$$7)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{4.14}$$



$$8)\ \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx \tag{4.15}$$

$$9)\ \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k - \textit{любая} \quad \textit{константа}) \tag{4.16}$$

10) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a;\ b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ (4.17)

(физический смысл последних пяти свойств продумайте самостоятельно).

11) Пусть $m = [f(x)]_{наим}$ и $M = [f(x)]_{наиб}$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a;\ b]$. Тогда

$$m(a-b) \le \int_a^b f(x)dx \le M(a-b) \tag{4.18}$$

Действительно, так как $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a;\ b]$, то применяя свойство (4.17) и затем свойства (4.16) и (4.12), мы и получим двойное неравенство (4.18). Это неравенство часто используется для прикидки (*грубой оценки*) величины $\int_a^b f(x)dx$.

Пример 1. Оценить величину $\int_1^3 \sqrt{8+x^3}\,dx$.

Решение. Так как функция $f(x)=\sqrt{8+x^3}$ монотонно возрастает на отрезке [1; 3], то $m = f(1) = \sqrt{9} = 3$, а $M = f(3) = \sqrt{35} \approx 5{,}9$. Поэтому по формуле грубой оценки (4.18) получаем:

$$6 < \int_1^3 \sqrt{8+x^3}\,dx < 11{,}8$$

Пример 2. Оценить величину $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x+\cos x}$.

Решение. Минимальное m и максимальное M значения функции $y = f(x) = \frac{1}{x+\cos x}$ на промежутке [0; π] не очевидны, так как с возрастанием x в выражении $x + \cos x$ первое слагаемое растет, а второе убывает. Чтобы разобраться в поведении функции y, найдем ее производную:

$$y' = \left(\frac{1}{x+\cos x}\right)' = \frac{\sin x - 1}{(x+\cos x)^2}.$$

Так как $\sin x \le 1$ для всех x, то $y' \le 0$ для всех x. А значит, функция $y = \frac{1}{x+\cos x}$ убывает на всей области своего определения, в том числе и на отрезке [0; π]. Таким образом, на отрезке [0; π]

$$m = [f(x)]_{наим} = f(\pi) = \frac{1}{\pi+\cos\pi} = \frac{1}{\pi-1};\ M = [f(x)]_{наиб} = f(0) = \frac{1}{0+\cos 0} = 1$$

Следовательно, грубая оценка (4.18) для данного интеграла имеет вид:

$$\frac{\pi}{\pi-1} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{x+\cos x} < \pi \Leftrightarrow 1{,}47 < \int_0^{\pi} \frac{dx}{x+\cos x} < 3{,}14.$$

4.1. Приближенное и точное вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, согласно его математическому определению (4.2), представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, образованных по схеме рисунка 3.5. Для непрерывной подынтегральной функции $f(x)$ и конечных пределов интегрирования a и b этот интеграл, как было показано выше, заведомо существует (представляет собой некоторое число). Но найти его напрямую, следуя указанной на рис. 3.5 схеме, очевидно, невозможно, ибо эта схема содержит бесконечное число действий. По этой схеме его можно найти лишь приближенно.

Для этого промежуток интегрирования [*a; b*] следует разбить не на бесконечно малые участки *dx*, которых будет бесконечно много, а на конечное число (скажем, на 100) частичных промежутков одинаковой (а можно и не одинаковой) конечной длины Δx. Затем на каждом Δx выбрать некоторую точку x (скажем, середину) и подсчитать сумму

$$\sum f(x) \cdot \Delta x$$

из уже конечного числа (из 100) слагаемых. Эта сумма будет *приближенным значением* определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Если нужно получить более точный результат, то нужно сделать более мелкое разбиение промежутка интегрирования (скажем, разбить его не на 100 частичных промежутков, а на 200, 300, и т. д.). Работы будет больше, зато результат станет точнее. Собственно, таким путем (с некоторыми непринципиальными усовершенствованиями указанной схемы) и вычисляют приближенно определенные интегралы компьютерные программы. Используя свое быстродействие, компьютер делает такое мелкое разбиение промежутка интегрирования, что полученный ею результат практически не отличается от точного. Компьютерные программы умеют и оценивать точность полученного результата.

Например, стандартная точность вычисления определенных интегралов в компьютерной программе MATHCAD – 15 верных десятичных знаков после запятой, что, естественно, далеко выходит за границы практических потребностей. Эта программа, по желанию пользователей, позволяет получить и до нескольких тысяч верных десятичных знаков после запятой. Тем не менее, *абсолютно точного* результата компьютер дать не в состоянии.

И тут возникает вопрос: а нельзя ли все-таки вычислять определенные интегралы абсолютно точно? Ответ на это вопрос такой: можно, хотя далеко и не всегда. Для точного подсчета определенных интегралов, если оно возможно, применяется знаменитая **формула Ньютона-Лейбница**. Она сводит вычисление определенных интегралов к вычислению неопределенных.

Суть ее в следующем. Пусть *f*(*x*) – непрерывная на [*a; b*] функция, так что $\int_a^b f(x)dx$ заведомо существует. И пусть вычислен неопределенный интеграл от функции *f*(*x*):

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{4.19}$$

Тогда *точное значение* определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ можно найти по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{4.20}$$

Здесь $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$. Формула (4.20) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Для доказательства формулы Ньютона-Лейбница докажем сначала, что функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \ (a \le x \le b) \tag{4.21}$$

то есть определенный интеграл с переменным верхним пределом, имеет на $[a; b]$ производную $\Phi'(x)$, совпадающую с $f(x)$. То есть $\Phi'(x) = f(x)$.

Действительно,

$$\Phi'(x) = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi(x+dx) - \Phi(x)}{dx} \tag{4.22}$$

Но

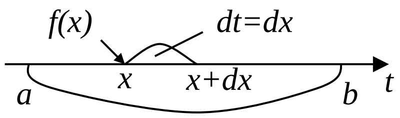


Рис. 3.10

$$\Phi(x+dx) - \Phi(x) = \int_a^{x+dx} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \tag{4.23}$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+dx} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+dx} f(t)dt$$

В последнем интеграле интегрирование происходит на бесконечно малом промежутке $[x; x+dx]$ оси t длиной dx. На нем, при его разбиении на бесконечно малые промежутки dt, уместится лишь один такой промежуток $dt = dx$ (см. рис. 3.10). Выбирая на нем в качестве произвольно выбираемой точки t точку x и следуя схеме (4.2) вычисления определенного интеграла, получим по этой схеме лишь одно слагаемое:

$$\Phi(x+dx) - \Phi(x) = \int_x^{x+dx} f(t)dt = f(x)dx \tag{4.24}$$

А значит, согласно (4.22), получаем:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x) \ (a \le x \le b) \tag{4.25}$$

Отметим, что заодно мы доказали следующий принципиальный факт, который мы обещали доказать в конце §2: у любой непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$ имеется первообразная $F(x)$. Ею, в частности, является функция $\Phi(x)$. А значит, для любой непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$ существует для $x \in [a; b]$ и неопределенный интеграл (4.19). Хотя, как мы уже замечали в §1, он далеко не всегда может быть выражен через элементарные функции (может оказаться неберущимся). Найдя приближенно (численным путем) функцию $\Phi(x)$, мы тем самым найдем приближенно и $\int f(x)dx$.

А теперь перейдем непосредственно к доказательству формулы Ньютона-Лейбница (4.20). Пусть $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$ на $[a; b]$. Так как она может отличаться от указанной выше первообразной $\Phi(x)$ лишь на константу, то

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C \quad (a \le x \le b) \tag{4.26}$$

Полагая в этом равенстве $x = a$, получаем:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C \tag{4.27}$$

Значит, равенство (4.26) принимает вид:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) \quad (a \le x \le b) \tag{4.28}$$

А теперь, полагая в (4.28) $x = b$, получим:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a), \text{ откуда } \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \tag{4.29}$$

Но это, по сути, и есть формула (4.20) Ньютона-Лейбница.

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Решение. Вычислим сначала $\int \sin x dx$ (он табличный):

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (\text{значит, } F(x) = -\cos x)$$

А тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = \cos 0 - \cos\pi = 1 - (-1) = 2.$$

Геометрическая иллюстрация полученного результата изображена ниже:

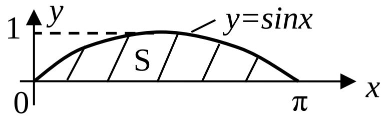


Рис. 3.11

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = S = 2\ (\textit{кв. ед.}) \qquad (4.30)$$

Формула Ньютона-Лейбница (4.20) принадлежит к числу важнейших формул высшей математики. Она позволяет просто, а главное, точно вычислять определенные интегралы. А значит, позволяет находить точные значения многих нужных для практики величин (площадей криволинейных фигур; пройденных телами путей при переменных скоростях их движения; работ переменных сил, и многое другое). То есть позволяет решать те задачи, которые элементарная математика решить не в состоянии. Но эта формула может быть использована, если только соответствующий неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ – из берущихся. В противном случае неизвестна первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$, а значит, нечего подставить и в формулу (4.20) Ньютона-Лейбница.

Если неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ неберущийся, то соответствующий ему определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ может быть найден лишь приближенно. Например, с помощью компьютерной программы, используемой сайтами https://math24.biz или https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/.

Упражнения

1. На основании формулы (4.18) (формулы грубой оценки определенных интегралов) оценить величину следующих интегралов:

$$\text{а)} \int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx; \quad \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}.$$

Ответ: $\text{а)}\, 2 < \int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx < 2{,}24; \quad \text{б)} \frac{2}{9} < \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} < \frac{2}{7}.$

2. Сравнив подынтегральные функции интегралов $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ и $\int_0^1 tg\frac{x}{2}dx$, выяснить, какой из них больше.

Ответ: $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx > \int_0^1 tg\frac{x}{2}dx.$

3. Найти площадь S, заключенную между параболой $y = x^2 - 4x$ и осью ox.

Ответ: $S = \int\limits_0^4 (4x - x^2)dx = 10\dfrac{2}{3}$

4. Найти работу А, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если для ее растяжения на 1 см необходима сила в 20 н.

Указание. При решении задачи использовать закон Гука: величина удлинения пружины пропорциональна растягивающей ее силе.

Ответ: $A = 2000 \int\limits_0^{0{,}06} x dx = 3{,}6\,(\partial ж)$.

5. Производительность труда $z = f(t)$ среднестатистического рабочего на некотором предприятии представляет собой функцию

$$z = -0{,}15t^2 + 0{,}9t + 5 \quad (0 \le t \le 8)$$

Найти объем q продукции, производимой рабочим за смену (8 часов).

Ответ: $q = \int\limits_0^8 (-0{,}15t^2 + 0{,}9t + 5)dt = 43{,}2\,(е\partial)$.

6. Подтвердить правильность следующих формул для вычисления площадей фигур:

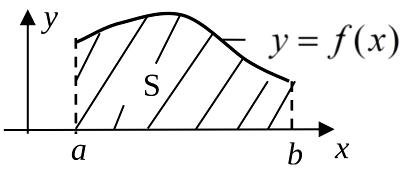


Рис. 3.12

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

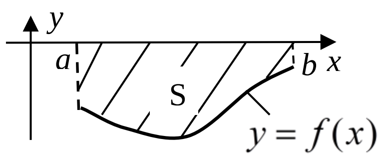


Рис. 3.13

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

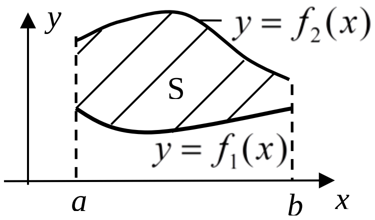


Рис. 3.14

$$S = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$$

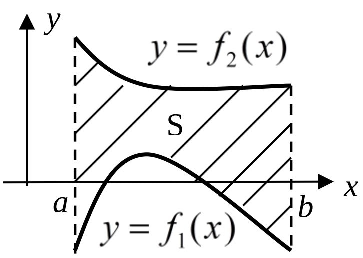


Рис. 3.15

$$S = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 2x + 1$.

Ответ: $S = 10\frac{2}{3}$.

8. Найти площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y = -x^3$ и прямой, проходящей через точки $M_1(-2; 8)$ и $M_2(2; -8)$.

Ответ: $S = 8$.

§5. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям. Использование четности – нечетности подынтегральной функции

Мы знаем, что с помощью подстановки и с помощью формулы интегрирования по частям упрощают и вычисляют неопределенные интегралы. Но эти же методы, с соответствующими изменениями, используют для упрощения и вычисления и определенных интегралов.

1. Подстановка в определенных интегралах

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная на промежутке $[a; b]$ оси ox функция, а $x = \varphi(t)$ - непрерывная на промежутке $[\alpha; \beta]$ функция, имеющая к тому же на $[\alpha;\beta]$ непрерывную производную (то есть $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая на $[\alpha; \beta]$ функция). Кроме того, будем считать, что когда переменная t меняется от α до β, то переменная $x = \varphi(t)$ меняется от a до b. Таким образом, $\varphi(\alpha) = b$ и $\varphi(\beta) = b$. Тогда при вычислении $\int_a^b f(x)dx$ можно совершить подстановку по следующей схеме:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{matrix} \text{сделаем подстановку } x = \varphi(t); \\ \text{тогда } dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt; \end{matrix} \quad \begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \right| =$$

$$= \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{g(t)}dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha) \qquad (5.1)$$

Докажем правомочность схемы (5.1). Пусть

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (5.2)$$

Здесь $F(x)$ – некоторая первообразная для функции $f(x)$. То есть $F'(x) = f(x)$. Но тогда, по правилу вычисления производной сложной функции,

$$(F(\varphi(t)))'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \qquad (5.3)$$

Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \qquad (5.4)$$

Равенство результатов (5.2) и (5.4) и доказывает правомочность схемы (5.1).

Кстати, сравнивая схему (5.1) вычисления определенных интегралов с помощью подстановки с аналогичной схемой (2.1) вычисления неопределенных интегралов, можно увидеть и то, что в этих схемах общее, и то, что различно. Главных новшества здесь два: 1) при переходе к новой переменной интегрирования t нужно пересчитывать пределы интегрирования – то есть нужно строить табличку по пересчету этих пределов; 2) нет необходимости возвращаться к старой переменной интегрирования x.

Примечание. Как и в неопределенных интегралах, часто бывает удобнее делать подстановку не вида $x = \varphi(t)$, а вида $t = \varphi(x)$.

Пример1. Вычислить $\int_0^3 \sqrt{1+x}dx$.

Решение:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x}dx = \left| \begin{array}{c} \text{Сделаем подстановку}: \sqrt{1+x} = t. \text{ Тогда } 1+x = t^2; \\ x = t^2 - 1; \quad dx = d\left(t^2-1\right) = \left(t^2-1\right)' dt = 2tdt; \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^2 t \cdot 2tdt = 2\int_1^2 t^2 dt = \left| \begin{array}{l} \text{Учтем, что} \int t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} + \text{C и применим} \\ \text{формулу Ньютона - Лейбница} \end{array} \right| =$$

$$= 2 \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2}{3} \cdot t^3\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

2. Вычисление определенных интегралов по частям

Мы знаем, что по частям можно вычислять неопределенные интегралы. Для этого используется формула (2.2). Но по частям можно вычислять и определенные интегралы. Это делается по внешне похожей формуле (5.5):

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (5.5)$$

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – любые две непрерывные на $[a; b]$ функции, имеющие на этом промежутке и непрерывные производные $u'(x)$и $v'(x)$ (то есть $u = u(x)$ и $v = v(x)$- непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции).

Докажем формулу (5.5). Учтем, что

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{5.6}$$

Функция $u'v + uv'$, стоящая в этом равенстве справа, согласно указанным выше условиям для функций u и v, является непрерывной на промежутке [$a; b$]. Значит, существует определенный интеграл от нее:

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = \int_a^b v \cdot u'dx + \int_a^b u \cdot v'dx = \int_a^b vdu + \int_a^b udv \tag{5.7}$$

С другой стороны, согласно (5.6), функция uv является первообразной для функции $u'v + uv'$. А значит, по формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = uv\Big|_a^b \tag{5.8}$$

Сравнивая (5.7) и (5.8), приходим к доказываемой формуле (5.5).

<u>*Пример 2.*</u> Вычислить $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.

<u>*Решение:*</u>

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \text{Применим интегрироование по частям. Пусть } u = x, \text{ а } dv = \sin x dx. \\ \text{Тогда } du = dx, \text{ а } v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x + C = \left|\text{отбрасываем C}\right| = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx =$$

$$= -(\pi\cos\pi - 0\cos 0) + \sin x\Big|_0^{\pi} = -(-\pi) + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

3. <u>Использование четности-нечетности подынтегральной функции при вычислении определенных интегралов с симметричными пределами интегрирования</u>

Справедливы следующие два утверждения:

а) Если $f(x)$ – непрерывная и четная на промежутке [-$a; a$] функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx \tag{5.9}$$

б) Если $f(x)$ – непрерывная и нечетная на промежутке [-$a; a$] функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad (5.10)$$

<u>*Доказательство.*</u> Рассмотрим рисунки 3.16 (а) и 3.16 (б), соответствующие случаям (а) и (б):

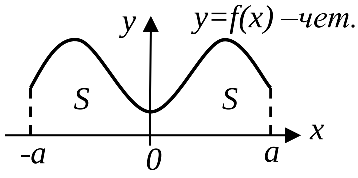


Рис. 3.16(а)

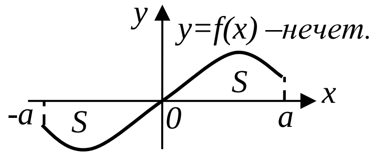


Рис. 3.16(б)

а) Если $f(x)$ – четная на [$-a; a$] функция, то согласно рис. 3.16 (а) и формуле (4.3) получаем:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = S + S = 2S = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

б) Если $f(x)$ – нечетная на [$a; b$] функция, то согласно рис. 3.16 (б) и формулам (4.3) и (4.5) получаем:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -S + S = 0.$$

<u>*Пример 3.*</u> Упростить, а затем и вычислить $\int_{-2}^{2}(6x^2 + 5x^3)dx$.

<u>*Решение*</u>.

$$\int_{-2}^{2}(6x^2 + 5x^3)dx = 6\int_{-2}^{2}x^2dx + 5\int_{-2}^{2}x^3dx = \left| \begin{array}{l} x^2 \text{ - четная функция;} \\ x^3 \text{ - нечетная функция;} \end{array} \right| = 6 \cdot 2\int_{0}^{2}x^2dx + 5 \cdot 0 =$$

$$= 12\int_{0}^{2}x^2dx = 12 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \left.4x^3\right|_0^2 = 4 \cdot 2^3 - 0 = 32.$$

Упражнения

1. Вычислить с помощью подходящих подстановок:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{xdx}{x+1}; \quad \text{б) } \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\cdot xdx; \quad \text{в) } \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx.$$

<u>*Ответы:*</u> а) $1-\ln 2$; б) $21\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$.

2. Вычислить интегрированием по частям:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{\ln x dx}{x^2}; \quad \text{б) } \int_0^1 xe^{-x}dx; \quad \text{в) } \int_0^\pi x^2 \sin x dx.$$

<u>*Ответы:*</u> а) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; б) $1-\frac{2}{e}$; в) π^2-4.

3. Вычислить $\int_0^2 \arcsin\frac{x}{4}dx$, сделав в этом интеграле сначала подстановку $\frac{x}{4}=t$, а затем применив интегрирование по частям.

<u>*Ответ:*</u> $\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}-4\approx 0{,}507.$

4. Вычислить определенные интегралы упражнений (1) - (3) с помощью интернета.

§6. Несобственные интегралы

<u>6.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования</u>

Пусть $y = f(x)$ – заданная и непрерывная для всех $x \geq \alpha$ функция. Тогда для любого $b \geq a$ существует $\int_a^b f(x)dx$. Поставим вопрос о пределе этого интеграла при $b \to \infty$.

<u>Определение.</u>

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx \tag{6.1}$$

называется *несобственным интегралом от функции* $f(x)$ *с бесконечным верхним пределом.* Если этот предел *существует и конечен*, то несобственный интеграл

$\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется *сходящимся*. А если же он не существует или равен $\pm\infty$, то этот несобственный интеграл называется *расходящимся.*

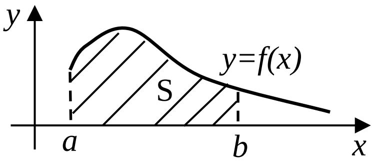


Рис. 3.18

Если $f(x) \geq 0$ для всех $x \geq a$, то у несобственного интеграла (6.1) имеется очевидный геометрический смысл, вытекающий из геометрического смысла (4.3) обычного определенного интеграла. Действительно, согласно рис. 3.18

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S \qquad (6.2)$$

А тогда

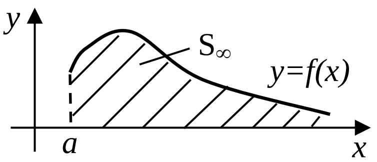


Рис. 3.19

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} S = S_\infty \qquad (6.3)$$

Здесь S_∞ - площадь бесконечно протяженной в направлении оси *ох* криволинейной трапеции (рис. 3.19). Несмотря на свою бесконечную протяженность, её площадь может оказаться и конечной. Но это может произойти лишь в случае, когда $y = f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Да и то, если функция $y = f(x) \to 0$ при $x \to \infty$ достаточно быстро.

Подтвердим это на примерах.

<u>*Пример 1.*</u> Найти площадь S_∞, изображенную на рис. 3.20.

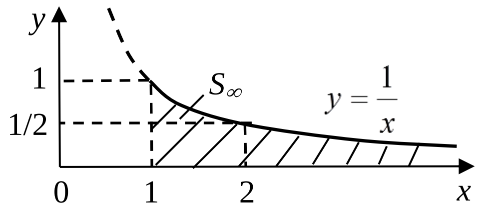


Рис. 3.20

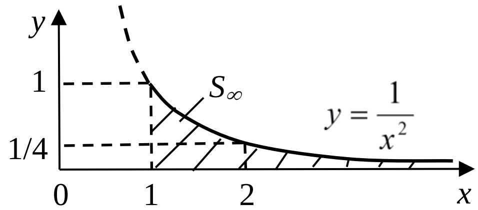


Рис. 3.21

<u>*Решение:*</u>

$$S_\infty = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty,$$

так как $\ln b \to \infty$ при $b \to \infty$.

Итак, $S_\infty = \infty$. И это несмотря на то, что функция $y = \dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$. Несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty$, а значит, он расходится.

<u>*Пример 2.*</u> Найти площадь S_∞, изображенную на рис. 3.21.

Решение:

$$S_\infty = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Здесь $S_\infty = 1$. То есть бесконечно протяженная фигура имеет конечную площадь. Это произошло потому, что подынтегральная функция $\frac{1}{x^2}\to 0$ при $x\to\infty$ достаточно быстро (по крайней мере, гораздо быстрее, чем подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ в предыдущем примере). Несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$, то есть в результате дал число. А значит, он сходится.

Пример 3. Выяснить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_0^\infty \cos x dx$.

Решение. Вычислим это интеграл:

$$\int_0^\infty \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty}\sin b$$

– не существует. Это очевидно, если вспомнить поведение графика функции $y = \sin x$ (синусоиды) при $x\to\infty$. Таким образом, $\int_0^\infty \cos x dx$ не существует, а значит, он расходится. Впрочем, это и не могло быть иначе, ибо подынтегральная функция $\cos x$ не стремится к нулю при $x\to\infty$.

Заметим, что при вычислении несобственных интегралов типа $\int_a^\infty f(x)dx$, как и при вычислении обычных определенных интегралов $\int_a^b f(x)dx$, можно сразу применять формулу Ньютона-Лейбница, минуя нахождение предела:

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a). \text{ Здесь } F(\infty) = \lim_{x\to\infty}F(x) \qquad (6.4)$$

Действительно:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty}(F(b) - F(a)) = F(\infty) - F(a).$$

Если значение $F(\infty)$ существует и конечно, то согласно формуле (6.4) Ньютона-Лейбница сходится и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Примечание. Совершенно аналогично интегралам с бесконечным верхним пределом можно рассматривать несобственные интегралы с бесконечным нижним пределом и даже с обоими бесконечными пределами интегрирования. То есть интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx; \tag{6.5}$$

Для их вычисления тоже можно применять формулу Ньютона-Лейбница.

Пример 4.

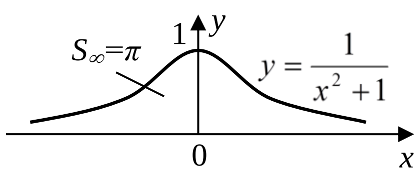


Рис. 3.22

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg}(-\infty) = \left|\begin{matrix}\text{учтем, что}\\ \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x\end{matrix}\right| =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\infty = \left|\operatorname{arctg}\infty = \lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\right| = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Итак, $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2+1} = \pi$ (число), то есть этот интеграл сходится. Его величина π равна площади S_∞ бесконечно протяженной в обе стороны фигуры, изображенной на рис. 3.22.

Заметим, что сам факт сходимости-расходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования не обязательно устанавливать с помощью прямого вычисления этих интегралов. Это вопрос часто можно решить и гораздо проще, сравнив данный несобственный интеграл с каким-либо другим, для которого сходимость-расходимость уже установлена.

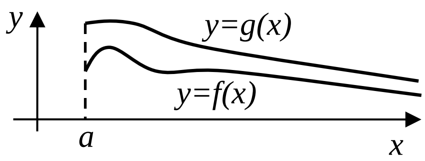


Рис. 3.23

Пусть, например, для всех $x\in[a;\infty)$ имеет место неравенство $f(x)\le g(x)$, где $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – две непрерывные и неотрицательные функции (рис. 3.23). Тогда очевидно, что

$$0 < \int_a^{\infty} f(x)dx < \int_a^{\infty} g(x)dx \tag{6.6}$$

Из неравенства (6.6) и рис. 3.23 очевидным образом следует так называемый *признак сравнения несобственных интегралов*:

1) Если $\int_a^{\infty} g(x)dx = A$ (число) – интеграл сходится, то и $\int_a^{\infty} f(x)dx = B$ (число) – интеграл сходится, причем $B<A$.

2) Если $\int_a^{\infty} f(x)dx = \infty$ - расходится, то и $\int_a^{\infty} g(x)dx = \infty$ - расходится. (6.7)

3) Если $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx = \infty$ - расходится, то $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = ?$ - об этом интеграле сразу ничего сказать нельзя.

4) Если $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = B$ (число) - сходится, то $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx = ?$ - об этом интеграле сразу ничего сказать нельзя.

Здесь, по идее, та же ситуация, что и с возможностью поднятия штангистом двух разных весов:

1) Если он может поднять больший вес, то он может поднять и меньший.

2) Если он не может поднять меньший вес, то он не сможет поднять и больший.

3) Если он не может поднять больший вес, то про меньший вес ничего сразу сказать нельзя, всё зависит от того, насколько он меньше.

4) Если он может поднять меньший вес, то про больший вес сразу ничего сказать нельзя, всё зависит от того, насколько он больше.

В качестве функции $g(x)$, с которой на промежутке $x \in [a;\infty)$ сравнивают данную функцию $f(x)$, часто используют функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, а в качестве интеграла сравнения – интеграл $\int\limits_a^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$, учитывая при этом, что при $a > 0$ и любых α функция $g(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ - положительная и непрерывная функция, и что (подтвердите это самостоятельно)

$$\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)\cdot a^{\alpha-1}}, \text{если } \alpha > 1 \text{ - интеграл сходится} \\ \infty, \text{если } \alpha \le 1 \text{ - интеграл расходится} \end{cases} \tag{6.8}$$

<u>*Пример 5.*</u> Исследовать на сходимость-расходимость $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{2x^3+5}$

<u>*Решение.*</u> Очевидно, что $0 < \dfrac{1}{2x^3+5} < \dfrac{1}{2x^3}$ для всех $x \in [2; \infty)$. Поэтому

$$0 < \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{2x^3+5} < \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{2x^3} = \frac{1}{2}\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

Но согласно (6.8) интеграл $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ сходится. Поэтому, по признаку сравнения, сходится и $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{2x^3+5}$ (он представляет собой некоторой конкретное число). Более того, предыдущее неравенство дает и оценку этого числа: так как, согласно

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}, \text{ то } \ 0 < \int_2^\infty \frac{dx}{2x^3+5} < \frac{1}{16}.$$

<u>*Пример 6.*</u> Исследовать на сходимость-расходимость $\int_3^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$.

<u>*Решение.*</u> Очевидно, что

$$\frac{1}{2x+\sqrt{x}} > \frac{1}{2x+x} = \frac{1}{3x} \text{ для всех } x \in [3;\ \infty).$$

Следовательно,

$$\int_3^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt{x}} > \frac{1}{3}\int_3^\infty \frac{dx}{x}.$$

Но последний интеграл равен ∞. Следовательно, равен ∞ и $\int_3^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$. То есть он расходится.

<u>Примечание.</u> Справедлив и более сильный (обобщенный) признак сравнения, который применим для любых непрерывных и неотрицательных на $[a;\ \infty)$ функций. А именно, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \tag{6.9}$$

то есть если функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ ($f(x) \sim g(x)$) при $x \to \infty$, то несобственные интегралы

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^\infty g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

<u>*Пример 2.*</u> Исследовать на сходимость-расходимость $\int_{10}^\infty \frac{dx}{x^3-2x^2+5}$.

<u>*Решение.*</u> Очевидно, что на промежутке интегрирования $10 \le x \prec \infty$ знаменатель x^3-2x^2+5 для всех x положителен и нигде в нуль не обращается. Поэтому подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^3-2x^2+5}$ неотрицательна и непрерывна для всех $x \in [10;\ \infty)$. При этом

$$\frac{1}{x^3-2x^2+5} = \frac{1}{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} \sim \frac{1}{x^3} \text{ при } x\to\infty$$

Но, согласно (6.8), $\int_{10}^\infty \frac{dx}{x^3}$ сходится. Поэтому и $\int_{10}^\infty \frac{dx}{x^3-2x^2+5}$ сходится.

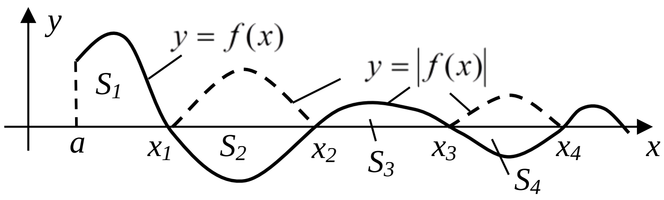


Рис. 3.24

Теперь перейдем к более сложному случаю несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования, когда подынтегральная функция знакопеременна на своей области интегрирования (рис. 3.24). Тогда

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + ... = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + ... = \\ = (S_1 + S_3 + ...) - (S_2 + S_4 + ...) = A - B, \qquad (6.10)$$

где $A>0$ – сумма площадей, находящихся над осью ox, а $B>0$ – сумма площадей, находящихся под осью ox.

Рассмотрим еще один несобственный интеграл, только уже от $|f(x)|$:

$$\int_a^\infty | f(x) | dx = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + ... = (S_1 + S_3 + ...) + (S_2 + S_4 + ...) = A + B \qquad (6.11)$$

а) Допустим, что $\int_a^\infty | f(x) | dx$ сходится. Тогда $A + B$ – *конечное* положительное число. А значит, и его положительные слагаемые A и B – *конечные* положительные числа. Но тогда и их разность $A - B$ – *конечное* число (его знак может быть любым). А значит, согласно (6.10), несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится.

б) Допустим, что $\int_a^\infty | f(x) | dx$ расходится (равен $+\infty$). Тогда сумма $A + B = +\infty$, а значит или A, или B, или оба они одновременно равны $+\infty$. Но их разность $A - B$ может оказаться как бесконечной, так и конечной. То есть $\int_a^\infty f(x)dx$ может как сходиться, так и расходиться.

Если $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, и при этом $\int_a^\infty | f(x) | dx$ сходится, то говорят, что $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится абсолютно*. Величину абсолютно сходящегося несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ можно и оценить:

$$0 \le \left| \int_a^{\infty} f(x)dx \right| \le \int_a^{\infty} | f(x) | dx \qquad (6.12)$$

Действительно, неравенство (6.12) равносильно очевидному неравенству

$$0 \le | A - B | \le A + B \ (A \ge 0 \text{ и } B \ge 0) \qquad (6.13)$$

А если $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, но при этом $\int_a^{\infty} | f(x) | dx$ расходится, то говорят, что $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *сходится условно*.

<u>*Пример 8*</u>. Показать, что $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится, причем абсолютно.

<u>*Решение.*</u> Рассматривая $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ и используя признак сравнения (6.7), получаем:

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1$$

Таким образом, $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ сходится. Но тогда и $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится, причем абсолютно. Более того, мы можем произвести, используя неравенство (6.12), оценку этого интеграла:

$$0 \le \left| \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \right| \le \int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

То есть абсолютная величина интеграла $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ заключена в пределах [0; 1].

<u>*Пример 9.*</u> Доказать, что $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, но условно.

<u>*Решение*</u>. Применим к этому интегралу формулу (5.5) интегрирования по частям:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{Пусть } \mathrm{u} = \frac{1}{\mathrm{x}}, d\upsilon = \sin x dx. \text{ Тогда} \\ du = d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} dx; \upsilon = \int d\upsilon = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= u\upsilon\Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \upsilon du = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = -0 + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Интеграл $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}$, как и рассмотренный в примере 8 интеграл $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$, сходится. А значит, сходится и $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. Но сходится он условно, ибо $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\infty$ (расходится).

Действительно, так как $-1\le\sin x\le 1$ для всех *x*, то $\sin^2 x\le|\sin x|$ для всех *x*. А значит

$$0<\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx<\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx=\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx.$$

Но

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx=\infty-\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$$

Последний интеграл $\int_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$, как и аналогичные интегралы $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ и $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$, сходится (это можно подтвердить интегрированием по частям). То есть $\int_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ - число. А значит, $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\infty$ (расходится). Но тогда и бóльший интеграл $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\infty$ (расходится). То есть $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится, но условно.

6.2. Несобственные интегралы с конечными пределами интегрирования от неограниченных функций

Под указанными несобственными интегралами понимаются интегралы вида $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – разрывная в некоторой точке (или нескольких точках) конечного промежутка интегрирования $[a;\ b]$ функция, обращающаяся в этих точках в бесконечность (любого знака).

Будем пока считать, что такая точка одна, и эта точка – правая крайняя точка промежутка интегрирования (верхний предел *b* интеграла $\int_a^b f(x)dx$). То есть будем считать, что функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a;\ b)$, причем

$$f(x)\to\pm\infty \text{ при } x\to b \tag{6.14}$$

Под интегралом $\int_a^b f(x)dx$ в этом случае, по определению, понимается предел обычного определенного интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (6.15)$$

Этот интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом от функции, неограниченной на правом конце промежутка интегрирования*. Если он существует и конечен, то он называется *сходящимся.* Если же не существует или равен +∞ или -∞, то он называется *расходящимся.*

В частности, если $f(x) \geq 0$ на $[a; b)$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to b$, то геометрическую иллюстрацию равенства (6.15) дают рисунки 3.25(а) и 3.25(б):

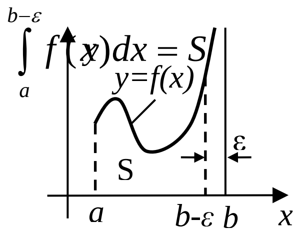


Рис. 3.25(а)

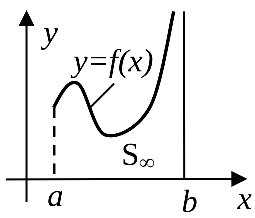


Рис. 3.25(б)

$$\int_a^b f(x)dx = S_\infty \qquad (6.16)$$

Таким образом, согласно рис. 3.25(б), $\int_a^b f(x)dx = S_\infty$ - площадь бесконечно протяженной вдоль оси *oy* криволинейной трапеции. А она, как и площадь S_∞ на рис. 3.19, может оказаться как конечной, так и бесконечной. То есть несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ можно на основе его прямого вычисления по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \text{ Здесь } F(b) = \lim_{x \to b} F(x) \qquad (6.17)$$

Подтвердим это, исходя из определения (6.15):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\big[F(b-\varepsilon)-F(a)\big] = F(b)-F(a)$$

Пример 10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Этот интеграл действительно несобственный, так как его подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ имеет особую точку $x = \frac{\pi}{2}$, в которой $\cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, а значит, в которой функция $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ обращается в бесконечность:

$$\frac{1}{\cos^2 x} \to +\infty \text{ при } x \to \frac{\pi}{2}$$

Вычисляя указанный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница (6.17), получим:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл расходится.

Примечание. Мы ввели понятие несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$, неограниченной (обращающейся в бесконечность) на правом конце промежутка интегрирования $[a;\, b]$. Но этот же интеграл будет несобственным, если $f(x)$ неограниченна на левом конце промежутка интегрирования (в точке a), а также в некоторой внутренней его точке c. В последнем случае $\int\limits_a^b f(x)dx$ разбивают на два несобственных интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \tag{6.18}$$

Оба эти интеграла с особой точкой на краю промежутка интегрирования можно вычислять по формуле Ньютона-Лейбница.

Пример 11. Вычислив несобственный интеграл $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, доказать сходимость этого интеграла. Полученному результату дать геометрическую иллюстрацию.

<u>*Решение.*</u> Данный интеграл действительно несобственный, так как его подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(0 \le x \le 4)$ обращается в ∞ в точке $x = 0$ $\left(f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to \infty \text{ при } x \to 0\right)$. Вычислим его по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^4 = 2\sqrt{x}\Big|_0^4 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{0}) = 4$$

Таким образом $\int_0^4 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится. Его геометрическая иллюстрация дана на рис. 3.26.

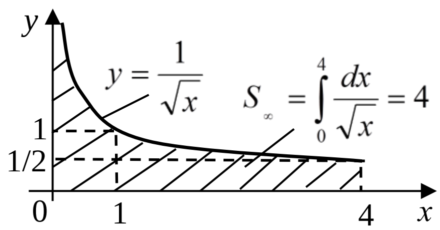


Рис. 3.26

Заметим, что вопрос о сходимости-расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций, как и вопрос о сходимости-расходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования, совсем не обязательно выяснять, вычисляя эти интегралы. Можно попробовать сравнить данный несобственный интеграл с каким-либо другим с теми же пределами интегрирования.

Пусть, например, $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – две непрерывные в полуинтервале $[a; b)$ и неотрицательные функции. И пусть $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a; b)$. Пусть, кроме того, $f(x) \to +\infty$ и $g(x) \to +\infty$ при $x \to b$ (рис. 3.27). Тогда, очевидно,

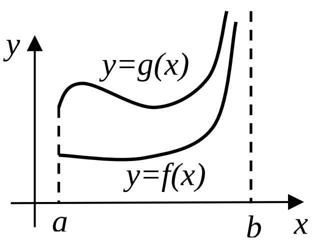


Рис. 3.27

$$0 < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx \tag{6.19}$$

Из этого неравенства очевидным образом вытекает следующий <u>*признак сравнения:*</u>

$$\begin{aligned} &\text{а) Если } \int_a^b g(x)dx = \text{(число)– сходится, то и } \int_a^b f(x)dx = \text{(число)– сходится.} \\ &\text{б) Если } \int_a^b f(x)dx = \infty \text{ – расходится, то и } \int_a^b g(x)dx = \infty \text{ – расходится} \end{aligned} \tag{6.20}$$

В качестве функции $g(x)$, с которой сравнивают данную функцию $f(x)$, часто используют функцию $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$, учитывая при этом, что

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ если } \alpha < 1 \text{ - сходится} \\ \infty, \text{ если } \alpha \geq 1 \text{ - расходится} \end{cases} \tag{6.21}$$

Пример 12. Исследовать на сходимость-расходимость $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \to +\infty$ при $x \to 1$, поэтому данный интеграл является несобственным. При этом очевидно, что для всех $x \in [0;\ 1)$

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

Но $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, согласно (6.21), сходится. Поэтому и меньший интеграл $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится. Более того, можем оценить и значение этого интеграла:

$$0 < \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}} < \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = 2.$$

Впрочем, мы можем вычислить этот интеграл и точно:

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}} = \left| \begin{array}{ll} \text{сделаем подстановку}: \sqrt{1-x} = t. & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \\ \text{тогда } x = 1-t^2;\ dx = -2tdt; & \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^0 \frac{(1-t^2)^2(-2tdt)}{t} = 2\int_0^1 (1-t^2)^2 dt = 2\int_0^1 (1-2t^2+t^4)dt = \frac{16}{15}$$

В заключение отметим, что несобственные интегралы, как и обычные (собственные) интегралы, можно вычислять с помощью интернета. В поисковике следует лишь сделать необходимый запрос и выбрать подходящий сайт из тех многих сайтов, которые предлагаются. Например, https://math24.biz.

Упражнения

1. Прямым вычислением несобственного интеграла $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$ исследовать его на сходимость-расходимость.

Ответ: $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln 2 + 1}{2}$ – интеграл сходится.

2. Используя признак сравнения (6.7) и учитывая, что $\frac{\pi}{4} \le \operatorname{arctg} x \prec \frac{\pi}{2}$ для всех $x \in [1; \infty)$, исследовать на сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx; \quad \text{б) } \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

<u>*Ответ:*</u> а) расходится; б) сходится.

3. Используя обобщенный признак сравнения (6.9), показать, что из двух несобственных интегралов

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

интеграл (а) расходится, а интеграл (б) сходится.

4. Показать, что $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2} dx$ при $a \ne 0$ и $k \ne 0$ сходится абсолютно.

5. Показать, что $\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ при любом $a > 0$ сходится условно.

6. Вычислив несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx$, подтвердить его сходимость.

7. Вычислив несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{\ln x dx}{x}$, подтвердить его расходимость.

8. Используя признак сравнения (6.20), показать, что несобственный интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{3+2x-x^2}$ расходится. Подтвердить это прямым вычислением интеграла.

9. Выполнить упражнения (1) - (8), используя интернет.

ГЛАВА 6
Дифференциальные уравнения

§1. Общие понятия и определения

Определение 1. *Уравнение, содержащее хотя бы одну из производных y', y'', y''',… неизвестной функции $y = y(x)$, называется дифференциальным уравнением для этой функции.* Сама функция y и её аргумент x могут входить, а могут и не входить в дифференциальное уравнение. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Таким образом,

$$F(x; y; y') = 0 \tag{1.1}$$

- общий вид дифференциального уравнения первого порядка;

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \tag{1.2}$$

- общий вид дифференциального уравнения второго порядка, и т.д.

В соответствии со сказанным выше в уравнении первого порядка (1.1) обязательно наличие лишь y', а наличие x и y не обязательно. В уравнении второго порядка (1.2) обязательно наличие лишь y'', а наличие остальных его элементов x, y и y' не обязательно.

Определение 2. *Решением (частным решением) дифференциального уравнения на некотором промежутке $[a; b]$ оси ох называется любая функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех $x \in [a;b]$ дифференциальному уравнению, то есть обращающая его в тождество* (*верное числовое равенство* 0=0). Графики частных решений $y = f(x)$ дифференциального уравнения называется его *интегральными кривыми*.

Например, функция $y = x^2$ является частным решением дифференциального уравнения первого порядка $y'-2x = 0$ для всех x от $-\infty$ до $+\infty$. А интегральной кривой, соответствующей данному частному решению, является парабола с уравнением $y = x^2$.

Определение 3. *Решить дифференциальное уравнение* (*любого порядка*) – *это значит найти все его частные решения, то есть найти все функции $y = f(x)$, удовлетворяющие этому уравнению.* Формула, содержащая все (или почти все) частные решения дифференциального уравнения, называется его *общим решением.* Частные решения, не содержащиеся в общем решении, называются *особыми решениями* дифференциального уравнения.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y'-2x = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $y' = 2x$. Следовательно, все функции y, удовлетворяющие этому уравнению, являются первообразными для функции $2x$ (см. §1, глава 3). Но множество всех первообразных для данной функции – это неопределенный интеграл от неё. Поэтому все частные решения дифференциального уравнения y'-$2x$ = 0 найдутся по формуле:

$$y = \int 2x dx = x^2 + C$$

Формула $y = x^2 + C$ представляет собой общее решение дифференциального уравнения y'-$2x$ = 0. Эта формула содержит в себе множество функций (ибо C – неопределенная константа), и все эти функции - частные решения дифференциального уравнения y'-$2x$ = 0. Особых решений у этого дифференциального уравнения нет. Интегральными кривыми данного дифференциального уравнения являются параболы $y = x^2 + C$ (их бесконечно много). Все частные решения, входящие в общее решение $y = x^2 + C$, являются ими для всех x от - ∞ до + ∞.

А теперь сделаем следующее важное замечание. Функция $y = f(x)$, являющаяся частным решением данного дифференциального уравнения, может быть им лишь для тех x, для которых определена и она, и все её производные, входящие в дифференциальное уравнение. Вносит свои ограничения и сама структура дифференциального уравнения (что-то в нем может находиться под корнем, что-то под логарифмом и т.д.). А так как у разных функций, вообще говоря, разные области определения (особенно с учетом областей определения их производных), то разные частные решения $y = f(x)$ дифференциального уравнения удовлетворяют этому уравнению, вообще говоря, на разных числовых множествах оси ox.

<u>*Пример 2.*</u> Решить дифференциальное уравнение первого порядка $yy' = x$.

<u>*Решение.*</u> Проведем следующие тождественные преобразования:

$$yy' = x \Leftrightarrow y\frac{dy}{dx} = x \Leftrightarrow ydy = xdx \Leftrightarrow \int ydy = \int xdx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + C \quad (C = 2C_2 - 2C_1) \quad \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + C}.$$

Множество функций $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$ содержит в себе все частные решения дифференциального уравнения $yy' = x$. Таким образом, формула $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$ является общим решением этого уравнения. Особых решений у него нет.

А теперь проанализируем полученное общее решение уравнения $yy' = x$.

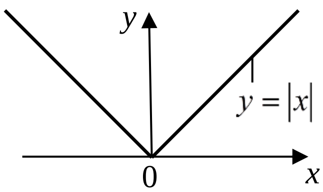


Рис. 6.1(а)

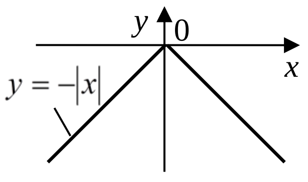


Рис. 6.1(б)

а) Если C>0, то и функции $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$, и их производные $y' = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + C}}$ определены для любых $x \in (-\infty;+\infty)$. Следовательно, при C>0 эти функции являются решениями дифференциального уравнения $yy' = x$ при любых x.

б) Если C=0, то получаем две функции $y=\pm\sqrt{x^2}=\pm|x|$, которые определены для любых $x\in(-\infty;+\infty)$. Но вот производные у них существует для любых x, кроме точки x=0, что наглядно демонстрируют графики этих функции (см. рис. 6.1(а) и 6.1 (б)).

Действительно, согласно геометрическому смыслу производной (глава 4, формула 1.11) производная функции связана с касательной к графику функции. А у графиков функций $y=\pm|x|$ при x=0 касательной, очевидно, нет. Поэтому функции $y=\pm|x|$ является решениями дифференциального уравнения $yy'=x$ для всех x, кроме x=0.

в) Если C<0, то –С= A^2>0, и тогда получаем функции $y=\pm\sqrt{x^2-A^2}$, которые определены лишь при $x\geq A$ и при $x\leq -A$, причем их производные $y'=\pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2-A^2}}$ определены строго при $x>A$ и при $x<-A$. Поэтому функции $y=\pm\sqrt{x^2-A^2}$ являются решениями дифференциального уравнения $yy'=x$ лишь на интервалах $x>A$ и $x<-A$. При изменении величины A меняются и эти интервалы.

<u>Пример 3.</u> Решить дифференциальное уравнения первого порядка $y'=xy^2$.

<u>Решение.</u> Очевидно, что функция y=0 является решением (частным решением) данного дифференциального уравнения. Поищем возможные другие решения этого уравнения, когда $y\neq 0$. Для этого проведем следующие тождественные преобразования данного уравнения:

$$y'=xy^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=xy^2 \Leftrightarrow |\text{разделим переменные } x \text{ и } y| \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2}=xdx \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$|\text{проинтегрируем обе части}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int xdx \Leftrightarrow -\frac{1}{y}+C_1=\frac{x^2}{2}+C_2 \Leftrightarrow -\frac{1}{y}=\frac{x^2+C}{2}\ \left(C=2C_2-2C_1\right) \Leftrightarrow y=-\frac{2}{x^2+C}$$

Функции $y=-\dfrac{2}{x^2+C}$ (их бесчисленное множество), как и функция y=0, представляют собой частные решения дифференциального уравнения $y'=xy^2$ (убедитесь в этом, найдя y' и подставив y и y' в это уравнение). У каждой из этих функций своя область определения, зависящая от величины константы C. В формуле $y=-\dfrac{2}{x^2+C}$ содержатся все частные решения дифференциального уравнения $y'=xy^2$, кроме решения $y=0$ (оно не получается по этой формуле ни при каком значении C). Таким образом, формула $y=-\dfrac{2}{x^2+C}$ представляет собой общее решение дифференциального уравнения $y'=xy^2$. А $y=0$ – особое решение этого уравнения. Заметим, что и интегральная кривая, соответствующая этому особому решению y=0 (ось ox) кардинально отличается от кривых $y=-\dfrac{2}{x^2+C}$.

В примерах (1) – (3) мы решили три различных дифференциальных уравнения первого порядка, и у каждого из них оказалось бесчисленное множество частных решений. Произошло это потому, что в процессе решения каждого из них мы применяли операцию интегрирования (операцию вычисления неопределенных интегралов). Интегрирование привело к появлению неопределенной константы интегрирования C, которая затем вошла в выражение для искомой функции y: $y = y(x;C)$. Таким образом, мы получили множество частных решений дифференциального уравнения. Это множество включало в себя или все частные решения дифференциального уравнения (в примерах 1 и 2), или почти все (в примере 3). Поэтому это множество $y = y(x;C)$ частных решений дифференциального уравнения представляло собой общее решение этого уравнения.

По такой схеме (интегрированием) находят общее решение любого дифференциального уравнения первого порядка $F(x; y; y') = 0$. Действительно, чтобы решить такое уравнение, то есть чтобы найти те функции $y = f(x)$, которые ему удовлетворяют, нужно «вытащить» функцию y из-под знака её производной. А это как раз и делается с помощью процедуры интегрирования – процедуры, обратной дифференцированию.

Итак, *схема получения общего решения любого дифференциального уравнения первого порядка таковой*:

$$F(x;y;y')=0 \Rightarrow |\text{готовим уравнение к интегрированию и интегрируем его}| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi(x;y;C)=0 \Rightarrow y=y(x;C) \qquad (1.3)$$

Отметим, что далеко не всегда удается осуществить последний этап этой схемы и получить общее решение дифференциального уравнения в явном виде, то есть в виде $y = y(x;C)$, когда y выражен через x и C. Тогда заканчивают работу на втором этапе, то есть оставляют общее решение в неявном виде $\Phi(x;y;C)=0$.

Общее решение дифференцированного уравнения, в каком бы виде (явном, неявном) оно ни было получено, называют ещё *общим интегралом* дифференцированного уравнения. Ибо в любом случае получается оно в результате интегрирования этого уравнения.

Поиск общего решения дифференциального уравнения – это магистральный путь решения этого уравнения. Но на этом пути могут быть ответвления, какие-то частные случаи, которые не вписываются в схему поиска общего решения. И в этих ответвлениях могут быть обнаружены частные решения $y = f_1(x),\ \ y = f_2(x),\ldots$ дифференциального уравнения, которые не войдут в его общее решение (подтверждением этого служит пример 3). Это будут особые решения, и их тоже нужно найти (не потерять). В противном случае дифференциальное уравнение окажется решенным неполноценно.

В заключении данного параграфа укажем, в таких задачах естествознания следует ожидать появления дифференциальных уравнений.

Так как решениями дифференциальных уравнений являются функции, а каждая функция $y = f(x)$ в принципе описывает процесс изменения одной переменной (y) при изменении другой переменной (x), то дифференциальные уравнения, по идее, должны широко встречаться в задачах по исследованию различного рода процессов (физических, химических, биологических, технологических, экономических, общественных, и т.д.). В следующих параграфах мы приведём примеры, подтверждающие это предположение.

Упражнения

1. Решить дифференциальное уравнение $y' - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 0$.

   <u>*Ответ*</u>: $y = \frac{x\sqrt{x}}{3} + C$ - общее решение.

2. Решить дифференциальное уравнение $y' = y$.

   <u>*Ответ*</u>: $y = Ce^x$ - общее решение.

3. Решить дифференциальное уравнение $y' = (y-1)^2$.

   <u>*Ответ:*</u> $y = 1 - \frac{1}{x+C}$ - общее решение; *y*=1 – особое решение.

§2. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Общее решение любого дифференциального уравнения первого порядка *F(x; y; y')* = 0, как это следует из схемы его получения (1.3), содержит бесчисленное множество частных решений. Возникает естественный вопрос: как из этого множество частных решений выделить интересующее нас конкретное частное решение? Иначе говоря, как из множества интегральных кривых данного дифференциального уравнения выделить нужную интегральную кривую?

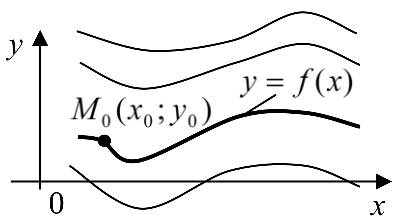


Рис. 6.2

Ответ почти очевиден: для этого на плоскости *xoy* нужно задать некоторую точку $M_0(x_0; y_0)$, через которую должна пройти искомая интегральная кривая. Тогда её уравнение $y = f(x)$ и будет тем частным решением, которое выделяется из прочих (рис. 6.2).

Задание точки $M_0(x_0; y_0)$ равносильно заданию условия: при $x = x_0$ должен быть $y = y_0$. То есть для искомого, выделяемого из прочих, частного решения $y = f(x)$ данного дифференциального уравнения должно выполняться условие: $y(x_0)=y_0$. Это условие называется *начальным условием* для дифференциального уравнения. Начальным оно называется потому, что очень часто в реальных задачах по исследованию различного рода процессов роль независимой переменной *x* играет время *t*, а начальным значением x_0 является начальный момент времени t_0 (обычно $t_0=0$). Тогда начальное условие $y(x_0)=y_0$ показывает, какое значение y_0 имела искомая функция $y=f(x)$, описывающая исследуемый процесс, в начальный момент времени x_0. Ну, а сама функция $y=f(x)$, если нас не интересует предыстория процесса, то есть времена $x \prec x_0$, ищется для $x \succ x_0$.

Если дифференциальное уравнение первого порядка $F(x;\ y;\ y')=0$ задано вместе с начальным для него условием $y(x_0)=y_0$, то говорят, что для этого уравнения задана *задача Коши*:

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Решить её - это значит найти те частные решения $y=f(x)$ дифференциального уравнения $F(x;\ y;\ y')=0$, которые удовлетворяют еще и заданному начальному условию $y(x_0)=y_0$. С точки зрения рисунка 6.2 решить задачу Коши (2.1) – это значит найти уравнения $y=f(x)$ всех интегральных кривых дифференциального уравнения $F(x;\ y;\ y')=0$, проходящих через начальную точку $M_0(x_0;y_0)$.

Как правило, задача Коши (2.1) имеет единственное решение $y=f(x)$. То есть через заданную начальную точку $M_0(x_0;y_0)$ проходит единственная интегральная кривая $y=f(x)$ дифференциального уравнения $F(x;\ y;\ y')=0$ (как на рис. 6.2). И такая начальная точка $M_0(x_0;y_0)$ называется *обыкновенной точкой* дифференциального уравнения.

Но бывает, что ни одна из интегральных кривых не проходит через заданную начальную точку $M_0(x_0;y_0)$. А бывает, что задача Коши имеет несколько решений. То есть бывает, что через начальную точку $M_0(x_0;y_0)$ проходит несколько интегральных кривых. В обоих этих случаях такая начальная точка называется *особой точкой* дифференциального уравнения.

Если задача Коши имеет единственное решение $y=f(x)$, то это значит, что процесс, который описывается этой единственной функцией, идет, начиная с точки $M_0(x_0;y_0)$, вполне однозначно.

Если задача Коши не имеет решений, то такой процесс вообще невозможен.

А если задача Коши имеет несколько решений, то эти решения описывает некий *ветвящийся* в точке $M_0(x_0;y_0)$ процесс. Такие процессы, заметим, в природе тоже имеют место. Например, при нулевой температуре вода находится в неустойчивом состоянии, ибо может затем и оставаться жидкостью (одна возможная ветвь процесса), и начать превращаться в лед (другая возможная ветвь).

Подавляющее число исследуемых на практике процессов – это обычные, однозначно идущие процессы. Поэтому и задачи Коши для этих процессов имеют единственное решение. Тем не менее, сколько решений будет у конкретной задачи Коши (2.1) и каковы они, окончательно выясняется в процессе её решения.

<u>Схема решения задачи Коши</u> (2.1)

Она такова:

1. Решаем дифференциальное уравнение $F(x; y; y') = 0$ и находим все его решения. То есть интегрированием этого уравнения находим его общее решение (желательно в явной форме $y = y(x;C)$, а если это не удастся, то в неявной форме $\Phi(x;y;C)=0$), а также находим его возможные особые решения $y = f_1(x); \quad y = f_2(x); \ldots.$.

2. Подставляем начальные значения $x = x_0$ и $y = y_0$ в общее решение и получаем уравнение для нахождения константы C:

$$y_0 = y(x_0;C) \text{ или } \Phi(x_0; y_0; C) = 0 \tag{2.2}$$

Решая это уравнение, находим значение C. Обычно это значение одно. Тогда это свидетельство того, что $M_0(x_0;y_0)$ - обыкновенная точка дифференциального уравнения. Но этих значений может быть и несколько: $C = \{C_1;\ C_2 \ldots\}$, или их может не быть вообще. Тогда $M_0(x_0;y_0)$ - особая точка дифференциального уравнения.

3. Подставляем каждое из найденных значений C в общее решение и получаем частные решения дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$, выделяемые из его общего решения:

$$\begin{aligned} &y = y(x;C_1); \quad y = y(x;C_2); \ldots, \text{ - решения в явном виде;} \\ &\Phi(x; y; C_1) = 0; \quad \Phi(x; y; C_2) = 0; \ldots \text{ - решения в неявном виде.} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Они и являются решениями задачи Коши (2.1).

4. Проверяем, нет ли среди особых решений $y = f_1(x); \quad y = f_2(x); \ldots.$ дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$ таких, которые удовлетворяют начальному условию $y(x_0) = y_0$. Если такие найдутся, они тоже будут решениями задачи Коши (2.1).

<u>Пример1</u>. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

1. Сначала решим дифференциальное уравнение $y' = xy^2$. Оно уже решено ранее – его решение найдено в примере 3, §1:

$$y = -\frac{2}{x^2 + C} \text{ - общее решение;} \quad y = 0 \text{ – особое решение.}$$

2. Подставим начальные значения $(x = 0;\ y = 1)$ в общее решение и найдем C:

$$1 = -\frac{2}{0^2 + C} \Rightarrow C = -2$$

3. Подставим $C = -2$ в общее решение и получим частное решение

$$y = -\frac{2}{x^2 - 2} = \frac{2}{2 - x^2}.$$

Эта функция является решением данной задачи Коши.

4. Обратим внимание на особое решение y=0. Начальному условию $y(0)$=1 оно не удовлетворяет, поэтому решением данной задачи Коши не является.

<u>Ответ</u>: $y = \frac{2}{2 - x^2}$ - единственное решение поставленной задачи Коши.

<u>Пример 2</u>. Материальное тело поднято на высоту h и в начальный момент времени t=0 отпущено в свободное падение. Описать математически процесс падения тела. А именно, найти зависимость $v = v(t)$ скорости v падающего тела от времени t, и найти зависимость $s = s(t)$ пути s, пройденного падающим телом, от времени t. Сопротивлением воздуха пренебречь.

<u>Решение.</u> Как известно, все свободно падающие тела падают с постоянным ускорением $g \approx 9{,}8$ м/сек^2 - с ускорением свободного падения. А так как ускорение – это производная от скорости, то получаем: $v' = g$. Это - дифференциальное уравнение первого порядка для искомой функции $v = v(t)$. Учтём еще, что в начальный момент времени $t = 0$ тело покоилось, а значит, выполняется начальное условие: $v(0) = 0$. В итоге для определения функции $v = v(t)$ получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} v' = g \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Решим эту задачу.

1. Сначала решим дифференциальное уравнение:

$$v' = g \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g \Leftrightarrow dv = gdt \Leftrightarrow \int dv = g\int dt \Leftrightarrow v = gt + C$$

Это – общее решение уравнения $v' = g$, содержащее все его решения. Особых решений у него нет.

2. Используем начальное условие $v(0)=0$ и найдем C:

$$0 = g0+C \Rightarrow C = 0.$$

3. Подставим C=0 в общее решение $v=gt+C$ и получим окончательно: $v=gt$. Это и есть решение поставленной задачи Коши (единственное). И заодно $v=gt$ - это искомая зависимость скорости v падающего тела от времени t.

А теперь займёмся поиском зависимости $s=s(t)$ пути s от времени t. Учтём, что $s'=v$ и что $s(0)=0$. Тогда для определения этой зависимости получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} s' = gt \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

Решим эту задачу.

1. Сначала решим дифференциальное уравнение $s' = gt$:

$$s' = gt \Leftrightarrow s = \int gtdt = g\int tdt = \frac{gt^2}{2} + C;\;\; s = \frac{gt^2}{2} + C$$

Это - общее решение уравнения $s' = gt$, содержащее все его решения. Особых решений у него нет.

2. Используем начальное условие $s(0)=0$ и найдём C:

$$0 = \frac{g\cdot 0^2}{2} + C \Rightarrow C = 0.$$

3. Подставим C=0 в общее решение $s = \frac{gt^2}{2} + C$ и получим окончательно: $s = \frac{gt^2}{2}$. Это и есть решение рассматриваемой задачи Коши. И заодно $s = \frac{gt^2}{2}$ - это искомая зависимость пути s, проходимого свободно падающим телом, от времени t.

<u>*Ответ*</u>: $v = v(t) = gt$; $s = s(t) = \frac{gt^2}{2}$ - известные школьные формулы.

<u>*Пример3.*</u> Дать математическое описание демографического процесса (процесса изменения численности населения со временем) для достаточно крупного населённого региона, если в начальный момент времени $t=0$ численность населения региона составляла y_0 человек.

<u>*Решение.*</u> Пусть $y = y(t)$– искомая зависимость численности y населения региона от времени t. И пусть за время Δt, прошедшее с некоторого момента t до момента $t+\Delta t$, родилось $(\Delta y)_1$ человек и умерло $(\Delta y)_2$ человек. Эти количества, очевидно, пропорциональны как исходной (в момент t) численности населения $y = y(t)$, так и величине временнóго промежутка Δt. То есть

$$(\Delta y)_1 = k_1 y\Delta t\,; \quad (\Delta y)_2 = k_2 y\Delta t$$

Здесь k_1 и k_2 – некоторые числовые коэффициенты, связанные соответственно с уровнем рождаемости и уровнем смертности в данном регионе. Тогда общее изменение Δy численности населения за время Δt найдется по формуле:

$$\Delta y = (\Delta y)_1 - (\Delta y)_2 = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t = ky\Delta t\,.$$

Здесь $k = k_1 - k_2$. Из полученного равенства следует: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = ky$. Устремляя здесь $\Delta t \to 0$ (при этом, очевидно, и $\Delta y \to 0$), то есть переходя к бесконечно малым $\Delta t = dt$ и $\Delta y = dy$, получим:

$$\frac{dy}{dt} = ky\,, \text{ или } \quad y' = ky\,.$$

Это – дифференциальное уравнение первого порядка для искомой функции $y = y(t)$. Дополняя это заданным начальным условием $y(0) = y_0$, получим для этой функции задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Решим эту задачу.

1. Сначала решим дифференциальное уравнение $y' = ky$. Функция $y = 0$ является его очевидным частным решением. Но это, очевидно, не та функция, которую мы ищем – она не удовлетворяет начальному условию, да и вообще она означает, что население в регионе отсутствует.

Будем искать те решения уравнения $y' = ky$ для которых $y \neq 0$:

$$y' = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y} = k\int dt \Leftrightarrow \ln|y| = kt + C \Leftrightarrow |y| = e^{kt+C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^{kt} \Leftrightarrow y = \pm e^C \cdot e^{kt} \Leftrightarrow \left| \pm e^C - \text{это } C \right| \Leftrightarrow y = Ce^{kt}$$

Итак, $y = Ce^{kt}$ - общее решение дифференциального уравнения $y' = ky$. В него, кстати, при $C = 0$ входит и отмеченное ранее нулевое решение $y = 0$. То есть в найденном общем решении содержатся все решения дифференциального уравнения.

2. Используем начальное условие $y(0) = y_0$ и найдём C:

$$y_0 = Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = y_0\,.$$

3. Подставим $C = y_0$ в общее решение $y = Ce^{kt}$ и получим искомое решение задачи Коши:

$$y = y_0 e^{kt}.$$

Это и есть искомая зависимость $y = y(t)$ численности y населения региона от времени t.

Проанализируем эту зависимость.

а) Если $k \succ 0$, то численность населения y экспоненциально растёт со временем (рис. 6.3(а)).

б) Если $k \prec 0$, то численность населения y экспоненциально убывает со временем (рис. 6.3(б)).

в) Если $k = 0$, то $y = y_0$, то есть численность населения региона не меняется (рис. 6.3(в).

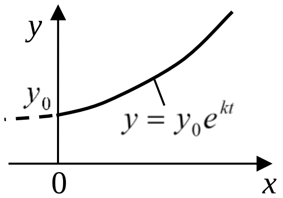


Рис. 6.3(а)

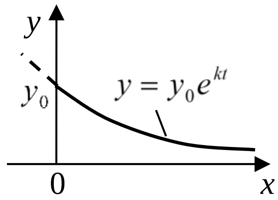


Рис. 6.3(б)

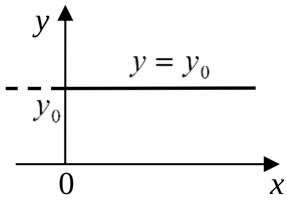


Рис. 6.3(в)

Какой именно будет величина k для данного региона, можно выяснить опытным путём. Пусть, например, перепись населения показала, что в некоторый момент времени t_* в регионе проживало y_* человек. Подставляя эти данные в формулу $y = y_0 e^{kt}$, можем найти k:

$$y_* = y_0 e^{kt_*} \Leftrightarrow e^{kt_*} = \frac{y_*}{y_0} \Leftrightarrow kt_* = \ln\frac{y_*}{y_0} \Leftrightarrow k = \frac{1}{t_*}\ln\frac{y_*}{y_0}.$$

<u>Примечание</u>. Полученная формула $y = y_0 e^{kt}$ будет верно описывать демографический процесс в регионе, если уровень рождаемости и уровень смертности в нем не меняются со временем. То есть если коэффициенты k_1 и k_2 рождаемости и смертности не меняются со временем. А значит, если не меняется со временем и итоговый коэффициент $k = k_1 - k_2$. Но это, как известно, не так: с течением времени, в силу разных причин, ситуация и со смертностью, и с рождаемостью может существенно измениться. Поэтому полученную формулу $y = y_0 e^{kt}$ при конкретном числовом значении k оправданно применять лишь на протяжении достаточно ограниченного периода времени. В другой период времени тоже можно применять эту формулу, но уже при другом значении k.

<u>*Пример 4.*</u> Рассмотрим задачу о математической модели естественного роста выпуска продукции.

Пусть $y = y(t)$- объем продукции некоторого предприятия, реализованной к моменту времени t. Будем считать, что вся продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p за единицу продукции независимо от объема продаж $y(t)$. Это значит, что рынок данной продукции длительное время является ненасыщенным – удается продавать по фиксированной цене p практически любые объемы этой продукции.

Доход R от продаж составит: $R = R(t) = p \cdot y(t)$. Будем считать, что некоторая часть этого дохода используется в качестве инвестиций в производство выпускаемой продукции. То есть объем инвестиций $I(t)$ составит:

$$I(t) = m \cdot R(t) = mpy(t) \tag{2.4}$$

Здесь $0 < m < 1$ – так называется *норма инвестиций.* Она показывает, какая часть дохода возвращается в производство. Если этих инвестиций не делать, роста производства продукции не будет.

Чем больше объем инвестиций $I(t)$, тем быстрее растёт объем производства $y(t)$ продукции, которая затем поступает на продажу. В модели естественного роста это значит, что скорость роста объема производства $y'(t)$ (так называемая *акселерация производства*) пропорциональна объему инвестиций $I(t)$:

$$y'(t) = l \cdot I(t). \tag{2.5}$$

Здесь

$$\frac{1}{l} = \frac{I(t)}{y'(t)} \tag{2.6}$$

- так называемая *норма акселерации*, которая показывает, каким должен быть объём инвестиций $I(t)$, чтобы обеспечить единичную скорость роста объема производства (обеспечить рост на единицу продукции за единицу времени). Подставляя (2.4) в (2.5), получим

$$y' = ky, \tag{2.7}$$

где $k = mpl$ – числовой коэффициент. Равенство (2.7) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка для функции $y(t)$. Дополняя его некоторым начальным условием $y(0) = y_0$, получим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Эта задача полностью совпадает с задачей Коши для демографического процесса (см. пример 3). Значит, у них полностью совпадают и решения:

$$y = y_0 e^{kt} \tag{2.9}$$

Заметим, что условие постоянства цены p единицы продаваемой продукции, то есть условие ненасыщенности рынка, не может выполнятся всегда, при любых

t. С увеличением объема продаж $y(t)$ на некотором этапе рынок насыщается, спрос на товар падает, и дальнейшее увеличении объема продаж возможно лишь при снижении цены p на него – в соответствии с классической убывающей кривой спроса $p = p(y)$. Если учесть эту зависимость p от y, то выражение (2.4) для $I(t)$ примет вид:

$$I(t) = mp(y)y(t) \tag{2.10}$$

А вместо (2.7) из (2.5) получим:

$$y' = np(y)y(t), \tag{2.11}$$

где $n = ml$. Это дифференциальное уравнение вместе с начальным условием $y(0) = y_0$ составит задачу Коши

$$\begin{cases} y' = np(y)y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

для определения функции $y(t)$, характеризующей объем продаж при насыщенном спросе, когда рост объема продаж возможен лишь при снижении цены p на продаваемую продукцию. Эта функция, естественно, будет отличаться от функции (2.9) (будет более сложной).

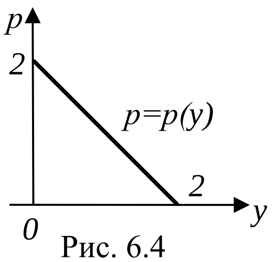


Рис. 6.4

Получим, например, эту функцию при следующих данных: кривая спроса $p = p(y)$ задается уравнением $p = 2 - y$ (рис. 6.4); норма инвестиций $m = 0{,}5$; норма акселерации $\frac{1}{l} = 2$; $y(0) = 0{,}5$ - начальное условие.

Решение. Для указанных данных задача Коши (2.12) примет вид:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{4}(2 - y)y \\ y(0) = 0{,}5 \end{cases} \tag{2.13}$$

Решим эту задачу.

1. Решим дифференциальное уравнение $y' = \frac{1}{4}(2 - y)y$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}(2 - y)y; \quad \frac{dy}{(2 - y)y} = \frac{1}{4}dt; \quad \int \frac{dy}{(2 - y)y} = \int \frac{1}{4}dt$$

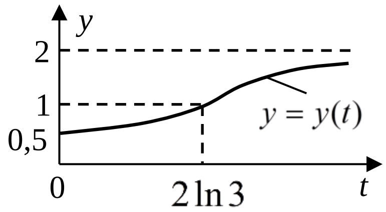
$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2 - y} + \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{4}t + C; \quad \frac{1}{2}\left(-\ln|2 - y| + \ln|y| \right) = \frac{1}{4}t + C;$$

$$\ln\left|\frac{y}{2-y}\right| = \frac{1}{2}t + C\,;\quad \left|\frac{y}{2-y}\right| = e^{\frac{t}{2}}\cdot e^{C}\,;\quad \frac{y}{2-y} = \pm e^{C}\cdot e^{\frac{t}{2}} = \left|\pm e^{C} - \textit{это } C\right| = Ce^{\frac{t}{2}}\,;$$

$$y = \frac{2Ce^{\frac{t}{2}}}{1+Ce^{\frac{t}{2}}}\,. \qquad (2.14)$$

- общее решение дифференциального уравнения. У уравнения есть еще и два особых решения: $y=0$ и $y=2$, но они нас, естественно, не интересуют.

2. Используя начальное условие $y(0)=0{,}5$, найдем константу C: $C=\dfrac{1}{3}$. В итоге получим окончательно:



$$y = y(t) = \frac{2e^{\frac{t}{2}}}{3+e^{\frac{t}{2}}} = \frac{2}{1+3e^{-\frac{t}{2}}} \qquad (2.15)$$

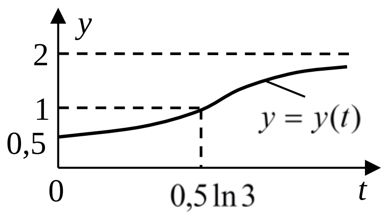
<u>*Ответ*</u>: $y = y(t) = \dfrac{2}{1+3e^{-\frac{t}{2}}}$; см. также график функции $y=y(t)$.

Упражнения

1. Сформулировать и решить задачу по определению скорости $v=v(t)$ свободно падающего тела массой m при условии, что учитывается сопротивление воздуха, пропорциональное скорости падения тела.

<u>*Ответ:*</u> $\begin{cases} mv' = mg - kv \\ v(0)=0 \end{cases} \Rightarrow v = \dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right).$

2. Сформулировать и решить задачу по определению объема $y=y(t)$ реализованной продукции в условиях насыщенного спроса, если известно, что кривая спроса $p=p(y)$ задаётся уравнением $p=2-y$; норма инвестиций $m=0{,}5$; норма акселерации $\dfrac{1}{l}=2$; $y(0)=0{,}5$ – начальное условие.



<u>*Ответ:*</u> $\begin{cases} y' = (2-y)y \\ y(0)=0{,}5 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2}{1+3e^{-2t}};$

§3. Основные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка и их решение

В этом параграфе мы подробнее остановимся на вопросах решения (интегрирования) дифференциальных уравнений 1-го порядка $F(x; y; y') = 0$. Общая схема получения общего решения таких уравнений указана в (1.3). Для полноценного решения дифференциального уравнения не должны быть потеряны и его особые решения (если они есть).

К сожалению, схема (1.3) не всегда может быть реализована. Во-первых, уравнение сначала нужно подготовить к интегрированию, что не всегда удается. Но даже если оно подготовлено к интегрированию, в процессе самого интегрирования могут появиться неберущиеся интегралы, что тоже не позволит реализовать схему (1.3) и получить общее решение дифференциального уравнения интегрированием (или, как ещё говорят, получить общее решение *в квадратурах*). Тем не менее ряд наиболее простых (и наиболее важных для практики) типов дифференциальных уравнений первого порядка заведомо можно проинтегрировать. И как это делается – сейчас рассмотрим.

1. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

Это - дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x) \tag{3.1}$$

Решение такого уравнения очевидно: всякая функция y, удовлетворяющая этому уравнению, является первообразной для функции $f(x)$. А значит, любое частное решение $y = y(x)$ этого уравнения может быть найдено в результате интегрирования функции $f(x)$:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C \tag{3.2}$$

Формула (3.2) представляет собой общее решение уравнения (3.1). Она содержит в себе все частные решения этого уравнения. Особых решений у уравнения (3.1) нет.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это – дифференциальные уравнения вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{3.3}$$

Решение таких уравнений производится по следующей схеме.

1) Сначала находим такие числовые значения y, при которых $f_2(y) = 0$:

$$f_2(y)=0 \Rightarrow y=(y_1; y_2 ...) \tag{3.4}$$

Функции $(y=y_1; \quad y=y_2 ...)$ являются, очевидно, частными решениями уравнения (3.3), ибо при подстановке каждой из них в это уравнение получим тождество 0=0. Эти функции - кандидаты в особые решения уравнения (3.3).

2) Теперь находим все остальные решения $y=y(x)$ уравнения (3.3), для которых $f_2(y)\neq 0$. Делаем это по схеме:

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\text{ разделим выражения с } x \text{ и } y \text{ (разделим переменные } x \text{ и } y))\,| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \Leftrightarrow |\text{ интегрируем обе части }| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx \Leftrightarrow F_2(y) = F_1(x) + C \tag{3.5}$$

Полученное равенство $F_2(y)=F_1(x)+C$ представляет собой общее решение уравнения (3.3) в неявном виде (его общий интеграл). Если в нем можно выразить y, приводим его к явному виду $y=y(x;C)$.

3) Смотрим, не входят ли в найденное общее решение какие-нибудь частные решения, найденные в пункте 1. Если такие найдутся – их в ответе, в дополнение к общему решению, приводить не надо. А оставшиеся частные решения из пункта 1, не вошедшие в общее решение, должны быть приведены в качестве особых решений.

<u>*Пример 1.*</u> Решить дифференциальное уравнение $y'=4x(y-1)$.

<u>*Решение.*</u> Данное уравнение – уравнение вида $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ при $f_1(x)=4x$ и $f_2(y)=y-1$, то есть это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его по изложенной выше схеме.

1) $f_2(y)=0 \Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow y=1.$

Итак, одно частное решение уравнения $y'=4x(y-1)$ уже найдено: это функция $y=1$.

2) Найдём по схеме (3.5) общее решение этого уравнения, содержащее все остальные его частные решения:

$$y'=4x(y-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 4x(y-1) \Leftrightarrow |\text{ разделяем переменные } x \text{ и } y| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y-1} = 4xdx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\text{ интегрируем обе части }| \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int 4x dx \Leftrightarrow \ln|y-1| = 2x^2 + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y-1| = e^{2x^2+C} \Leftrightarrow |y-1| = e^C \cdot e^{2x^2} \Leftrightarrow y-1 = \pm e^C \cdot e^{2x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\text{ неопределенную константу } \pm e^C \text{ опять обозначим буквой } C\ | \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y-1 = Ce^{2x^2} \Leftrightarrow y = Ce^{2x^2} + 1$$

Последнее равенство и есть искомое общее решение в явном виде. Отметим, что найденное в пункте 1 частное решение $y = 1$ получается из общего при C=0. То есть оно входит в общее решение. Таким образом, общее решение $y = Ce^{2x^2} + 1$ дифференциального уравнения $y' = 4x(y-1)$ содержит все его частные решения. Особых решений у уравнения нет.

3. Однородные дифференциальные уравнения

Это – дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.6}$$

Такие уравнения сводятся к уравнениям (3.3) с разделяющимися переменными после введения в них новой известной функции $z = \dfrac{y}{x}$. Действительно, пусть

$$\frac{y}{x} = z; \text{ тогда } y = zx;\ y' = z'x + zx' = z'x + z \tag{3.7}$$

С учетом равенств (3.7) уравнение (3.6) примет вид:

$$z'x + z = f(z) \Leftrightarrow z' = \frac{f(z) - z}{x} \tag{3.8}$$

А это - уравнение вида $z' = f_1(x) \cdot f_2(z)$ при $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ и $f_2(z) = f(z) - z$, то есть уравнение с разделяющимися переменными для новой неизвестной функции z. Найдя все его решения $z = z(x)$, затем по формуле $y = zx$ найдем и все решения $y = y(x)$ исходного уравнения (3.6).

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение первого порядка

$$(y - x)ydx + x^2 dy = 0$$

Решение. Сначала убедимся в том, что это действительно дифференциальное уравнение первого порядка, а заодно и определим его тип:

$$(y-x)ydx+x^2dy=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2} \Leftrightarrow y'=(1-\frac{y}{x})\cdot\frac{y}{x}$$

Это – уравнение вида $y'=f(\frac{y}{x})$, то есть однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Для его решения введем вместо y новую известную функцию z:

$$\frac{y}{x}=z; \text{ тогда } y=zx, \text{ а } y'=z'x+z$$

С учетом этого наше дифференциальное уравнение примет вид:

$$xz'=-z^2 \Leftrightarrow z'=-\frac{z^2}{x}.$$

Это – уравнение вида $z'=f_1(x)\cdot f_2(z)$ при $f_1(x)=\frac{-1}{x}$ и $f_2(z)=z^2$, то есть уравнение с разделяющимися переменными. Решим его по соответствующей таким уравнениям схеме (как в примере 1).

1) $f_2(z)=0 \Leftrightarrow z^2=0 \Leftrightarrow z=0$.

Итак, одно частное решение z уже найдено: это функция $z=0$.

2) Найдем общее решение уравнения $z'=-\frac{z^2}{x}$, содержащее все его остальные частные решения $z\neq 0$:

$$z'=-\frac{z^2}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx}=-\frac{z^2}{x} \Leftrightarrow |\text{ разделяем переменные } x \text{ и } z\,| \Leftrightarrow \frac{dz}{z^2}=-\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\text{ интегрируем обе части }| \Leftrightarrow \int\frac{dz}{z^2}=-\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{z}=-(\ln|x|+C) \Leftrightarrow z=\frac{1}{\ln|x|+C}$$

Это – общее решение уравнения $z'=-\frac{z^2}{x}$. Заметим, что найденное в пункте 1 частное решение $z=0$ этого уравнения не получается из общего решения $z=\frac{1}{\ln|x|+C}$ ни при каком значении *C*. Следовательно, $z=0$ – это особое решение указанного уравнения.

Ну а теперь, найдя все функции z и учитывая, что $y=zx$, можем записать и все функции y, то есть все решения исходного дифференциального уравнения $(y-x)ydx+x^2dy=0$:

$$y=\frac{x}{\ln|x|+C} \text{ - общее решение; } y=0 \text{ – особое решение.}$$

4. Линейные однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Это – уравнения вида

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (3.9)$$

Линейным оно называется потому, что и неизвестная функция y, и её производная y' входят в это уравнение линейно (в первой степени) - аналогично тому, как входят x и y в линейную функцию $y = kx + b$. А добавка «однородное» связана с тем, что правая часть уравнения (3.9) представляет собой нуль. Если же там будет не нуль, то такое уравнение будет называться линейным неоднородным (его решению посвящён следующий пункт 5).

Уравнение (3.9) является заодно и уравнением с разделяющимся переменными вида (3.3) при $f_1(x) = -p(x)$ и $f_2(y) = y$. Из этого следует схема его решения:

1) $f_2(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Таким образом, одно частное решение уравнения (3.9) (тривиальное решение) мы уже имеем: это функция $y = 0$.

2) Найдем общее решение уравнения (3.9):

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Leftrightarrow |\text{ разделяем переменные } x \text{ и } y| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| = F(x) + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{F(x)+C} \Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^{F(x)} \Leftrightarrow y = \pm e^C \cdot e^{F(x)} \Leftrightarrow y = Ce^{F(x)} \Leftrightarrow y = Cy_0(x) \qquad (3.10)$$

Итак, общее решение уравнения (3.9) имеет вид $y = Cy_0(x)$, где $y_0(x) = e^{F(x)}$ - одно из частных решений этого уравнения (оно выделяется из общего решения, если положить в нем C=1). Заметим, что и тривиальное решение $y = 0$ уравнения (3.9) содержится в его общем решении (получается из него при C=0). Таким образом, в общем решении

$$y = Cy_0(x) \qquad (3.11)$$

линейного однородного дифференциального уравнения (3.9) содержатся все его частные решения.

Структура (3.11) общего решения уравнения (3.9) показывает, что достаточно найти какое – либо частное решение $y_0(x)$ этого уравнения. После этого по формуле (3.11) можно записать и его общее решение.

5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Это - уравнения вида

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (3.12)$$

Докажем <u>теорему:</u>

Общее решение уравнения (3.12), *содержащее все его частные решения, может быть получено по формуле*

$$y = Cy_0(x) + y_*(x), \qquad (3.13)$$

где $Cy_0(x)$ *– общее решение линейного однородного уравнения* (3.9), *а* $y_*(x)$ *– какое – либо частное решение линейного неоднородного уравнения* (3.12).

<u>Доказательство.</u> Пусть $y_* = y_*(x)$ – некоторое конкретное частное решение уравнения (3.12), а $y = y(x)$ – любое другое его частное решение. Тогда одновременно имеем:

$$\begin{cases} y' + p(x)y = f(x) \\ y_*'(x) + p(x) = f(x) \end{cases}$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, получим:

$$(y - y_*)' + p(x)(y - y_*) = 0$$

То есть функция $y - y_*$ удовлетворяет линейному однородному уравнению (3.9), а значит, эта функция входит в его общее решение (3.11). Таким образом,

$$y - y_* = Cy_0(x) \Leftrightarrow y = Cy_0(x) + y_*(x)$$

Теорема доказана.

Согласно формуле (3.13), определяющей структуру общего решения линейного неоднородного уравнения (3.12), получение этого общего решения равносильно решению двух частных проблем.

<u>Проблема 1:</u> решить линейное однородное дифференциальное уравнение (3.9) и получить его общее решение (3.11).

<u>Проблема 2</u>: найти (или подобрать) какое - либо частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного уравнения (3.12).

Схема решения первой из этих проблем указана выше (см. (3.10)). А вторую проблему для произвольной функций $f(x)$ в общем случае можно решить так называемым *методом вариации произвольной постоянной.*

Суть этого метода в следующем. Будем искать частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного дифференциального уравнения (3.12) в виде

$$y_* = C(x)y_0(x) \qquad (3.14)$$

То есть в виде, аналогичном виду (3.11) общего решения линейного однородного уравнения (3.9), только с заменой произвольной константы *C* на неизвестную функцию $C(x)$. Находя из (3.14) y_*':

$$y'_* = C'(x)y_0(x) + C(x)y'_0(x), \tag{3.15}$$

и подставляя в уравнение (3.12) вместо y и y' выражения (3.14) и (3.15) для y_* и y'_*, получим:

$$C'(x)y_0(x) + C(x)\left[y'_0(x) + p(x)y_0(x)\right] = f(x) \tag{3.16}$$

Учитывая, что $y_0(x)$ - одно из частных решений линейного однородного уравнения (3.9), получаем, что квадратная скобка в (3.16) равна нулю. Значит, (3.16) принимает вид:

$$C'(x)y_0(x) = f(x) \tag{3.17}$$

Отсюда находим $C'(x)$, а по ней и $C(x)$:

$$C'(x) = \frac{f(x)}{y_0(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)}dx = F(x) + C =$$

$=|$ отбрасываем C, чтобы получить конкретную функцию $C(x)| = F(x)$. (3.18)

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в формулу (3.14), получим искомое частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного уравнения (3.12). А затем, по формуле (3.13), получим и общее решение этого уравнения .

<u>*Пример 3*</u>. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = ytgx + 2\sin x \tag{3.19}$$

<u>*Решение.*</u> Данное уравнение

$$y' - tgx \cdot y = 2\sin x \tag{3.20}$$

имеет вид (3.12) при $p(x) = -tgx$ и $f(x) = 2\sin x$, то есть является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Следовательно, его общее решение, содержащее все его частные решения, может быть найдено по формуле (3.13).

Найдем оба слагаемых этой формулы. Для этого решим следующие две проблемы.

<u>Проблема 1.</u> Решим соответствующее неоднородному уравнению (3.20) однородное уравнение

$$y' - tgx \cdot y = 0 \tag{3.21}$$

и найдем его общее решение $y = Cy_0(x)$. Для этого реализуем схему (3.10):

$$y' - tgx \cdot y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = tgx \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = tgxdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int tgxdx \Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| + \ln|\cos x| = C \Leftrightarrow \ln|y\cos x| = C \Leftrightarrow |y\cos x| = e^C \Leftrightarrow y\cos x = \pm e^C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\cos x = C \Leftrightarrow y = \frac{C}{\cos x} \Leftrightarrow y = Cy_0(x), \text{ где } \quad y_0(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Итак,

$$y = Cy_0(x) = \frac{C}{\cos x} \quad (y_0(x) = \frac{1}{\cos x}) \tag{3.22}$$

- общее решение линейного однородного уравнения (3.21).

<u>Проблема 2.</u> Найдем частное решение $y_* = C(x)y_0(x)$ линейного неоднородного уравнения (3.20). Функция $y_0(x)$ уже найдена. А функцию $C(x)$ найдем по схеме (3.18):

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)}dx = \int \frac{2\sin x}{\frac{1}{\cos x}}dx = \int 2\sin x\cos xdx = \int \sin 2xdx =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C = |\text{отбросим C}| = -\frac{1}{2}\cos 2x. \tag{3.23}$$

Итак,

$$y_* = C(x)y_0(x) = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} \tag{3.24}$$

- частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (3.20).

А теперь по формуле (3.13) с учетом (3.22) и (3.24) запишем и искомое общее решение линейного неоднородного уравнения (3.20):

$$y = \frac{C}{\cos x} - \frac{\cos 2x}{2\cos x}. \tag{3.25}$$

<u>Примечание.</u> Довольно часто частное решение $y_*(x)$ линейного неоднородного уравнения можно подобрать, не применяя метода вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим, например, следующие неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка (3.12) при постоянном $p(x) = p$:

$$1)\ y' + py = a;\ \ 2)\ y' + py = ax + b;\ \ 3)\ y' + py = ax^2 + bx + c;\ \dots \tag{3.26}$$

Частное решение $y_*(x)$ каждого из таких уравнений можно подобрать, разыскивая его в форме, совпадающей с формой его правой части. То есть соответственно в форме:

$$1)\ y_* = A;\ 2)\ y_* = Ax + B;\quad 3)\ y_* = Ax^2 + Bx + C;\ \ldots \tag{3.27}$$

Здесь $A, B, C, \ldots$ - неизвестные коэффициенты, которые найдутся, если подставить функцию y_* вместе с её производной y'_* в соответствующее уравнение (3.26) и сравнить затем коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях x. Этот метод подбора функции $y_*(x)$ называется *метод неопределенных коэффициентов.*

Пример 4. Методом неопределенных коэффициентов подобрать частное решение $y_*(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + 2y = 6x^2 - 1 \tag{3.28}$$

Решение. Правая часть данного уравнения представляет собой квадратный трехчлен вида $ax^2 + bx + c$ при a = 6, b = 0, c = -1. Поэтому и частное решение $y_*(x)$ этого уравнения будем искать в виде квадратного трехчлена

$$y_* = Ax^2 + Bx + C \tag{3.29}$$

Учитывая, что $y_* = 2Ax + B$ и подставляя y_* и y'_* вместо y и y' в уравнение (3.28), получим:

$$2Ax + B + 2(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 - 1 \Leftrightarrow 2Ax^2 + 2(A + B)x + (B + 2C) = 6x^2 - 1 \tag{3.30}$$

Если y_* - частное решение уравнения (3.28), то после его подстановки в это уравнение должно получаться тождество – равенство, верное при любых x. Значит, равенство (3.30) должно быть тождеством. А это будет, если

$$\begin{cases} 2A = 6 \\ 2(A + B) = 0, \\ B + 2C = -1 \end{cases} \quad \text{откуда} \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \\ C = 1 \end{cases}$$

Итак,

$$y_* = y_*(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

- частное решение уравнения (3.28). И в этом легко убедиться, сделав проверку.

<u>5. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка</u>

Имеется еще несколько типов дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих свое решение интегрированием (решение в квадратурах):

$$1)\ y = f(y');\quad 2)\ x = f(y');$$
$$3)\ y' + p(x)y = f(x)y^n;\ 4)\ y = f_1(y')x + f_2(y');\ \dots \qquad (3.31)$$

Вопрос о схемах их интегрирования опустим (он описан в литературе). Но имеется множество дифференциальных уравнений первого порядка, не допускающих решение в квадратурах. Например, невозможно применить интегрирование даже к такому простому, на первый взгляд, дифференциальному уравнению, как уравнение $y' = x^2 + y^2$. Эти и другие не решаемые в квадратурах дифференциальные уравнения решаются лишь приближенно. Точнее, всегда имеется возможность построить с нужной точностью интегральную кривую решения $y = y(x)$ любой задачи Коши вида

$$\begin{cases} y' = f(x;y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (x_0 \le x \le b), \qquad (3.32)$$

если только это решение существует и единственно (а его существование и единственность, как правило, следует из прикладного смысла решаемой задачи Коши). Разработаны и используются на практике различные численные методы приближенного решения задачи Коши вида (3.32): метод Эйлера; метод Рунге – Кутта; метод Адамса – Крылова; метод малого параметра, и др. Для примера рассмотрим идею наиболее простого из них – метода Эйлера.

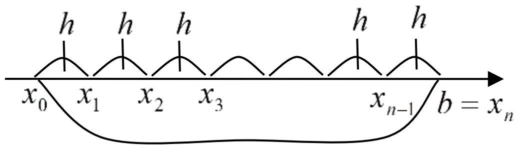


Рис. 6.4

Пусть $y = y(x)$ искомое решение задачи Коши (3.32) для $x \in [x_0;b]$, где $[x_0;b]$ - заданный промежуток оси *ox*. Функция $y = y(x)$ может считаться найденной, если построен с достаточной точностью ее график.

Для построения нужного нам графика функции $y = y(x)$ разобьем отрезок $[x_0;b]$ на некоторое число n частичных промежутков одинаковой ширины $h = \frac{b - x_0}{n}$ (рис.6.4). Здесь

$$x_1 = x_0 + h;\ \ x_2 = x_0 + 2h;\ \ x_3 = x_0 + 3h;\ \dots x_k = x_0 + kh;\dots\ b = x_n = x_0 + nh \qquad (3.33)$$

Пусть $\{y_0; y_1; y_2; y_3;...y_k;...y_n\}$ - значения искомой функции $y = y(x)$ в точках $\{x_0; x_1; x_2; x_3;...x_k;...x_n\}$ соответственно. Заметим, что значение $y_0 = y(x_0)$ уже задано начальным условием задачи Коши (3.32). А остальные значения $\{y_1; y_2; ... y_n\}$ можно, следуя методу Эйлера, найти последовательно одно за другим – правда, приближенно.

1) <u>Нахождение</u> y_1:

Используя приближенную формулу (5.9) главы 4, получим:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow y_1 \approx y_0 + y'(x_0)h \tag{3.34}$$

Эта формула приближенная, и она тем точнее, чем меньше h. А так как, согласно равенствам (3.32), $y'(x_0) = f(x_0; y_0)$, то получим:

$$y_1 \approx y_0 + f(x_0; y_0)h \tag{3.35}$$

По этой формуле и находится приближенное значение y_1. Оно получится тем точнее, чем меньше будет h.

2) <u>Нахождение остальных значений</u> $\{y_2; y_3; ... y_n\}$.

Эти значения последовательно, друг за другом, находятся по той же идее, что использовалась и для нахождения y_1. То есть они находятся по формулам:

$$y_2 \approx y_1 + f(x_1; y_1)h; \quad y_3 \approx y_2 + f(x_2; y_2)h; \quad \ldots \quad y_n \approx y_{n-1} + f(x_{n-1}; y_{n-1})h \tag{3.36}$$

Так как каждая из последующих формул (3.36) использует предыдущее значение y, найденное приближенно, то ошибка в определении все новых и новых значений y будет, вообще говоря, возрастать (накапливаться). Однако, уменьшая шаг h, будем уменьшать и эту ошибку, которую, таким образом, можно сделать как угодно малой.

Линия L_*, построенная по точкам

$$M_0(x_0; y_0); \;\; M_1(x_1; y_0); \;\; M_2(x_2; y_2); \; \ldots \; M_n(x_n; y_n), \tag{3.37}$$

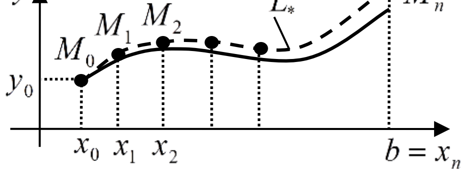


Рис. 6.5

представляет собой приближенный график искомого решения $y = y(x)$ задачи Коши (3.32) (рис. 6.5). Эта линия называется *кривой Эйлера*.

Методы Рунге – Кутта и Адамса – Крылова основаны на той же идее построения графика искомого решения $y = y(x)$ задачи Коши (3.32) по точкам, что и метод Эйлера. Эти методы сложнее, но зато и тоньше, ибо позволяют найти узловые значения $\{y_1; y_2; ... y_n)$ функции y при том же шаге h гораздо более точно, чем они находятся по методу Эйлера.

Получить точное аналитическое решение задачи Коши, или, если это не удается, получить её приближенное решение в виде интегральной кривой, построенной численными методами, помогает интернет. Например, страница «Решение дифференциальных уравнений» сайта https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/.

Есть, впрочем, и другая идея приближенного решения задачи Коши (3.32), которую используют, например, такие методы, как метод последовательных приближений, метод малого параметра, и некоторые другие. При реализации этих методов строится последовательность аналитически выраженных функций

$$\{y = y_1(x);\ y = y_2(x);\ y = y_3(x);\ ...)\quad (x_0 \le x \le b), \tag{3.38}$$

каждая из которых дает приближенное выражение для искомой функции $y = y(x)$ сразу на всем заданном промежутке $[x_0; b]$ оси ox. При этом каждая последующая функция (3.38) представляет искомую функцию точнее, чем предыдущая. Останавливая процесс построения этих функций на некотором этапе, можно получить аналитическое выражение искомой функции $y = y(x)$ с любой заданной точностью. Реализация такой схемы решения задачи Коши (3.32) тоже может быть осуществлена через интернет.

Упражнения

1. Решить задачу Коши :

$$\begin{cases} y' = 4 + e^{2x} \\ y(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $y = 4x + \frac{1}{2}e^{2x} - 1$.

2. Решить дифференциальное уравнение: $y' = 2\sqrt{y}$.

Ответ: $y = (x + C)^2$ - общее решение; $y = 0$ – особое решение.

3. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xyy' = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Ответ: $y = x$.

4. Решить уравнение $y' = (x + y)^2$. Указание: сделать замену $z = x + y$.

Ответ: $y = tg(x + C) - x$.

5. Скорость охлаждения тела в воздухе, согласно закону Ньютону, пропорциональна разности температур тела и воздуха. Если при температуре воздуха

20^0 тело охлаждается со 100^0 до 60^0 за 20 минут, то за какое время его температура понизится: а) до 30^0? б) до 20^0 ?

Ответ: а) за 1 час; б) за $t = \infty$.

6. Выяснить тип дифференциального уравнения $e^x(y + y') = 1$ и решить его.

Ответ: это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, а $y = e^{-x}(x + C)$ - его общее решение.

7. Методом неопределённых коэффициентов найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y' - 4y = x + 2$, а затем найти и его общее решение.

Ответ:

$y_*(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{16}$ - частное решение; $y = Ce^{4x} - \frac{1}{4}x - \frac{9}{16}$ - общее решение.

8. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} (3x-1)dy + y^2dx = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Ответ: $y = \dfrac{3}{\ln|1-3x| + 1}$.

9. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} 2\sqrt{4-x^3}dy + 3x^2y^2dx = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Ответ: $y = -\dfrac{1}{\sqrt{4-x^3} - 1}$.

10. Получить решения задач (1) – (9) с помощью интернета.

§4. Дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка, согласно (1.2), таков:

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \tag{4.1}$$

Простейшим из дифференциальных уравнений второго порядка является уравнение вида

$$y'' = f(x). \tag{4.2}$$

Общее решение этого уравнения, содержащее все его частные решения, находится его последовательным двукратным интегрированием:

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(x) \Leftrightarrow (y')' = f(x) \Leftrightarrow y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1 \Leftrightarrow \\
& y = \int (F(x) + C_1)dx = \int F(x)dx + C_1 \int dx = \varPhi(x) + C_1 x + C_2
\end{aligned}
\qquad (4.3)
$$

Это общее содержит две неопределенные константы C_1 и C_2.

Аналогичной будет ситуация и с решением любого дифференциального уравнения второго порядка (4.1). Действительно, если для нахождения общего решения дифференциального уравнения первого порядка $F(x; y; y') = 0$ это уравнение необходимо было один раз проинтегрировать (см. схему (1.3)), то для нахождения общего решения уравнения второго порядка (4.1) это уравнение, как и простейшее уравнение (4.2), нужно проинтегрировать дважды. Первое интегрирование преобразует уравнение второго порядка в уравнение первого порядка, а затем еще одно интегрирование уже приводит к получению общего решения. То есть

схема получения общего решения любого дифференциального уравнения второго порядка в принципе такова:

$$
\begin{aligned}
& F(x; y; y'; y'') = 0 \Leftrightarrow |\text{ дважды интегрируем }| \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \varPhi(x; y; C_1; C_2) = 0 \Leftrightarrow y = y(x; C_1; C_2)
\end{aligned}
\qquad (4.4)
$$

Естественно, к каждому из двух интегрирований уравнение нужно предварительно подготовить.

Кроме полученного по схеме (4.4) общего решения $\varPhi(x; y; C_1; C_2) = 0$ (неявного) или $y = y(x; C_1; C_2)$ (явного) у дифференциального уравнения (4.1) могут быть и особые решения $y = f_1(x)$; $y = f_2(x); \ldots$, которые тоже не должны быть потеряны.

Решение дифференциальных уравнений второго порядка представляет собой, естественно, гораздо более сложную задачу, чем решение уравнений первого порядка. Подготовить и провести двукратное интегрирование дифференциального уравнения второго порядка, то есть получить его решение в квадратурах, удаётся далеко не для всякого уравнения. Чаще всего это удаётся для уравнений, допускающих понижение своего порядка. То есть для уравнений второго порядка, допускающих своё преобразование в уравнение первого порядка. Среди таких уравнений отметим следующие.

1. Уравнения, не содержащие функции y

Это – уравнения вида:

$$F(x; y'; y'') = 0 \quad (\text{в уравнении нет } y). \qquad (4.4)$$

Если ввести новую неизвестную функцию p, зависящую от x, по формуле

$$y' = p \quad (p = p(x)) \tag{4.5}$$

и учесть, что

$$y'' = (y')' = p', \tag{4.6}$$

то уравнение второго порядка (4.4) преобразуется в уравнение первого порядка

$$F(x; p; p') = 0 \tag{4.7}$$

Интегрируя его (если это удастся), найдем его общее решение $p = p(x; C_1)$, а значит, согласно (4.5), получим:

$$y' = p(x; C_1) \tag{4.8}$$

Интегрируя теперь уже уравнение (4.8), получим:

$$y = \int p(x; C_1)dx = \varPhi(x; C_1) + C_2 \tag{4.9}$$

Это и есть общее решение уравнения (4.4).

Заметим, что если у уравнения (4.7) окажутся особые решения $p = p_1(x)$; $p = p_2(x); \ldots$, то будут особые решения

$$y = \int p_1(x)dx = f_1(x) + C_1^*; \quad y = \int p_2(x)dx = f_2(x) + C_2^*; \quad \ldots \tag{4.10}$$

и у уравнения (4.4). Причем, в силу произвольности констант $C_1^*; C_2^*;$ …, их будет бесчисленное количество.

Пример 1. Решить уравнение

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0 \tag{4.11}$$

Решение. Данное уравнение является уравнением вида (4.4), так как в нем нет y. Вводя, в соответствии с (4.5) и (4.6), новую неизвестную функцию $p = p(x)$, получим для этой функции уравнение первого порядка:

$$(1 + x^2)p' - 2xp = 0 \Leftrightarrow p' = \frac{2xp}{1 + x^2} \tag{4.12}$$

Это – дифференциальное уравнение вида $p' = f_1(x) f_2(p)$ при $f_1(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ и при $f_2(p) = p$. То есть, в соответствии с (3.3), это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его по соответствующей схеме, изложенной в предыдущем параграфе.

$$1)\ f_2(p)=0 \Leftrightarrow p=0 \tag{4.13}$$

Итак, одно частное решение уравнения (4.12) уже найдено: это функция $p=0$.

2) Найдем общее решение уравнения (4.12), содержащее все его остальные частные решения:

$$p'=\frac{2xp}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \text{| разделяем переменные } x \text{ и } p \text{ |} \Leftrightarrow \frac{dp}{p}=\frac{2xdx}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{| интегрируем обе части |} \Leftrightarrow \tag{4.14}$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{2xdx}{1+x^2} \Leftrightarrow \ln|p|=\ln(1+x^2)+C_1 \Leftrightarrow \ln\frac{|p|}{1+x^2}=C_1 \Leftrightarrow \frac{|p|}{1+x^2}=e^{C_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |p|=e^{C_1}(1+x^2) \Leftrightarrow p=\pm e^{C_1}(1+x^2) \Leftrightarrow p=C_1(1+x^2)$$

Это – общее решение уравнения (4.12). В него входит и найденное ранее частное решение $p=0$ (оно получается из общего решения $p=C_1(1+x^2)$ при C_1 =0). То есть в него входят все частные решения уравнения (4.12). А теперь, учитывая, что $y'=p$, получим:

$$y'=C_1(1+x^2) \Leftrightarrow y=C_1\int(1+x^2)dx \Leftrightarrow y=C_1(x+\frac{x^3}{3})+C_2 \tag{4.15}$$

Это – общее решение уравнения (4.11). В него входят все частные решения этого уравнения.

2. Уравнения, не содержащие аргумента x

Это – уравнения вида:

$$F(y;y';y'')=0 \tag{4.16}$$

Такое уравнение, как и уравнение (4.4), можно преобразовать в уравнение первого порядка с помощью той же замены $y'=p$, только здесь функция p должна зависеть от y: $p=p(y)$. А так как y зависит от *x*, то и p зависит от *x*, только сложным образом ($p=p(y(x))$ – сложная функция от *x*). С учетом этого получаем:

$$y'=p\ \ (p=p(y));\ \text{тогда}\ y''=(y')'=p'=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}y'=\frac{dp}{dy}p \tag{4.17}$$

С учетом выражений (4.17) для y' и y'' уравнение (4.16) примет вид:

$$F(y;p;p\frac{dp}{dy})=0 \qquad (4.18)$$

Это – дифференциальное уравнение первого порядка для функции $p=p(y)$. Интегрируя его (если это удастся), найдем его общее решение $p=p(y;C_1)$. А учитывая, что $p=y'$, получим:

$$y'=p(y;C_1) \qquad (4.19)$$

Это – еще одно дифференциальное уравнение первого порядка, только уже для функции y. Интегрируя его, получим его общее решение, а значит, и общее решение исходного уравнения второго порядка (4.16):

$$\Phi(x;y;C_1;C_2)=0 \qquad (4.20)$$

Если у уравнений (4.18) и (4.19) будут особые решения, то будут особые решения и у уравнения (4.16) – их тоже нужно не потерять.

3. Задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка

В §2 мы рассматривали задачу Коши (2.1) для дифференциальных уравнений первого порядка. Она состояла из дифференциального уравнения и начального условия. Начальное условие было предназначено для определения неопределенной константы C, содержащейся в общем решении дифференциального уравнения первого порядка.

Но в общем решении любого дифференциального уравнения второго порядка таких неопределенных констант две (см.(4.4)). Поэтому для их определения нужны два дополнительных (начальных) условия. В качестве таких условий для некоторого начального значения $x=x_0$ задают начальное значение y_0 искомой функции $y=y(x)$ и начальное значение y_1 ее производной $y'=y'(x)$. В итоге получается задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} F(x;y;y';y'')=0 \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases} \qquad (4.21)$$

Как и задача Коши (2.1) для дифференциальных уравнений первого порядка, задача Коши (4.21) для уравнений второго порядка имеет, как правило, единственное решение $y=y(x)$. Факт существования и единственности решения задачи Коши любого порядка для практических задач вытекает обычно из самого существа рассматриваемой задачи.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' - 2xy' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \tag{4.22}$$

Решение. Сначала решим дифференциальное уравнение $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$. Оно решено выше (см. пример 1); его общее решение, содержащее все его решения, имеет вид

$$y = C_1(x + \frac{x^3}{3}) + C_2 \tag{4.23}$$

2. Используем начальные условия задачи (4.22) и найдем значения констант C_1 и C_2, входящих в (4.23):

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{aligned} & y = C_1(x + \frac{x^3}{3}) + C_2 \\ & y' = C_1(1 + x^2) \end{aligned} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \\ 3 = C_1(1+0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 3 \end{cases} \tag{4.24}$$

3. Подставим C_1=3 и C_2=0 в общее решение (4.23) и получим искомое решение задачи Коши (4.22) (единственное):

$$y = x^3 + 3x \tag{4.25}$$

4. Приближенное решение дифференциальных уравнений второго порядка

Если дифференциальное уравнение второго порядка (4.1) не удается проинтегрировать, то есть применить к его решению схему (4.3), то его решают приближенно. Точнее, приближенно решают не само дифференциальное уравнение, имеющее бесчисленное множество решений, а задачу Коши (4.21) для него, если она заведомо имеет решение, и это решение единственно.

Как и для задачи Коши (3.32), для задачи Коши (4.21) разработаны эффективные численные методы. На выходе программа решения такой задачи выдает график искомой функции $y = f(x)$ $(x_0 \le x \le b)$, а также график ее производной $y' = f(x)$. И получить такое решение можно, например, на том же сайте https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/ на странице «Решение дифференциальных уравнений».

Упражнения

1. Решить уравнение: $y'' = 4\cos 2x$

<u>*Ответ:*</u> $y = -\cos 2x + C_1 x + C_2$

2. Решить задачу Коши: $\begin{cases} yy'' + (y')^2 + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

<u>*Ответ:*</u> $y = \sqrt{1 - x^2}$.

3. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{x-4}{x^3} \\ y(1) = -\dfrac{1}{2} \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

<u>*Ответ:*</u> $y = -\ln|x| - \dfrac{2}{x} - x + 2{,}5$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = y' \cdot ctgx \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

<u>*Ответ:*</u> $y = -\cos x.$

5. Доказать, что любое частное решение дифференциального уравнения $y'' + w^2 y = 0$ (уравнения свободных гармонических колебаний с круговой частотой w) может быть записано в виде $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$.

<u>Доказательство.</u> Подставляя функцию $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$ в уравнение $y'' + w^2 y = 0$, убеждаемся, что она удовлетворяет этому уравнению при любых значениях констант C_1 и C_2. То есть является его решением. Осталось показать, что за счет подбора констант C_1 и C_2 можно получить любое частное решение данного уравнения. То есть показать, что можно подобрать константы C_1 и C_2 так, что функция $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$ будет удовлетворять начальным условиям вида

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (*)$$

при любых заданных числах (x_0; y_0; y_1).

Подтвердим это. Для функции $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$ система (*) примет вид:

$$\begin{cases} C_1 \cos wx_0 + C_2 \sin wx_0 = y_0 \\ -C_1 w \sin wx_0 + C_2 w \cos wx_0 = y_1 \end{cases}$$

Это – система двух линейных уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2. Найдем Δ - главный определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos wx_0 & \sin wx_0 \\ -w \sin wx_0 & w \cos wx_0 \end{vmatrix} = w \cos^2 wx_0 + w \sin^2 wx_0 = w^2 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет единственное решение $(C_1; C_2)$ при любых заданных (x_0; y_0; y_1). Найдя эти C_1 и C_2, мы получим функцию $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$, являющуюся частным решением дифференциального уравнения $y'' + w^2 y = 0$ и удовлетворяющую заданным начальным условиям (*). Доказательство закончено.

6. Решить задачи (1) – (4) с помощью интернета.

ГЛАВА 7
Ряды

В данной главе мы обсудим следующий интересный и важный для практики вопрос: существуют ли суммы бесконечного числа слагаемых? И если существуют, то как их найти?

Вспомним, что с суммой бесконечного числа слагаемых мы уже встречались ранее в главе 5 при рассмотрении определенных интегралов. Но там были специфические суммы – суммы бесконечно малых слагаемых. Здесь же рассмотрим суммы бесконечного числа слагаемых, когда слагаемые произвольны.

§1. Числовые ряды

Определение. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \tag{1.1}$$

представляющее собой сумму из бесконечного числа слагаемых, называется *рядом.* Если слагаемые (члены) ряда (a_1; a_2; a_3; …) – числа, то ряд называется *числовым.* А если они являются функциями, то ряд является *функциональным.* В этом параграфе мы будем рассматривать лишь числовые ряды.

Ключевым понятием любого ряда (1.1) является его сумма, то есть сумма всех тех слагаемых, которые содержатся в ряде. Так как в нем бесконечное число слагаемых, то его сумму нельзя получить прямым сложением всех слагаемых – так, как мы это делаем при складывании конечного числа слагаемых. Действительно, процесс суммирования членов ряда не будет иметь конца, и мы, таким образом, сумму ряда никогда не найдем. Поэтому и к определению, и к нахождению суммы ряда должен быть применен какой-то другой подход.

И этот подход состоит в следующем. Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \tag{1.2}$$

- сумма первых n слагаемых ряда (1.1), которую называют n-ой частичной суммой ряда. В частности,

$$S_1 = a_1; \ S_2 = a_1 + a_2; \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \ … \tag{1.3}$$

С изменением n будет меняться и частичная сумма S_n, причем при увеличении n она будет включать в себя все больше и больше слагаемых ряда (1.1). Тогда сумму всего этого ряда естественно определить как предел суммы S_n при $n \to \infty$. То есть, *по определению*,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty = S \qquad (1.4)$$

- сумма ряда (1.1). В обозначении S_∞ суммы ряда значок ∞ указывает на то, что речь идет о сумме бесконечного числа слагаемых. Впрочем, этот значок обычно опускают и сумму ряда обозначают просто символом S .

Сумма ряда S_∞, как и всякий предел, может существовать, а может и не существовать, может быть бесконечной, а может быть и конечной. Если сумма ряда существует и конечна, ряд называется *сходящимся*. А если эта сумма равна $+\infty$, или $-\infty$, или она не существует вообще, то ряд называется *расходящимся*.

Имеются способы (о них мы будем говорить ниже) выяснения вопроса о том, сходится или расходится данный числовой ряд. Если удалось установить, что ряд сходится, то у него есть конечная сумма S. Иногда её можно найти точно. Но чаще – только приближенно по формуле

$$S = S_\infty \approx S_n, \qquad (1.5)$$

где S_n (см. (1.2)) – сумма первых n слагаемых ряда. Смысл формулы (1.5) состоит в том, что при нахождении суммы сходящегося ряда суммируется лишь некоторая часть его слагаемых (первые n слагаемых), а остальные просто отбрасываются. Результат будет получаться тем точнее, чем больше n. Есть и возможность оценки погрешности, допускаемой при замене $S = S_\infty$ на S_n , хотя в общем случае этот вопрос и непростой.

Пример 1. Показать, что ряд

$$0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \ldots \qquad (1.6)$$

сходится и имеет сумму $S = 1$.

Решение. Для данного ряда имеем:

$$S_1 = 0{,}9;\ \ S_2 = 0{,}9 + 0{,}09 = 0{,}99;\ \ S_3 = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 = 0{,}999;\ \ldots$$
$$S_n = 0{,}99....9 \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty = S = 1. \qquad (1.7)$$

Как оказалось, сумма S ряда - число, поэтому ряд сходится. И так как эта сумма равна 1, то можем записать:

$$0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \ldots = 1 \qquad (1.8)$$

Пример 2. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots \qquad (1.9)$$

расходится.

Решение. Очевидно, что для данного ряда

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \ \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

То есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty = S = \infty \qquad (1.10)$$

А значит, ряд (1.9) расходится, ибо его сумма бесконечна:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots = \infty \qquad (1.11)$$

Пример 3. Показать, что ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots \qquad (1.12)$$

расходится.

Решение. Для данного ряда

$$S_1 = 1;\ S_2 = 1-1 = 0;\ S_3 = 1-1+1 = 1;\ S_4 = 1-1+1-1 = 0;\ \ldots$$

$$\text{То есть } S_n = \begin{cases} 1, \text{ если } n \text{ четно;} \\ -1, \text{ если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \qquad (1.13)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S_\infty = S$ - не существует (сумма ряда не существует). А значит, ряд расходится.

Пример 4. Рассмотрим числовой ряд вида

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots \qquad (1.14)$$

Этот ряд известен еще из курса элементарной математики под названием «сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q». Как известно, эта сумма существует и конечна (а, значит, ряд (1.14) сходится) лишь для бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то есть при $-1 < q < 1$. Причем

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \qquad (-1 < q < 1) \qquad (1.15)$$

При $q \neq (-1; 1)$ ряд (1.14) расходится, так как конечной суммы не имеет.

1. Очевидные свойства числовых рядов

а). Отбрасывание у ряда конечного числа его членов или, наоборот, добавление к ряду конечного числа новых слагаемых не влияет на его сходимость - расходимость (а влияет только на величину его суммы, если она существует и конечна).

б). Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... = S, \text{ то}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n = Ca_1 + Ca_2 + Ca_3 + ... = CS .$$

То есть умножение (деление) всех членов ряда на некоторое число C не влияет на его сходимость – расходимость, а влияет только на его сумму, которая увеличивается (уменьшается) в соответствующее число раз (в C раз).

в). Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, причем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ сходится, причем $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = S_a \pm S_b$.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема. Для сходимости любого числового ряда (1.1) необходимо, чтобы $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то есть чтобы $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Допустим, что ряд (1.1) сходится. Это значит, что существует и конечна его сумма S_∞, которая определяется пределом (1.4). Учитывая, что $S_n = S_{n-1} + a_n$, откуда следует, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S_\infty - S_\infty = 0$$

То есть действительно $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *если a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходиться не может – он заведомо расходится*.

Примечание. Условие $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости числового ряда (1.1). Это значит, что одно оно еще не гарантирует сходимости ряда. Иначе говоря, возможна ситуация, когда $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, и тем не менее ряд (1.1) расходится.

Классическим примером такого ряда является *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \qquad (1.16)$$

Необходимое условие сходимости $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ для этого ряда очевидным образом выполняется. И тем не менее этот ряд расходится, так как его сумма $S = \infty$.

Докажем это. Для этого рассмотрим рис. 7.1. На этом рисунке изображена бесконечно протяженная в горизонтальном направлении ступенчатая фигура, состоящая из заштрихованных прямоугольников, площади которых соответственно равны $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots)$. То есть суммарная площадь S этой заштрихованной фигуры как раз равна сумме S гармонического ряда (1.16). Но эта площадь S заведомо больше площади S_0 между осью ox и гиперболой $y = \frac{1}{x}$ в пределах для x от 1 до ∞. А

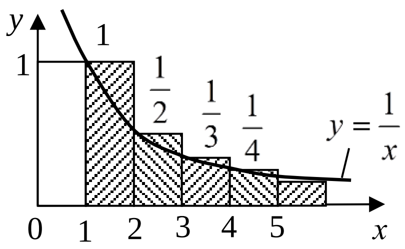


Рис. 7.1

$$S_0 = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_1^{\infty} = \ln x\Big|_1^{\infty} = \ln\infty - \ln 1 = \infty - 0 = \infty .$$

И так как $S > S_0$, то и $S = \infty$. Таким образом, гармонический ряд расходится, ибо его сумма S равна ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty \qquad (1.17)$$

3. Положительные числовые ряды. Достаточные признаки сходимости

Определение. *Числовой ряд* (1.1) *называется положительным, если все его слагаемые a_n – положительные числа.* Частичная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ такого ряда при любом значении n тоже, естественно, положительна, причем с увеличением номера n она монотонно возрастает. Следовательно, имеются всего две возможности:

1) $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$;
2) $S_n \to S$ при $n \to \infty$, где S – некоторое положительное число.

В первом случае ряд расходится, во втором сходится. Какая из этих двух возможностей реализуется, зависит, очевидно, от поведения слагаемых a_n ряда при $n \to \infty$. Если эти слагаемые стремятся к нулю, причем делают это достаточно быстро, то ряд будет сходиться. А если они не стремятся к нулю, или стремятся к нему, но недостаточно быстро, то ряд будет расходиться.

Например, у гармонического ряда (1.16) слагаемые $a_n = \frac{1}{n}$ хоть и убывают, стремясь к нулю, но делают это довольно медленно. Поэтому гармонический ряд оказался расходящимся. А вот у положительного ряда (1.6) слагаемые стремятся к нулю гораздо быстрее, поэтому он оказался сходящимся.

Еще пример. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{1}{1^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\ldots \tag{1.18}$$

называется *обобщенным гармоническим рядом* (при $\alpha=1$ это будет обычный гармонический ряд). Если исследовать его на сходимость – расходимость аналогично тому, как исследовался гармонический ряд (1.16) (с помощью рисунка, подобного рисунку 7.1), то можно установить (попробуйте это сделать самостоятельно), что обобщенный гармонический ряд расходится при $\alpha\le 1$ (его сумма $S=+\infty$) и сходится при $\alpha>1$ (его сумма S – конечное положительное число). И это понятно: при $\alpha\le 1$ слагаемое $\frac{1}{n^{\alpha}}$ обобщенного гармонического ряда убывают медленнее слагаемых $\frac{1}{n}$ гармонического ряда. А так как гармонический ряд расходится (скорость убывания его слагаемых недостаточна для сходимости), то тем более при $\alpha\le 1$ будет расходиться и обобщенный гармонический ряд (1.18). А при $\alpha>1$ слагаемые $\frac{1}{n^{\alpha}}$ ряда (1.18) будут, очевидно, убывать быстрее, чем слагаемые $\frac{1}{n}$ гармонического ряда (1.16). И этой возросшей скорости убывания оказывается достаточно для сходимости ряда (1.18).

Можно эти соображения изложить строже, в виде так называемого <u>*признака сравнения положительных числовых рядов*</u>.

<u>Признак сравнения положительных числовых рядов</u>

Его суть в следующем. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots \tag{1.19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+b_3+\ldots \tag{1.20}$$

- два произвольных положительных числовых ряда. И пусть $b_n>a_n$ для всех n=1,2,… . То есть (1.20) – ряд с бóльшими членами, чем ряд (1.19). Тогда очевидно, что:

1) Если ряд с бóльшими членами сходится, то и ряд с меньшими членами сходится.

2) Если ряд с меньшими членами расходится (его сумма равна +∞), то и ряд с бóльшими членами тоже расходится (его сумма тем более равна +∞).

3) Если ряд с бóльшими членами расходится (его сумма равна +∞), то про ряд с меньшими членами сразу ничего сказать нельзя.

4) Если ряд с меньшими членами сходится (его сумма – число), то про ряд с бóльшими членами сразу ничего сказать нельзя.

Здесь всё аналогично, например, со следующей практической ситуацией:

1) Если больший предмет в коробку влез, то и меньший влезет.

2) Если меньший предмет в коробку не влез, то и больший не влезет.

3) Если больший предмет в коробку не влез, то про меньший однозначно сразу ничего сказать нельзя.

4) Если меньший предмет в коробку влез, то про больший однозначно сразу ничего сказать нельзя.

Замечание 1. В формулировке всех четырех пунктов признака сравнения условие $b_n > a_n$, с помощью которого сравниваются ряды и которое должно выполняться для всех n=1,2,3,…, можно заменить на это же условие $b_n > a_n$, справедливое не для всех n, а лишь начиная с некоторого номера N, то есть для $n>N$, ибо отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Замечание 2. Признак сравнения положительных числовых рядов допускает обобщение. А именно, если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = L \quad (0 < L < \infty), \tag{1.21}$$

то есть если

$$b_n \sim La_n \qquad \text{при} \qquad n \to \infty \tag{1.22}$$

(b_n эквивалентны La_n при $n \to \infty$), то положительные числовые ряды (1.19) и (1.20) сходятся или расходятся одновременно. Данное замечание оставим без доказательства.

Пример 5. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots \tag{1.23}$$

расходится (его сумма равна $+\infty$). Действительно, сравнивая этот ряд с гармоническим (1.16), слагаемые которого меньше слагаемых ряда (1.23) для всех $n>1$, сразу приходим к этому выводу на основании пункта 2 признака сравнения. Его расходимость следует и из того, что это – обобщенный гармонический ряд (1.18) при $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Пример 6. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n} = \frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \dots \tag{1.24}$$

- это положительный ряд с меньшими для всех $n>1$ слагаемыми, чем у ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \tag{1.25}$$

Но ряд (1.25) представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Такой ряд, согласно (1.15), сходится и имеет сумму S=1. Но тогда сходится и меньший ряд (1.24), причем его сумма $0 < S_{\infty} < 1$.

<u>*Пример 7.*</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}$ - положительный числовой ряд, у которого слагаемые

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+1} = \frac{2+\frac{3}{n}}{n+\frac{1}{n}} \sim \frac{2}{n} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot \infty = \infty$ расходится в силу (1.17). Значит, в соответствии с (1.22), расходится и данный ряд со слагаемыми a_n.

<u>Признак Даламбера</u>

Этот признак состоит в следующем. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - положительный числовой ряд. Найдем предел q отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$q = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{1.26}$$

Французский математик и механик 19-го века Даламбер доказал, что при q<1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; при q>1 он расходится; при q=1 вопрос о сходимости - расходимости ряда остается открытым. Доказательство признака Даламбера опускаем.

<u>*Пример 8.*</u> Исследовать на сходимость – расходимость положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$.

<u>*Решение.*</u> Применим к этому ряду признак Даламбера. Для этого по формуле (1.26) вычислим q:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\begin{array}{l}\text{у нас } a_n=\dfrac{3n+1}{2^n};\\ \text{тогда } a_{n+1}=\dfrac{3(n+1)+1}{2^{n+1}}=\dfrac{3n+4}{2^n\cdot 2}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{6n+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{6+\frac{2}{n}}=\frac{3+0}{6+0}=\frac{1}{2}.$$

Так как $q=\frac{1}{2}<1$, то данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$ сходится.

<u>Интегральный признак Коши</u>

Этот признак состоит в следующем. Если члены a_n положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ монотонно убывают, то этот ряд и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}a_x dx$ сходятся или расходятся одновременно. Здесь $a_x=f(x)$ - непрерывная монотонно убывающая функция, принимающая при $x = n$ значения a_n членов ряда.

Доказательство интегрального признака Коши, как и признака Даламбера, опустим. Это доказательство, кстати, использует в принципе ту же геометрическую идею, что была применена при доказательстве расходимости гармонического ряда (1.16).

<u>Пример 9.</u> Исследуем на сходимость – расходимость обобщенный гармонический ряд (1.18). При $\alpha=1$ мы получаем гармонический ряд (1.16), который, как мы доказали, расходится. При $\alpha<1$ ряд (1.18) тем более будет расходиться, так как его члены больше членов гармонического ряда. Осталось исследовать случай $\alpha>1$. Применим к ряду (1.18) при $\alpha>1$ интегральный признак Коши. Для этого вычислим несобственный интеграл $\int_1^{\infty}a_x dx$:

$$\int_1^{\infty}a_x dx=\left|\text{ у нас } a_n=\frac{1}{n^{\alpha}};\text{ значит, } a_x=\frac{1}{x^{\alpha}}\right|=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\int_1^{\infty}x^{-\alpha}dx=\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\left.\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right|_1^{\infty}=-\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\infty^{\alpha-1}}-\frac{1}{1^{\alpha-1}}\right)=-\frac{1}{\alpha-1}(0-1)=\frac{1}{\alpha-1}.$$

В результате получили конечное число $\frac{1}{\alpha-1}$. Таким образом, $\int_1^{\infty}a_x dx$ сходится. Но тогда, по интегральному признаку Коши, сходится и ряд (1.18). То есть

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}+\infty,\text{ если } \alpha\le 1\\ S>0 - \text{конечное число, если } \alpha>1\end{cases} \tag{1.27}$$

4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,\quad \text{где}\quad a_n > 0\ \ (n = 1,2,\ldots) \tag{1.28}$$

называется *знакочередующимся.* Сходимость – расходимость знакочередующихся рядов устанавливается по *признаку Лейбница.* Он формулируется следующим образом.

Если члены знакочередующегося ряда (1.28) *монотонно убывают по абсолютной величине, стремясь при этом к нулю, то есть если*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots,\quad и\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{1.29}$$

то знакочередующийся ряд (1.28) *сходится, причем его сумма S заключена в интервале* $0 < S < a_1$*, то есть не превосходит первого члена ряда.*

Доказательство.

1. Сначала рассмотрим произвольную частичную сумму S_{2m} с четным числом слагаемых ряда (1.28). Учитывая монотонное убывание (1.29) членов ряда, приходим к выводу, что

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) > 0, \tag{1.30}$$

причем с ростом m сумма S_{2m} возрастает. С другой стороны, для любого m имеем:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1 \tag{1.31}$$

Таким образом, с увеличением m частичная сумма S_{2m} монотонно растет, но всегда меньше a_1. Отсюда по теореме Вейерштрасса (§1, глава 3) следует, что существует

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S,\ \text{причем}\ S < a_1 \tag{1.32}$$

2. Рассмотрим теперь частичную сумму S_{2m+1} ряда (1.28) с нечетным числом слагаемых. Учтем, что $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. Тогда, согласно (1.32) и (1.29),

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S \tag{1.33}$$

Таким образом, и при четных, и при нечетных значениях номера n для частичных сумм S_n знакочередующегося ряда (1.28) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ - число, причем } \quad 0 < S < a_1 \tag{1.34}$$

А это и означает, что S – сумма ряда (1.28), причем $0 < S < a_1$. Признак Лейбница доказан.

Примечание. Признак Лейбница позволяет не только устанавливать сходимость – расходимость знакочередующегося ряда (1.28), но и позволяет, при условии его сходимости, находить сумму S с любой заданной точностью. Действительно, сложив в ряде (1.28) какое-либо число N его первых слагаемых и отбросив остальные, мы фактически отбросим знакочередующийся ряд, начинающийся со слагаемого a_{N+1}, сумма которого, по признаку Лейбница, не будет превосходить этого первого отброшенного слагаемого. Значит, и ошибка при вычислении суммы S знакочередующегося ряда не будет превосходить первого из отброшенных слагаемых этого ряда. Этим обстоятельством широко пользуются для приближенного нахождения сумм сходящихся знакочередующихся рядов с нужной точностью.

Пример 10. Показать, что знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}+... \tag{1.35}$$

сходится, и найти его сумму S с точностью до 0,01.

Решение. Данный ряд сходится по признаку Лейбница. Для нахождения его суммы S с точностью 0,01 найдем первое из слагаемых этого ряда, по абсолютной величине меньше 0,01. Это, очевидно, пятое слагаемое $\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$. Отбрасывая его и остальные, следующие за ним, слагаемые, получим:

$$S \approx S_4 = 1-\frac{1}{8}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64} = 0{,}8964... \approx 0{,}90.$$

5. Числовые ряды с произвольными по знакам слагаемыми

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - числовой ряд с произвольными по знакам слагаемыми. Наряду с этим рядом рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то есть ряд, составленный из модулей слагаемых исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Справедлива следующая *теорема*:

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то автоматически сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, причем сходимость последнего называется *абсолютной.*

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ может сходиться несмотря на то, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится. Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условной*.

Доказательство. Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ и } S_n^* = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \tag{1.36}$$

- *n*-ые частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ соответственно. Для указанных частичных сумм, очевидно, имеем:

$$S_n = S_n^{'} - S_n^{''}\ ; \qquad S_n^* = S_n^{'} + S_n^{''} \tag{1.37}$$

Здесь $S_n^{'}$ - сумма положительных слагаемых, входящих в S_n , а $S_n^{''}$ - сумма модулей отрицательных слагаемых, входящих в S_n . Положительные суммы $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$, очевидно, растут с увеличением *n*.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то $\lim_{n\to\infty}S_n^* = S_*$ - конечное положительное число, являющееся суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Но $S_n^* = S_n^{'} + S_n^{''}$, поэтому $S_n^{'} < S_n^*$ и $S_n^{''} < S_n^*$. А так как возрастающая с номером *n* частичная сумма S_n^* при любом *n* меньше своего предела S_*, то и растущие с номером *n* величины $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$ тоже при любом номере *n* меньше S_*. По теореме Вейерштрасса (§1, глава 3) приходим к выводу, что при $n\to\infty$ величины $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$ имеют некоторые конечные положительные пределы $S^{'}$ и $S^{''}$, каждый из которых меньше S_*, но которые в сумме составляют S_*:

$$S_* = \lim_{n\to\infty}S_n^* = \lim_{n\to\infty}(S_n^{'} + S_n^{''}) = \lim_{n\to\infty}S_n^{'} + \lim_{n\to\infty}S_n^{''} = S^{'} + S^{''} \tag{1.38}$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^{'} - S_n^{''}) = \lim_{n\to\infty}S_n^{'} - \lim_{n\to\infty}S_n^{''} = S^{'} - S^{''} = S \qquad (1.39);$$

- конечное число. А это значит, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Пункт 1 теоремы мы доказали.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то его сумма $S_* = S' + S'' = +\infty$. Это значит, что по крайней мере одна из положительных сумм, S' или S'', равна $+\infty$ (одна или обе). Но их разность $S = S' - S''$ не обязательно будет бесконечной: в случае, когда $S' = +\infty$ и $S'' = +\infty$, сумма $S = S' - S''$ (сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) может оказаться и конечной. То есть, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может оказаться сходящимся несмотря на то, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ из его модулей будет расходящимся. В таком случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будет сходиться, но условно.

Теорема Римана

Абсолютно и условно сходящиеся ряды кардинально различаются по характеру своей сходимости. А именно, любая перестановка слагаемых в абсолютно сходящемся ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не меняет его суммы. А вот если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то за счет соответствующей перестановки слагаемых его сумму можно сделать какой угодно (*теорема Римана*).

Доказательство. Действительно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то сумма S' его положительных слагаемых и сумма S'' модулей его отрицательных слагаемых – два конечных положительных числа. При любой перестановке слагаемых эти суммы не меняются, а следовательно, не меняется и сумма $S = S' - S''$ всего ряда. А вот если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $S' = +\infty$ и $S'' = +\infty$, а $S = S' - S''$ - конечное число. Но тогда имеется возможность отдельно из положительных и отдельно из отрицательных слагаемых ряда набрать любую сумму. А значит, и итоговую сумму всего ряда можно сделать какой угодно.

Пример 11. Знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (1.40)$$

сходится по признаку Лейбница. Но сходится условно, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right| = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots, \qquad (1.41)$$

составленный из модулей ряда (1.40), расходится (ибо (1.41) – гармонический ряд). Значит, у данного знакочередующегося ряда (1.40) есть конечная сумма *S*.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ = S, \qquad (0<S<1) \qquad (1.42)$$

Но эту сумму, согласно теореме Римана, можно изменить за счет перестановки слагаемых ряда.

Подтвердим это. Для этого переставим слагаемые ряда так, чтобы в нем после одного положительного слагаемого следовали два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots\ = \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\ldots\ = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots\ =$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S \qquad (1.43)$$

Как видим, такая перестановка слагаемых ряда привела к уменьшению его суммы в два раза.

Такое необычное (удивительное!) поведение условно сходящегося ряда (1.40), как и вообще всех условно сходящихся рядов, связано с тем, что его сходимость обусловлена не высокой скоростью убывания слагаемых (как это имеет место у абсолютно сходящихся рядов), а лишь взаимной компенсацией медленно убывающих чередующихся положительных и отрицательных слагаемых. При перестановке слагаемых эта взаимная компенсация слагаемых ряда нарушается, а, следовательно, меняется и его сумма.

Упражнения

1. Выполняется ли для ряда

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$$

необходимое условие сходимости? Какова сумма *S* этого ряда?

Ответ: не выполняется; $S=+\infty$.

2. Записать несколько первых членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)\cdot 5^n}$. Показать, что этот ряд сходится. Сколько членов ряда нужно просуммировать, чтобы найти его сумму с точностью до 0,01? Найти эту сумму *S* с указанной точностью.

Ответ: $S \approx S_2 = \frac{1}{15} + \frac{2}{125} \approx 0{,}08$.

3. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Ответ: ряд сходится.

4. С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Ответ: ряд расходится.

5. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots .$$

В случае сходимости выяснить, сходится он абсолютно или условно, а также найти его сумму S с точностью 0,1.

Ответ: ряд сходится абсолютно; $S \approx S_2 = \frac{8}{9} \approx 0{,}9$.

6. Показать, что сумма S условно сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ увеличится в полтора раза, если после каждых двух положительных его слагаемых поместить одно отрицательное.

7. Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots .$

Указание. Использовать тот факт, что $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; ....

Ответ: $S = 1$.

8. Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots .$

Ответ: $S = \frac{1}{2}$.

9. Построить ряд, соответствующий знаменитой апории Зенона об Ахиллесе и черепахе и показать, что этот ряд сходится. А значит, Ахиллес догонит черепаху.

§2. Функциональные ряды (общие положения)

Определение 1. *Ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \ , \qquad (2.1)$$

слагаемыми которого являются функции, называется функциональным.

Если зафиксировать аргумент x, то каждая функция $u_n(x)\ (n=1,2,...)$ станет числом, а ряд (2.1) станет числовым рядом. При одних значениях x этот ряд может оказаться сходящимся, при других – расходящимся.

Определение 2. *Областью сходимости* функционального ряда (2.1) называется множество всех тех значений x, при которых ряд сходится. Остальные значения x составляют его *область расходимости*.

Нас, естественно, в первую очередь будут интересовать области сходимости функциональных рядов, а также суммы рядов в их областях сходимости.

Пусть D – область сходимости данного функционального ряда (2.1). На практике область D может выглядеть по-разному: быть промежутком или интервалом оси ox, представлять собой всю ось ox или единственную ее точку, даже быть пустым множеством (последний случай – неинтересный). Для каждого $x \in D$ этот ряд имеет конечную сумму $S=f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \ = f(x) \quad (x \in D) \qquad (2.2)$$

При исследовании любого функционального ряда встают две основные задачи:

1) Определение его области сходимости D.
2) Определение его суммы $f(x)$ для $x \in D$. (2.3)

Не менее интересна и обратная проблема: подобрать такой функциональный ряд из возможно более простых слагаемых $u_n(x)$, чтобы он в своей области сходимости D имел сумму, совпадающую с заданной функцией $f(x)$ (то есть чтобы выполнялось равенство (2.2)). Эта проблема называется проблемой разложения заданной функции $f(x)$ в функциональный ряд. Качество решения этой проблемы будет тем выше, чем проще окажется этот ряд; чем быстрее он будет сходиться; тем шире будет его область сходимости D.

Важность решения этой проблемы очень велика. Ведь разлагаемая в функциональный ряд (2.2) функция $f(x)$ может быть сложной и даже не выразимой через элементарные функции. Например, она может быть первообразной для некоторой функции $g(x)$, для которой неопределенный интеграл

$$\int g(x)dx = f(x) + C$$

является неберущимся. А слагаемые $u_n(x)$ функционального ряда (2.2), сумма которого будет равна $f(x)$, могут, наоборот, оказаться достаточно простыми элементарными функциями, легко анализируемыми и вычисляемыми. Поэтому получив разложение

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...\quad (x \in D) \tag{2.4}$$

нужной нам функции $f(x)$ в такой функциональный ряд, мы в итоге получим возможность для $x \in D$ оперировать не с самой функцией $f(x)$, а с ее составляющими $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, которые и проще, и удобнее самой функции.

В следующем параграфе задачи (2.3) и (2.4) будут рассмотрены для двух наиболее простых и важных типов функциональных рядов:

1) Для степенных рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+... \tag{2.5}$$

2) Для обобщенных степенных рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+... \tag{2.6}$$

§3. Степенные ряды. Ряды Маклорена и Тейлора

Начнем с того, что найдем область сходимости степенного ряда (2.5). Для этого проанализируем положительный числовой ряд, составленный из его модулей:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n = |a_0|+|a_1|\cdot|x|+|a_2|\cdot|x|^2+|a_3|\cdot|x|^3+... \tag{3.1}$$

Применим к нему признак Даламбера. Для этого найдем q (см. (1.26)):

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x|^{n+1}}{|a_n|\cdot|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \; ; \tag{3.2}$$

Введем обозначение

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}\ , \text{ откуда } \quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3.3}$$

Тогда выражение для q примет вид:

$$q=\frac{|x|}{R} \tag{3.4}$$

Согласно признаку Даламбера:

1) Если $q<1$, то есть если $|x|<R$, или, что одно и то же, если $-R<x<R$, то ряд (3.1) сходится. А вместе с ним сходится, причем абсолютно, и ряд (2.5).

2) Если $q>1$, то есть $|x|>R$ или, что одно и то же, если $x > R$ или $x < -R$, то ряд (3.1) расходится. Заметим, что при этом и ряд (2.5) тоже не будет сходиться, ибо условие $q=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}>1$ для любого положительного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ означает, что начиная с некоторого номера N, то есть при $n>N$, отношение $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ становится больше 1 и остается таковым для любых $n>N$. А это значит, что для $n>N$ будет $b_{n+1}>b_n$. То есть начиная с номера N члены b_n положительного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ растут, а значит, заведомо не стремятся к нулю. Получается нарушенным необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n$, а заодно – и степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, ибо слагаемые первого из них – просто модули последнего. То есть действительно при $x > R$ и $x < -R$ ряд (2.5) будет расходиться.

3) Наконец, если $q = 1$, то есть если $x = \pm R$, то о сходимости – расходимости и ряда (3.1), и ряда (2.5) сразу ничего сказать нельзя. Этот случай нужно исследовать особо.

Итак, <u>выводы:</u>

Степенной ряд (2.5) *сходится при* $-R < x < R$*; расходится при* $x > R$ *и* $x < -R$*; при* $x = \pm R$ *он может как сходиться, так и расходиться* (рис. 7.2).

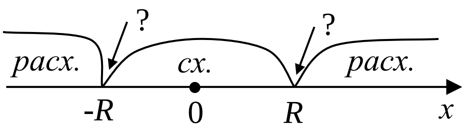


Рис.7.2

Величина R, определяемая по формуле (3.3), называется *радиусом сходимости* степенного ряда (2.5). А интервал (- R; R) называется *интервалом сходимости* этого степенного ряда. Областью сходимости D степенного ряда (2.5), таким образом, является его интервал сходимости (- R; R) и, возможно, его концы.

<u>*Пример 1*</u>. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)2^n}$.

<u>*Решение*</u>. Данный ряд – это ряд вида (2.5) при $a_n=\frac{1}{(n+3)2^n}$. Определим, используя формулу (3.3), его радиус сходимости R:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+3)\cdot 2^n}}{\frac{1}{(n+4)\cdot 2^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8}{n+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{8}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\frac{2+0}{1+0}=2.$$

Итак, данный степенной ряд сходится при $x \in (-2; 2)$ и, возможно, еще в точках $x = \pm 2$. Для всех остальных x он расходится.

Исследуем ряд при $x = \pm 2$.

1) Если $x = 2$, то наш ряд примет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+3)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Это – гармонический ряд (1.17) без первых двух своих членов. А значит, он расходится (его сумма равна $+\infty$).

2) Если $x = -2$, то получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+3)\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+3)\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$$

Это – знакочередующийся ряд, сходящийся по признаку Лейбница.

Таким образом, областью сходимости D степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)2^n}$ является полуинтервал [- 2; 2).

Степенные ряды (2.5) обладают замечательным свойством: внутри интервала сходимости (- R; R) их можно почленно дифференцировать и интегрировать. Это значит, что если

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = f(x), \quad (-R < x < R) \tag{3.5}$$

то

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \; (-R < x < R) \tag{3.6}$$

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^d x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_c^d =$$

$$= a_0 x\Big|_c^d + a_1 \left. \frac{x^2}{2} \right|_c^d + a_2 \left. \frac{x^3}{3} \right|_c^d + \ldots \; (-R < c \le x \le d < R). \tag{3.7}$$

Эти факты примем без доказательства. Ограничимся лишь приведением примеров их использования.

Пример 2. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{3.8}$$

Это – степенной ряд вида (2.5) при $a_n = 1$ (n = 0, 1, 2, …). Его радиус сходимости R, согласно формуле (3.3), равен 1: $R = 1$. То есть ряд (3.8) сходится в интервале (-1; 1), причем на обоих концах этого интервала он, очевидно, расходится. А так как этот ряд представляет собой еще и сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем x, то известна, согласно (1.15), и его сумма:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x} \qquad (-1<x<1) \tag{3.9}$$

Заменяя в (3.9) x на $-x$, получим еще один степенной ряд с известной суммой:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x} \qquad (-1<x<1) \tag{3.10}$$

Если теперь почленно продифференцировать равенства (3.9) и (3.10), то получим еще два разложения:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1) \tag{3.11}$$

$$1-2x+3x^2-4x^3+\ldots=\frac{1}{(1+x)^2} \qquad (-1<x<1) \tag{3.12}$$

А если равенство (3.10) почленно проинтегрировать в промежутке [0; t], где $t\in(-1;\ 1)$, то получим:

$$t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots=\ln(1+t) \quad (-1<t<1) \tag{3.13}$$

Или в обычных обозначениях (заменив t на x):

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\ln(1+x) \qquad (-1<x<1) \tag{3.14}$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $x\to 1$, получим интересный результат:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2\approx 0{,}69 \tag{3.15}$$

Равенства (3.9) – (3.14) являются разложениями в степенные ряды, расположенные слева, тех функций, которые находятся справа.

Степенной ряд Маклорена

Рассмотрим теперь общую проблему разложения любой заданной функции $f(x)$ в степенной ряд (2.5). Здесь встают две задачи: 1) найти коэффициенты $\{a_0; a_1; a_2; a_3\ \ldots\}$ степенного ряда (2.5), сумма которого равна $f(x)$; 2) установить, для каких значений x искомое разложение

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+... \qquad (3.16)$$

будет справедливо.

Пусть заданная функция $f(x)$ имеет в точке $x=0$ производные любого порядка. То есть полагаем, что она бесконечно дифференцируема в точке $x=0$. И еще предположим, что разложение (2.5) существует в некоторой окрестности $(-R;R)$ точки $x=0$, включая и саму эту точку. Тогда последовательно дифференцируя равенство (3.16) в окрестности $(-R;R)$ точки $x=0$, получаем:

$$\begin{aligned}
&f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+.....\\
&f''(x)=2a_2x+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+.....\\
&f'''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+.....\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\\
&f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot a_n+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot(n+1)a_{n+1}x+...
\end{aligned} \qquad (3.17)$$

Полагая в равенствах (3.16) и (3.17) $x=0$, получим искомые коэффициенты разложения (3.16):

$$a_0=f(0);\quad a_1=f'(0);\quad a_2=\frac{f''(0)}{1\cdot 2};\quad a_3=\frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3};.....a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} \qquad (3.18)$$

Если использовать известное обозначение

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n \text{ - эн-факториал,} \qquad (3.19)$$

$$(1!=1;\quad 2!=1\cdot 2=2;\quad 3!=1\cdot 2\cdot 3=6;\quad 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24;....0!=1-\textit{по определению})$$

то все коэффициенты (3.18) можно выразить одной формулой:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad (n=0;1;2;3;...) \qquad (3.20)$$

Подставляя их в равенство (3.16), получим:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (3.21)$$

Формула (3.21) и представляет собой разложение данной функции $f(x)$ в степенной ряд. Этот ряд называется *рядом Маклорена*. Разложение Маклорена (3.21) верно и может быть использовано лишь для тех x, для которых этот ряд сходится, то есть в интервале его сходимости $(-R;R)$.

Пример 3. Пусть $f(x)=e^x$. Тогда $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=...=e^x$, а значит, $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=...=e^0=1$. Разложение Маклорена (3.21) в данном случае примет вид:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{3.22*}$$

Радиус ходимости степенного ряда (3.22) $R=\infty$ (убедитесь в этом, используя формулу (3.3), самостоятельно). Значит, областью сходимости этого ряда является интервал $(-R;R)=(-\infty;+\infty)$, то есть вся числовая ось. Таким образом, разложение (3.19) справедливо для любых значений x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty\prec x\prec+\infty) \tag{3.22}$$

Совершенно аналогично можно получить разложения и многих других важных функций в степенной ряд Маклорена. Например:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+... \qquad (-\infty<x<\infty,\ x-\text{в радианах}) \tag{3.23}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+... \qquad (-\infty<x<\infty,\ x-\text{в радианах}) \tag{3.24}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...\ (-1<x<1,\ \alpha-\text{любое}) \tag{3.25}$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+... \qquad (-1\le x\le 1) \tag{3.26}$$

Разложения (3.22) – (3.26) и им подобные широко используются как для приближенного вычисления значений стоящих слева функций с любой заданной точностью, так и для различных математических операций с указанными функциями.

Пример 4. Вычислить $e^{-0,2}$ с точностью до $0,0001$.

Решение. Используя разложение (3.22) при x = - 0,2, получим:

$$e^{-0,2}=1+(-0,2)+\frac{(-0,2)^2}{2!}+\frac{(-0,2)^3}{3!}+\frac{(-0,2)^4}{4!}+...=$$
$$=1-0,2+0,02-0,001333...+0,000066...-.....\ .$$

Отбрасывая в получившемся знакочередующемся ряде четвертое слагаемое, меньшее допустимой погрешности $0,0001$, и все последующие за ним, которые еще меньше, получим с требуемой точностью:

$$e^{-0,2}\approx 1-0,2+0,02-0,0013=0,8187.$$

Пример 5. Вычислить приближенно с точностью до 0,001 неберущийся определенный интеграл $\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{x}dx$.

Решение. Используя разложение (3.24), получим:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{x}dx = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\frac{(2x)^8}{8!}-...\right)}{x}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6-\frac{2}{315}x^8+...}{x}dx = \int_0^1 (2x-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{45}x^5-\frac{2}{315}x^7+...)dx =$$

$$= \left(2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{4}{45}\cdot\frac{x^6}{6}-\frac{2}{315}\cdot\frac{x^8}{8}+...\right)\Bigg|_0^1 = 1-\frac{1}{6}+\frac{2}{135}-\frac{1}{1260}+...$$

Отбрасывая в получившемся знакочередующемся числовом ряде четвертое слагаемое, которое меньше допустимой погрешности 0,001, и все последующие за ним, получим с требуемой точностью 0,001:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{x}dx \approx 1-\frac{1}{6}+\frac{2}{135} \approx 0{,}819. \qquad (3.27)$$

Пример 6. Построить в виде степенного ряда приближенное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x^2+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Эта задача, заметим, не имеет точного решения, так как дифференциальное уравнение $y' = x^2+y^2$ не может быть решено в квадратурах.

Решение. Искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде ряда Маклорена:

$$y = y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+... \quad (-R<x<R) \qquad (3.29)$$

Для неизвестных коэффициентов $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)\ldots$ этого ряда получаем:

1) $y(0)=1$ - согласно начальному условию задачи Коши (3.28).

2) $y'(0)=0^2+1^2=1$ согласно обоим равенствам задачи Коши (3.28).

3) Дифференцируя обе части уравнения $y' = x^2+y^2$, получим: $y''=2x+2y\cdot y'$. Полагая здесь $x=0$ и учитывая, что $y(0)=1$ и $y'(0)=1$, получим: $y''(0)=2\cdot 0+2\cdot 1\cdot 1=2$;

4) Дифференцируя обе части равенства $y''=2x+2y\cdot y'$, получим: $y'''=2+2(y'\cdot y'+y\cdot y'')$, откуда $y'''(0)=2+2(1\cdot 1+1\cdot 2)=8$.
Продолжая этот процесс, можем получить $y^{(4)}(0)$; $y^{(5)}(0)$, и т.д. В итоге на основании (3.29) искомое решение $y=y(x)$ задачи Коши (3.28) примет вид:

$$y=1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3+\ldots \qquad (-R<x<R) \tag{3.30}$$

На основании общей теории дифференциальных уравнений можно доказать, что ряд (3.30) сходится для всех $x\in(-\infty;+\infty)$. То есть его радиус сходимости $R=\infty$. Ограничиваясь найденными первыми четырьмя слагаемыми этого ряда, получим следующее приближенное решение задачи Коши (3.28):

$$y\approx 1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3 \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{3.31}$$

Оно будет тем точнее, чем ближе x к нулю.

Обобщенные степенные ряды. Ряд Тейлора

Ряд вида (2.6) называется *обобщенным степенным рядом*. Сделав в нем замену $x-x_0=t$, получим обычный степенной ряд вида (2.5):

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\ldots \tag{3.32}$$

Он, как мы знаем, сходится на интервале $-R<t<R$, где

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3.33}$$

- радиус сходимости ряда (3.32). Тогда эта величина R определяет и интервал сходимости обобщенного степенного ряда (2.6):

$$-R<t<R \iff -R<x-x_0<R \iff x_0-R<x<x_0+R$$

То есть областью сходимости ряда (2.6) является интервал $(x_0-R;x_0+R)$ и, возможно, его концы (рис. 7.3).

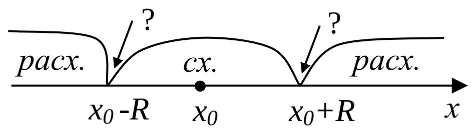


Рис.7.3

Различные функции $f(x)$ можно раскладывать не только в обычные степенные ряды, используя разложение Маклорена (3.21), но и в обобщенные степенные ряды. А именно, если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0, то для такой функции можно записать разложение вида

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots \qquad (3.34)$$

Это разложение справедливо для всех x, входящих в интервал $(x_0-R; x_0+R)$ сходимости ряда Тейлора (3.34).

Сравнивая разложение (3.21) функции $f(x)$ в ряд Маклорена и разложение (3.34) этой же функции в ряд Тейлора, видим, что разложение Маклорена использует в качестве опорной точки значение $x=0$, а разложение Тейлора – произвольное значение $x=x_0$. Поэтому говорят, что разложение Маклорена – это разложение функции в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, а разложение Тейлора – это разложение функции в степенной ряд в окрестности точки $x=x_0$. С удалением x от опорной точки (от нуля для ряда Маклорена и от x_0 для ряда Тейлора) сходимость каждого из этих рядов ухудшается (идет медленнее). А при достаточно больших x, выходящих за интервалы их сходимости, разложение заданной функции $f(x)$ в эти ряды становится заведомо несправедливым.

Пример 7. Получить разложение функции $y=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

Решение. Опираясь на формулу (3.34) и учитывая, что

$$f(x)=\ln x;\quad f'(x)=\frac{1}{x};\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2};\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3};\quad f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4};\ \ldots,$$

а значит,

$$f(x_0)=f(1)=\ln 1=0;\quad f'(1)=1;\quad f''(1)=-1;\quad f'''(1)=2;\quad f^{(4)}(1)=-6;\ \ldots$$

получим:

$$\ln x = x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} \qquad (3.36)$$

Это ряд вида (2.6) при $x_0=1$ и $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Он сходится на интервале $(x_0-R;\ x_0+R)=(1-R;\ 1+R)$. А так как, согласно (3.33)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

то ряд (3.36) сходится на интервале (0; 2):

$$\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \quad (0 \prec x \leq 2) \qquad (3.37)$$

Примечание. Разложение (3.37) можно было бы получить проще, опираясь на полученное ранее разложение (3.14), если сделать в нем замену $1+x$ на x.

В заключение этой главы отметим, что и в работе с рядами помогает интернет. В частности, неоднократно упоминавшиеся выше сайты https://math24.biz или https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/ содержат страницы, посвященные рядам. С их помощью можно исследовать на сходимость-расходимость числовые ряды; находить суммы этих рядов; находить интервалы сходимости степенных рядов; раскладывать в степенные ряды заданные функции, и т.д. Есть там и разделы, посвященные другим рядам: рядам Фурье, рядам Лорана. С этими рядами, если они читателю понадобятся, тоже можно познакомиться в интернете.

Упражнения

1. Определить область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

Ответ: $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$.

2. Записать в виде степенного ряда функцию $\Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и вычислить $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$, взяв в получившемся ряду столько членов, сколько нужно для того, чтобы погрешность вычисления была меньше 0,001.

Ответ:

$$\Phi(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \ldots \ (-\infty < x < +\infty); \qquad \Phi(\frac{1}{3}) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 0{,}327.$$

3. Использую биноминальное разложение (3.25), найти $\sqrt[5]{0{,}8}$ с точностью до 0,001.

Ответ: $\sqrt[5]{0{,}8} \approx 0{,}956$.

4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 4$ (по степеням $x-4$) функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и найти значения переменной x, для которых будет справедливо полученное разложение.

Ответ:

$$\sqrt{x} = 2\left[1 + \frac{x-4}{2^3 \cdot 1!} - \frac{(x-4)^2}{2^6 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (x-4)^3}{2^9 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (x-4)^4}{2^{12} \cdot 4!} + \ldots\right] \quad (0 < x < 8)$$

5. Применяя почленное дифференцирование или интегрирование, найти суммы рядов:

1) $1+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+....=f_1(x)$; 2) $1+2x+3x^2+4x^3+....=f_2(x)$

<u>*Ответ:*</u> $f_1(x)=arctgx+1 \quad (-1 \prec x \le 1)$; $f_2(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 \prec x \prec 1)$

ГЛАВА 8
Функции многих переменных

§1. Основные понятия

До сих пор, встречаясь с функциями, мы имели дело с функциями вида $y = f(x)$, то есть с функциями одного аргумента (одной переменной) x. Однако многие теоретические и прикладные задачи требуют для своего решения использования функций нескольких переменных. А именно, функций вида $z = f(x; y)$ – функций двух переменных; функций вида $u = f(x; y; z)$ – функций трех переменных, и т.д. Причем в реальных теоретических и прикладных задачах функции многих переменных встречаются даже чаще, чем функции одной переменной. Действительно, в реальных условиях каждая исследуемая величина y зависит, вообще говоря, от многих величин $(x_1; x_2; ...; x_n)$, то есть представляет собой функцию $y = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ многих переменных. И только если влияние на величину y какой-то одной из этих переменных (например, x_1) существенно больше, чем влияние остальных, то пренебрегая этими остальными переменными, получим функцию $y = f(x_1)$ одной переменной. Это простейший и наиболее легко анализируемый случай, который мы и изучали до сих пор.

Например, путь s, проходимый свободно падающим телом, реально зависит от многих величин: от времени падения t, плотности воздуха ρ, массы m и объема V тела, и т.д. То есть $s = f(t; \rho; m; V; ...)$ – функция многих переменных. И только пренебрегая влиянием на путь s сопротивления воздуха, а значит, исключая влияние на s величин ρ, m, V и т.д., получим известную еще из школьной физики зависимость $S=f(t)=\frac{gt^2}{2}$, представляющую собой функцию одной переменной t.

Впрочем, исследуемая величина может и существенно зависеть от нескольких других величин, так что влиянием ни одной из них на исследуемую величину пренебречь нельзя. Например, ток I, проходящий через некоторое сопротивление R, существенно зависит от величины этого сопротивления и напряжения U на концах этого сопротивления: $I=\frac{U}{R}$ (закон Ома). Еще пример: прибыль предприятия R существенно зависит от цены p единицы продукции этого предприятия, от количества q единиц проданной продукции, от денежных затрат z на производство и реализацию проданной продукции: $R = pq - z$. То есть величина R является функцией по меньшей мере трех переменных ($p; q; z$), каждая из которых существенна.

Такие примеры указывают на то, что в математике должен быть разработан аппарат исследования функций многих переменных. Такой аппарат давно разработан. Во многом он использует те же понятия и идеи, что и аппарат исследования функций одной переменной. Однако есть и существенные различия. В чем они состоят – об этом ниже.

1. Основные понятия, связанные с функциями одной переменной

Пусть $y = f(x)$ – произвольная функция одной переменной: x – независимая переменная (аргумент), y – функция. Как всем известно, суть этой функции такова: $x \to y$ (по x находится y). Множество D всех тех значений независимой переменной x, для которых можно найти y, называется областью определения функции $y = f(x)$. Если функцию y можно найти для любого x ($-\infty < x < +\infty$), то есть для любой точки x числовой оси ox, то область D определения этой функции занимает всю ось ox. Если же это возможно не для любого x, то область определения D функции $y = f(x)$ представляет собой некоторую часть оси ox – например, отрезок $[a; b]$ (рис. 8.1).

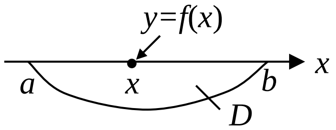


Рис. 8.1

Иллюстрации, изображенной на рис. 8.1, можно для наглядности придать и какой-то реально осязаемый смысл. Например, можно себе представить, что отрезок $[a; b]$ оси ox – это тонкий материальный стержень, неравномерно нагретый вдоль своей оси, а $y = f(x)$ – температура в точке x этого отрезка. Впрочем, функции $y = f(x)$ можно придать совершенно другой смысл. Например, можно считать, что y – объем произведенной продукции при затратах x на ее производство.

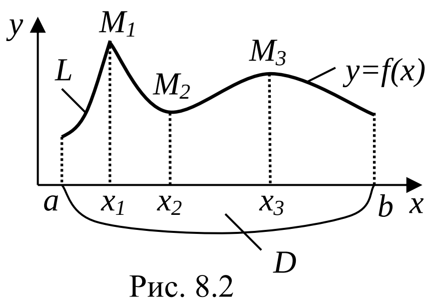


Рис. 8.2

Характер изменения функции y при изменении ее аргумента x очень наглядно демонстрирует график функции, который в принципе представляет собой некоторую линию L на плоскости xoy (рис. 8.2).

График функции $y = f(x)$ (линия L) состоит из точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$. Точки ($M_1; M_2; M_3$) – вершины и впадины графика функции, а их проекции на ось ox (на область определения D этой функции) называются, как мы знаем, точками экстремума функции (точками ее максимума и минимума). Известна и схема нахождения этих важнейших для функции $y = f(x)$ точек через ее производную $y' = f'(x)$ (см. главу 4, §3).

2. Основные понятия, связанные с функциями двух переменных

Пусть $z = f(x; y)$ – произвольная функция двух переменных: x и y – независимые переменные, z – функция от этих переменных. Суть такой функции аналогична сути функции одной переменной: $(x;\ y) \to z$ (по x и y находится z).

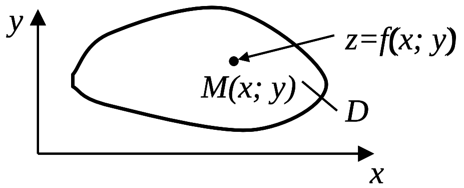


Рис. 8.3

Множество D всех тех пар значений независимых переменных $(x;\ y)$, для которых можно найти зависимую переменную z (функцию z), называется областью определения функции $z = f(x;\ y)$. Так как каждая пара чисел $(x;\ y)$ представляет собой некоторую точку плоскости xoy, то область определения D функции $z = f(x;\ y)$ состоит из точек этой плоскости. Если функция $z = f(x;\ y)$определена для любых $(x;\ y)$, то область D будет занимать всю плоскость xoy. А если не для любых - то какую-то ее часть. И для каждой точки $M(x;\ y)$ области D можно найти значение величины $z = f(x;\ y)$ (рис. 8.3).

Для наглядности рисунку 8.3 можно придать и какой-нибудь реальный наглядный смысл. Например, можем считать, что D – неравномерно нагретая пластинка, а $z = f(x;\ y)$ – температура в точках $M(x;\ y)$ этой пластинки. Или на пластинку D что-то давит, а $z = f(x;\ y)$ – давление в точке $M(x;\ y)$ этой пластинки. Или даже D – поле, чем-нибудь засеянное, а $z = f(x;\ y)$ – урожайность посеянной культуры в точках этого поля. И так далее.

Характер изменения функции $z = f(x;\ y)$ при изменении ее аргументов x и y (то есть при изменении точки $M(x;\ y)$) можно наглядно изобразить на графике функции. График функции $z = f(x;\ y)$ состоит из точек $N(x;\ y;\ z)$ пространства, для которых абсцисса x и ордината y – это координаты точек $M(x;\ y)$ её области определения D, а аппликата z находится по формуле $z = f(x;\ y)$ (рис. 8.4).

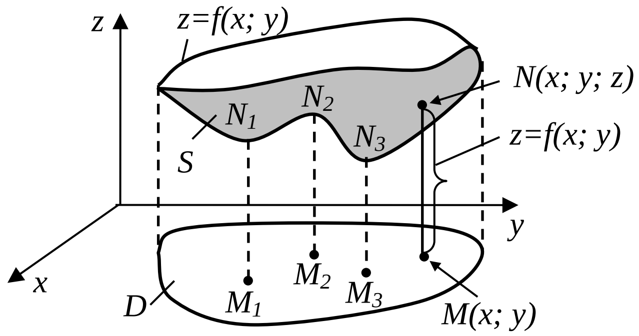


Рис. 8.4

То есть графиком произвольной функции $z = f(x;\ y)$ в принципе является некоторая поверхность S в пространстве. Эта поверхность может иметь вершины и впадины ($N_1;\ N_2;\ N_3;\ ...$). Их проекции ($M_1;\ M_2;\ M_3;\ ...$) на плоскость xoy (на область определения D) называются *точками экстремума функции* (точками ее максимума и минимума). Сравнивая рис. 8.2 и 8.4, легко видеть и то общее, что имеется между точками экстремума функций одной и двух переменных, и в чем разница между ними. Есть и математическая схема нахождения точек экстремума функции $z = f(x;\ y)$ (через так называемые *частные производные* этой функции). Но об этом – позже, в §3.

3. Основные понятия, связанные с функциями трех переменных

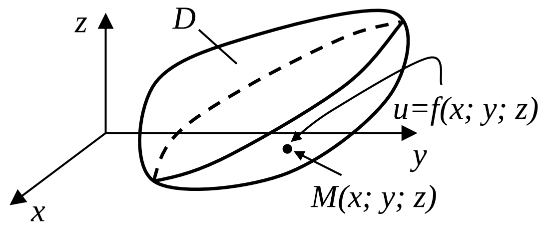


Рис. 8.5

Пусть $u = f(x; y; z)$ – произвольная функция трех переменных: x, y, z – независимые переменные, u – функция от этих переменных (зависимая переменная). Суть такой функции: $(x; y; z) \to u$ (по x, y, z находится u). Множество D всех тех троек значений независимых переменных (x, y, z), для которых можно найти зависимую переменную (функцию) u, называется областью определения функции $u = f(x; y; z)$. Так как каждая тройка чисел (x, y, z) представляет собой некоторую точку пространства, то область D определения функции $u = f(x; y; z)$ состоит из точек пространства. Эта область может занимать все пространство или какую-либо его часть. И для каждой точки $M(x, y, z)$ области D можно найти значение величины $u = f(x; y; z)$ (рис. 8.5).

Для наглядности величину u можно представлять себе, например, как температуру в точках $M(x; y; z)$ теперь уже пространственной области D. А можно, разумеется, эту величину $u = f(x; y; z)$ трактовать и совершенно иначе. Например, считать, что u – прибыль предприятия, если продано x единиц продукции этого предприятия при цене y за единицу продукции и при затратах z на произведенную продукцию. И так далее.

Отметим, что графически представить себе ход изменения функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ невозможно, ибо такие функции графика не имеют. Действительно, график функции $u = f(x; y; z)$ должен состоять из точек $N(x; y; z; u)$ с четырьмя координатами, где $u = f(x; y; z)$. То есть из точек четырехмерного пространства, которое физически непредставимо (его используют в математике лишь как математическую абстракцию).

4. Основные понятии, связанные с функциями четырех и более переменных

Пусть, например, функция $u = f(x; y; z; t)$ – произвольная функция четырех переменных $(x; y; z; t)$. Ее область определения D состоит из точек $D(x; y; z; t)$ четырехмерного пространства, то есть она наглядно не представима. Графика у этой функции, естественно, тоже нет. Но этой функции, как и функциям большего числа переменных, всегда можно придать самый разнообразный наглядный прикладной смысл. Например, функцию $u = f(x; y; z; t)$ можно считать температурой в пространственной точке $M(x; y; z)$ в момент времени t, когда эта температура меняется со временем (нестационарная температура). Или прибылью от продажи товара при количестве проданного товара x, цене единицы товара y, налоге с продаж z и налоге на прибыль t. Или еще как-нибудь. Естественно, чем от большего числа переменных зависит функция, тем сложнее изучать эту функцию. Наиболее простой случай функции многих переменных –

это когда функция зависит лишь от двух переменных. Рассмотрением этого случая мы в основном и ограничимся.

Упражнения

1. Найти и изобразить на плоскости *xoy* области определения следующих функций:

$$а)\ z=\frac{1}{x^2+y^2};\qquad б)\ z=\frac{1}{x-y};\qquad в)\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

Ответ:

а) $(x\neq 0;\ y\neq 0)$ – плоскость хоу, за исключением точки $O(0;0)$.

б) $y\neq x$ – плоскость хоу, за исключением прямой $y=x$.

в) $x^2+y^2\leq 4$ – круг с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом 2.

2. Дана функция $u = x + y + z$.

а) Найти область определения функции u.

б) Определить те точки $M(x;\ y;\ z)$ области определения функции, для которых $u=1$.

Ответ:

а) область определения функции u – все пространство *oxyz*;

б) точки плоскости $x + y + z = 1$, которая пересекает оси *ox, oy* и *oz* соответственно в точках $M_1(1;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ 1;\ 0)$, $M_3(0;\ 0;\ 1)$.

§2. Частые производные и полный дифференциал функций многих переменных

Пусть $z=f(x;y)$ – некоторая функция двух переменных. Если зафиксировать одну из переменных (например, y), то функция $z=f(x;y)$ станет функцией лишь одной переменной x. Если теперь найти производную функции z по этой оставшейся переменной x, то эта производная, имеющая несколько разных по форме обозначений

$$z'_x = f'_x(x;y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\ \ (здесь\ y=Const), \tag{2.1}$$

называется *частной производной функции z по переменной x.* Аналогично определяется, при фиксированном x и переменном y, *частная производная функции* $z = f(x;\ y)$ *по переменной* y:

$$z'_y = f'_y(x;y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\ \ (здесь\ x=Const) \tag{2.2}$$

Пример 1. Пусть $z = 2x^2 + y^3 - 3xy^4$. Тогда

$$z'_x = (2x^2 + y^3 - 3xy^4)'_x = 4x + 0 - 3y^4 = 4x - 3y^4;$$
$$z'_y = (2x^2 + y^3 - 3xy^4)'_y = 0 + 3y^2 - 12xy^3 = 3y^2 - 12xy^3.$$

Пользуясь определением производной функции одной переменной (см. главу 4, формулу (1.6)), можем записать и математические определения частных производных функции z = $f(x; y)$:

$$\begin{aligned} z'_x &= f'_x(x;y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x};\ (y = Const) \\ z'_y &= f'_y(x;y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y};\ (x = Const) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Если $u = f(x;y;z)$ – функция трех переменных, то от нее можно вычислить уже три частные производные – по каждой переменной:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x;y;z)\ \ (\textit{здесь}\,(y;\mathrm{z})\text{ - Const}) \\ u'_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x;y;z)\ \ (\textit{здесь}\,(x;\mathrm{z})\text{ - Const}) \\ u'_z &= \frac{\partial u}{\partial z} = f'_z(x;y;z)\ \ (\textit{здесь}\,(x;\mathrm{y})\text{ - Const}) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Пример 2. Если $u = 2x^2 - y^3 + 5z + 4x^2y^3z^4$, то

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 8xy^3z^4;\quad u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 12x^2y^2z^4;\quad u'_z = \frac{\partial u}{\partial z} = 5 + 16x^2y^3z^3.$$

Совершенно аналогично определяются частные производные функций любого числа переменных.

Все это – так называемые частные производные *первого порядка.* А если от них снова вычислить (взять) частные производные, то получим уже частные производные второго, третьего и т.д. порядков. Например, если $z = f(x;y)$ – функция двух переменных, то

$$(z'_x)'_x = z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad (2.5)$$

– частная производная второго порядка от z по x;

$$(z'_y)'_y = z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{2.6}$$

– частная производная второго порядка от z по y;

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{и} \quad (z'_y)'_x = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \tag{2.7}$$

– смешанные частные производные второго порядка от z по x и y. Кстати, доказано, что если z''_{xy} и z''_{yx} обе существуют, то они и равны:

$$z''_{xy} = z''_{yx} \tag{2.8}$$

То есть результат вычисления смешанных производных не зависит от порядка дифференцирования (если это дифференцирование возможно и в том, и в другом порядке).

<u>*Пример 3*</u>. Пусть $z = 2x^2 + y^3 - 3xy^4$. Тогда
$z'_x = 4x - 3y^4$; $z'_y = 3y^2 - 12xy^3$; $z''_{x^2} = (z'_x)'_x = 4$; $z''_{y^2} = (z'_y)'_y = 6y - 36xy^2$;

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = -12y^3;\; z''_{yx} = (z'_y)'_x = -12y^3.$$

<u>Примечание</u>. В обозначениях (2.1) – (2.7) для частных производных значок ∂ – с кривым хвостом! В этом его отличие от прямого значка d, применяемого в обозначения (1.4), (2.10), (2.11) главы 4 для обычных производных функций одной переменной и являющегося знаком дифференциала.

<u>Полный дифференциал функции многих переменных.</u>

Для начала рассмотрим это понятие на примере функции двух переменных $z = f(x; y)$. Для этого рассмотрим приращение Δz функции z при условии, что аргументы x и y получат некоторые приращения Δx и Δy:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y) = \\ &= f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y) + f(x; y+\Delta y) - f(x; y) = \\ &= \frac{f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y)}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} \cdot \Delta y \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если Δx и Δy малы, то согласно (2.3)

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+\Delta x;\, y+\Delta y)-f(x;\, y+\Delta y)}{\Delta x}\approx f_x^{'}(x;\, y+\Delta y)\approx f_x^{'}(x;\, y)\\&\frac{f(x;\, y+\Delta y)-f(x;\, y)}{\Delta y}\approx f_y^{'}(x;\, y)\end{aligned}\qquad(2.10)$$

Приближенные равенства (2.10) будут тем точнее, чем меньше Δx и Δy. При этом выражение (2.9) для Δz примет вид:

$$\Delta z=\Delta f(x;\, y)\approx f_x'(x;\, y)\cdot\Delta x+f_y'(x;\, y)\cdot\Delta y\qquad(2.11)$$

А теперь будем считать Δx и Δy не просто малыми, а *бесконечно малыми*. В этом случае обозначим их символами dx и dy соответственно и будем называть *дифференциалами аргументов x и y:*

дифференциал dx – это бесконечно малое Δx;
дифференциал dy – это бесконечно малое Δy. (2.12)

При бесконечно малых приращениях аргументов $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$ и приращение функции Δz будет, согласно (2.11), бесконечно малым. Обозначим его символом dz и будем называть *дифференциалом функции* z*:*

dz – это бесконечно малое Δz (2.13)

При $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$ и $\Delta z = dz$ приближенное равенство (2.11) станет уже *точным:*

$$dz=df(x;\, y)=f_x^{'}(x;\, y)dx+f_y^{'}(x;\, y)dy\qquad(2.14)$$

Или короче:

$$dz=z_x^{'}dx+z_y^{'}dy;\qquad dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\qquad(2.15)$$

Выражения (2.14) и (2.15) представляют собой так называемый *полный дифференциал функции* $z=f(x;\, y)$ *в точке* $(x;\, y)$.

Аналогично, если $u=f(x;y;\mathrm{z})$ – функция трех переменных, то ее полный дифференциал du в точке $(x;y;\mathrm{z})$ найдется по формуле:

$$du=df(x;y;z)=f_x^{'}(x;y;z)dx+f_y^{'}(x;y;z)dy+f_z^{'}(x;y;z)dz\qquad(2.16)$$

Или короче:

$$du=u_x^{'}dx+u_y^{'}dy+u_z^{'}dz;\qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\qquad(2.17)$$

А конечное приращение Δu такой функции, соответствующее конечным приращениям Δx, Δy и Δz ее аргументов, найдется по приближенной формуле (2.18), аналогичной формуле (2.11):

$$\Delta u = \Delta f(x;y;z) \approx f_x'(x;y;z)\Delta x + f_y'(x;y;z)\Delta y + f_z'(x;y;z)\Delta z \qquad (2.18)$$

Эта формула тем точнее, чем меньше Δx, Δy и Δz.

Полные дифференциалы функций многих переменных являются аналогами дифференциала функции одной переменной $y = f(x)$, который, согласно формуле (5.7) главы 4, определяется равенством:

$$dy = df(x) = f'(x)dx \qquad (2.19)$$

Полные дифференциалы функций многих переменных – это абстрактные понятия. Они, как и дифференциал функции одной переменной, имеют в основном теоретическое значение. А вот приближенные формулы (2.11), (2.18) и им подобные, определяющие конечное приращение функции при конечных приращениях ее аргументов, широко применяются в расчетах на практике.

Пример 4. При измерении размеров цилиндра (его радиуса основания R и его высоты h) из-за несовершенства измерительных приборов возможно допущение малых ошибок ΔR и Δh соответственно. Найти максимально возможные абсолютную и относительную ошибки при вычислении объема V цилиндра.

Решение. Объем цилиндра $V = \pi R^2 h$ – функция двух переменных R и h. Поэтому, используя формулу (2.11), получим следующее приближенное выражение для *абсолютной ошибки* ΔV при вычислении объема цилиндра V:

$$\Delta V \approx V_R' \cdot \Delta R + V_h' \cdot \Delta h = 2\pi Rh \cdot \Delta R + \pi R^2 \cdot \Delta h \qquad (2.19)$$

Ошибки ΔR и Δh могут быть любых знаков. При разных знаках этих ошибок они будут друг друга компенсировать, поэтому ошибка ΔV объема цилиндра может быть весьма незначительной. Максимально возможной она будет в том случае, если ΔR и Δh будут одинаковых знаков (скажем, обе со знаком (+)). При этом максимально возможная *относительная ошибка* при вычислении объема V найдется по формуле:

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{2\pi Rh \cdot \Delta R + \pi R^2 \cdot \Delta h}{\pi R^2 h} = 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} \qquad (2.21)$$

Упражнения

1. Найти частные производные первого порядка функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Ответ: $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

2. Найти частные производные функции $z = \frac{y}{x}$ первого и второго порядков.

Ответ: $z'_x = -\frac{y}{x^2}$; $z'_y = \frac{1}{x}$; $z''_{x^2} = \frac{2y}{x^3}$; $z''_{y^2} = 0$; $z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{1}{x^2}$

3. Найти приближенное приращение Δz функции $z = x^2 y$ в точке $M(1;\ 2)$ при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}2$. Сравнить полученное приближенное значение Δz с его точным значением.

Ответ:

$$\Delta z \approx z'_x \cdot \Delta z + z'_y \cdot \Delta y = 2xy \cdot \Delta x + x^2 \cdot \Delta y = \begin{vmatrix} x = 1;\ y = 2 \\ \Delta x = 0{,}1;\ \Delta y = -0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}2 \text{ – приближенно}$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 \cdot (y + \Delta y) - x^2 y = (1 + 0{,}1)^2 \cdot (2 - 0{,}2) - 1^2 \cdot 2 = 0{,}178 \text{ – точно.}$$

4. При измерении на местности треугольника получены следующие данные: сторона $a = 100м \pm 2м$; сторона $b = 200м \pm 3м$; угол между ними $\alpha = 60° \pm 1°$. С какой степенью точности (с какой максимальной погрешностью) по теореме косинусов будет вычислена сторона c ?

Ответ: максимальная погрешность для c составит $\pm 4{,}35$м.

5. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = x^y$.

6. Подсчитать приближенно изменение $\Delta\varphi$ функции $\varphi = arctg\frac{y}{x}$, когда x изменяется от 2 до 2,1, а y от 3 до 2,8.

Ответ: $\Delta\varphi \approx 0{,}054$.

7. Дана функция $z = \sqrt{x} \cdot \sin\frac{y}{x}$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.

§3. Исследование функций многих переменных на экстремум

Исследование функций многих переменных на экстремум – процедура гораздо более сложная, чем аналогичная процедура для функций одной переменной. Поэтому ограничимся рассмотрением этого вопроса на наиболее простом и наглядном примере функции двух переменных $z = f(x; y)$ (рис. 8.4). Здесь $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ – точки экстремума этой функции. А именно, точки M_1 и M_3 – точки минимума функции, а точка M_2 – точка ее максимума. На рис. 8.4 представлена функция с тремя точками экстремума, но этих точек, естественно, может быть и больше, и меньше.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – точка какого-либо экстремума (точка максимума или точка минимума) функции $z = f(x; y)$. Тогда справедлива

Теорема 1.

Если в точке экстремума $M_0(x_0; y_0)$ существуют частные производные $z'_x = f'_x(x_0; y_0)$ и $z'_y = f'_y(x_0; y_0)$, то обе они равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0; y_0) = 0 \\ f'_y(x_0; y_0) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство.

1) Рассмотрим функцию $f_1(x) = f(x; y_0)$. Так как $f_1(x_0) = f(x_0; y_0)$ – экстремальное значение этой функции, то производная $f_1'(x)$ этой функции при $x = x_0$, если она существует, равна нулю:

$$f'_1(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'_x(x_0; y_0) = 0 \tag{3.2}$$

2) Рассмотрим теперь функцию $f_2(y) = f(x_0; y)$. Так как $f_2(y_0) = f(x_0; y_0)$ – экстремальное значение этой функции, то производная $f'_2(y)$ этой функции при $y = y_0$, если она существует, равна нулю:

$$f'_2(y_0) = 0 \Leftrightarrow f'_y(x_0; y_0) = 0 \tag{3.3}$$

Теорема доказана.

Заметим, что условия (3.1) являются *лишь необходимыми* условиями экстремума в точке $M_0(x_0;y_0)$ дифференцируемой в этой точке функции $z = f(x; y)$. То есть эти условия не являются достаточными условиями того, что в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция $z = f(x; y)$ будет иметь экстремум (максимум или минимум). Иначе говоря, точка $M_0(x_0; y_0)$, в которой выполняются оба равенства (3.1), является *лишь подозрительной* на экстремум точкой для функции $z = f(x; y)$. Окончательный вывод о характере такой подозрительной на экстремум точки можно сделать с помощью следующей теоремы (приведем ее без вывода):

Достаточные условия экстремума. *Теорема* 2.

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – такая точка из области D определения функции $z = f(x; y)$, что для нее выполняются необходимые условия (3.1) экстремума этой функции. То есть $M_0(x_0;\ y_0)$ – подозрительная на экстремум точка. Найдем в этой точке числа

$$A = f''_{x^2}(x_0;y_0); \quad B = f''_{xy}(x_0;y_0); \quad C = f''_{y^2}(x_0;y_0); \quad \Delta = AC\text{-}B^2 \qquad (3.4)$$

Тогда:

1) Если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то $M_0(x_0;\ y_0)$ – точка минимума функции $z = f(x;y)$.

2) Если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то $M_0(x_0;\ y_0)$ – точка максимума функции $z = f(x;y)$.

3) Если $\Delta < 0$, то точка $M_0(x_0;\ y_0)$ – не точка экстремума функции $z = f(x;y)$.

4) Если $\Delta = 0$, то вопрос остается открытым. Нужно дополнительное исследование функции $z = f(x;y)$ с привлечением ее частных производных порядка выше второго. Этот особый и редко встречающийся случай рассматривать не будем.

Пример 1. Пусть x и y – количества двух произведенных товаров; $p_1 = 8$ руб. и $p_2 = 10$ руб. – цена единицы каждого из этих товаров соответственно; $C = 0{,}01(x^2 + xy + y^2)$ – функция затрат (в рублях) на производство этих товаров. Тогда доход R от продажи товаров составит $R = 8x+10y$ (руб.), а прибыль $П$ составит (в рублях)

$$П = R – C = 8x + 10y – 0{,}01(x^2+xy+y^2).$$

Найдем объемы x и y товаров, при которых прибыль $П$ будет максимальной.

1) Сначала найдем значения $(x;y)$, подозрительные на экстремум для функции $П$:

$$\begin{cases} П'_x = 0 \\ П'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 0{,}01(2x + y) = 0 \\ 10 - 0{,}01(x + 2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 400 \end{cases}$$

2) Теперь исследуем найденную подозрительную на экстремум для функции $П$ точку $M_0(200;\ 400)$. Для этого найдем в этой точке значения A, B, C, Δ, определяемые выражениями (3.4). Так как

$$П''_{x^2} = (П'_x)'_x = -0{,}02;\ П''_{xy} = (П'_x)'_y = -0{,}01;\ П''_{y^2} = (П'_y)'_y = -0{,}02,$$

и это верно для любых $(x;\ y)$, а значит, и в точке $M_0(200;\ 400)$, то

$$A = П''_{x^2} = -0{,}02; \quad B = П''_{xy} = -0{,}01; \quad C = П''_{y^2} = -0{,}02; \quad Δ = AC - B^2 = 0{,}0003.$$

Так как $\Delta > 0$, а $A < 0$, то точка $M_0(200;\ 400)$ – точка максимума функции $П$. То есть прибыль $П$ от продаж будет максимальной при $x = 200$ *(ед)* и $y = 400$ *(ед)*.

Пример 2. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Решение. Данная функция z – функция двух переменных, определенная для любых x и y, то есть на всей плоскости xoy, и имеющая в каждой ее точке частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x; \quad z'_y = 2xy + 2y$$

Сначала найдем точки плоскости xoy, подозрительные на экстремум для данной функции z:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(0;0) \\ M_2(-\frac{5}{3};0) \\ M_3(-1;2) \\ M_4(-1;-2) \end{array}\right.$$

Затем, найдя частные производные второго порядка от функции z, запишем выражения для A, B, C, Δ:

$$A = z''_{x^2} = 12x + 10; \quad B = z''_{xy} = 2y; \quad C = z''_{y^2} = 2x + 2; \quad \Delta = AC\text{-}B^2$$

Вычисляя теперь числовые значения этих величин для каждой из четырех подозрительных на экстремум точек, получим следующие выводы об этих точках:

$A(M_1) = 10;\ B(M_1) = 0;\ C(M_1) = 2;\ \Delta(M_1) = 20; \Rightarrow M_1(0;0)$ - точка min.

$A(M_2) = -10;\ B(M_2) = 0;\ C(M_2) = -\frac{4}{3};\ \Delta(M_2) = \frac{40}{3}; \Rightarrow M_2(-\frac{5}{3};0)$ - точка max.

$A(M_3) = -2;\ B(M_3) = 4;\ C(M_3) = 0;\ \Delta(M_3) = -16; \Rightarrow M_3(-1;2)$ - не точка экстремума.

$A(M_4) = -2;\ B(M_4) = -4;\ C(M_4) = 0;\ \Delta(M_4) = -16; \Rightarrow M_3(-1;-2)$ - не точка экстремума.

Теперь найдем два экстремальных значения функции z, определяющие высоту впадины и вершины графика этой функции:

$$z(M_1) = z(0;0) = 0; \quad z(\mathrm{M}_2) = z(-\frac{5}{3};0) = \left(\frac{5}{3}\right)^3.$$

Определение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $z = f(x;y)$ – некоторая непрерывная функция двух переменных, рассматриваемая в замкнутой области $\overline{D} = D + \Gamma$, где D – внутренняя часть области $\overline{D}$, а Γ – ее граница (рис. 8.6).

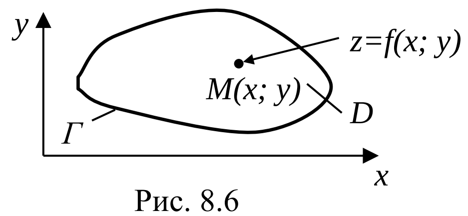


Рис. 8.6

То, что функция $z = f(x; y)$ непрерывна в области $\overline{D}$, означает, что график этой функции (поверхность в пространстве) является сплошной (без разрывов) поверхностью для всех $(x; y) \in \overline{D}$. То есть понятие непрерывности функции двух переменных аналогично понятию непрерывности функции одной переменной (см. главу 3, §2). Как и функции одной переменной, функции двух переменных, образованные из элементарных функций, непрерывны для всех значений своих аргументов, для которых они определены. Это касается и функций трех, четырех и более переменных.

Вернемся к рис. 8.6. Поставим следующий вопрос: в каких точках области $\overline{D}$ функция $z = f(x; y)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений $z_{наиб}$ и $z_{наим}$? И каковы эти значения? Заметим, что эта задача аналогична той, что была рассмотрена в §3 главы 4 для функции одной переменной $y = f(x)$, рассматриваемой на замкнутом отрезке $[a; b]$ оси ox.

Очевидно, что искомые точки области $\overline{D}$, в которых функция $z = f(x; y)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений, содержатся либо среди точек экстремума этой функции, находящихся внутри области $\overline{D}$ (в области D), либо находятся где-то на границе $Г$ этой области. В замкнутой области $\overline{D}$ такие точки заведомо найдутся (теорема Вейерштрасса). А в открытой области D (без границы $Г$) таких точек может и не быть.

Из сказанного выше вытекает следующая *схема нахождения этих точек*, аналогичная той, что была изложена в §3 главы 4 для функций одной переменной.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области

1. Находим все подозрительные на экстремум точки функции $z = f(x; y)$, находящиеся в области D. Это – те точки, в которых обе частные производные z'_x и z'_y равны нулю (или одна равна нулю, а другая не существует; или обе не существуют).

2. Находим все подозрительные на экстремум точки функции $z = f(x; y)$, находящиеся на границе $Г$ области $\overline{D}$. При этом используем уравнение границы $Г$.

3. Не исследуя найденные в пунктах 1 и 2 подозрительные точки (это излишне), находим значения функции $z = f(x; y)$ во всех найденных подозрительных точках и выбираем те из них, где z будет наибольшим и наименьшим.

Пример 3. Найти $z_{наиб}$ и $z_{наим}$ функции $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, рассматриваемой в замкнутой области $\overline{D}$, представляющей собой треугольную пластинку с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ (рис. 8.7).

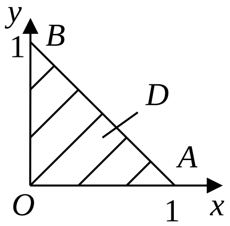


Рис. 8.7

Решение. Выполним изложенную выше схему.

1. Найдем внутри треугольника (в области D) точки, подозрительные на экстремум для нашей функции z. Для этого сначала найдем частные производные первого порядка z'_x и z'_y:

$$z'_x = 6x - 2; \quad z'_y = 6y - 2.$$

Эти производные существуют (их можно вычислить) для любых $(x;\ y)$. Следовательно, точками, подозрительными на экстремум, будут лишь те, для которых обе эти частные производные равны нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2 = 0 \\ 6y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}).$$

Точка $M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, очевидно, принадлежит области D (рассматриваемому треугольнику). То есть она – подозрительная на экстремум точка для заданной внутри треугольника функции z. Причем такая она там единственная.

2. Найдем теперь точки, подозрительные на экстремум, на границе треугольника.

а) Исследуем сначала участок OA границы ($y = 0$; $0 \le x \le 1$). На этом участке $z = 3x^2 - 2x + 2 \quad (0 \le x \le 1)$ – функция одной переменной x. Ее производная $z' = 6x - 2$ существует для всех $x \in [0;\ 1]$. Поэтому свои экстремальные значения функция z может иметь или в точке, где $z' = 0$, то есть в точке $M_1(\frac{1}{3};0)$, или на концах отрезка OA, то есть в точках $O(0;\ 0)$ и $A(1;\ 0)$.

б) Исследуем теперь участок OB границы треугольника (там $x = 0$; $0 \le y \le 1$). На этом участке функция $z = 3y^2 - 2y + 2$ $(0 \le y \le 1)$ – функция одной переменной y. Повторяя рассуждения пункта (а), приходим к выводу, что свои экстремальные значения функция z может иметь или в точке $M_2(0;\frac{1}{3})$, или на концах отрезка OB, то есть в точках $O(0;\ 0)$ и $B(0;\ 1)$.

в) Наконец, исследуем участок AB границы. Так как на AB (убедитесь в этом) $y = -x + 1$ $(0 \le x \le 1)$, то там функция z принимает вид: $z = 6x^2 - 6x + 3$ $(0 \le x \le 1)$. Ее производная $z' = 12x - 6$, поэтому своих экстремальных значений функция z может достигать лишь в точке, где $z'=0$, то есть в точке $M_3(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, либо на концах отрезка AB, то есть в точках A и B.

Итак, полный набор подозрительных на экстремум точек функции $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$ в треугольнике OAB таков:

$$M(\frac{1}{3};\frac{1}{3});\ \ M_1(\frac{1}{3};0);\ \ M_2(0;\frac{1}{3});\ \ M_3(\frac{1}{2};\frac{1}{2});\ \ O(0;0);\ \ A(1;0);\ \ B(0;1).$$

3. А теперь найдем значения функции z во всех найденных подозрительных точках и выберем из этих значений наибольшее значение $z_{наиб}$ и наименьшее значение $z_{наим}$:

$$z(M)=1\frac{1}{3};\ \ z(M_1)=1\frac{2}{3};\ \ z(M_2)=1\frac{2}{3};\ \ z(M_3)=1\frac{1}{2};\ z(O)=2;\ \ z(A)=3;\ \ z(B)=3.$$

Таким образом, $z_{наиб}=3$ и достигается функцией z в треугольнике OAB сразу в двух точках – в его вершинах A и B. А $z_{наим}=1\frac{1}{3}$ и достигается функцией z в треугольнике OAB в его внутренней точке $M(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

Пример 4. Городской бюджет имеет возможность потратить на социальное жилье не более 600 млн. рублей, располагая при этом проектами и участками земли под 10 пятиэтажных домов на 90 квартир каждый и под 8 девятиэтажных домов на 120 квартир каждый. Средняя сметная стоимость одной квартиры в пятиэтажном доме составляет 400 тысяч рублей, а в девятиэтажном 500 тысяч рублей. Сколько пятиэтажных и сколько девятиэтажных домов должен построить город, чтобы получить максимальное число квартир?

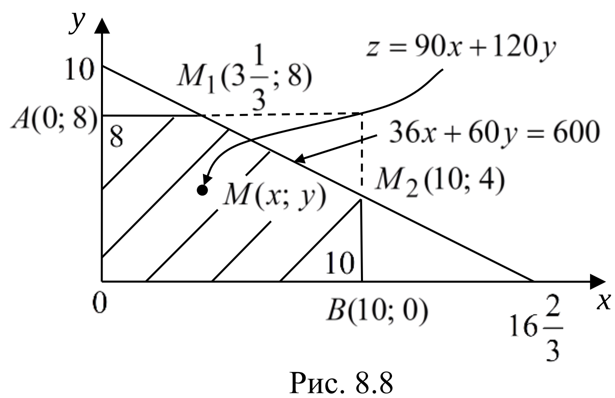


Рис. 8.8

Решение. Пусть x – искомое количество пятиэтажных домов, y – девятиэтажных, а z – общее количество квартир в этих домах. Тогда

$$z = 90x + 120y$$

Стоимость всех квартир в пятиэтажных домах составит $90\cdot 0{,}4\cdot x$ = $36x$ млн. рублей, а в девятиэтажных $120\cdot 0{,}5\cdot y = 60y$ млн. рублей. Согласно условиям задачи имеем:

$$0 \le x \le 10;\quad 0 \le y \le 8;$$
$$36x + 60y \le 600$$

Данные ограничительные неравенства выполняются, очевидно, в пятиугольнике $\overline{D} = OAM_1M_2B$ (рис. 8.8). В этой замкнутой области $\overline{D}$ нужно найти точку $M(x;\ y)$, для которой функция $z = 90x + 120y$ примет наибольшее значение $z_{наиб}$.

Реализуем изложенную выше схему решения такого рода задач.

1. Найдем внутри пятиугольника точки, подозрительные на экстремум для функции z. Так как $z'_x = 90,\ z'_y = 120$, и эти частные производные заведомо не равны нулю, то подозрительных на экстремум точек внутри пятиугольника нет.

2. Найдем точки, подозрительные на экстремум, на границах пятиугольника. На каждом из пяти отрезков, составляющих границу пятиугольника, функция z – линейная функция вида $z = ax + by$, а следовательно, своих наибольшего и наименьшего значений она достигает на границах отрезков. То есть искомое наибольшее значение $z_{наиб}$ функция z достигает в одной из угловых точек $(O;\ A;\ M_1;\ M_2;\ B)$. Вычисляя значение z в этих точках, получим:

$$z(O) = 0;\ z(A) = 960;\ z(M_1) = 1260;\ z(M_2) = 1380;\ z(B) = 900.$$

Таким образом $z_{наимб} = 1380$ и достигается оно в точке $M_2(10;\ 4)$. То есть наибольшее число квартир (1380) получится, если будут построены 10 пятиэтажных домов и 4 девятиэтажных.

Упражнения

1. Найти точки экстремума функций:

$$\text{а) } z = 2x + 3y - x^2 - xy - y^2; \quad \text{б) } z = x^2 - y^2; \quad \text{в) } z = x^4 + y^4.$$

Ответ:

а) $M_0(\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3})$ - точка max; б) нет точек экстремума; в) $M_0(0;\ 0)$ – точка min.

2. Найти $z_{наиб}$ и $z_{наим}$ функции $z = x^2 - 2xy + 3$, рассматриваемой в замкнутой области, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и осью ox.

Ответ:

$$z_{наиб} = 10\frac{19}{27} \text{ и достигается в точке } M(-1\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{9}).$$

$$z_{наим} = -2 \text{ и достигается в точке } N(1;\ 3).$$

3. Городской бюджет имеет возможность потратить на социальное жилье не более 600 млн. рублей, располагая при этом проектами и участками земли под 8 пятиэтажных домов на 90 квартир каждый и под 5 девятиэтажных домов на 120 квартир каждый. Средняя сметная стоимость одной квартиры в пятиэтажном доме составляет 600 тысяч рублей, а в девятиэтажном 800 тысяч рублей. Сколько пятиэтажных и сколько девятиэтажных домов должен построить город, чтобы получить максимальное число квартир?

Ответ: 7 пятиэтажных и 2 девятиэтажных.

§4. Понятие о двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралах

Чтобы ввести определение и смысл всех этих интегралов, нам нужно вспомнить определение и смысл обычного определенного интеграла. А для этого полезно освежить в памяти содержание параграфов 3 и 4 главы 5, в которых рассматриваются практические задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, а также теоретическая схема вычисления определенных интегралов. Задач, приводящих к определенным интегралам, много (в §3 главы 5 рассмотрено четыре таких задачи). Рассмотрим еще одну.

Пусть отрезок $[a;b]$ числовой оси ox неравномерно заполнен веществом с заданной линейной плотностью $\rho = f(x)$. Линейная плотность - это масса единицы длины отрезка. В разных точках x отрезка $[a;b]$ она может быть разной. То есть отрезок $[a;b]$ – это фактически тонкий материальный стержень, вещество которого распределено вдоль него неравномерно – рис. 8.9: Поставим перед собой задачу – вывести формулу для нахождения массы m этого отрезка.

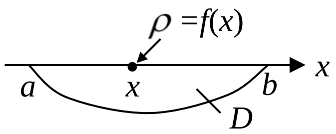


Рис. 8.9

Решение. Если бы линейная плотность ρ вещества отрезка была постоянной, то мы просто умножили бы ρ на длину $b-a$ отрезка. В самом деле, если бы, например, линейная плотность ρ вещества отрезка была постоянной и равнялась $2\,г/см$, а длина отрезка $[a;b]$ была бы 10 см, то масса отрезка равнялась бы 20 г. Но у нас плотность ρ не постоянная. В связи с этим, согласно главной идее интегрального исчисления, разобьем мысленно отрезок $[a;b]$ на бесконечно малые отрезки длиной dx, на каждом из которых плотность вещества можно считать постоянной. Затем выберем на каждом из таких отрезков некоторую точку x (например, середину отрезка). Тогда мы сможем записать формулу для массы dm любого из отрезков:

$$dm = \rho \cdot dx = f(x)dx \tag{4.1}$$

Причем, в силу бесконечной малости отрезков, эта формула точная. А затем, складывая массы dm всех отрезков, получим в виде определенного интеграла и точную массу m всего отрезка $[a;b]$:

$$m = \sum dm = \sum f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{4.2}$$

А теперь рассмотрим еще одну такого же сорта задачу. А именно, выведем формулу для массы m плоской пластинки D, заполненной веществом с переменной *поверхностной* плотностью $\rho = f(x; y)$ - рис. 8.10. Поверхностная плотность вещества – это масса единицы поверхности. То есть рассмотрим теперь не материальный одномерный стержень, а двумерную материальную пластинку. Если бы поверхностная плотность ρ пластинки была постоянной, то мы нашли бы массу пластинки просто: умножили бы эту плотность на площадь пластинки. Но у нас плотность $\rho = f(x; y)$ в разных точках $M(x; y)$ пластинки D разная. В связи с этим разобьем мысленно всю поверхность пластинки на бесконечно малые прямоугольники с основаниями dx и высотой dy, и выберем произвольно внутри каждого из них (например, в середине) некоторую точку $M(x; y)$. Тогда масса dm вещества отдельных малых прямоугольников найдется, очевидно, по формуле

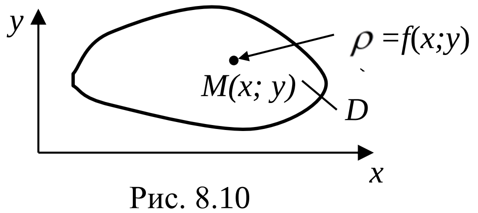


Рис. 8.10

$$dm = \rho \cdot dx = f(x; y)dxdy, \tag{4.3}$$

а масса m всей пластинки D найдется суммированием масс dm всех прямоугольников:

$$m = \sum dm = \sum f(x; y)dxdy = \iint_D f(x; y)dxdy \tag{4.4}$$

В отличие от формулы (4.2), в формуле (4.4) фигурирует уже не обычный определенный интеграл, а *двойной интеграл*, ибо в нем интегрирование (суммирование) в области интегрирования D производится по двум переменным: и по переменной x, и по переменной y. Вычисление таких интегралов сводится к повторному вычислению двух обычных определенных интегралов.

В частности, если область интегрирования D имеет вид, представленный на рис. 8.11, то двойной интеграл (4.4) сводится к следующим двум повторно вычисляемым определенным интегралам:

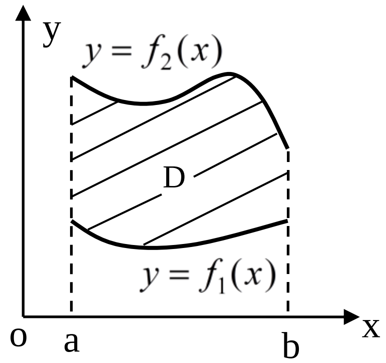


Рис. 8.11

$$\iint_D f(x; y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x; y)dy \tag{4.5}$$

При этом внутреннее интегрирование (по y) осуществляется при условии, что x - постоянная величина. А после проведения внутреннего интегрирования осуществляется интегрирование внешнее – по переменной x.

С появлением интернета вычисление двойных интегралов, как и вычисление обычных определенных интегралов, перестало быть проблемой. В частности, двойные интегралы можно вычислять, обратившись к неоднократно упоминавшимся выше сайтам https://math24.biz или https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/.

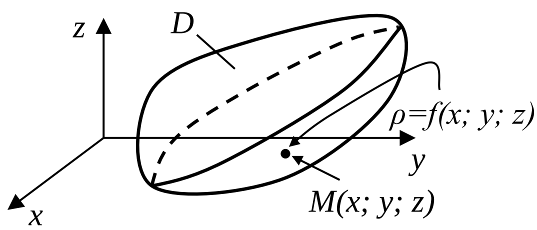


Рис. 8.12

А теперь выведем формулу для массы m *объемного тела*, занимающего пространственную область D - рис. 8.12. Здесь теперь $\rho = f(x; y; z)$ - переменная *пространственная* плотность распределения массы по области D (ρ - масса вещества в единице объема). Идея определения всей массы m объемного тела D та же, что использовалась и для нахождения массы отрезка, и для массы пластинки. Нужно разбить область D на бесконечно малые объемчики (параллелепипеды) с размерами dx, dy, dz, записать массу $dm = f(x; y; z)dxdydz$ каждого объемчика, а затем все их массы сложить. В итоге эта масса m выразится через *тройной интеграл*:

$$m = \sum dm = \sum f(x; y; z)dxdydz = \iiint\limits_D f(x; y; z)dxdydz \qquad (4.6)$$

И если вычисление двойных интегралов сводилось к повторному вычислению двух обычных определенных интегралов, то вычисление тройных интегралов сводится к вычислению трех определенных интегралов. Их вычисление тоже облегчает интернет. Только делать это лучше, обратившись за помощью к специалисту.

Если теперь поставить перед собой задачу определения масс криволинейных стержней или изогнутых в пространстве поверхностей, то придем к *криволинейным* и *поверхностным* интегралам. Криволинейные интегралы в конечном итоге сводятся к обычным определенным интегралам, а поверхностные – к двойным. Но в подробности этого вникать не будем.

Примечание. Мы здесь пришли к обычным определенным, к двойным и к тройным интегралам через задачу определения масс линейных, плоских и пространственных областей. Но с помощью двойных, тройных, а также криволинейных и поверхностных интегралов, как и с помощью обычных определенных интегралов, решаются и другие, причем самые разнообразные, задачи. Вообще, вычисление любой величины, если оно производится через разбиение этой величины на бесконечно малые кусочки и затем складывание её из этих кусочков, приводит к интегралам – обычным, двойным, тройным и т.д. А затем, после их формирования, всё дальнейшее сводится к последовательному вычислению обычных определенных интегралов. И в их вычислении большую помощь оказывает интернет.

Кстати, в физике, в теории поля, рассматривают и *другие интегралы*, существенно отличающиеся от тех, о которых говорилось выше. Например, там рассматриваются криволинейные и поверхностные интегралы *второго рода*. Но о них мы здесь говорить не будем. Ограничимся лишь упоминанием об их существовании.

ГЛАВА 9
Комплексные числа и действия над ними

9.1 О причинах введения в математику комплексных чисел

Первоначально, на заре своей истории, люди освоили лишь самые простые из всех известных нам сегодня чисел – натуральные числа. То есть числа 1, 2, 3, …, с помощью которых они вели простой счет. Да и их они освоили не сразу. Как свидетельствует история математики, в самом начале древнеегипетской цивилизации считали так: 1, 2, 3, много. Потом, естественно, люди научились считать и дальше. И тут им помогал их первый калькулятор – пальцы рук. Так как всего пальцев на руках 10, то это обстоятельство послужило утверждением у людей десятичной системы счета – той системы, которой мы пользуемся и в настоящее время.

Вместе с натуральными числами люди осваивали и необходимые им арифметические действия с ними: два основных действия (сложение и умножение), и два им обратных – вычитание и деление. И если со сложением и умножением никаких проблем не было, сложение и умножение любых натуральных чисел всегда опять приводило к натуральным числам, то с вычитанием и делением дело обстояло сложнее. Например, когда из натурального числа 5 вычитали натуральное число 3, то получалось 2, то есть опять получалось натуральное число. А когда, наоборот, от 2 пытались вычесть 5, то среди натуральных чисел подходящего числа не оказывалось. Аналогичная ситуация имела место и с делением: например, деление 6 на 3 давало натуральное число 2, а деление 6 на 4 никакого натурального числа не давало. Эти обстоятельства послужили основанием для введения дополнительных чисел: нуля, целых отрицательных чисел -1, -2, -3, …, а также положительных и отрицательных дробных чисел типа $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, и т.д. После такого расширения множества используемых чисел все четыре арифметических операции с любыми из этих чисел теперь уже всегда выполнялись, ибо всегда приводили к такого же рода числам. То есть теперь никаких проблем с арифметическими действиями с любыми числами – и с целыми, и с дробными (рациональными) - не осталось.

Но со временем и этих чисел не стало хватать, когда стали извлекать корни из чисел. В частности, квадратные корни. Например, $\sqrt{9}=3$ - корень извлекается; $\sqrt{4}=2$ - извлекается, а $\sqrt{2}$ - не извлекается, причем в качестве результата и никакое целое число не годится, и никакое дробное. А ведь $\sqrt{2}$ - это длина диагонали квадрата со стороной, равной единице (вспомним теорему Пифагора). Каким-то числом она должна же выражаться. И это – не единственный пример, когда целых и дробных (рациональных) чисел перестало хватать. Например, число π, представляющее собой отношение длины окружности к её диаметру, как оказалось, тоже не может быть выражено никаким рациональным числом – ни целым, ни дробным. Все такие числа (а их оказалось бесчисленное множество) были названы *иррациональными* (не рациональными) числами. После их добавления к рациональным числам образовалось объединенное множество *действительных* (или *вещественных*) чисел.

Это множество, как оказалось, обладает своего рода завершенностью: если действительные числа наносить на числовую ось, то каждому действительному числу соответствует некоторая точка числовой оси, и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует некоторое действительное число. То есть на числовой оси не осталось места ни для каких других чисел, кроме действительных.

Казалось бы, теперь уже никаких других чисел ввести в математику невозможно. Но это оказалось не так. Оставалась еще одна проблема с извлечением корней из действительных чисел. Если корни нечетной степени (корни кубические, пятой степени, седьмой и т.д.) извлекались из любого действительного числа, то корни четной степени (корни квадратные, четвертой степени, шестой и т.д.) извлекались только из неотрицательных чисел. А из отрицательных чисел они не извлекались. Например, $\sqrt{9}=3$ - корень извлекается (то есть существует), а $\sqrt{-9}$ - не извлекается (не существует). Ибо не существует, очевидно, никакого действительного числа, ни положительного, ни отрицательного, квадрат которого равен -9. Поэтому, например, квадратное уравнение $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9$ имеет действительные корни $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$, а похожее на него уравнение $x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=-9$ действительных корней не имеет, ибо значения $x=\pm\sqrt{-9}$ не существуют. Но если записать последнее равенство в виде

$$x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9\cdot(-1)}=\pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$$

и ввести формально некое новое число $i=\sqrt{-1}$, которое называется *мнимая единица* (её квадрат $i^2=-1$), то и уравнение $x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=-9$, как и уравнение $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9$, будет иметь два корня. Но это - мнимые корни: $x=\pm 3i$.

Введение мнимой единицы позволило, в частности, считать, что корни есть у любого квадратного уравнения - и у тех, у которых дискриминант положительный, и у тех, у которых он отрицательный. Например:

$$a)\ x^2-3x+2=0;\quad D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1;\quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2};\quad x_1=1;\, x_2=2$$

- два действительных корня;

$$б)\ x^2-2x+5=0;\quad D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 5=-16;\quad x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4i}{2};$$

$x_1=1+2i;\quad x_2=1-2i$ - два мнимых корня.

Убедимся в том, что эти мнимые корни действительно являются корнями квадратного уравнения $x^2-2x+5=0$, то есть удовлетворяют ему. Для этого подставим каждый из корней в это уравнение. Обращаясь с этими корнями как с обычными двучленами (суммами двух слагаемых) и учитывая, что $i^2 = -1$, получим:

$$1)\ x_1 = 1+2i; \quad (1+2i)^2 - 2(1+2i) + 5 = 0; \quad 1+4i+4i^2 - 2 - 4i + 5 = 0; \quad 0 = 0$$
$$2)\ x_1 = 1-2i; \quad (1-2i)^2 - 2(1-2i) + 5 = 0; \quad 1-4i+4i^2 - 2 + 4i + 5 = 0; \quad 0 = 0$$

Для мнимых корней уравнения, как и для его действительных корней, выполняется и теорема Виета: если $x^2 + px + q = 0$ - квадратное уравнение, и x_1 и x_2 - его корни, то, согласно этой теореме, $\{x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q\}$. В частности, для корней уравнения $x^2 - 2x + 5 = 0$ получаем:
\

$$x_1 + x_2 = (1+2i) + (1-2i) = 2;$$
$$x_1 \cdot x_2 = (1+2i)\cdot(1-2i) = 1\cdot 1 + 2i\cdot 1 - 1\cdot 2i + 2i\cdot(-2i) = 1 + 2i - 2i - 4\cdot i^2 = 1 - 4\cdot(-1) = 5$$

Числа $x_1 = 1+2i$ *и* $x_2 = 1-2i$, с которыми мы только что имели дело, являются составными (*комплексными*): они представляют собой сумму и разность действительного числа 1 и чисто мнимого числа $2i$. И вообще: выражение $a+bi$, представляющее собой алгебраическую сумму действительного слагаемого a и мнимого слагаемого bi, называется *комплексным числом*. Его первое слагаемое a называется *действительной частью* комплексного числа, а второе слагаемое bi – *мнимой частью*. Если $b = 0$, то комплексное число $a + 0i = a$ - это действительное число. То есть действительные числа – это частный случай комплексных чисел, у которых отсутствует мнимая часть. А если $a = 0$, то $0 + bi = bi$ - чисто мнимое число. У него отсутствует действительная часть.

9.2 Геометрическое изображение и свойства комплексных чисел

Начнем с вопроса о том, как геометрически изобразить простейшее из комплексных чисел - мнимую единицу i. На числовой оси *ox*, на которой мы изображаем действительные числа, для неё свободного места нет, вся эта ось целиком заполнена действительными числами. В связи с этим условились помещать мнимую единицу на другую числовую ось – на ось *oy*. А именно, помещать её в точку $y = 1$ оси *oy*. А мнимое число $2i$ помещать в точку $y = 2$, число $-i$ - в точку $y = -1$, и т.д. Тогда действительную часть a комплексных чисел $z = a + bi$ можно откладывать на оси *ox*, мнимую их часть bi - на оси *oy*, а само комплексное число $z = a + bi$ будем изображать точкой плоскости с декартовыми координатами (*a*; *b*). Или (равносильный вариант) – вектором, направленным из начала координат в эту точку - рис. 9.1. Плоскость xoy, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

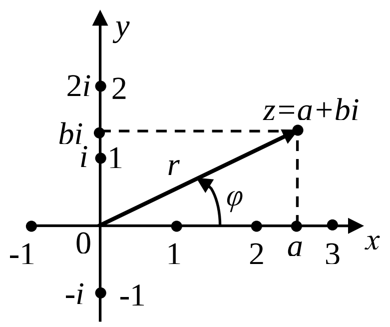


Рис. 9.1

Каждую точку комплексной плоскости можно считать числом. Все действительные числа находятся на оси *ox*. Точки оси *oy* – это чисто мнимые числа. А остальные точки плоскости *xoy* – это комплексные (составные) числа, содержащие и действительную, и мнимую части.

Кроме декартовых координат (*a*; *b*) точки, изображающей комплексное число $z = a + bi$, можно использовать и её полярные координаты ($r; \varphi$)- рис. 9.1. Они называются соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = |a + bi| \text{ - модуль комплексного числа } z = a + bi;$$
$$\varphi \text{ - аргумент комплексного числа } z = a + bi \quad (\varphi = \arg z); \tag{9.1}$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{r}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} \text{ - из этих двух равенств определяется } \arg z = \varphi.$$

Модуль r $(0 \le r \prec \infty)$ любого комплексного числа (то есть полярное расстояние r до точки плоскости, изображающей комплексное число) определяется, очевидно, однозначно. А вот аргумент φ комплексных чисел (полярный угол φ точек плоскости) определяется неоднозначно - лишь с точностью до угла, кратного 2π. Комплексные числа с одинаковым модулем и аргументами, отличающимися на величину, кратную 2π, очевидно, совпадают, так как они изображаются одной и той же точкой комплексной плоскости. Чтобы аргумент комплексных чисел определялся однозначно, обычно уславливаются отсчитывать его в пределах $0 \le \varphi \prec 2\pi$. Или, что часто оказывается более удобным, в пределах $-\pi \prec \varphi \le \pi$. У чисел, соответствующих точкам положительной части оси *ox*, аргумент $\varphi = 0$. У чисел, изображаемых точками отрицательной части оси *ox*, аргумент $\varphi = \pi$. У чисел, располагающихся в верхней части полуплоскости, $0 \prec \varphi \prec \pi$. А у чисел, располагающихся в нижней полуплоскости, $\pi \prec \varphi \prec 2\pi$ или $-\pi \prec \varphi \prec 0$.

Комплексное число, которому соответствует начало декартовой системы координат, называется *комплексным нулем*. Комплексный нуль имеет полное выражение $z = 0 + 0i$ и обозначается просто $z = 0$. Это единственное комплексное число, аргумент которого не определен, его можно считать любым. А модуль r комплексного нуля равен, очевидно, нулю.

Форма записи $z = a + bi$ комплексного числа называется *алгебраической формой* этого числа. Но так как, согласно рисунку 9.1, $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$, то комплексное число можно записать и в другой, *тригонометрической*, форме, содержащей его модуль и аргумент:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{9.2}$$

Пример. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

a) $1+i$; b) $-3i$; c) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Решение. a) Комплексное число $z=1+i$ изображается точкой $M(1;1)$ комплексной плоскости. Эта точка лежит в первой её четверти на её биссектрисе. Радиус-вектор точки составляет с осью ox угол $\varphi=\frac{\pi}{4}$ - это аргумент числа $z=1+i$. А модуль r числа $z=1+i$ найдем по формуле (9.1): $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Теперь, согласно формуле (9.2), получаем:

$$z=1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}).$$

b) Число $z=-3i$ изображается точкой $M(0;-3)$ комплексной плоскости. Его r и φ очевидны: $r=3$; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ или $\varphi=\frac{3\pi}{2}$. Поэтому, согласно (9.2),

$$z=-3i=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

c) Число $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ - это число $z=a+bi$ при $a=\frac{1}{2}$ и $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Точка комплексной плоскости, изображающая это число, находится в четвертой четверти. То есть $-\frac{\pi}{2}\prec\varphi\prec 0$. Согласно (9.1)

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1;\quad \cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{2};\quad \sin\varphi=\frac{b}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad\varphi=-\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, согласно (9.2) получаем: $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$

9.3 Сложение и вычитание комплексных чисел

Пусть $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ - два произвольных комплексных числа. Их сложение осуществляют по следующему правилу:

$$z_1+z_2=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \qquad (9.3)$$

Это совершенно естественное правило, ибо именно так мы складываем вещественные двучлены. Есть и еще одно обоснование такого правила: так как складываемые комплексные числа можно представлять себе в виде векторов, то складывая эти числа, мы фактически складываем векторы. А при сложении векторов складываются их соответствующие координаты, что и происходит в равенстве (9.3). Естественно, вычитание векторов производится по такому же правилу:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \tag{9.4}$$

9.4 Перемножение комплексных чисел

Это действие тоже производится по естественному правилу – так, как мы поступаем, перемножая вещественные двучлены:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 \cdot i + a_1 b_2 \cdot i + b_1 b_2 \cdot i^2 = \\ &= \left|\text{учитываем, что } i^2 = -1\right| = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i \end{aligned} \tag{9.5}$$

<u>*Пример*</u>. $i(2+3i)(1-i) = i(5+i) = 5i + i^2 = -1 + 5i.$

В частности, если $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ - *комплексно сопряженные* числа (черта сверху – это знак сопряжения), то

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = r^2 = |z|^2 \tag{9.6}$$

Если перемножать комплексные числа, записанные в тригонометрической форме (9.2), то получим:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 \left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i \cdot (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)\right] = \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \end{aligned} \tag{9.7}$$

Это же правило распространяется и на произведение нескольких сомножителей. То есть при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а их аргументы складываются. Если сумма аргументов выйдет за рамки её стандартного интервала $0 \le \varphi \prec 2\pi$ или $-\pi \prec \varphi \le \pi$, то из этой суммы отбрасывают слагаемое, кратное 2π .

В частности, при возведении комплексного числа (9.2) в степень получаем:

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^2 = r^2(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi);\\
z^3 &= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi\right]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi);\\
&\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z^n &= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

Полагая в последней формуле $r = 1$, получим интересную тригонометрическую *формулу Муавра*:

$$
(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \ \ (n = 1, 2, ...)
\tag{9.9}
$$

<u>*Пример*</u>. Выведем формулы косинуса и синуса тройного угла.
<u>*Решение*</u>. Запишем формулу Муавра (9.9) для $n = 3$:

$$
(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi
$$

Применив к левой формулу для куба суммы $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ и отделив там действительную часть от мнимой, а затем сравнив между собой действительные и мнимые части слева и справа (проделайте это самостоятельно), в итоге получим:

$$
\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi; \quad \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi
\tag{9.10}
$$

Эти соотношения между реальными (действительными) величинами получены нами из формулы, связывающей комплексные (мнимые) величины!

9.5 Деление комплексных чисел друг на друга

Деление – это операция, обратная умножению. То есть $\dfrac{z_1}{z_2} = z_3$, если $z_2 \cdot z_3 = z_1$. Если числа z_1 и z_2 даны в алгебраической форме $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$, то операцию деления z_1 на z_2 удобно проводить, используя $\bar{z}_2 = a_2 - ib_2$ - число, сопряженное z_2:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)\cdot(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)\cdot(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i\cdot(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} =\\
&= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\cdot\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}
\end{aligned}
\tag{9.11}
$$

Пример:

$$\frac{1+2i}{2-3i}=\frac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{-4+7i}{13}=-\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i.$$

Если числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] \tag{9.12}$$

(выведите эту формулу, по образцу вывода формулы (9.11), самостоятельно).

9.6 Показательная форма записи комплексных чисел

Для этого пункта нам понадобится *формула Эйлера*:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{9.13}$$

Выведем её. Применим к выражению $e^{i\varphi}$ формулу (3.22) главы 7, в которой представлено разложение функции e^x в степенной ряд. Используя также формулы (3.23) и (3.24) этой же главы, представляющие собой разложения в степенной ряд функций $\sin x$ и $\cos x$, получим:

$$e^{i\varphi}=1+i\varphi+\frac{(i\varphi)^2}{2!}+\frac{(i\varphi)^3}{3!}+\frac{(i\varphi)^4}{4!}+....=1+i\varphi-\frac{\varphi^2}{2!}-i\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^4}{4!}+i\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^6}{6!}-...=$$
$$=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+....\right)+i\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+....\right)=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{9.14}$$

Формула Эйлера (9.13) доказана. Если её теперь использовать в тригонометрической форме записи комплексных чисел (9.2), то получим *показательную форму* записи комплексных чисел:

$$z=re^{i\varphi} \tag{9.15}$$

Запишем, например, в показательной форме числа i и $-i$. У числа i модуль $r=1$ и аргумент $\varphi=\frac{\pi}{2}$, поэтому $i=1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. А у числа $-i$ модуль $r=1$ и аргумент $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, поэтому $-i=1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$. И ещё. Так как, согласно формуле Эйлера (9.13) $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, то получаем очень красивое равенство:

$$e^{i\pi}+1=0 \tag{9.16}$$

Это равенство содержит в себе все пять важнейших чисел математики: $\{0; 1; \pi; e; i\}$. Равенство это впервые получил Эйлер. Его часто приводят как образец красоты математики. Например, эта формула выбита на фронтоне Сорбонны – знаменитого парижского университета.

Показательная форма – это наиболее компактная и удобная для приложений форма записи комплексных чисел. В частности, используя эту форму, очень удобно перемножать комплексные числа, делить их друг на друга и возводить в степень:

Пусть, например, $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ - некоторые два комплексных числа. Тогда:

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};\quad z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi} \tag{9.17}$$

И комплексно сопряженные числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ удобно записывать в показательной форме:

$$\text{если } z=re^{i\varphi}\text{, то } \bar{z}=re^{-i\varphi} \tag{9.18}$$

9.7 Извлечение корней из комплексных чисел

По определению, $\sqrt[n]{z}=s$, если $s^n=z$. Поэтому если $z=r^{i\varphi}$ и $s=\rho e^{i\psi}$, то из равенства $s^n=z$ следует:

$$s^n=z\Rightarrow \rho^ne^{in\psi}=re^{i\varphi}\Rightarrow\{\rho^n=r;\ n\psi=\varphi+2\pi k\}\Rightarrow\left\{\rho=\sqrt[n]{r};\psi=\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right\} \tag{9.19}$$

Здесь k - любое целое число, ибо аргументы $n\psi$ и φ двух равных комплексных чисел могут отличаться друг от друга на число, кратное 2π. Таким образом, модуль ρ комплексного числа $s=\sqrt[n]{z}$ определяется однозначно: $\rho=\sqrt[n]{r}$, а его аргумент ψ имеет бесчисленное количество значений $\psi=\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$ $(k=0;\pm1;\pm2;....)$. Но различных из них лишь n значений, получающихся при $k=0, 1, 2, ...\, n-1$. Ибо начиная с $k=n$ значения ψ начинают повторять те, что получаются при $k=0, 1, 2, ...\, n-1$, с точностью до слагаемого, кратного 2π. То же самое касается всех отрицательных значений k.

Итак, если $z=r^{i\varphi}$ - заданное комплексное число, то $\sqrt[n]{z}=s$ имеет n различных значений:

$$s_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}\qquad (k=0, 1, 2, ...\, n-1) \tag{9.20}$$

Точки комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-ой степени из комплексного числа z, расположены в вершинах правильного n - угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке $z=0$. Полярные углы ψ_k этих точек определяются выражениями $\psi_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, ... n-1)$. Соседние углы отличаются друг от друга на величину $\dfrac{2\pi}{n}$.

<u>Пример</u> 1. Найти все значения $\sqrt{i}$.

<u>Решение</u>. В показательной форме число i имеет вид: $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Поэтому

$$\left(\sqrt{i}\right)_k = \sqrt{1} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}} \quad (k = 0, 1)\text{. То есть}$$

$$\left(\sqrt{i}\right)_0 = e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$\left(\sqrt{i}\right)_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \qquad (9.21)$$

<u>Пример</u> 2. Найти все значения $\sqrt[4]{1}$.

<u>Решение</u>. Так как $1 = 1 \cdot e^{i0}$, то, согласно формуле (9.20) получаем:

$$\left(\sqrt[4]{1}\right)_k = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\frac{0+2\pi k}{4}} \quad (k = 0, 1, 2, 3).\ \text{То есть}$$

$$\left(\sqrt[4]{1}\right)_0 = 1 \cdot e^{i0} = 1; \quad \left(\sqrt[4]{1}\right)_1 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$$

$$\left(\sqrt[4]{1}\right)_2 = 1 \cdot e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1; \quad \left(\sqrt[4]{1}\right)_3 = 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i; \quad (9.22)$$

9.8 О практических применениях комплексных чисел

Комплексные (мнимые) величины и соотношения между ними помогают получать реальные, вещественные результаты. В частности, соотношения (9.10) между реальными (действительными) величинами получены нами из формулы, связывающей комплексные (мнимые) величины.

И вообще, появление комплексные чисел, для которых действительные числа – только частный случай, сильно продвинуло математику в практической плоскости. Аналогичное продвижение в математике, кстати, происходило и тогда, когда к натуральным числам добавлялись отрицательные числа, дробные числа и т.д. Комплексные числа используют во многих реальных задачах математики, физики, гидродинамики, электротехники, да и во многих других разделах естествознания. Эти числа и функции от них помогают решать алгебраические и дифференциальные уравнения, вычислять сложные интегралы, и т.д.

Причем такой путь решения математических задач (через комплексные числа и комплексные функции) является, как правило, самым простым и коротким. Но углубляться в это у нас здесь нет возможности.

Упражнения

1. Вычислить: $a)\ \frac{1}{i}$; $b)\ \frac{1-i}{1+i}$; $c)\ \frac{1-2i+4i^2}{3+4i}$.

Ответ: $a)\ -i$; $b)\ -i$; $c)\ -\frac{17}{25}+\frac{6}{25}i$.

2. Найти $(1+i)^{10}$. Ответ: $32i$.

3. Показать, что $e^{2\pi ki}=1$ при любом целом k.

4. Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$;

5. Показать, что $\overline{z_1 * z_2}=\bar{z}_1 * \bar{z}_2$, где $(*)$ – любая из четырех арифметических операций: сложение, вычитание, умножение, деление. Черта сверху, напоминаем – это знак сопряжения.

Литература

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2016. 396 с.
2. Богомолов Н.В. Математика: задачи с решениями: учебное пособие. М.: Юрайт, 2016. 364 с.
3. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. М.: Мир образования, 2014. 816 с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учебник для вузов. М.: Академия, 2012. 416 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2018. 608 с.
6. Туганбаев А.А. Основы высшей математики: учебное пособие. СПб.: Лань, 2016. 496 с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. 447 с.

Учебное издание

Комогорцев В.Ф.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для бакалавров направления подготовки
09.03.03 – прикладная информатика

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 17.03.2020 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 14,99. Тираж 25 экз. Изд. 6645.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии.
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ