МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

Дьяченко О.В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «Математика» для студентов
специальностей 23.02.03 (Техническое обслуживание
и ремонт автомобильного транспорта), 35.02.08
(Электрификация и автоматизация сельского хозяйства)

Брянская область, 2015

УДК 51 (07)
ББК 22.1
Д 93

Дьяченко О.В. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 23.02.03 (Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта), 35.02.08 (Электрификация и автоматизация сельского хозяйства) / О.В. Дьяченко. – Брянск: Издательство Брянского ГАУ, 2015. – 100 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов первого курса факультета среднего профессионального образования, содержит теоретический материал по дисциплине «Математика».

Рецензент: преподаватель математики факультета СПО Л.Н. Холодкова.

Рекомендовано к изданию цикловой методической комиссией факультета среднего профессионального образования, протокол № 7 от 10 февраля 2015 г.

Содержание

Действительные числа и действия над ними

1. Понятие действительного числа.
2. Действия с действительными числами.
3. Числовые множества.
4. Взаимно-однозначное соответствие между числами и координатной осью.

Понятие числа является основным в математике. Различают следующие <u>множества</u> чисел.

N – множество натуральных чисел; (числа 1, 2, 3, …n,…)

Z – множество целых чисел; (числа 0. ±1, ±2, ±…, ±n,…)

Q – множество рациональных чисел или дробей. Это числа, имеющие основную форму записи вида $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа (например, $\frac{2}{3}$, $\frac{20}{7}$, - $\frac{5}{4}$,…). Кроме основной формы $\frac{5}{4}$, рациональные числа при необходимости записывают также в виде смешанных дробей (например, $\frac{5}{4}$ = - 1 $\frac{1}{4}$ = - 1,25).

J – множество иррациональных (не рациональных чисел, то есть множество таких чисел, которые не могут быть представлены в виде дробей $\frac{m}{n}$ (например, π; $\sqrt{2}$ и т. д.).

R – множество действительных (или вещественных) чисел. Множество R представляет собой объединение множеств Q и J (рац. и п Q р.). Множество R содержит в себе, таким образом, все остальные числовые множества.

Действительные числа удобно изображать геометрически.

Арифметические действия с числами: сложение, вычитаний, умножение, деление на нуль.

Действия с нулем и единицей:

$a+0=a$,

$a-0=a$,

$a\ 0=0$,

$0\ a=0$,

$a\ 1=1\ a=a$,

$\frac{0}{2}=0$,

$\frac{a}{1}=a$

Правила знаков

Если четное количество минусов, то в результате +, а если нечетное, то в результате «-».

Сумма противоположных чисел равна нулю.

НОК и НОД

Наибольшим общим делителем чисел a и b - называется наибольшее натуральное число, которое делит числа a и b без остатка.

Чтобы найти НОД чисел нужно:

1) разложить их на простые множители;

2) выписать общие множители;

3) перемножить их.

Числа у которых нет НОД называются *взаимно-простыми*.

Наименьшим общим кратным чисел a и b - называется наименьшее натуральное число, которое делиться на a и b без остатка.

Чтобы найти НОК чисел нужно:

1) разложить на простые множители;

2) выписать множители первого числа;

3) добавить недостающие множители из второго числа;

4) найти произведение получившихся множителей.

Простыми называются числа, которые имеют только два делителя: 1 и само число.

Выпишем кратные большего числа. Почему большего?

К (12) = 12 , 24 , 36 , 48 , 60 , … Проверим являются ли эти числа кратными 8. Начнем с наименьшего кратного.

12 не делиться на 8 ; 24 делиться на 8

НОК(8;12) = 24

Чему равно произведение НОД и НОК этих чисел ? 4 • 24 = 96

Пример. Найдите НОД и НОК чисел 252 и 264 методом разложения на простые множители.

Решение:

252 2 264 2 Признак делимости на 2.

126 2 132 2 Признак делимости на 3.

63 3 66 2

21 3 33 3

7 7 11 11

1 1

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$

НОД(252; 264) = $2^2 \cdot 3 = 12$. С какими показателями мы берем степени? С наименьшими.

НОК(252;264) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 5544$. С какими показателями мы берем степени? С наибольшими.

Контрольные вопросы:

1) Определение действительного числа.

2) Перечислите основные действия с действительными числами.

3) Назовите известные Вам числовые множества.

Дроби. Действия с дробями

1. Действия с дробями. НОЗ.
2. Свойства равенств и неравенств.

Основное свойство дроби

$\frac{m}{n}=\frac{m\cdot k}{n\cdot k}$, и обратно $\frac{m\cdot k}{n\cdot k}=\frac{m}{n}$ (к $\neq$ 0, n $\in$ z), т. е. числитель и знаменатель можно умножать или делить (сокращать) на одно и то же число, отличное от нуля, – дробь не измениться.

При сложении и вычитании дробей с одинаковыми знаменателями надо сложить (вычесть) числители и записать общий знаменатель ($\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{6-2}{7}=\frac{4}{7}$).

При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями, надо привести их к наименьшему общему знаменателю ($\frac{3}{8}-\frac{7}{12}=\frac{9-14}{24}=\frac{5}{24}$).

Умножение дробей производится по правилу: $\frac{m}{n}\bullet\frac{p}{q}=\frac{m\bullet p}{n\bullet q}$ (по возможности необходимо сокращать $\frac{2}{3}\bullet\frac{7}{8}=\frac{7}{12}$).

Деление дробей производится по правилу: $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$

При выполнении действий над дробями надо заменить неправильную дробь на смешанное число ($\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$) и наоборот: ($3\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2}{5}=\frac{17}{5}$)

Примеры.

(10-(3*4-32)):5=6

$$2\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}=1{,}75$$

$$-2\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

$$-2\frac{1}{3}*6{,}9=16{,}1$$

Равенство и неравенство чисел

Для любых двух действительных чисел a и b возможно лишь три случая соотношений между ними:1) a = b; 2) a > b; 3) a < b.

Основные свойства равенства и неравенства чисел очевидным образом следует из смысла этих понятий:

1. Если a = b , то a – b = 0 и b – a = 0 и обратно, если a – b = 0 или b – a = 0, то a = b.

На числовой оси равные числа изображаются одной и той же точкой, например $\frac{9}{15}$ и 0,6.

2. Если a = b, то a ± c = b ± c (c – любое число)

3. Если a = b, то a · c = b · c (c – любое число)

4. Если a = b, то $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ (c ≠ 0)

Основные свойства неравенств:

1. Если a > b , то a – b > 0 и b – a < 0 и обратно, если a – b > 0 или b – a < 0, то a > b (или, что то же, b < a)

Неравные числа изображаются разными точками числовой оси. При этом большему числу соответствует точка, стоящая правее, а меньшему – левее. В частности любое отрицательное числа меньше любого положительного.

2. Если a > b и c > 0, то $\frac{a}{c}\rangle\frac{b}{c}$; a > b и c < 0, то $\frac{a}{c}\langle\frac{b}{c}$

3. Если a > b, то a ± c > b ± c (c – любое число)

4. Если a > b и c > 0, то a c > bc, а если a > b и c < 0, то ac > bc.

Основные свойства равенств и неравенств чисел являются основой для выполнения математических преобразований в уравнениях и неравенствах.

Примеры.

Сравним числа:

а) 0,8 и $\frac{7}{9}$; б) $\frac{9}{15}$ и 0,6

Решение:

а) 0,8-$\frac{7}{9}=\frac{8^{9}}{9}-\frac{7^{10}}{9}=\frac{72-70}{90}=\frac{2}{90}>0$. Значит $0,8>\frac{7}{9}$.

б) $\frac{9}{15}-0,6=\frac{3}{5}-0,6=0,6-0,6=0$. Значит $\frac{9}{15}=0,6$

Решим уравнения (Уравнение – равенство содержащее неизвестное. Решить уравнение, значит, найти такое значение неизвестного, которое обращает его в верное числовое равенство, т. е. тождество).

а) 4 – x = 5x – 8; б) $\frac{2x+1}{-5}=-3$

Решение:

а) 4 – x = 5x – 8; -x - 5x = -8 – 4; -6x = -12; x = 2

б) $\frac{2x+1}{-5}=-3$; 2x + 1 = (-3)(-5); 2x + 1 = 15; 2x = 15 – 1; 2x = 14; x = 7

Решить неравенство:

а) 4 – x < 5x – 8; б) $\frac{2x+1}{-5}\rangle-3$

Решение:

а) 4 – x < 5x – 8; -x - 5x < -8 – 4; -6x < -12; x > 2

б) $\frac{2x+1}{-5}\rangle-3$; 2x + 1 < (-3) (-5); 2x + 1 < 15; 2x <15 – 1; 2x < 14; x < 7

Контрольные вопросы:

1) Основное свойство дробей.
2) Перечислите свойства дробей.

Понятие степени. Корень. Действия со степенями и корнями

1. Степени с натуральным целым показателем.
2. Степени с рациональным показателем.
3. Корни.
4. Правила действия со степенями и корнями.
5. Проценты.

Возведение в целую степень

Степенью числа a с показателем n, где n $\in$N, a $\in$R, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

a^n =a*a*a*…*a ($2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$). В частности $1^n = 1$, $0^n=0$.

В выражении a^n число a называется основанием степени, а число n – показатель степени.

$a^1 = a$ ($2^1 = 2$), $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$), $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) ($2^0 = 1$; $(\frac{1}{5})^0 = 1$; $\pi^0 = 1$

Извлечение корня. Арифметическое значение корня.

Пусть a $\in$R, n $\in$N. Тогда по определению: $\sqrt[n]{a} = b$, если $b^n = a$ (корень n-ной степени из a равен, если b степени n дает a), где a – подкоренное число, n – показатель корня.

Пример. $\sqrt[3]{8} = 2$, т. к. $2^3=8$.

В частности, согласно определению корня, имеет значение: $\sqrt[n]{0} = 0$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (n $\in$N)

Если показатель корня n=2, то корень называется квадратным и показатель корня не пишется: $\sqrt{9} = 3$.

При n нечетном $\sqrt[n]{a}$ существует при любом a $\in$R и всегда имеет единственное значение. Например: $\sqrt[3]{8} =$ 2, $\sqrt[3]{-8}$ = -2

При n четном $\sqrt[n]{a}$ существует лишь a ≥ 0, но имеет при этом для всех a > 0 два значения.

Например: $\sqrt{4}$ = 2 (2^2 = 4) $\sqrt{4}$ = - 2 ((-2^2) = 4

Когда корня два, признавать за корень лишь его положительное значение, которое назвали арифметическим значением корня.

$\sqrt{x}^{\,2} =$ x, если x ≥ 0

-x, если x < 0 = /x/

Возведение в дробную степень

Пусть $a \in R,\quad \frac{m}{n} \in G$. Тогда, по определению, –

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64^1} = 4 \qquad \sqrt[3]{4^3} = 4$

Основные правила действий со степенями и корнями.

Пусть $a; b; \alpha; \beta \in R$, причем $a > 0, b > 0, \alpha$ и β - любые. Для указанных чисел доказаны следующие правила действий со степенями:

1) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$

2) ($(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\cdot\beta}$

3) $(\frac{a}{b})^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

4) $\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$

5) $(a \cdot b)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha}$

Правила действий с корнями ($a > 0, b > 0, n \in N$)

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3) $(\sqrt[n]{a})^{m} = \sqrt[n]{a^{m}}$

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Формулы сокращенного умножения.

1) $(а+в)^2$=$а^2$+2ав+$в^2$
2) $а^2$-$в^2$=(а-в)*(а+в)
3) $(а-в)^2$=$а^2$-2ав+$в^2$
4) $(а+в)^3$=$а^3$+3$а^2$в+3а$в^2$+$в^3$
5) $а^3$-$в^3$=(а-в)*($а^2$+ав+$в^2$)
6) $(а-в)^3$=$а^3$-3$а^2$в+3а$в^2$-$в^3$
7) $а^3$+$в^3$=(а+в)*($а^2$-ав+$в^2$)

Проценты

Пусть а (ед.) - некоторое положительное действительное число, определяющее количество чего-нибудь. Тогда сотая доля величины а называется ***процентом*** величины а.

Например, если а=150 кг, то 1% от 150 кг будет составлять 150/100=1,5(кг). А 20% от а=150 кг будет равно 20 ·1,5=30(кг). Обратно, пусть требуется найти, сколько процентов составляет часть в 18 кг от целого в 150 кг? Так как 1% от 150 кг составляет 150\100=1,5 кг, то 18 кг составляют от 150 кг 18\1,5=12%.

Задачи на проценты удобно решать, записав условие в виде пропорции, т.е. в виде двух строчек, в которых слева представлены величины, а справа - их выражения в процентах.

Пример. Сколько кг составляют 20% от 150 кг?

Решение: записывая данные в виде пропорции и решая её, находим:

150 кг - 100%

х кг - 20%

$$x = \frac{150 \bullet 20}{100} = 30 \quad \text{кг}$$

При этом мы использовали известное правило решения пропорций: чтобы найти из пропорции неизвестную величину, нужно разделить на число, стоящее на той же диагонали пропорции, где стоит неизвестное произведение чисел, стоящих на другой диагонали.

Контрольные вопросы:

1. Правила извлечения корней.
2. Действия со степенями.
3. Составьте задачу на проценты.

Тригонометрические функции числового аргумента. Формулы приведения

1. Понятие угла.
2. Тригонометрические функции.
3. Единичная окружность.
4. Формулы приведения.

<u>Любой угол</u> измеряется либо в градусной мере измерения (единица измерения – градус) либо в радианной (единица измерения – радиан). Один дуговой градус – это

$\frac{1}{360}$ часть окружности. Один угловой градус – это центральный угол, опирающийся на дуговой градус. Радианная мера угла – это отношение длины дуги к радиусу этой дуги. Радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, равную длине радиуса этой дуги. Окружность содержит 2π радиан, равным 360^0.

Для перехода от градусной меры измерения угла к радианной и наоборот можно пользоваться формулами:

$$\begin{matrix} 360^\circ - 2\pi \\ \mathrm{A}^\circ - \alpha \text{ рад} \end{matrix} \Rightarrow A^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}; \ \alpha = \frac{A^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$
$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$	$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\frac{1}{\sin\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha$

Из определения функции $sinx \leq 1\ cosx \leq 1$, функции ограниченные.

Особенное внимание следует уделить таким углам, как 0^0 (360^0), 45^0, 90^0, 180^0,225^0. Их называют «золотыми» углами.

Знаки тригонометрических функций по четвертям

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$tg\,\alpha$	+	–	+	–
$ctg\,\alpha$	+	–	+	–

Периодичность тригонометрических функций

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\alpha+360^\circ\right)&=\sin\alpha \\ \cos\left(\alpha+360^\circ\right)&=\cos\alpha \end{aligned}\right] T=360^\circ - \text{период}$$

$$\left.\begin{aligned} tg\left(\alpha+180^\circ\right)&=tg\alpha \\ ctg\left(\alpha+180^\circ\right)&=ctg\,\alpha \end{aligned}\right] T=180^\circ - \text{период}$$

Формулы приведения:

$$\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

1) Знак результата берется по знаку данной функции в зависимости от четверти.

2) Если острый угол берется при горизонтальном диаметре, т.е. $\left(180^\circ \pm\alpha\right)$ и $\left(360^\circ \pm\alpha\right)$, то название функции не изменяется; если при вертикальном, т.е. $\left(90^\circ \pm\alpha\right)$ и $\left(270^\circ \pm\alpha\right)$, то название функции изменяется на противоположную.

Примеры.

$$\sin\left(180^\circ+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \sin\left(270^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(90^\circ+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos\left(360^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$tg\left(180^\circ-\alpha\right)=-tg\,\alpha \qquad ctg\left(90^\circ+\alpha\right)=-tg\,\alpha$$

Упростить:

$$\frac{\sin\left(180^\circ-\alpha\right)\cdot\cos\left(90^\circ+\alpha\right)}{\cos\left(360^\circ-\alpha\right)\cdot\sin\left(270^\circ-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)}=\frac{-\sin^2\alpha}{-\cos^2\alpha}=tg^2\alpha$$

Контрольные вопросы:

1. Определения тригонометрических функций острого угла.
2. Что называется синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом числового аргумента?
3. Знаки функций по четвертям.
4. Перечислить чётные тригонометрические функции.
5. Перечислить нечётные тригонометрические функции.
6. Какие функции имеют период $2\pi,\ \pi$?
7. Формулы приведения.

Формулы сложения и их следствия. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

1. Формулы сложения, разности.
2. Основные правила.

К тригонометрическим функциям применимы формулы сложения, вычитания и умножения. Рассмотрим некоторые из них.

$$\boxed{\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\,\alpha\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}}$$

При α = β имеем

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{tg\,2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

Имеем: $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha$$

И тогда $\boxed{1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\boxed{1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$ или $\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций.

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{a-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$ctg\,\alpha-ctg\,\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Контрольные вопросы:

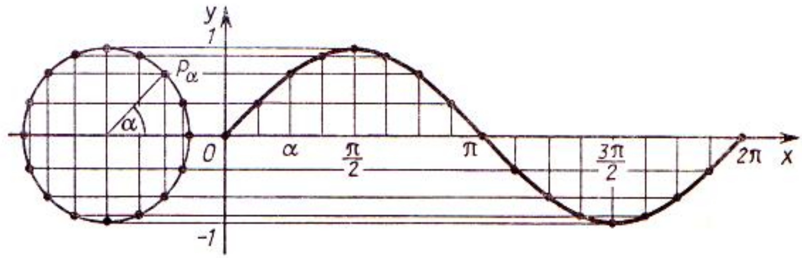
1. Перечислите основные действия с тригонометрическими функциями.
2. Назовите основное тригонометрическое тождество.

Графики и свойства тригонометрических функций. Простейшие преобразования графиков тригонометрических функций.

1. Функция синус, ее свойства.
2. Функция косинус, ее свойства.
3. Функция тангенса, ее свойства.
4. Функция котангенса, ее свойства.

Функция $\mathbf{y=\sin x}$

На рисунке показано построение графика синуса на отрезке. $\left[0;\ 2\pi\right]$



Рассмотрим основные свойства функции y=sinx:

1) Область определения функции - множество всех действительных чисел $D(f):\ R$

2) Множеством значений функции является промежуток $E(f):\ \left[-1;\ 1\right]$

3) Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат (0;0).

4) Функция периодическая. Наименьший положительный период равен $T_0 = 2\pi$

5) График функции пересекает ось Ox (нули функции) в точках $\left(\pi k;\ 0\right),\ k \in Z$

6) График функции пересекает ось Oy в точке *(0; 0).*

7) Функция принимает положительные значения на промежутках $\left(2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right),\ k \in Z$

8) Функция принимает отрицательные значения на промежутках $\left(-\pi+2\pi k;\ 2\pi k\right),\ k\in Z$

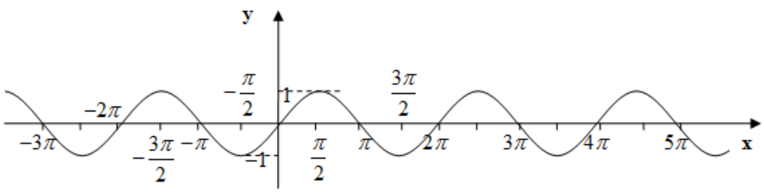
9) Функция возрастает на промежутках $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right],\ k\in Z$

10) Функция убывает на промежутках $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right],\ k\in Z$

11) Точки минимума: $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ -1\right),\ k\in Z$

12) Точки максимума: $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ 1\right),\ k\in Z$

13) Графиком функции является синусоида



Функция y = cosx

График косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние $\dfrac{\pi}{2}$ влево.

Основные свойства функции y=cosx:

1) Область определения функции - множество всех действительных чисел $D(f):\ R$

2) Множеством значений функции является промежуток $E(f)$: $[-1;\ 1]$

3) Функция является четной, график симметричен относительно оси Оу.

4) Функция периодическая. Наименьший положительный период равен $T_0 = 2\pi$

5) График функции пересекает ось Ох (нули функции) в точках $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ 0\right),\ k \in Z$

6) График функции пересекает ось Оу в точке *(0; 1).*

7) Функция принимает положительные значения на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k \in Z$

8) Функция принимает отрицательные значения на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k \in Z$

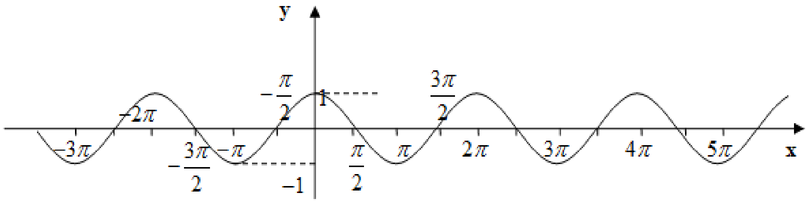
9) Функция возрастает на промежутках $[-\pi+2\pi k;\ 2\pi k],\ k \in Z$

10) Функция убывает на промежутках $[2\pi k;\ \pi+2\pi k],\ k \in Z$

11) Точки минимума: $(\pi+2\pi k;\ -1),\ k \in Z$

12) Точки максимума: $(2\pi k;\ 1),\ k \in Z$

13) Графиком функции является косинусоида



Функция y = tgx

$$y = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Основные свойства функции y=tgx:

1) Область определения функции: $D(y):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

2) Множеством значений функции: $E(y): R$

3) Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат (0;0).

4) Функция периодическая. Наименьший положительный период равен π

5) График функции пересекает ось Ox (нули функции) в точках $x = \pi k, k \in Z$

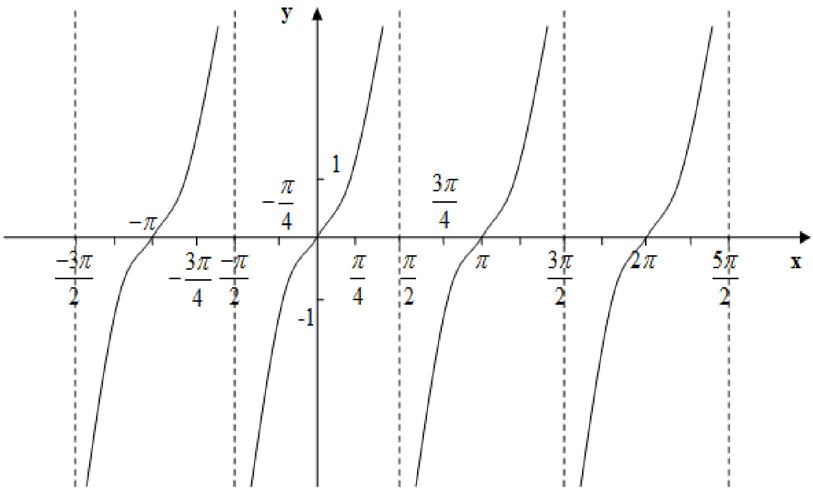
6) График функции пересекает ось Oy в точке *(0; 0).*

7) Функция принимает положительные значения на промежутках $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$

8) Функция принимает отрицательные значения на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right), k \in Z$

9) Функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$

10) Промежутки убывания отсутствуют.
11) Точек минимума нет.
12) Точек максимума нет.
13) Графиком функции является тангенсоида:



Функция y = ctgx

$$y = ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sin x \neq 0, x \neq \pi n, n \in Z$$

Основные свойства функции y=ctgx:

1) Область определения функции: $D(y):\ x \neq \pi k, k \in Z$

2) Множеством значений функции: $E(y):\ R$

3) Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат (0;0).

4) Функция периодическая. Наименьший положительный период равен π

5) График функции пересекает ось Ox (нули функции) в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

6) Функции не пересекает ось Оу.

7) Функция принимает положительные значения на промежутках $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in Z$

8) Функция принимает отрицательные значения на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k \right), k \in Z$

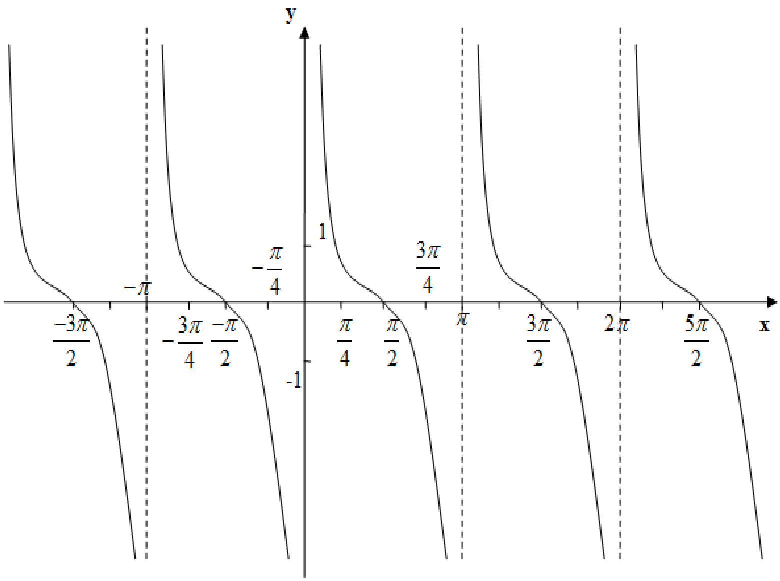
9) Функция не имеет промежутков возрастания.

10) Промежутки убывания: $x \in \left(\pi k;\ \pi + \pi k \right), k \in Z$

11) Точек минимума нет.

12) Точек максимума нет.

13) Графиком функции является котангенсоида:



Контрольные вопросы:

1. Свойства функции $y = \sin x$.
2. Свойства функции $y = \cos x$.

3. Свойства функции $y = tg\,x$.
4. Свойства функции $y = ctg\,x$.

Функции, их свойства и графики

1. Числовая функция, способы задания, область определения, множество значений.
2. Основные свойства функции: монотонность, ограниченность, периодичность, четность – нечетность.
3. Понятие об обратной функции.

Числовая функция: основные понятия и определения

Понятие функции является центральным понятием математики и не только математического анализа. Вспомним школьное определение функции.

Если каждому элементу *x* множества D ставится в соответствие единственный элемент *y* множества E, то говорят, что на множестве D задана функция $y = f(x)$, где *x* – аргумент – независимая переменная; *y* – зависимая; она находится по закону: *f*.

Множество D называется *области определения* функции, множество E называется множеством значений функции.

Можно дать и такое определение числовой функции: *числовая функция* – это множество пар (x,y), среди которых нет пар с одинаковым первым элементом.

Как определяется, задается функция? Прежде всего формулой, по которой по заданному x находится y. Например: $f(x) = x^2 + x + 3$. Подставим x = 2 получим y = 9

Функция может задаваться не одним аналитическим выражением, а несколькими, например:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ } если\ x < 0; \\ x, \text{ } если\ x \geq 0 \end{cases}$$

Очень часто зависимость одной переменной величины от другой невозможно выразить аналитически, но такая зависимость существует и определяется она в виде таблицы.

x	x_1	x_2	…
y	y_1	y_2	…

В таком случае говорят о таблично заданной функции, общепринятая аббревиатура: ТЗФ Обратите внимание, что среди заданных пар чисел (x;y) нет пар с одинаковым первым элементом, в таком случае ТЗФ не являлись бы функцией.

Запишите еще определение числовой функции.

Числовая функция – множество пар (x;y), среди которых нет пар с одинаковым первым элементом.

И, наконец, когда не удается найти аналитического выражения для $y = f(x)$, найти множество пар (x;y), то функцию можно задать графически, т.е. ее графиком.

Рассмотрим понятия, выражающие т.н. *общие свойства* функций.

Монотонность. Если для x_1, x_2 , принадлежащих интервалу (a;b) и удовлетворяющих условию $x_1, < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, то, говорят, что на (a;b) эта функция возрастает. Или, как говорили в школе, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция возрастает. Самостоятельно сформулируйте определение убывающей функции. Если функция только возрастает или только убывает в области определения, то о такой функции говорят, что она *монотонна.* Так линейная функция, степенная с нечетным показателем являются монотонными, а популярная $y = x^2$ монотонной не является, т.к. при $x < 0$ она убывает, а при $x > 0$ она возрастает.

Ограниченность. Пусть на D задана функция $y = f(x)$. Если существуют такие числа m и M, что для всех x $\in$ D, что m $\le f(x) \le$ M, то говорят, что функция ограничена в области определения. Различают и такие понятия, как ограниченность снизу и ограниченность сверху. Так, $y = x^3$ – неограниченная функция, $y = x^2$ – ограничена снизу, т.к. она неотрицательна в области определения. y = sinx и y = cosx – ограниченные функции, т.к. они принимают значения только из отрезка [-1; 1] – это их множество значений.

Четность и нечётность. Функция называется *чет-ной*, если ее область определения симметрична относительно x = 0 и $f(-x) = f(x)$;

Функция называется ***нечетной***, если ее область определения симметрична относительно x = 0 и $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной – относительно начала координат.

К четным функциям можно отнести $y = x^2$, y = cosx, $y = \dfrac{1}{x^2}$, нечетных $y = x^3$, y = sinx, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$. Функция $y = \sqrt{x}$ не относится ни к четным, ни к нечетным, потому как ее область определения несимметрична относительно нуля. Такие функции называют функциями общего вида.

Пример.

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; Подставим в функцию вместо x (-x), будем иметь:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$$ Получили определение нечетной функции, вывод: функция нечетная.

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, что для всех x из области определения выполняется равенство: $f(x+T)=f(x),\ где\ T\neq 0$

Очевидно, что если существует такое число T, называемое периодом, то число nT, где n – целое число, также является периодом этой функции. Важнейшие представители периодических функций – тригонометрические функции.

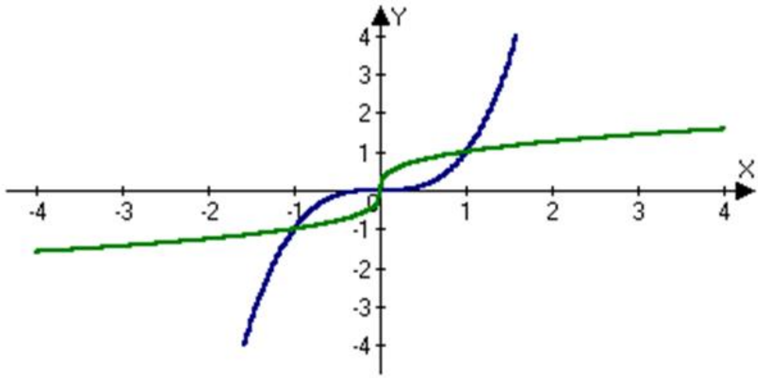
Рассмотрим практические задачи на отыскание области определения некоторых функций. Заметим, что многочлен определен на всем множестве действительных чисел: D = R. Так для функции $y = x^2 + 6x – 7$ D = R. Дробно – рациональная функция определена для всех x, при которых ее знаменатель отличен от нуля. Например:

$y=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-1}$ областью определения будет все множество действительных чисел, отличных от -1 и 1. На языке интервалов $D = (-\infty; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; \infty)$.

Понятие об обратной функции. Очень важное и глубокое понятие.

Пусть дана функция $y = x^3$. Будем далее считать независимой переменной y, а x – его функцией, выразим x через y $x=\sqrt[3]{y}$ и заменим, как то принято обозначать аргумент и функцию, x на y и y на x, получим

$y=\sqrt[3]{x}$.



Вот эти две функции у = x^3, $y = \sqrt[3]{x}$ и называются *взаимно обратными*.

Построив графики этих функций, мы убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов. Запомните это свойство графиков всех взаимно обратных функций.

Контрольные вопросы:

1) Дать определение функции.
2) Что такое область определения?
3) Что означает понятие «ограниченность функции»?
4) Какие функции называются монотонными?
5) Что можно сказать о симметричности графиков чётных и нечётных функций?
6) Какова методика определения четности – нечетности функции?
7) Какие функции периодические и как это записать?
8) Для каких функций возможно построить обратную?
9) Сформулировать алгоритм построения обратной функции.

Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики

1. Арксинус.
2. Арккосинус.
3. Арктангенс и арккотангенс.

$\underline{y = \arcsin x}$

Функция $y = \sin x$, где $x \in (-\infty; +\infty)$ не является монотонной на этом промежутке. Поэтому, чтобы говорить об обратной функции, надо выделить участок монотонности. Для функции $y = \arcsin x$ является отрезок $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Итак: $y = \sin x$ $x = \arcsin y$ $\underline{y = \arcsin x}$

Свойства функции $y = \arcsin x$

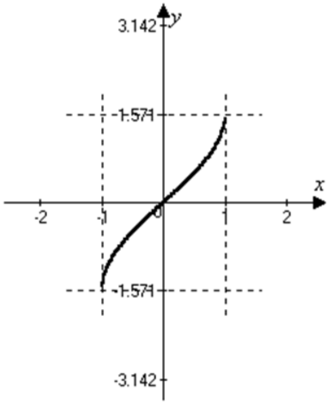
1) Область определения $x \in [-1; 1]$

2) Множество значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

4) Функция монотонно возрастает $[-1; 1]$

5) График.



$y = \arccos x$

$y = \cos x$

$x = \arccos y$ Промежуток монотонности $0 \le x \le \pi$

$y = \arccos x$

Свойства функции $y = \arccos x$

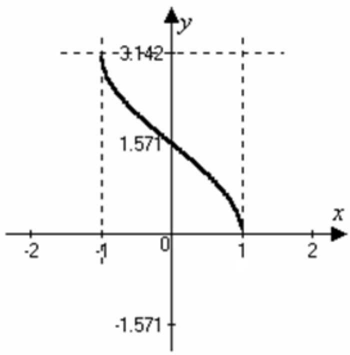
1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in [0;\pi]$

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4) Функция монотонно убывает $[-1;1]$

5) График.



$y = arctgx$

Промежуток монотонности $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $y = tgx$

$x = arctgy$

$\underline{y = arctgx}$

Свойства функции $\underline{y = arctgx}$

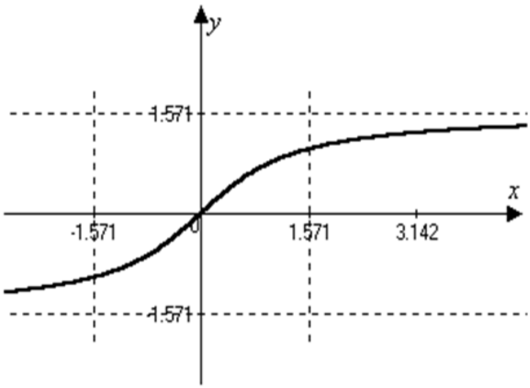
1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

3) $arctg(-x) = -arctgx$

4) Функция монотонно возрастает $(-\infty; +\infty)$

5) График.



$\underline{y = arcctgx}$

Промежуток монотонности $0 < x < \pi$ $\quad$ $y = ctgx$

$x = arcctgy$

$\underline{y = arcctgx}$

Свойства функции $\underline{y = arcctgx}$

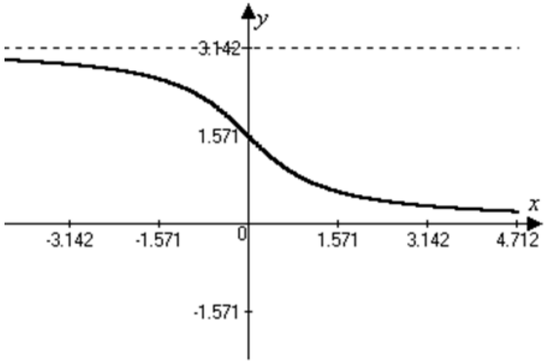
1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in (0; \pi)$

3) $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$

4) Функция монотонно убывает $(-\infty; +\infty)$

5) График.



Выполнение простейших тригонометрических операций над arc-функциями может быть определена формулами:

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \cos(\arccos x) = x$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(arcctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos(arcctgx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$tg\left(arctgx\right)=x \qquad ctg\left(arcctgx\right)=x$$

$$tg\left(\arcsin x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad ctg\left(\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$tg\left(\arccos x\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad ctg\left(\arccos x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$tg\left(arcctgx\right)=\frac{1}{x} \qquad ctg\left(arctgx\right)=\frac{1}{x}$$

Между arc-функциями существуют основные соотношения:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(-0,389\right) \qquad \arccos\left(-0,618\right)$$

$$arctg7,24 \qquad arcctg0,608$$

Контрольные вопросы:

1) Чему равны углы:

$$\arcsin\frac{1}{2} \qquad arctg\sqrt{3} \qquad \arcsin\left(-0,76\right) \qquad arctg\left(-2\right)$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad arcctg1 \qquad \arccos\left(-0,326\right) \qquad arcctg\left(-0,45\right)$$

2) Область определения обратных тригонометрических функций.

Простейшие тригонометрические уравнения, их решение

1. Уравнения $\sin x = a;\ \cos x = a;\ tgx = a;\ \ ctgx = a$

Уравнения вида $\sin x = a;\ \cos x = a;\ tgx = a;\ \ ctgx = a$ называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

$1)\sin x = a \qquad |a| \le 1$

$2)\cos x = a \qquad |a| \le 1$

$$180^\circ - x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$$

$x = \arccos a + 2\pi n$

$-x = \arccos a + 2\pi n$

$$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi n; n \in Z}$$

отсюда

$x = 180^\circ - \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z}$$

Например:

$\cos 4x = -0,712$

$4x = \pm \arccos(-0,72) + 2\pi \cdot n, n \in Z$

$4x = \pm 135^\circ 24' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

$\sin x = 0,437$

$x = (-1)^n \arcsin 0,437 + \pi n; n \in Z$

$x = (-1)^n 25^\circ 54' + 180^\circ \cdot n; n \in Z$

$tgx = a$; а – любое значение

$ctgx = a$; а – любое значение

Например:

$$tg\frac{x}{2} = 4$$

$$\frac{x}{2} = arctg4 + \pi n, n \in Z$$

$$\frac{x}{2} = 75^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$$

Контрольные вопросы:

1) Запишите формулы решений уравнений вида:

1) $\sin x = a$	8) $tgx = 0$
2) $\cos x = a$	9) $ctgx = 1$
3) $tgx = a$	10) $\cos x = -1$
4) $ctgx = a$	11) $\cos x = 1$
5) $\cos x = 0$	12) $\sin x = 0$
6) $\sin x = 1$	13) $ctgx = 0$
7) $\sin x = -1$	14) $tgx = 1$

Решение тригонометрических неравенств.

1. Решение тригонометрических неравенств

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$\sin x < m \quad \cos x < m \quad tgx < m \quad ctgx < m$

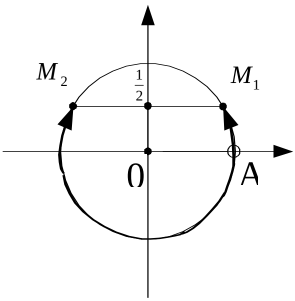
$\sin x > m \quad \cos x > m \quad tgx > m \quad ctgx > m$

где m – данное число

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Рассмотрим на примерах

1) $\sin x < \frac{1}{2}$, т.к. $|\sin x| \le 1$, то данное неравенство можно записать $-1 \le \sin x \le \frac{1}{2}$



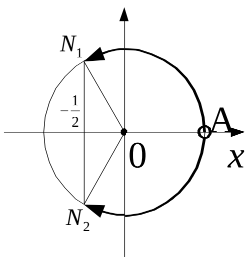
$$\cup AM_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\cup AM_2 = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7}{6}\pi$$

и значит, неравенству $\sin x < \frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6}$. Т.к. функция $\sin\alpha$ имеет период 2π, то решение этого неравенства будет промежуток $-\frac{7}{6}\pi + 2\pi k \le x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

2) $\cos x > -\frac{1}{2}$

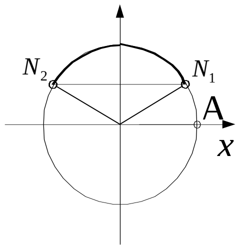
Перепишем неравенство в силу того, что $|\cos x| \le 1$



$$-\frac{1}{2} < \cos x \le 1$$

неравенству $\cos x > -\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{2}{3}\pi < x \le \frac{2}{3}\pi$. Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$.

3) $\sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, аналогично для $\sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет



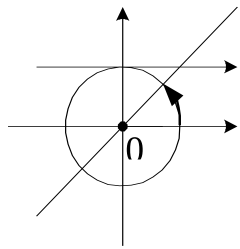
$$\frac{\pi}{4} < x < \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

4) $tgx > \sqrt{3}$, т.е. можно записать $\sqrt{3} < tgx < \infty$, т.к. функция tg неограниченная. Это неравенство выполняется при $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}$; период функции тангенса равен π, значит

$$\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$$



$$0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$0 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Общее решение:

$$\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Часто при решении тригонометрических неравенств используют не единичную окружность, а сам график. На котором наносят границы неравенства и отмечают промежутки, удовлетворяющие условию.

Также неравенства удобно решать аналитически с помощью следующих формул:

$$\sin x > a \qquad arcsina + 2\pi n < x < \pi - arcsina + 2\pi n$$

$$\sin x < a \qquad -\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n$$

$$\cos x > a \qquad -arccosa + 2\pi n < x < arccosa + 2\pi n$$

$$\cos x < a \qquad arccosa + 2\pi n < x < 2\pi - arccosa + 2\pi n$$

$$\operatorname{tg} x > a \quad arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$$
$$\operatorname{tg} x < a \quad -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n$$
$$\operatorname{ctg} x > a \quad \pi n < x < arcctga + \pi n$$
$$\operatorname{ctg} x < a \quad arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n$$

Контрольные вопросы:

1. Опишите способы решения тригонометрических неравенств графически.
2. Опишите способы решения тригонометрических неравенств с помощью формул.

Решение сложных тригонометрических уравнений

1. Уравнения вида $asin^2x + bsinx + c = 0$ и $acos^2x + bcosx + c = 0$
2. Уравнения вида $asin^2x + bcosx = 0$ и $acos^2x + bsinx = 0$
3. Уравнения вида $asin^2x + bsinxcosx + ccos^2x = 0$
4. Решение при помощи тригонометрических формул.

Решение тригонометрических уравнений вида $asin^2x + bsinx + c = 0$ и $acos^2x + bcosx + c = 0$ сводится к замене переменной на $sinx = t$ или $cosx = t$.
Тогда уравнение примет вид $at^2x + btx + c = 0$, решение которого сводится к решению квадратных уравнений. После нахождения корней требуется вернуться к первоначальной подстановке и найти корни простого тригонометрического уравнения.
Пример.
$$2sin^2x + sinx - 1 = 0$$
Решение.

$$sinx = t$$
$$2t^2 + t - 1 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 9$$
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1}{2}, -1$$
$$sinx = \frac{1}{2}$$
$$x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k\epsilon Z$$
$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$$
$$sinx = -1$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$$

Уравнения вида $asin^2x + bcosx = 0$ и $acos^2x + bsinx = 0$ содержит функции одинакового угла, которое можно привести к квадратному уравнению, если заменить $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Пример.

$2\sin^2 x + 5\cos x = 4$

Решение.

Заменим $\underline{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$:

$$2\left(1 - \cos^2 x\right) + 5\cos x = 4$$
$$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$$
$$-2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$$
$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$2t^2 - 5t + 2 = 0 \qquad D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{4};\qquad t_1=2\quad t_2=\frac{1}{2}$ и тогда имеем два простейших уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ и $\sin x=2$, решаем их, применяя формулу решения уравнения $\underline{\sin x=a}$

$\sin x\neq 2$ уравнение не имеет решения, т.к. $\lvert\sin x\rvert\leq 1$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$\underline{x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z}$$

И тогда, ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Рассмотрим уравнение вида $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=0$

Замечаем, что левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть равна нулю.

Такие уравнения называются однородными тригонометрическими уравнениями. Для их решения надо <u>каждый член уравнения разделить на $\cos x$ или $\sin x$</u> в той степени, какова степень уравнения.

Пример.

$$\sin^2x-10\sin x\cdot\cos x+21\cos^2x=0$$

Решение.

$$\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-\frac{10\sin x\cdot\cos x}{\cos^2x}+\frac{21\cos^2x}{\cos^2x}=0$$

$$tg^2x-10tgx+21=0,$$

решаем квадратное уравнение относительно функции tgx.

Пусть $tgx = t$, тогда

$$t^2 - 10t + 21 = 0$$

$$D = 100 - 84 = 16$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2}; \quad t_1 = 7; \quad t_2 = 3$$

тогда $tgx = 7$ $tgx = 3$

$x = arctg7 + \pi n, n \in Z$ $x = arctg3 + \pi n, n \in Z$

В некоторых уравнениях надо понизить степень или от суммы перейти к произведению или наоборот, но всегда надо стараться перейти к одной функции и одному аргументу.

При решении систем тригонометрических уравнений последние сводятся либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов.

Остальные уравнения решаются при помощи основных тригонометрических формул.

Пример.

$$2\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 2 = 0$$

Решение.

Функции имеют разные углы, приведем к одному углу, <u>используя формулы приведения</u>:

$2\sin^2 x - 5\cos x - 2 = 0$, т.к. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$

учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, имеем:

$$2\left(1 - \cos^2 x\right) - 5\cos x - 2 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 x + 5\cos x = 0$$

$$\cos x\left(2\cos x + 5\right) = 0$$

произведение равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0, имеем

$\cos x = 0$ и $2\cos x + 5 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ и $\cos x \neq -\frac{5}{2}$ – уравнение не имеет решения, т.к. $|\cos x| \leq 1$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Пример.

$tg^3 x = tgx$

Решение.

$tg^3 x - tgx = 0$

$tgx\left(tg^2 x - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$tgx = 0$

$x = \pi n, n \in Z$ и $tg^2 x - 1 = 0; tg^2 x = 1$ и тогда $tgx = \pm 1$

$x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$

Пример.

$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$

Решение.

Данное уравнение приводится к однородному тригонометрическому уравнению; для этого представим $2 = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$.

Имеем:

$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$

$\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$

разделим на $\cos^2 x$

$$tg^2x - 4tgx + 3 = 0$$

$$tgx = t; \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}; \quad t_1 = 3; t_2 = 1$$

$tgx = 3$

$x = arctg3 + \pi n, n \in Z$ $\quad tgx = 1$

Итак, мы рассмотрели уравнения, приводимые к одному аргументу, квадратному уравнению; левая часть которых разлагается на множители, а правая равна нулю – однородные тригонометрические уравнения.

Пример.

$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 3\cos(\pi - x) - 2 = 0$$

Решение.

Ещё раз вспомним, как решать такие уравнения. Применим формулы приведения

$$2\sin^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

приведем к одинаковой функции $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ из значит

$$2\left(1 - \cos^2 x\right) - 3\cos x - 2 = 0 \qquad 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \qquad \cos x\left(2\cos x + 3\right) = 0$$

отсюда

$\cos x = 0$ и $2\cos x + 3 = 0$ $\quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = -\dfrac{3}{2}$, как видим это уравнение не имеет решения, т.к. $\left|-\dfrac{3}{2}\right| > 1$, а $\left|\cos x\right| \le 1$ поэтому ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Мы рассмотрели решения различных уравнений и видим, что в каждом случае надо творчески подходить к нахождению метода решения, что возможно при хорошем знании формул тригонометрии, алгебраических преобразованиях.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные способы решения сложных тригонометрических уравнений.
2. Вспомните формулы привидения.

Предел функции, понятие непрерывности

1. Понятие предела.
2. Непрерывность функции.
3. Точки разрыва.

Пусть x- переменная величина, то есть величина, меняющая свои значения (переменная). Переменная x считается заданной, если задана последовательность её значений: $\{x_n\}=\{x_1;x_2;x_3;\ldots\}$

Здесь x_1- первое значение переменной x

x_2-второе значение переменной x и т.д.

Может оказаться, что переменная x меняет свои значения не хаотически, а целенаправленно, то есть значения x_n переменной x с увеличением его номера n неограниченно приближается к некоторому числу a. Такое число a, если оно существует, называется <u>пределом</u> <u>переменной</u> x. Записывается это так:

$x\to a$ (читается - x стремится к a)

или: $\lim\limits_{x-\infty} x_n = a$, где x_n - n-ое значение переменной величины x n - номер этого значения.

Если переменная x неограниченно возрастает, то считают, что $x \to +\infty$. А если x неограниченно убывает (возрастая по абсолютной величине), то $x \to -\infty$.

Если переменная x в процессе своего изменения ни к чему конкретно не стремится, то говорят, что у неё нет предела. Переменная x, имеющая пределом 0, называется бесконечно малой, а переменная x, неограниченно возрастающая по абсолютной величине, называется бесконечно большой.

Рассмотрим несколько примеров определения предела переменной x при различных последовательностях её значений.

Пусть- переменная величина, а последовательность её значений $\{x_n\}=\{1{,}9;1{,}99;1{,}999;1{,}9999;\ldots\}$. Очевидно, что $x\to2$ (два - предел переменной x)

$\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\}=\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\}$.Очевидно, что $x\to0$, то есть x-бесконечно малая величина.

$\{x_n\}=\{1^2;2^2;3^2;\ldots\}$. Очевидно, что $x\to+\infty$, то есть x-бесконечно большая величина.

$\{x_n\}=\{1;-1;1;-1;\ldots\}$. Очевидно, что x предела не имеет.

Предел переменной x обычно неочевиден. И его требуется найти (основная задача).

Пример.

$\{x_n\}=\{\frac{2n-3}{n}\}=\{-1;\ \frac{1}{2};1;\frac{5}{4};\ldots\}$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}) = \lim_{n\to\infty}(2-\frac{3}{n}) = 2-0=2.$$

Итак $x\to 2$.

Пусть $y=f(x)$- некоторая функция и x_0- некоторая внутренняя или граничная точка области её определения.

Например, если отрезок $[a;b]$ или интервал $(a;b)$- область определения функции

$y=f(x)$, то $a \prec x_0 \succ b$ или $x_0=a$ или $x_0=b$. Пусть $x\to x_0$, принимает значения некоторой последовательности значений $\{x_n\}=\{x_1;x_2;x_3;\ldots\}$.при этом функция $y=f(x)$ будет принимать значения последовательности значений $\{y_n\}=\{f(x_n)\}=\{f(x_1);f(x_2);f(x_3);\ldots\}$.Если при этом $y\to y_0$, то y_0 называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$, и обозначается это так: $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$.

Функция называется <u>бесконечно большой величиной</u>, если предел функции при $x\to a$ или $x\to\infty$ равен ∞, тогда функция имеет бесконечный предел.

Пример $\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}=\infty$, то функция $y=\frac{x-1}{x+1}$ является бесконечно большой при $x\to -1$

Решение

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-2}{0} = -2\cdot\dfrac{1}{0} = -2\cdot\infty = -\infty$

Функция $\alpha(x)$ называется <u>бесконечно малой функцией</u>, если при х→a (или х→∞) предел функции равен 0.

Например: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}$=0, то функция $y=\dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при х→±∞.

($y=\sin x, y=tqx$ при х→0 также являются бесконечно малыми).

Существует теорема о связи бесконечно больших и бесконечно малых величин.

1) если функция f(x)- бесконечно большая величина, то $\dfrac{1}{f(x)}=\alpha(x)$ - бесконечно малая величина.

2) если функция $\alpha(x)$- бесконечно малая величина, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}=f(x)$ - бесконечно_большая величина. Символика 1) $\dfrac{1}{\pm\infty}=0$; 2) $\dfrac{1}{\pm 0}=\pm\infty$

Замечание: не всякая функция имеет предел: $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ - не существует, т. к. функция $y=\cos x$ изменяется в пределах [-1;1].(не стремится к какому-то числу).

Теоремы о пределах

1.О единственности предела: если функция f(x) имеет предел при x→a, то этот предел единственный.

2.Если существует предел функции y=f(x) при x→a: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то функция $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая величина. при x→a и наоборот.

3.Рассмотрим функции: u=u(x) и v=v(x). При этом известно, что $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x)=c$ (т.е. существуют), тогда $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\pm v(x))=\lim\limits_{x\to a} u(x)\pm\lim\limits_{x\to a} v(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x))=\lim\limits_{x\to a} u(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} v(x)$

В частности: если v(x)=const=A, тогда limAu(x)=Alimu(x) т.е. постоянную величину можно выносить за знак предела.

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} v(x)\neq 0$

Важные практические формулы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ это значит: всюду, где функция определена предел функции можно вычислить простой подстановкой вместо x x=a.

Пример: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3}{x+1}=\dfrac{2\cdot 1^2+3}{1+1}=\dfrac{5}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)}$

Пример: $\lim\limits_{x\to 3}(x-1)^{x^2} = \lim\limits_{x\to 3}(x-1)^{\lim\limits_{x\to 3}x^2} = 2^9 = 2^6 \cdot 2^3 = 512$ - число.

Если при вычислении предела имеет место неопределённость $(\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; \grave{e}.\ddot{a}\eth.)$, то её требуется раскрыть, т.е. преобразовать функцию, стоящую под знаком предела таким образом, чтобы неопределённость исчезла.

Правило 1. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, следует и числитель и знаменатель дроби разделить почленно на x в высшей степени.

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-3}{2x+5} = (\frac{\infty}{\infty}) = ? = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$.

Правило 2. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{0}{0}$, нужно числитель и знаменатель дроби разложить на множители и скобку (x-a) сократить.

Пример: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x} = (\frac{0}{0}) = ?$

Разложение квадратного трёхчлена на множители- $\alpha x^2+bx+c=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

а) x^2-5x+6=0 x^2+px+q=0

Первый способ x_1=2 $x_1+x_2=-p$

x_2=3 $x_1x_2=q$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

б) x^2-2x-x(x-2) Тогда имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$$

Второй способ разделить уголком на (x-a) $x^2-5x+6 \llcorner x-2=x-3$

Из алгебры известно (для второго способа). Если $P_n(a)=0$ $\Rightarrow$ x=a- корень многочлена. Если известен хотя бы один корень многочлена, то многочлен делится без остатка на выражение (x-a).

Правило 3.Чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{0}{0}$ при вычислении предела иррациональной функции (корни есть), нужно числитель и знаменатель дроби умножить на сопряжённые выражения. И затем воспользоваться формулой:

$a^2-в^2=(a-в)\cdot(a+в)$.

Пример:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=(\frac{0}{0})=?=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

Неопределённость вида (∞-∞) нужно свести к виду $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Вычислению многих пределов помогает использование двух так называемых <u>замечательных пределов.</u>

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ или $\lim\limits_{x\to\infty}=\frac{x}{\sin x}=1$ (раскрывается неопред-сть вида $\frac{0}{0}$)

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ где e≈2,72

или $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})x=e$ (раскрывается неопределенность вида 1^{∞})

Пример 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}=(\frac{0}{0})=?=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot x}{3\cdot\sin 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

Пример 2:

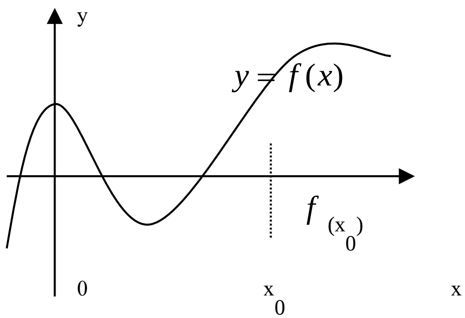
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{3n}=1^{\infty}=?=\lim_{x\to\infty}(\left[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{2}{n}})^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}\right]^{6}=e^{6}$$

При вычислении пределов, в частности при раскрытии неопределённости вида $\frac{0}{0}$, применяется таблица эквивалентности.

Определение. Две бесконечно малые величины называются эквивалентными, если при x→a (или x→∞) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

$\sin x \sim x$	$\alpha^x - 1 \approx x\ln\alpha$
$tqx \approx x$	$e^x - 1 \approx x$
$\sin mx \approx mx$	$e^{mx} - 1 \approx mx$
$arctqx \approx x$	$\ln(1-x) \approx x$
$arq\sin x \approx x$	$\ln(1+mx) \approx mx$

Функция называется <u>непрерывной</u>, если её график можно изобразить, не отрывая руки от чертежа.



Функция $y = f(x)$ -непрерывна всюду.

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности. Если при $x \to x_0$ существует предел функции и он равен значению функции в т. x_0, то точка x_0 называется непрерывности функции $f(x)$.а функция называется непрерывной в точке x_0.

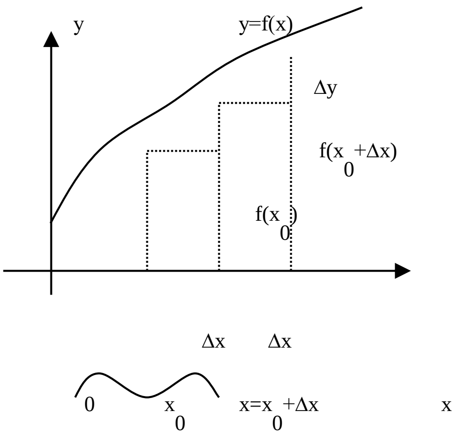
$$\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$$

Введём понятие «приращение аргумента» и «приращение функции».

Зафиксируем т. x_0. Функция определена в точке x_0, значит существует $y(x_0)=f(x_0)$.

Возьмём т. $x \in$ окрестности т.x_0, тогда $\underline{x-x_0=\Delta x}$- приращение аргумента, $\underline{\Delta x}$- бесконечно малая величина.

Тогда $f(x)=f(x_0+\Delta x)$, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$ - приращение функции.



Если $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то функция $f(x)$ - является непрерывна в точке x_0. Читается так: если б/м приращению аргумента соответствует б/м приращение функции, то такая функция непрерывна в этой точке. Очевидно, что определение 2 и определение 1 равносильны.

Введём понятие предел справа и предел слева.

Пусть $x \to x_0$, и при этом $x > x_0$ тогда $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ - предел справа

Пусть $x \to x_0$, и при этом $x < x_0$ тогда $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ - предел слева.

Если существует предел функции слева и справа и они равны, и равны значению функции в этой точке, то функция непрерывна в точке x_0.

$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$ - необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке.

Функция называется непрерывной на промежутке (а;в), если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Классификация точек разрыва.

1). Если функция не определена в точке x_0, но существует предел слева и предел справа, и они равны $f(x_0+0) = f(x_0-0)$ -то точка x_0-точка устранимого разрыва.

2). Если функция не определена точке в x_0, но существует предел слева и предел справа, но они не равны $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ -то точка x_0-точка разрыва 1 рода (скачок).

3). Если функция не определена точке в x_0, но односторонние пределы существуют и один из них равен ∞ (или оба),то x_0 называется точкой разрыва 2 рода (если оба равны ∞) то точка x_0- точка бесконечного разрыва.

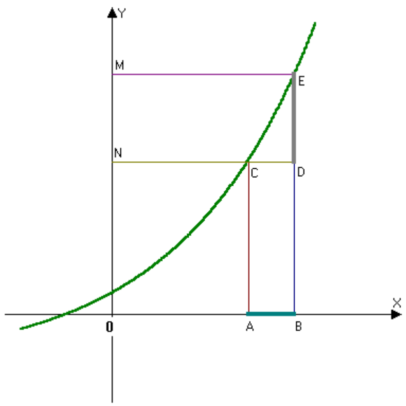
Контрольные вопросы:

1. Понятие предела функции. Приведите примеры.
2. Какая функция считается непрерывной на всей области определения.

Понятие производной

1. Приращение аргумента, приращение функции.
2. Понятие производной.

Пусть задана функция $y = f(x)$. При $x = x_0$ она принимает значение $y_0 = f(x_0)$.



x_0 - на оси ОХ в точке А, y_0 – на оси ОУ в точке N. Дадим x приращение Δx = AB, получим новое приращенное значение аргумента (в точке B) $x = x_0 + \Delta x$

Вычислим приращенное значение функции $y = f(x_0 + \Delta x)$ на оси ОУ – точка M, т.е. длина отрезка BE.

Естественно, что отрезок DE и будет являться *приращением функции в точке x_0, если приращение аргумента равно Δx*.

Т.е. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Итак, приращение функции есть разность между приращенным значением функции и первоначальным (отрезок DE).

Обратите внимание, что для возрастающей функции DE > 0, а для убывающей функции AC будет больше DE, поэтому разность DE – AC < 0 и $\Delta f(x_0) < 0$.

Сделайте самостоятельно схематический чертеж убывающей функции и укажите $\Delta f(x_0)$.

Вычислим приращение функции $f(x) = x^2 + 2x + 5$ при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0,1$ $x_0 + \Delta x = 2,1$

По формуле $\Delta f(x_0) = f\left(x_0+\Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(2,1\right) - f\left(2\right) = 2,1^2 + 2*2,1 + 5 - (2^2 + 2*2 + 5) = 0,61$

Поставим задачу отыскать приращение функции не в конкретной точке x_0, а в произвольной x, т.е. выведем формулу приращения в общем виде:

$\Delta f(x) = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 5 - x^2 - 2x - 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x\,\Delta x + 5 - x^2 - 2x - 5 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\,\Delta x = 2x\,\Delta x + 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$ – это и есть приращение функции в общем виде: $\Delta f(x) = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$. Подставим $x = 2$, $\Delta x = 0,1$ получим $\Delta f(x) = 0,61$ – все верно.

Пусть $y = f(x)$ - некоторая функция, определённая на некотором множестве точек оси OX (т.е. непрерывная). Зафиксируем некоторое значение аргумента x_0. Ему соответствует $f(x_0) = y(x_0)$. Добавим теперь к x_0 некоторое приращение Δx (+ или -), т.е. перейдём от x_0 к $x = x_0 + \Delta x$. Тогда соответствующее значение функции будет $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$. Приращение функции Δy равно: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ и называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

Процесс нахождения производной называется дифференцирование функции, а раздел математики, изучающий производную. называется дифференциальное исчисление.

Функция называется дифференцируемой в точке x_0, если в этой точке <u>существует</u> производная функция.

Функция называется дифференцируемой на промежутке, если в каждой точке этого промежутка существуют производные.

Теорема: Если функции $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0,то она в этой точке непрерывна.

То есть: если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Обратное утверждение неверно.

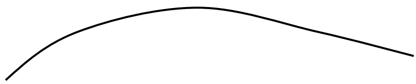
<u>Геометрический смысл производной.</u>

<u>Производная функции, вычисленная в т. x_0 численно равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в т. x_0.</u>

<u>Механический смысл производной.</u>

(Физический)-скорость изменения какого-нибудь процесса.

Пусть функция $y = f(x)$ представляет собой закон движения некоторой материальной точки по некоторой траектории (у- путь, т. е. расстояние от начальной точки траектории, х-время)



Δу- путь, пройденный точкой за время Δх. Тогда $\frac{\Delta ó}{\Delta \tilde{o}}$ $=\nu_{ср}$-средняя скорость за промежуток времени Δх. Следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \nu_{ñð} = \nu(\tilde{o})$ - мгновенная скорость в момент времени х.

<u>Нахождение производных функций.</u>

Нахождение производных основывается на определении производной функции

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Найдём для примера производные некоторых простых функций:

1). у=с (с- константа)

Δу=0 значит $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0 \Rightarrow ó' = 0$ (с')=0

2). у=х, Δу=(х+Δх)-х=Δх, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

(х)'=1

3). $y=x^2$, $f(x)=x^2$, $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$,

$\Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$,

$$\acute{o}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x,$$

$(x^2)' = 2x$.

Таким образом, можно получить производные и других элементарных функций.

<u>Таблица производных основных элементарных функций.</u>

1. $c' = 0$	7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13. $(\mathrm{arctq} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $x' = 1$	8. $(\log_a x)' = \frac{1}{xlqa}$	14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(x^2)' = 2x$	9. $(\sin x)' = \cos x$	15. $(\mathrm{arctq} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
4. $(x)' = nx^{n-1}$	10. $(\cos x)' = -\sin x$	16. $(\mathrm{arcctq} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
5. $(a^x)' \cdot \ln a$	11. $(\mathrm{tq} x)' = \frac{1}{cos^2 x}$	17. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $(e^x)' = e^x$	12. $(\mathrm{ctq} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	18. $(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$

Для нахождения производных остальных функций используются правила дифференцирования. Перечислим основные из них без вывода:

Пусть u=u(x) и ν=ν(x)- некоторые дифференцируемые функции, с-постоянная. Тогда:

1. $(u+\nu)'=u'+\nu'$

2. $(u-\nu)'=u'-\nu'$

3. $(u\cdot\nu)'=u'\nu+u\nu'$

4. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

В 4 номере постоянную выносим за знак производной.

Правило дифференцирования сложных функций.

Рассмотрим сложную функцию: $y=F[u(x)]$, где F- внешняя функция; u(x)- промежуточная функция Тогда: $y'_x=F'(u)\cdot u'(x)$

Производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.

Например: $y=\sin 2x$, $F(u)=\sin u$, $u(x)=2x \Rightarrow$ $y'=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x$,

Рассмотрим несколько примеров нахождения производных функций.

1. $y=2x^2-4x+5$, $y'=(2x^2-4x+5)'==(2x^2)'-(4x)'+(5)'=2\cdot 3x^2-4\cdot 1+0=6x^2-4$.

2. $y=x^2\cdot e^x$, $y'=(x^2\cdot e^x)'==(x^2)'\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2+x)$.

3. $y=\ln\sin x$, $y'=(\ln\sin x)'=[(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u']=$ $\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}ctqx$.

Пусть $y = f(x)$ - некоторая функция. Тогда:

<u>Применение дифференциала к приближённым вычислениям</u>

Вернёмся функции $(A) \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x = dy + \alpha(x) \Delta x \Rightarrow \Delta y \approx dy$

т.е. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, т.е. зная $f(x_0)$ - значение функции в точке x_0, можно найти следующее значение функции.

$\sqrt[3]{27+1} \rightarrow x_0=27$, $\Delta x=x-x_0=28-27=1$, $f(x_0)=\sqrt[3]{27}=3$

Правило Лопиталя. (французский математик).

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример: 1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2\cos 0} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$.

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = ? = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = ? = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 2 \cdot 0 = 0$ (правило Лопиталя

применили дважды) его можно применять до тех пор, пока предел не вычислится).

Контрольные вопросы:

1. Понятие производной.
2. Назовите геометрический и физический смысл производной.

Исследование функций с помощью производной.

1. Интервалы возрастания и убывания функций.
2. Точки экстремума функции.
3. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции.
4. Полная схема исследования функции.

Функция $y = f(x)$,заданная на некотором интервале (а;в) числовой оси ОХ, называется <u>возрастающей</u> на этом интервале, если на нём с ростом x растёт и y. Если же на

интервале (а;в) функция y убывает с ростом x, то она называется <u>убывающей</u> на этом интервале.

Функция $y = f(x)$ называется монотонной на интервале (а;в),если она на этом интервале возрастает или убывает. Интервал (а;в)- интервал монотонности.

Учитывая геометрический смысл производной функции для возрастающей функции видим, что $y' = f'(x) = tq\alpha \succ 0$ (т.к. α - острый угол). Для убывающей функции: $y' = f'(x) = tq\alpha \prec 0$ (т.к. α - тупой угол).Очевидно и обратное: если для любого x$\in$(а;в) имеем $y' = f'(x) \succ 0$,то функция $y = f(x)$ возрастает на интервале (а;в).А если имеем $y^{/} = f'(x) \prec 0$ то функция $y = f(x)$ убывает на интервале (а;в).

Точки экстремума функции

А теперь рассмотрим функция $y = f(x)$ у которой есть и интервалы возрастания и интервалы убывания, а следовательно есть и вершины и впадины на её графике.

Точки экстремума разделяют интервалы возрастания и убывания. А именно, точки максимума функции являются точками перехода от возрастания функции к убыванию, т.е. знак производной при переходе через точку максимума меняётся с (+) на (-). Точки минимума являются точками перехода от убывания функции к возрастанию, т.е. производная меняет знак функции с(-) на (+).В самих же точках экстремума производная функции либо равна нулю, либо не существует. (необходимое условие существование экстремума). Точке экстремума соответствует гладкая вершина или впадина с горизонтальной касательной. Точки оси ОХ, в которых производная функции равна 0 или не существует (необходимое условие экстремума), являются лишь подозрительными на экстремум. Те из них, в которых производная меняет знак, являются точками экстремума (достаточное условие существования экстремума функции). При этом если с (+) на (-), то критическая точка 1 рода (подозрительная на экстремум) является точкой максимума; а если с (-) на (+), то- точкой минимума. Если же слева и справа от подозреваемой точки производная функции имеет один и тот же знак, то эта точка не является точкой экстремума.

Из всего сказанного вытекает следующая <u>схема исследования функции $y = f(x)$ на интервалы монотонности и точки экстремума:</u>

Находим область определения функции.

Находим. $y' = f'(x)$.

Находим точки, подозрительные на экстремум;

а). $y' = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \{x_1; x_2; \ldots\}$

б). $y' - \textit{не.существует} \Rightarrow \{x_1; x_2; \ldots\}$.

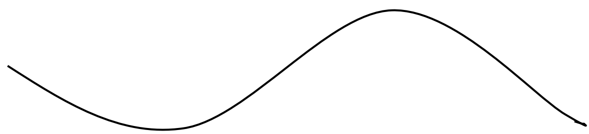
4. Наносим все найденные подозрительные на экстремум точки на область определения функции, отмечаем интервалы между этими точками. В каждом интервале устанавливаем знак производной с помощью пробных точек. По найденным знакам производной устанавливаем интервалы возрастания-убывания и находим точки экстремума функции.

5. В найденных точках максимума и минимума функции находим максимальное ($y_{\max}$) и минимальное ($y_{\min}$) значение функции.

6. Строим график функции.

Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции.

Понятие выпуклости, вогнутости и точек перегиба графика функции $y = f(x)$ дадим, исходя из следующего рисунка:



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, выпуклой на интервале (а;с) и вогнутой на интервале (с;в). Точка С, разделяющая интервалы выпуклости и вогнутости , есть абсцисса точки перегиба. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале (а;с), если он расположен ниже касательной, проведённой в любой точке этого интервала.

При этом с увеличением аргумента х касательная поворачивается по часовой стрелке. Значит, угол α наклона к оси ОХ касательная, а следовательно и её угловой коэффициент к=tqα уменьшается. Значит с ростом x уменьшается производная функции (т.к. f'(x)=tqα=$к_{кас.}$- геометрический смысл производной). А это значит, что её производная (f'(x))'=f''(x)<0.

График функции называется <u>вогнутым</u> на интервале (с;в), если он расположен выше касательной, проведённой к графику функции в любой точке этого интервала.

Рассуждение аналогичное предыдущему, приводит к выводу, что на интервале вогнутости для любого x этого интервала будет f''(x)>0. Точками же перегиба графика функции могут быть естественно, лишь те точки, где производная функции второго порядка $y'' = f''(x)$ равна нулю или не существует- это есть необходимое условие существования точек перегиба, т.е. рассматривая это условие, находят точки, подозрительные на перегиб (критические точки 2-го рода).

Достаточным же условием существования точек перегиба является смена знака производной второго порядка. Из сказанного вытекает схема исследования функции $y = f(x)$ на интервале выпуклости- вогнутости и точки перегиба.

Находим область определения функции.

Находим производную второго порядка $y'' = f''(x) = (f'(x))'$.

Находим подозрительные на перегиб точки: (критические точки 2-го рода). Для этого воспользуемся необходимое условие существования точек перегиба, т.е. а) $y'' = 0 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow \{x_1; x_2; \cdots\}$ б) y''- не сущ.$\Rightarrow \{x_1; x_2; \cdots\}$

Наносим все найденные критические точки 2-го рода на область определения функции и отмечаем дугами интервалы, на которые она разбивается этими точками. Исследуем знак y'' с помощью пробных точек в каждом интервале. По найденным знакам (- выпуклость, + вогнутость) устанавливаем интервалы выпуклости-вогнутости и абсциссы точки перегиба графика исследуемой функции.

Полная схема исследования функции:

1. Найти область определения функции. Записать интервалы непрерывности и указать (если они имеются) точки разрыва. (Если, есть то надо исследовать поведение функции в окрестности точек разрыва. Сделать вывод о вертикальных асимптотах). $\lim\limits_{x\to a-0} = \infty$ то имеется вертикальная асимптота.

2. Исследовать функцию на чётность - нечётность.

f(-x)=f(x)- чётная, f(-x)=-f(x)- нечётная.

3. Исследовать функцию на периодичность.

4. Найти точки пересечения с осями координат.

5. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума (y').

6. Найти интервалы выпуклости- вогнутости и точки перегиба графика исследуемой функции (y'').

7. Найти асимптоты (наклонные, вертикальные) по формулам y=кx+в уравнение наклонной асимптоты. к= $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$. поведение на бесконечность.

8. Построение графика.

Пример: Построить график функции $y=x^3-6x^2+9x-3$, предварительно исследовать функцию по полной схеме.

Решение.

1.Областью определения данной функции является вся числовая ось- все действительные числа $D(y) \cup x \in (-\infty;+\infty)$,т.е. функция непрерывна всюду при любом x и её график не имеет вертикальных асимптот.

2.$y(-x)=(-x)^3-6(-x)^2+9(-x)-3=-x^3-6x^2-9x-3 \neq y(x)$

$y(-x)=-(x^3-6x^2+9x-3) \neq -y(x) \Rightarrow$ функция общего вида.

3. Непериодическая.

4. Точки пересечения с осями координат.

а) С осью OX: точки пересечения найти трудно.

б) С осью ОУ x=0, тогда y(0)=-3

5. $y'=(x^3-6x^2+9x-3)'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$, $3x^2-12x+9=0$, $x^2-4x+3=0$. $x_1=3$, $x_2=1$.

$(-\infty;1)$: y'(0)=9>0- функция <u>возрастает</u>.

(1;3): y'(2)=-3<0- функция <u>убывает</u>.

$(3;+\infty)$: y'(4)=9>0- функция <u>возрастает</u>.

Следовательно, точка x=1- точка max. x=3- точка min.

Ординаты этих точек $y_{\max}(1)=1-6+9-3=1$

т. A(1;1)-<u>гладкая</u> <u>вершина</u>.

$y_{\min}(3)=27-54+27-3=-3$

т. B(3;-3)-<u>гладкая</u> <u>впадина</u>.

6. $y''=(3x^2-12x+9)'=6x-12=6(x-2)$

y''=0, 6(x-2)=0, x=2- критическая точка 2-го рода.

$(-\infty;2)$: y''(0)=-12<0- <u>выпуклый</u>.

$(2;+\infty)$: y''(3)=6>0- <u>вогнутый</u>. Т. x=2-абсцисса точки перегиба

y(2)=8-24+18-3=-1 т C(2;-1)- <u>точка</u> <u>перегиба</u>.

7. y=кx+в к= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$. к=

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-6x^2+9x-3}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-6x+9)=\infty$ - наклонной асимптоты нет.

8. Точки пересечения с осями координат

с осью OX y=0 $x^3-6x^2+9x-3=0$

с осью ОУ x=0 $x^3-6x^2+9x-3=y$, y=-т. Д(0;-3)- <u>точка</u> <u>пересечения</u>.

8. Построить график:

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные пункты исследования функций.
2. Для чего нужна производная при исследовании функции.

Первообразная. Неопределенный интеграл

1. Определение первообразной
2. Неопределенный интеграл

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x), если F'(x)=f(x).

Рассмотрим примеры: Функция $F(x)=x^3$- первообразная для функции $f(x)=3x^2$, так как выполнив проверку получаем $(x^3+6)'=3x^2$.

И вообще, очевидно, что если функция F(x)- первообразная для функции f(x), то и функция F(x)+C, где C- любая константа, тоже первообразная для функции f(x).

Теорема: Две любые первообразные для одной и той функции, определённой в некотором промежутке, могут отличаться друг от друга в этом промежутке лишь на постоянное слагаемое (доказательство опускаем). Из теоремы следует вывод: Если функция f(x) имеет первообразную F(x), то она имеет бесконечное множество первообразных, причём все первообразные содержатся в выражении F(x)+C где C- любая константа(т.е.$-\infty < C < +\infty$).

При изучении первообразной будем опираться на следующее утверждение. Признак постоянства функции: Если на промежутке J производная Ψ(x) функции равна 0, то на этом промежутке функция Ψ(x) постоянна.

Итак, функция $f(x)=c$ постоянна на промежутке J, если $f`(x)=0$ на этом промежутке.

Действительно, для произвольного x_1 и x_2 из промежутка J по теореме о среднем значении функции можно записать:

$f(x_2)- f(x_1)=f`(c)\ (x_2- x_1)$, т.к.

$f`(c)=0$, то $f(x_2)= f(x_1)$

<u>T_1: (Основное свойство первообразной функции)</u> Если F(x) одна из первообразных для функции f(x) на промежутке J, то множество всех первообразных этой функции имеет вид: F(x)+C, где C – любое действительное число.

T_2 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные для функции f(x) на некотором интервале X, то найдется такое число C, что справедливо равенство:

$$F_2(x) = F_1(x) + C,$$

Или можно сказать так, две первообразные для одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Совокупность всех первообразных для функции f(x) на интервале X называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, f(x) – подинтегральная функция, f(x)dx – подинтегральное выражение. Таким образом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

F(x) – некоторая первообразная для f(x), C – произвольная постоянная. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием этой функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. $(\int (f(x)dx)' = f(x)$. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению.

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \text{, где к - число}$$

5. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int (f(x) + \varphi(x))dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$$

Для вычисления неопределенных интегралов от функций используют таблицу неопределенных интегралов, которая приводиться ниже.

Таблица неопределенных интегралов.

$\int x^{\alpha} dx = [x^{\alpha+1} / (\alpha + 1)] + C$, $\alpha \neq -1$, $\alpha \in R$

$\int dx/x = \ln|x| + C$

$\int a^x = (a^x/\ln a) + C$, $\int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int dx/(\cos x)^2 = \mathrm{tg}x + C$

$\int dx/(\sin x)^2 = -\mathrm{ctg}x + C$

$\int$ dx / $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ = (arcsin x/a) + C

$\int$ dx / $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ = (-arccos x/a) +C

$\int$ dx / $a^2 + x^2$ = 1/a arctg x/a +C

$\int$ dx / $a^2 + x^2$ = - 1/a arcctg x/a +C

$\int$ dx / $a^2 - x^2$ = 1/2a ln $|x+a/x-a|$ +C

$\int$ dx / $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ = ln $|x + \sqrt{(a^2 + x^2)}|$ +C.

Пример.

Вычислить $\int (2x^2 - 3\sqrt{x} - 1)dx$.

Решение. Воспользуемся свойствами 4 и 5 неопределенных интегралов и первой табличной формулой. $\int (2x^2 - 3\sqrt{x} - 1)dx = 2\int x^2\,dx - 3\int x^{1/2}\,dx - \int dx = = 2(x^2/2) - 3[(x^{3/2} * 2)/3] - x + C = x^2 - 2\sqrt{x}^{\,3} - x + C$.

Пример.

$\int (2/\sqrt{x} - 1/x + 4\sin x)dx = \int 2x^{-1/2}dx - \ln|x| - 4\cos x + C = 2[(x^{1/2} * 2)/1] - \ln|x| - 4\cos x + C = 4\sqrt{x} - \ln|x| - 4\cos x + C$.

Для вычисления неопределенных интегралов применяют следующие методы: метод непосредственного интегрирования, метод подстановки(метод замены переменной), метод интегрирования по частям.

Существуют элементарные функции первообразные которых элементарными функциями не являются. По этой причине соответствующие неопределенные интегралы называются «неберущимися» в элементарных функциях, а сами функции не интегрируемыми в элементарных функциях.

Например, $\int e^{-x^2}\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$, $\int \cos x^2\,dx$, $\int \sin x/x\,dx$, $\int \cos x/x\,dx$, $\int dx/\ln x$ – «неберущиеся» интегралы, т.е.

не существует такой элементарной функции, что F `(x) = e $^{-x\wedge 2}$, F ` (x) = sinx^2 и т.д.

Контрольные вопросы:

1. Понятие первообразной.
2. Перечислите основные формулы нахождения первообразных.

Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона - Лейбница. Понятие интегральной суммы.

Пусть на отрезке [а, в] задана функция у = f(x). Разобьем отрезок на п элементарных отрезков точками деления а = x_0, x_1, x_2, …, $x_п$ = в. На каждом элементарном отрезке [x_{i-1}, x_i] выберем произвольную точку C_i и положим

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где i = 1,2,…,п, в каждой точке C_i найдем значение функции $f(C_i)$, составим произведения $f(C_1)\Delta x_1$, $f(C_2)\Delta x_2$, …, $f(C_i)\Delta x_i$, …, $f(C_n)\Delta x_n$, рассмотрим сумму этих произведений:

$f(C_1)\Delta x_1 + f(C_2)\Delta x_2 + \ldots + f(C_i)\Delta x_i + \ldots + f(C_n)\Delta x_n = \Sigma f(C_i)\Delta x_i$.

Эту сумму будем называть интегральной суммой для функции у=f(x) на отрезке [а, в]. Интегральная сумма зависит как от способа разбиения отрезка [а, в] на п частей так и от выбора точек C_1, C_2, …, $C_п$ на каждом элементарном отрезке разбиения.

Геометрический смысл интегральной суммы.

Пусть п=3, тогда а = x_0, x_1, x_2, x_3=в.

C_1 ,C_2 ,C_3 точки, выбранные произвольно на каждом элементарном отрезке.

$S_1 = f_1(C_1)\ \Delta x_1$ – площадь прямоугольника, построенного на первом отрезке разбиения, $\Delta x_1 = x_1 - x_0$,

$S_2 = f_2(C_2)\ \Delta x_2$ – площадь прямоугольника, построенного на втором отрезке разбиения. $\Delta x_2 = x_2 - x_1$,

$S_3 = f_3(C_3)\,\Delta x_3$ – площадь прямоугольника, построенного на третьем отрезке разбиения. $\Delta x_3 = x_3 - x_2$,

$S = S_1 + S_2 + S_3 = f_1\,(C_1)\Delta x_1 + f_2\,(C_2)\Delta x_2 + f_3\,(C_3)\Delta x_3 = \Sigma\, f(C_i)\Delta x_i$.

Это площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников.

Обозначим длину наибольшего из отрезков разбиения через $\max \Delta x_i$, где $i=1,2,\ldots п$

Пусть предел интегральной суммы $\Sigma\, f(C_i)\Delta x_i$ при стремлении $\max \Delta x_i$ к нулю существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка [а, в] на части и от выбора точек $C_1, C_2, \ldots, C_п$. Тогда этот предел называется <u>определенным интегралом</u> от функции у = f(x) на [а, в] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Число a называется нижним пределом, b – верхним пределом, f(x) i=1 подинтегральной функцией, f(x)dx – подинтегральным выражением.

<u>Некоторые свойства определенного интеграла.</u>

1^0 . Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \text{ и т.д.}$$

2^0. $\int_a^b f(x)dx$ есть число.

3^0. $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$, a<b

4^0. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int_a^b mf(x)dx = \mathrm{m} \int_a^b f(x)dx \text{, где m – const.}$$

5^0. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов.

$$\int_a^b (f(x)+\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$$

6^0. Если отрезок интегрирования разбит на части (a < c < b), то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов на каждой из частей.

$$\int_a^b f(x)dx \; = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx \,,$$

Существует еще ряд важных свойств определенного интеграла, которые подводят нас к формуле для вычисления определенного интеграла. Эта формула <u>называется формулой Ньютона – Лейбница</u> для f(x) непрерывной на [a; b].

$\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a), где F(x) некоторая первообразная для функции f(x).

Например, $\int_0^1 x^2 dx$ - вычислить.

Находим первообразную для функции x^2, т.е. неопределенный интеграл от x^2, произвольную постоянную С приравняем к нулю.

$$\int_0^1 x^2 dx = x^3/3 \Big|_0^1 = 1/3 - 0/3 = 1/3$$

Подставим в первообразную $x^3/3$ вначале значение верхнего предела, равного 1, затем значение нижн π/2 едела, равного 0 вместо x.

Пример. Вычислить $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|$ = sin π/2 – sin π/6 = 1 – ½ = 1/2

π/ 2

Пример. Вычислить $\int_{-1}^{2}(2x - x^3)dx = (\frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}) \Big| = 2^2 - 2^4/4$ $- [(-1)^2 - ((-1)^4/4)] = 4 - 4 -(1- (1/4)) = -3/4.$

Контрольные вопросы

1. Определение интеграла
2. Назовите формулу Ньютона-Лейбница

Степень с произвольным действительным показателем, её свойства. Степенная функция, её свойства, графики.

1. Понятие степени.
2. Свойства степеней.
3. Степенная функция.

Вспомнить свойства степени с рациональным показателем.

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$ для натурального n

a^n – степень; а – основание степени; n – показатель степени.

Для степени с рациональным показателем n:

$a > 0 \quad a^n > 0$

$(abc)^n = a^n b^n c^n$

$$a < 0 \begin{cases} n - четн. & a^n > 0 \\ n - нечет. & a^n < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$a^0 = 1$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

Обобщим понятие степени

Пусть a > 1, a < 1 и $\alpha < 0$, например $10^{-\sqrt{2}}; 0{,}5^{-\sqrt{2}}$.

Тогда выражению a^{α} придают тот же смысл, какой имеют степени с отрицательным рациональным показателем

$$10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}}; \qquad 0{,}5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{0{,}5^{\sqrt{2}}}$$

Таким образом можно сказать, что все свойства показателей рациональных применимы и к показателям иррациональным

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}; \left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}$$

И значит записанные выше свойства степени с рациональным показателем справедливы для степени с любым действительным показателем.

Функция вида $y = x^n$ называется степенной функцией.

$x -$ аргумент (основание степени)

$n -$ показатель степени.

Отметим свойства общие для степенных функций:

1) при $n > 0$ $x > 0$ функция возрастающая

2) при $n < 0$ $x > 0$ функция убывающая

Применение: используя графики степенных функций можно графически решать некоторые алгебраические уравнения.

Контрольные вопросы:

1. Свойства степеней.
2. Назовите несколько степенных функций и постройте их графики.

Иррациональные уравнения

1. Иррациональные уравнения и способы их решения.

Иррациональным называется уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня.

Решаются такие уравнения возведением обеих частей в степень. При возведении в четную степень возможно расширение области определения заданного уравнения. Поэтому при решении таких иррациональных уравнений обязательны проверка или нахождение области допустимых значений уравнений. При возведении в нечетную степень обеих частей иррационального уравнения область определения не меняется.

Иррациональные уравнения стандартного вида можно решить пользуясь следующим правилом:

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Решение иррациональных уравнений стандартного вида:

а) Решить уравнение $\sqrt{2x-1} = x - 2$,

Решение.

$\sqrt{2x-1} = x - 2$,

$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$,

$x^2 - 6x + 5 = 0$,

$x_1 = 5$,

$x_2 = 1$

$x-2>0$

$x>2$

Ответ: 5

б) Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}$ = x + 4,

Решение.

$\sqrt{6-4x-x^2}$ = x + 4,

$$\begin{cases} 6-4x-x^2=x^2+8x+16, \\ x+4\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+12x+10=0, \\ x\geq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+6x+5=0, \\ x\geq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -4, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=-5-\textit{пост.к}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: -1

в) Решить уравнение x – 1 = $\sqrt[3]{x^2-x-1}$,

Решение.

x – 1 = $\sqrt[3]{x^2-x-1}$,

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1$,

$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$,

$x(x^2 - 4x + 4) = 0$,

x = 0 или $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$(x - 2)^2 = 0$,

x = 2

Ответ: 0; 2.

г) Решить уравнение x – $5\sqrt{x-2}$ + 4 = 0,

Решение.

x – $5\sqrt{x-2}$ + 4 = 0,

$x + 4 = 5\sqrt{x-2}$
$x^2 + 8x + 16 = 25x - 50$
$x^2 - 17x + 66 = 0$
$x+4>0$
$x.>-4$
$x_1 = 11$
$x_2=6$
Ответ: 6; 11.

<u>Иррациональное уравнение, содержащее иррациональность четной степени:</u>

д) Решить уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$
Решение.
$\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$, возведем обе части уравнения в квадрат
$3x - 5 - 2\sqrt{(3x-5)(4-x)} + 4 - x = 1$,
$2x - 2 = 2\sqrt{(3x-5)(4-x)}$,
$x - 1 = \sqrt{(3x-5)(4-x)}$,
$x^2 - 2x + 1 = (3x-5)(4-x)$,
$x^2 - 2x + 1 - 12x + 3x^2 + 20 - 5x = 0$,
$4x^2 - 19x + 21 = 0$,
$x=3$
$x = 1{,}75$
Ответ: 3.

Контрольные вопросы:
1. Какие способы решения иррациональных уравнений.
2. Как осуществляется проверка выбора корней.

Показательная функция, её график, свойства. Логарифмическая функция, её график, свойства.

1. Показательная функция.
2. Логарифмическая функция.

Функция вида $y = a^x$, где $a \neq 1$ и $a > 0$ называется показательной.

Свойства

Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$

Множество значений функции: $y \in (0; +\infty)$ называются общими свойствами показательной функции и не зависят от основания, какое оно больше 1 или меньше 1.

$\underline{a > 1}$	$\underline{a < 1}$
Функция возрастающая при $x < 0 \quad y < 1$ $x > 0 \quad y > 1$ $x \to \infty, \quad y \to \infty$ та степень больше показатель которой больше	Функция убывающая при $x < 0 \quad y > 1$ $x > 0 \quad y < 1$ $x \to \infty, \quad y \to 0$ та степень больше, показатель которой меньше

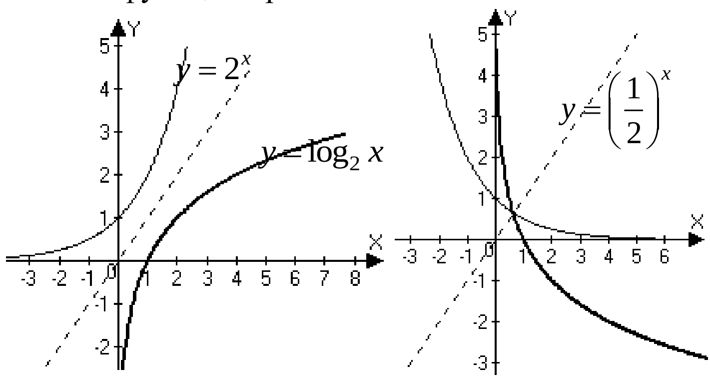
При решении учитывается основание (какое оно больше 1 или меньше 1) и знак показателя степени.

При решении обращается внимание на основание (какое оно больше 1 или меньше 1) и учитывается 6-ое свойство показательной функции

<u>Функция,</u> обратная показательной, называется <u>логарифмической</u> $y = a^x$, $a \neq 1$ и $a > 0$ – показательная функция $x = \log_a y$, поменяем местами x и y, получаем $y = \log_a x, \quad a \neq 1, \quad a > 0$ – это и есть логарифмическая функция.

Знаем, что графики обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Воспользовавшись этим свойством изобразим графики логарифмической функции при а > 1 и а < 1



Контрольные вопросы:

1. Перечислите свойства показательной функции.
2. Перечислите свойства логарифмической функции.

Показательные уравнения и неравенства, способы их решения

1. Показательные уравнения.
2. Показательные неравенства.

Уравнения, содержащие переменную в показателе степени, называются показательными.

Например: $2^{2x-1} - 4 = 2^x$; $5^{\sqrt{x}} = 1$ и т.д.

При решении показательных уравнений применяются разные методы решения, которые мы рассмотрим на конкретных примерах.

$2^{3x-8} = 64$, т.к. $64 = 8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$, то $2^{3x-8} = 2^6$, мы привели обе части уравнения к одинаковому основанию, а так как степени равны, равны их основания, то равны и показатели степеней, т.е.

$$3x - 8 = 6; \quad \Rightarrow \quad 3x = 14 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Ответ: $4\frac{2}{3}$

Показатель степени может быть любым числом, поэтому проверку делать не надо.

Ответ: $4\frac{2}{3}$

$0{,}1^{2x}\cdot 10^{3x-2}=100$ В левой части $0{,}1=10^{-1}$ и тогда $\left(10^{-1}\right)^{2x}\cdot 10^{3x-2}=10^{2}$, так как при умножении степеней с одинаковым основанием их показатели складываются, при возведении степени в степень показатели перемножаются, то $10^{-2x+3x-2}=10^{-2} \Rightarrow -2x+3x-2=-2$ $x=0$, это и есть решение уравнения. Ответ: $x=0$.

Оба уравнения решались методом сведения обеих частей уравнения к одинаковому основанию. А если нельзя свести к одинаковому основанию?

$2{,}76^{3x-1}=0{,}713$ Что делать?

Как решить?

Теперь применим только метод логарифмирования. Прологарифмируем обе части уравнения, например по основанию 10, т.е. найдём от обеих частей десятичный логарифм.

$$\lg 2{,}76^{3x-1}=\lg 0{,}713$$

$$(3x-1)\lg 2{,}76=\lg 0{,}713$$

$$3x-1=\frac{\lg 0{,}713}{\lg 2{,}76}$$

$$3x-1=-0{,}137$$

$$3x=1-0{,}137$$

$$3x=0{,}863$$

$x\approx 0{,}288$, результат не изменится, если взять логарифм натуральный, то есть берём тот логарифм который можно найти, используя МК.

$3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$ используя свойства степени, имеем $3^{2x}-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-2}=1$ в левой части каждое слагаемое содержит общий множитель 3^{2x}. Вынесем 3^{2x} за скобки, получим:

$$3^{2x}\left(1-2\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{-2}\right)=1; \quad 3^{2x}\left(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)=1; \quad 3^{2x}\cdot\frac{9-6-2}{9}=1$$

$$3^{2x}\cdot\frac{1}{9}=1 \qquad 3^{2x}=9 \qquad 3^{2x}=3^2$$

$$2x=2 \qquad x=1$$

Ответ: $x=1$. Этот метод так и называется – метод вынесения общего множителя за скобки.

$2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^{x}+8=0$ так как $4^{2x}=\left(4^x\right)^2$, то уравнение $2\cdot\left(4^x\right)^2-17\cdot 4^x+8=0$ представляет квадратное уравнение относительно 4^x. Пусть $4^x=t$, тогда $2\cdot t^2-17t+8=0$ решаем квадратное уравнение относительно переменной *t*.

$$Д=17^2-4\cdot 8\cdot 2=289-64=225$$

$$t_{1,2}=\frac{17\pm 15}{4}; \quad t_1=8; \quad t_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Подставим значения *t* в равенство $4^x=t$

$$4^x=8 \quad\Rightarrow\quad 2^{2x}=2^3; \quad 2x=3; \quad x=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$4^x=\frac{1}{2}; \quad 2^{2x}=2^{-1}; \quad 2x=-1; \quad x=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $x=1{,}5$; $x=-0{,}5$. При решении уравнения применим первоначально сведения к квадратному уравнению. В следующих примерах постараемся самостоятельно определять метод решения и затем с подсказкой преподавателя выполнять решение этого уравнения.

$\sqrt{3^x} = \dfrac{1}{\sqrt{27}}$; приведем к одинаковому основанию «3»

$$3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{3}{2}$$

$x = -3$. Ответ: $x = -3$

$2^x \cdot 5^x = 1000$; $10^x = 10^3$; $x = 3$. Ответ: $x = 3$

$0,096^{4-2x} = 5,17$ свести к одинаковому основанию нельзя, прологарифмируем обе части уравнения:

$(4-2x)\cdot \ln 0,096 = \ln 5,17$; $4-2x = \dfrac{\ln 5,17}{\ln 0,096}$;

$4-2x = -0,0408$; $-2x = -4-0,0408$; $-2x = -4,0408$

$x = 2,0204$

$\underline{x \approx 2,02}$

Ответ: $x \approx 2,02$

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2}$$

$$3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 = 7^x + 7^x \cdot 7 + 7^x \cdot 7^2$$

$$3^x(1+3+9) = 7^x(1+7+49)$$

$3^x \cdot 13 = 7^x \cdot 57$; $3^x \neq 0$ и $7^x \neq 0$ можно разделить обе части уравнения на 3^x или 7^x, получим:

$$\frac{3^x}{7^x}=\frac{57}{13} \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^x=\frac{57}{13}$$

$$x\cdot\lg\frac{3}{7}=\lg\frac{57}{13}$$

$$x=\frac{\lg\frac{57}{13}}{\lg\frac{3}{7}}=-1,74.$$ Ответ: $x=-1,74$

$$4+2^x=2^{2x-1} \qquad 4+2^x=2^{2x}\cdot 2^{-1} \qquad 2^{2x}\cdot\frac{1}{2}-2^x-4=0$$

$$\left(2^x\right)^2\cdot\frac{1}{2}-2^x-4=0$$

Пусть $2^x=t$, тогда $\frac{1}{2}t^2-t-4=0$

$t^2-2t-8=0 \qquad Д=4+4\cdot 8=36$

$t_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2}; \qquad t_1=4 \quad t_2=-2$

$2^x=4; \quad 2^x=2^2; \quad \underline{x=2}$ $\qquad 2^x=-2$ – уравнение не имеет решения, т.к. $2^x>0$ всегда. Ответ: $x=2$

<u>Показательные неравенства.</u>

Неравенства, содержащие переменную в показателе степени, называются <u>показательными</u>.

При решении показательных неравенств используются свойства показательной функции, свойства степени. Рассмотрим простейшие методы решения показательных неравенств.

а) $5^{x-1}>\left(\frac{1}{25}\right)^{4-x}$

приведём обе части неравенства к одинаковым основаниям. Учитывая, что $\frac{1}{25}=5^{-2}$, то $5^{x-1}>\left(5^{-2}\right)^{4-x}\Rightarrow 5^{x-1}>5^{-2(4-x)}$, т.к. $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}$ (свойство степени). Основание $5>1\ \Rightarrow$ функция возрастающая и поэтому $x-1>-2(4-x)$.

Решаем неравенство первой степени.

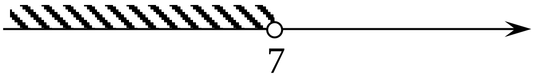
$x-1>-8+2x$

$x-2x>-8+1$

$-x>-7$

$x<7$

$x\in(-\infty;7)$

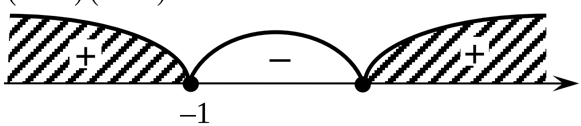


б) $0,7^{x^{2}-1}\le 1$. Приведём к одинаковым основаниям. Зная, что $a^{0}=1$, представим правую часть неравенства, как $0,7^{0}$ и тогда

$0,7^{x^{2}-1}\le 0,7^{0}$

так как 0,7 < 1, то функция убывающая и значит $x^{2}-1\ge 0$. Это квадратное неравенство, которое решается методом интервалов.

$(x-1)(x+1)\ge 0$

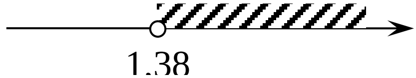


$x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$

в) $5^{x}>9,2$

Привести к одинаковым основаниям не представляется возможным. Используем метод логарифмирования.

$x\log_5 5 > \log_5 9{,}2$, т.к. $\log_5 5 = 1$, то



$x > \log_5 9{,}2$

$x > 1{,}38$

$x \in (1{,}38; +\infty)$

Можно логарифмировать обе части неравенства по любому основанию. Например по основанию 10.

$x\lg 5 > \lg 9{,}2$

$x > \dfrac{\lg 9{,}2}{\lg 5}$, т.к. $\lg 5 > 0$ и $x > 1{,}38$. Ответ тот же.

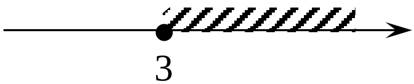
г) $0{,}24^x \le 15{,}7$ Прологарифмируем по основанию «е»

$x \cdot \ln 0{,}24 \le \ln 15{,}7$, т.к. $\ln 0{,}24 < 0$,

то $x \ge \dfrac{\ln 15{,}7}{\ln 0{,}24}$ $x \ge -1{,}93$

$x \in [-1{,}93; +\infty)$

д) $3^{x+1} - 3^x \le 54$ Используя свойство степени, имеем $3^x \cdot 3^1 - 3^x \le 54$; вынесем 3^x за скобки $3^x(3-1) \le 54 \Rightarrow 3^x \cdot 2 \le 54 \Rightarrow 3^x \le 27 \Rightarrow 3^x \le 3^3$, т.к. 3 > 1, то $x \le 3$



$x \in [3; +\infty)$

Затем решаются неравенства

$9^{0{,}5x^2-3} < 27$, приведем к основанию 3

$3^{2(0{,}5x^2-3)} < 3^3$, т.к. 3 > 1, то

$2\left(0{,}5x^2-3\right)<3$

$x^2-6<3$

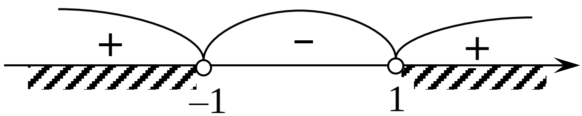
$x^2-9<0$

$(x-3)(x+3)<0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x\in(-3;3)$

$2^{\frac{x-1}{x+1}}>1$

$2^{\frac{x-1}{x+1}}>2^0$, т.к. 2 > 1, то

$\frac{x-1}{x+1}>0$



$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

2.11 $\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{49}{6}\right)^{x-1}>\frac{4}{49}$. В левой части неравенства надо умножить степени с одинаковым показателем. Т.к. $a^n\cdot b^n=(ab)^n$, то $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{49}{6}\right)^x>\frac{4}{49}$

Контрольные вопросы:

1. Назовите основные способы решения показательных уравнений.

2. Назовите основные способы решения показательных неравенств.

Логарифмы, их свойства. Логарифмическое тождество, формула перехода.

1. Понятие логарифма.
2. Основные свойства логарифмов.

Итак, мы знаем, что $a^n = b$, а если n – неизвестно? Как можно найти показатель степени из равенства: $2^x = 14$? Никакие известные нам действия не помогут. Вот поэтому вводится новое понятие, понятие логарифма.

Логарифмом числа называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число: $\log_a b = c;\quad a > 0$ согласно определения имеем $a^c = b$, и тогда $a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.

$5^{\log_5 2} = 2; \qquad 0,2^{\log_{0,2} 3} = 3.$

Логарифмы обладают свойствами:

1.1. Логарифмы отрицательных чисел на существуют (положительное число в любой степени есть число положительное).

1.2. Логарифм единицы при любом основании равен нулю, $\log_a 1 = 0$, т.к $a^0 = 1$.

1.3. Логарифм самого основания равен 1, то есть $\log_a a = 1$, т.к. $a^1 = a$

1.4. Логарифм произведения при любом основании равен сумме логарифмов сомножителей при этом же основании. $\log_a\left(N_1 \cdot N_2\right) = \log_a N_1 + \log_a N_2$

Покажем, что это так:

Пусть $\log_a N_1 = n_1$ и $\log_a N_2 = n_2$; по определению логарифма имеем $N_1 = a^{n_1}$ и $N_2 = a^{n_2}$

$N_1 \cdot N_2 = a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1 + n_2}$; отсюда $n_1 + n_2 = \log_a\left(N_1 \cdot N_2\right)$ и тогда $\log_a\left(N_1 \cdot N_2\right) = \log_a N_1 + \log_a N_2$, что и требовалось доказать!

1.5. Логарифм дроби при любом основании равен разности логарифма числителя и логарифма знаменателя при этом же основании

$\log_a \dfrac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$

(доказательство аналогично свойству 4, докажите самостоятельно. Можно воспользоваться подсказкой учебника)

1.6. Логарифмом степени при любом основании равен произведению показателя степени на логарифм основания степени. $\log_a N^m = m \cdot \log_a N$

Логарифм числа с основанием 10 называется <u>десятичным</u> и имеет особую запись.

$$\log_{10} b = \lg b$$

Логарифм числа с снованием *e* называется <u>натуральным</u> и имеет также особую запись $\log_e b = \ln b$. $e \approx 2,718$ число Непера.

И десятичный, и натуральный логарифмы любого числа можно находить при помощи МК

$\lg 17,4 = 1,2405$	$\ln 0,384 = -0,9571$
17,4 $\boxed{\log}$	0,384 $\boxed{\ln}$

А если надо вычислить логарифм числа при любом основании? Что делать? Надо перейти к основанию 10 или *e*.

По определению логарифма $a^{\log_a N} = N$, используя свойство логарифмов (смотрите свойство 6) имеем $\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$

и тогда $\boxed{\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}}$ и называется формулой перехода от одной системы логарифмов к другой. Эта формула часто применяется при решении логарифмических уравнений и неравенств $\log_a N = \dfrac{\lg N}{\lg a}; \log_a N = \dfrac{\ln N}{\ln a}$, что даёт возможность вычисления выполнять при помощи МК.

Пример.

$$\log_{1,24} 618,7 = \frac{\lg 618,7}{\lg 1,24} = 29,88$$

$$\log_{1,24} 618,7 = \frac{\ln 618,7}{\ln 1,24} = 29,88$$

Как видно результаты равные поэтому можно делать переход к любому основанию.

Проверьте результат: $\log_{1,2} 0,784 = -1,3347$ $\log_{0,34} 11,78$

Замечания: 1) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$, т.е. 2)

$$\boxed{\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b}$$

3) $$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Используя определение логарифма, можно находить переменную.

Рассмотрим на конкретных примерах

$\log_{\sqrt{3}} x = -2$ по определению логарифма

$$\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = x \;\Rightarrow\; x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$\log_x \frac{1}{27} = -3$ по определению логарифма

$$x^{-3} = \frac{1}{27} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^3} = \frac{1}{27}; \quad x^3 = 27; \quad x = 3$$

$\log_{\sqrt[3]{2}} 64 = x$ по определению логарифма

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^x = 64 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{1}{3}x} = 64 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{1}{3}x} = 2^6; \quad \frac{1}{3}x = 6; \quad x = 18$$

Контрольные вопросы:

1. Определение логарифма.
2. Определение логарифма десятичного и натурального.
3. Способы решения логарифмов.

Решение логарифмических уравнений и неравенств

Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма, называются логарифмическими. Рассмотрим методы решения логарифмических уравнений на примерах.

$\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+6\right)=-2$

По определению логарифма можно записать,

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=x^2+6$

$x^2+6=16$

$x^2+6-16=0$

$x^2-10=0$

$x=\pm\sqrt{10}$ надо помнить, что логарифма отрицательных чисел не существует. Так как $x^2+6>0$ всегда, то полученные значения $x=\pm\sqrt{10}$ оба являются корнями уравнения. Ответ: $\pm\sqrt{10}$

По определению логарифма, можно решить уравнение: $\log_5\left(6-5^x\right)=1-x$; отсюда $5^{1-x}=6-5^x$ получили показательное уравнение $5\cdot 5^{-x}=6-5^x$, решим его: $\frac{5}{5^x}=6-5^x$ приведём к общему знаменателю $5^x\neq 0 \Rightarrow 5=\left(6-5^x\right)\cdot 5^x$

$5=6\cdot 5^x-\left(5^x\right)^2$

Обозначим $5^x=t$, получим

$5=6t-t^2; \qquad t^2-6t+5=0$

$D=36-20=16$

$t_{1,2}=\dfrac{6\pm 4}{2}$; $t_1=5$; $t_2=1$ и тогда $5^x=5 \Rightarrow x=1$; $5^x=1$; $5^x=5^0$; $x=0$.

Ответ: $x=1$ $x=0$

$$\lg(3x-2)+\lg 2=2-\lg(x+1)$$

Используя определение логарифма, можно число 2 записать $2=\lg 100$ и тогда имеем равносильное уравнение $\lg(3x-2)+\lg 2=\lg 100-\lg(x+1)$. Применим свойства логарифмов и тогда $\lg\left((3x-2)\cdot 2\right)=\lg\dfrac{100}{x+1}$ отсюда следует, что $2(3x-2)=\dfrac{100}{x+1}$ решаем уравнение при $x\neq -1$

$$2(3x-2)(x+1)=100$$

$$(3x-2)(x+1)=50$$

$$3x^2-2x+3x-2=50$$

$$3x^2+x-52=0$$

$$D=1+4\cdot 3\cdot 52=625$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 25}{6};\ x_1=4;\ x_2=-\frac{26}{6}=-\frac{13}{3}$$

потенцирование выражений может привести к появлению посторонних корней, поэтому полученные корни нужно проверить.

Проверка:

$x=4$

$$\lg 10+\lg 2=\lg 100-\lg 5$$

$$10\cdot 2=\frac{100}{5}$$

$20=20$ верно.

$x = -\frac{13}{3}$ – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

Ответ: $x = 4$.

Можно указать другой метод нахождения корней уравнения, основанный на предварительном нахождении всех значений *x*, для которых имеет смысл уравнение, то есть указать область допустимых значений переменной (ОДЗ).

По свойству логарифмов:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 2 \\ x > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \quad x > \frac{2}{3} \quad x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \quad \text{и}$$

тогда можно сказать, что ОДЗ удовлетворяет корень $x = 4$. Проверив этот корень, получаем верное равенство.

<u>Замечание</u>. Пользоваться указанием ОДЗ удобно для более простых выражений, стоящих под знаком логарифма.

При решении уравнения применяется метод решения, известный как метод потенцирования.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) + 2 = -\log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} = -\log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$$

т.к. $2 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

Используя свойства логарифмов имеем $\log_{\frac{1}{2}}\left((2x - 3)\cdot\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)^{-1}$ и тогда

$$\frac{1}{4}(2x-3)=\frac{1}{x+2}, \qquad x\neq -2$$

$$\frac{1}{4}(2x-3)(x+2)=1 \qquad (2x-3)(x+2)=4$$

$$2x^2-3x+4x-6-4=0 \qquad 2x^2+x-10=0$$

$$D=1+80=81$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 9}{4}; \quad x_1=2; \ x_2=-2,5$$

Проверка:

$x=2$

$$\log_{\frac{1}{2}}1+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}4$$

$$1\cdot\frac{1}{4}=4^{-1}$$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ верно.

Ответ: $x=2$

x = –2,5 – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

$x^{2\lg x-1,5}=\sqrt{10}$ данное уравнение можно назвать и показательным и логарифмическим.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, получаем равносильные ему логарифмическое уравнение

$$(2\lg x-1,5)\cdot\lg x=\frac{1}{2}\lg 10$$

$$2\lg^2 x-1,5\lg x=\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$2\lg^2 x-1,5\lg x-\frac{1}{2}=0$$

$$4\lg^2 x-3\lg x-1=0$$

Получаем квадратное уравнение относительно $\lg x$

Пусть $\lg x = t$, тогда $4t^2 - 3t - 1 = 0$

$D = 9 + 16 = 25;$ $\qquad t_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{8}$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

И тогда $\lg x = 1 \Rightarrow x = 10$

если $\lg x = -\frac{1}{4}$, то $x = 10^{-\frac{1}{4}}$ $x = 10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$

Ответ: 10; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные способы решения логарифмических уравнений.
2. Перечислите основные способы решения логарифмических неравенств.

Список литературы

1. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы. 2012.- 464 с.
2. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа., М., “Просвещение”, 1990.
3. Комогорцев В.Ф. Математика. Числа, алгебраические выражения, функции. БГСХА, 2013.
4. Тригонометрические уравнения и неравенства: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1989.

Учебное издание

Дьяченко О.В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине «Математика» для студентов
специальностей 23.02.03 (Техническое обслуживание
и ремонт автомобильного транспорта), 35.02.08
(Электрификация и автоматизация
сельского хозяйства)

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 30.09.2015 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага печатная. Усл. п. л. 5,81. Тираж 25 экз. Изд. № 3658.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ