Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика»

Брянская область 2020

УДК 517.373 (07)
ББК 22.161.1
Р 19

Ракул, Е. А. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля: учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2020. – 58 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 20.03.02 Природообустройство и водопользование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 35.03.06 Агроинженерия. Учебно-методическое пособие может быть использовано как для аудиторной работы, так и для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Высшая математика».

Рецензенты:
Панов М.В., к.т.н., доцент кафедры автоматики, физики и математики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 28.09.2020 г., протокол № 1.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При рассмотрении ряда физических задач встречаются функции, заданные на той или иной поверхности. Примерами таких функций являются: плотность распределения зарядов на поверхности, скорость жидкости, протекающей через некоторую поверхность, и т.д. Необходимость интегрирования функций, заданных на поверхности, привела к введению поверхностных интегралов. Различают поверхностные интегралы первого и второго рода.

1.1 Поверхностные интегралы первого рода (по площади поверхности)

Определение. *Касательной плоскостью P к поверхности S в ее точке M_0(точка касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку (Рис. 1).*

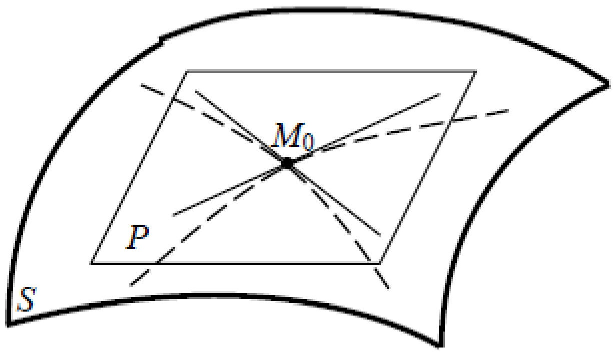

Рис. 1

Определение. *Поверхность S называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная плоскость, и при переходе от точки к точке положение этой плоскости меняется непрерывно. Поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков, называется кусочно-гладкой.*

Например, сфера является гладкой поверхностью; поверхность кругового цилиндра, поверхность параллелепипеда дают примеры кусочно-гладких поверхностей.

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой обобщение двойного интеграла. Это обобщение строится так. Пусть в точках гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности S, ограниченной кусочно-гладким контуром L, определена функция $f(P)=f(x,y,z)$. Разобьем поверхность S произвольно проведенными кривыми на части $S_1, S_2, ..., S_n$, площадь каждой из которых обозначим ΔS_i $(i=1,...,n)$. Выбрав в каждой из площадок произвольную точку P_i, вычислим в этой точке значение функции $f(P_i)$ и умножим его на площадь ΔS_i элементарной части S_i. Составим сумму произведений вида

$$I_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \ldots + f(P_n)\Delta S_n, \tag{1.1}$$

которую будем называть *интегральной суммой для функции* $f(x, y, z)$ *по поверхности S.*

Наибольший из диаметров S_i ячеек обозначим $\max \Delta S_i$. Перейдем в равенстве (1.1) к пределу при условии, что $\max \Delta S_i \to 0$, что влечет увеличение числа n ячеек S_i и стягивание каждой из них в точку.

Определение. *Если существует конечный предел при* $n \to \infty$ *интегральной суммы (1.1), который не зависит ни от способа разбиения поверхности* S *на части* S_i*, ни от выбора точек* $P_i \in S_i$*, то его называют поверхностным интегралом первого рода от функции* $f(P) = f(x, y, z)$ *по поверхности* S *и обозначают символом*

$$\iint\limits_S f(P)dS \text{ или } \iint\limits_S f(x, y, z)dS\,.$$

Поверхностный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл.

Рассмотрим основные *методы вычисления поверхностных интегралов первого рода*.

Пусть задана гладкая поверхность S уравнением $z = z(x, y)$. Так как поверхность гладкая, то, следовательно, $z(x, y)$- непрерывная функция вместе со своими частными производными. И пусть на поверхности S определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Вычисление поверхностного интеграла первого рода производится сведением поверхностного интеграла к двойному по следующей формуле.

Пусть D – проекция поверхности S на плоскость Oxy, тогда

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy\,. \tag{1.2}$$

Пусть гладкая поверхность S задана уравнением $x = x(y, z)$, пусть D – проекция поверхности S на плоскость Oyz, тогда поверхностный интеграл первого рода может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\,dydz\,. \tag{1.3}$$

Пусть гладкая поверхность S задана уравнением $y = y(x, z)$, пусть D – проекция поверхности S на плоскость Oxz, тогда поверхностный интеграл первого рода может быть вычислен по формуле

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\, dxdz. \qquad (1.4)$$

Замечание. В более сложных случаях, когда поверхность кусочно-гладкая или неоднозначно проектируется на координатные плоскости, ее разбивают на гладкие части, однозначно проектирующиеся на одну из координатных плоскостей, тогда интеграл разобьется на сумму интегралов по этим частям, к каждому из которых применимы формулы (1.2) – (1.4).

Пример 1.1. Вычислить интеграл $\iint_S (3x + y + z - 1)dS$, где S – часть плоскости $2x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте (Рис. 2).

Решение.

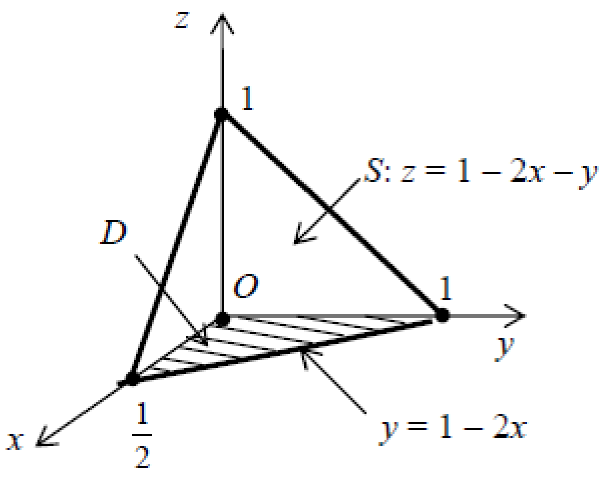

Рис. 2

Из уравнения плоскости находим: $z = 1 - 2x - y$, $z'_x = -2$, $z'_y = -1$, тогда $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

Проекцией плоскости S на плоскость Oxy является треугольник D (Рис. 2), ограниченный координатными осями и прямой $y = 1 - 2x$.

Применяя формулу (1.2), получим

$$\iint\limits_S (3x+y+z-1)dS = \iint\limits_D (3x+y+(1-2x-y)-1)\sqrt{6}dxdy = \iint\limits_D x\sqrt{6}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{6}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{1-2x} xdy = \sqrt{6}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} xdx\left(y\Big|_0^{1-2x}\right) = \sqrt{6}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)dx = \sqrt{6}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} xdx - 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^2dx\right) =$$

$$= \sqrt{6}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{24}.$$

1.2 Поверхностный интеграл второго рода (по координатам)

Введем предварительно понятие стороны поверхности. В произвольной точке M гладкой поверхности S фиксируем *нормальный вектор* (*нормаль*) $\overline{n}$, т. е. вектор, перпендикулярный касательной плоскости к поверхности S в точке M. Рассмотрим на поверхности S какой-либо замкнутый контур, проходящий через точку M и не имеющий общих точек с границей поверхности S. Будем перемещать точку M по замкнутому контуру вместе с вектором $\overline{n}$ так, чтобы при этом перемещении направление вектора $\overline{n}$ менялось непрерывно (Рис. 3). В начальное положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с противоположным.

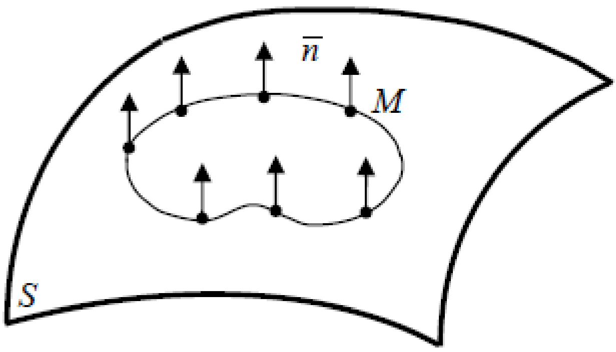

Рис. 3

Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на гладкой поверхности S и не пересекающему ее границу, при возвращении в исходную точку не меняет направление нормали к поверхности, то поверхность называется *двусторонней*.

Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, сфера, любая поверхность, заданная уравнением $z(x,y)$, где $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ – функции, непрерывные в некоторой области D плоскости Oxy.

Если же на гладкой поверхности S существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали меняется после возвращения в исходную точку на противоположное, то поверхность называется *односторонней*. Простейшим примером односторонней поверхности является так называемый лист Мёбиуса.

В дальнейшем рассматриваются только двусторонние поверхности. Для двусторонней поверхности совокупность всех ее точек с выбранным в них направлением нормали, изменяющимся непрерывно при переходе от точки к точке, называется *стороной поверхности*.

Перейдем теперь к определению поверхностного интеграла второго рода. Пусть на гладкой поверхности S определены непрерывные функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Выберем на S определенную сторону и обозначим через $\bar{n}$ единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности. Так как $|\bar{n}|=1$, то $\bar{n}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – углы, которые вектор $\bar{n}$ образует с осями координат.

Определение. Поверхностным интегралом второго рода от функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ по выбранной стороне гладкой поверхности S называется число, равное

$$\iint\limits_S \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)d\sigma. \tag{2.1}$$

Обозначается символом

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \tag{2.2}$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает такими же свойствами, как и поверхностный интеграл первого рода, но в отличие от последнего при изменении стороны поверхности (при этом направление нормали $\bar{n}$ меняется на противоположное) меняет знак.

Рассмотрим основные *методы вычисления поверхностных интегралов второго рода.*

1) Если уравнение поверхности S можно представить в виде $z = z(x, y)$, то

$$\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma d\sigma = \iint_S R(x, y, z)dxdy = \pm\iint_{D_1} R(x, y, z(x, y))dxdy, \qquad (2.3)$$

где D_1 – проекция поверхности S на плоскость Oxy, знак «плюс» берется в том случае, когда вектор $\bar{n}$ образует с осью Oz острый угол ($\cos\gamma > 0$), знак «минус» берется, если этот угол тупой ($\cos\gamma < 0$).

Формула (2.3) позволяет свести вычисление поверхностного интеграла второго рода от функции $R(x, y, z)$ по поверхности S к вычислению двойного интеграла по области D_1 – проекции S на плоскость Oxy.

Аналогично вычисляются интегралы от функций $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$:

$$\iint_S P(x, y, z)\cos\alpha\, d\sigma = \iint_S P(x, y, z)dydz = \pm\iint_{D_2} P(x(y, z), y, z)dydz, \qquad (2.4)$$

$$\iint_S Q(x, y, z)\cos\beta\, d\sigma = \iint_S Q(x, y, z)dxdz = \pm\iint_{D_3} Q(x, y(x, z), z)dxdz. \qquad (2.5)$$

Здесь $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ - уравнения поверхности S; D_2, D_3 - проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxz соответственно.

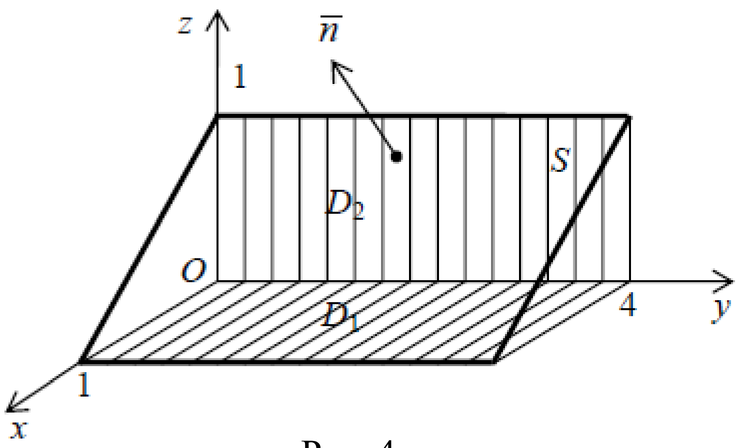

Рис. 4

Пример 2.1.
Вычислить интеграл $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – верхняя сторона части плоскости $x + z - 1 = 0$, отсеченная плоскостями $y = 0$, $y = 4$ и лежащая в первом октанте (Рис. 4).

Решение.

Вектор нормали $\bar{n}$ к поверхности S: $\bar{n}(1; 0; 1)$. Очевидно, что он составляет острые углы с координатными осями Ox и Oz, а с осью Oy - угол равный нулю (т.к. плоскость S параллельна оси Oy). Тогда по формулам (2.3) – (2.5) находим

$$\iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{D_1} (1-x)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^4 (1-x)dy = 4\int\limits_0^1 (1-x)dx = 4\int\limits_0^1 dx - 4\int\limits_0^1 xdx =$$

$$= 4x\Big|_0^1 - 4\cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = 4-2=2;$$

$$\iint\limits_S xdydz = \iint\limits_{D_2} (1-z)dydz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^4 (1-z)dy = 4\int\limits_0^1 (1-z)dz = 4\int\limits_0^1 dz - 4\int\limits_0^1 zdz =$$

$$= 4z\Big|_0^1 - 4\cdot \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^1 = 4-2=2;$$

$$\iint\limits_S ydxdz = 0 \text{ (т.к. } S \text{ параллельна оси } Oy\text{)}.$$

Следовательно, $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy = 2+0+2=4$.

2) Если уравнение поверхности S можно представить в виде $z = z(x, y)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm\iint\limits_D \left(R - z'_x \cdot P - z'_y \cdot Q\right)dxdy, \qquad (2.6)$$

где $D-$проекция поверхности S на плоскость Oxy. В правой части формулы (2.6) переменную z в подынтегральном выражении следует заменить на $z(x, y)$, знак перед интегралом выбирается так же, как в формуле (2.3).

Аналогичные формулы имеют место и в тех случаях, когда уравнение поверхности S может быть представлено в виде $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$.

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdz - 2zdxdy$ по внешней стороне параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

Решение.

По условию z меняется от 0 до 1. Подставляя $z=1$ в уравнение параболоида, получаем уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Значит, проекцией поверхности S на плоскость Oxy является круг $D: x^2 + y^2 \le 1$.

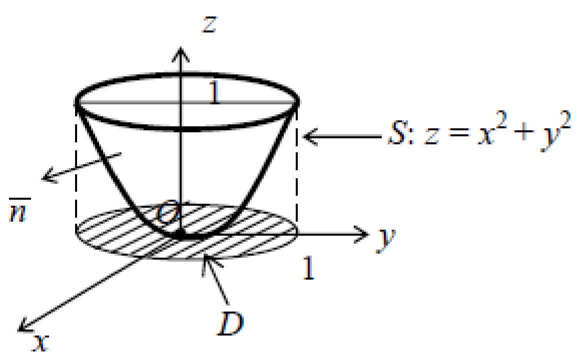

Рис. 5

Воспользуемся формулой (2.6), в правой части которой следует взять знак минус, так как нормаль $\overline{n}$ образует с осью Oz тупой угол. Учитывая, что по условию

$P = 0,\ Q = \sqrt{x^2 + y^2},\ R = -2z,$

$z'_x = 2x,\ z'_y = 2y$, получим

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdz - 2zdxdy = -\iint_D \left(-2\left(x^2 + y^2\right) - 2x \cdot 0 - 2y\sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy =$$

$$= 2\iint_D \left(x^2 + y^2 + y\sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy.$$

Переходя в полученном двойном интеграле к полярным координатам, находим

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdz - 2zdxdy = 2\iint_D \left(x^2 + y^2 + y\sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^2 + \rho^2 \sin\varphi\right)\rho d\rho = 2\int_0^{2\pi} (1 + \sin\varphi) d\varphi \left(\left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^1 \right) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \sin\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

1.3 Формула Остроградского-Гаусса

Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностным интегралом по замкнутой поверхности и тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью. Эта формула является пространственным аналогом формулы Грина, которая связывает криволинейный интеграл по замкнутой кривой с двойным интегралом по плоской области, ограниченной этой кривой.

Теорема. *Пусть пространственная область T ограничена гладкой или кусочно-гладкой поверхностью S. Если функции* $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ *непрерывны вместе со своими частными* *производными* $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ *в замкнутой области* $\overline{T} = T \cup S$, *то имеет место формула Остроградского-Гаусса*

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) d\sigma, \qquad (3.1)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *- направляющие косинусы внешней нормали.*

Формулу (3.1) можно также записать в виде

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \qquad (3.2)$$

С помощью формулы Остроградского-Гаусса удобно вычислять поверхностные интегралы по замкнутым поверхностям.

1.4 Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными и криволинейными интегралами.

Теорема. *Пусть функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой пространственной области T. Тогда для любой гладкой или кусочно-гладкой незамкнутой поверхности S, лежащей в области T, имеет место формула Стокса*

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right] d\sigma = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz,$$

где C − контур, ограничивающий поверхность S.

В формуле Стокса направление обхода контура C должно быть согласовано с направлением нормали $\overline{n}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ следующим образом:

если наблюдатель смотрит из конца нормали $\bar{n}$, *то он видит обход контура C совершающимся против часовой стрелки* (Рис. 6).

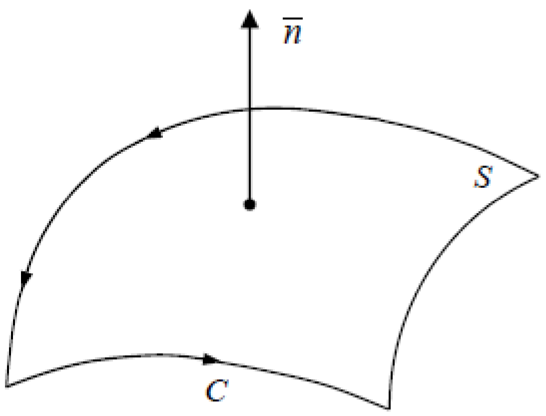

Рис. 6

Пример 4.1. Вычислить с помощью формулы Стокса интеграл $\oint\limits_C xy^2dx + dy + zdz$, где C – линия пересечения плоскости $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями. Обход контура C указан на рисунке 7.

Решение.

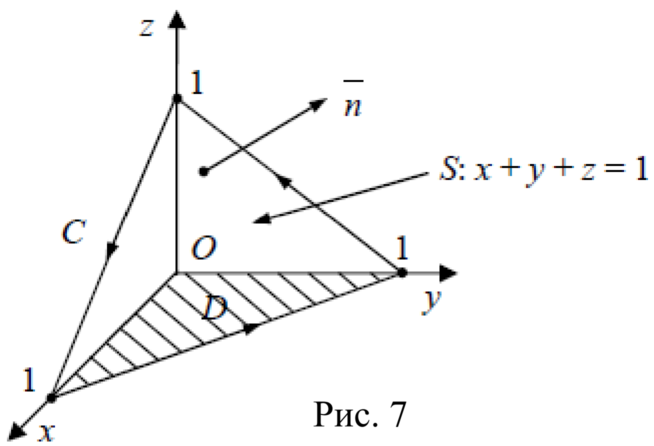

Рис. 7

Имеем: $P = xy^2$, $Q = 1$, $R = z$.

Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$.

Следовательно, $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$,

$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2xy$.

Подставляя полученные выражения в формулу Стокса, получим:

$$G = \oint\limits_C xy^2dx + dy + zdz = -2\iint\limits_S xy\cos\gamma\, d\sigma,$$

где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте, а интеграл берется по верхней стороне поверхности S. Далее по формуле (2.3) получим:

$$\iint\limits_S xy\cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_D xy\, dxdy,$$

где D – проекция поверхности S на плоскость Oxy (треугольник, ограниченный прямыми $x=0,\ \ y=0,\ \ y=1-x$).

Вычисляя двойной интеграл, находим

$$G=-2\iint\limits_{D} xy\,dxdy=-2\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x} ydy=-2\int\limits_0^1 xdx\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x}\right)=-\int\limits_0^1 x(1-x)^2\,dx=$$

$$=-\int\limits_0^1\left(x-2x^2+x^3\right)dx=\left.\left(-\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1=-\frac{1}{12}.$$

Из формулы Стокса следует, что если

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

то криволинейный интеграл по любой пространственной замкнутой кривой C равен нулю:

$$\oint\limits_C Pdx+Qdy+Rdz=0\,.$$

А это значит, что в данном случае криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики.

В общем случае говорят, что в пространстве задано поле некоторой величины u, если в каждой точке пространства (или некоторой его части) определено значение этой величины. Так, например, при изучении потока газа приходится исследовать несколько полей: температурное поле (в каждой точке температура имеет определенное значение), поле давлений, поле скоростей и прочие.

Поле величины u называется *стационарным*, если u не зависит от времени t. В противном случае поле называется *нестационарным*. Таким образом, величина u есть функция точки M и времени t.

В физических задачах приходится иметь дело как со скалярными, так и с векторными величинами. В соответствии с этим различают два вида полей: скалярное и векторное. Для простоты будем считать их стационарными.

2.1 Скалярное поле. Производная по направлению и градиент скалярного поля

Пусть D – область на плоскости или в пространстве.

Говорят, что в области D задано *скалярное поле*, если в D задана скалярная функция $z = f(x, y)$ (или $u = f(x, y, z)$). Если, например, область D заполнена жидкостью или газом, и $f(x, y, z)$ обозначает температуру в точке $M(x, y, z)$, то говорят, что задано скалярное поле температур; если $f(x, y, z)$– давление, то задано скалярное поле давлений и т. д. Скалярное поле, заданное на плоскости функцией $z = f(x, y)$, называется *плоским*.

Геометрическое место точек, заданное уравнением $f(x, y, z) = C$, где $C = const$, называется *поверхностью уровня*. В частности, для плоского скалярного поля уравнения $f(x, y) = C$ задают *линии уровня*.

Важнейшими характеристиками скалярного поля являются производная по направлению и градиент.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, и произвольный вектор $\bar{s}$, выходящий из точки M (Рис. 8). Для характеристики изменения функции (поля) в точке $M(x, y)$ в направлении вектора $\bar{s}$ введем понятие производной по направлению. Для этого через точку M проведем прямую L в направлении вектора $\bar{s}$. На прямой L возьмем точку

$M_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ на расстоянии Δs от точки M. Таким образом, $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Функция $z = f(x, y)$ получит при этом приращение $\Delta z = f(x+\Delta x;\ \ y+\Delta y) - f(x,\ y)$.

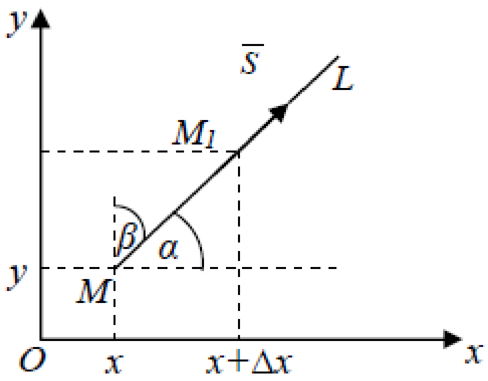

Рис. 8

Определение. *Предел отношения при $\Delta s \to 0$, если он существует, называется производной функции (скалярного поля) $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по направлению вектора $\bar{s}$ и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, т. е.* $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta s}$.

Предположим теперь, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$. Тогда ее полное приращение в этой точке в направлении вектора $\bar{s}$ можно записать в виде

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y,$$

где $\alpha_1,\ \beta_1$ – бесконечно малые функции при $\Delta s \to 0$.

Разделим обе части этого равенства на Δs. Учитывая, что $\Delta x = \Delta s \cos\alpha,\ \ \Delta y = \Delta s \cos\beta$ (Рис. 8), получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\cos\beta + \alpha_1 \cos\alpha + \beta_1 \cos\beta.$$

Переходя к пределу при $\Delta s \to 0$, получаем формулу для производной по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (1.1)$$

где $\bar{s}(\cos\alpha,\ \cos\beta)$ - направляющие косинусы вектора $\bar{s}$.

В частности, $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ при $\alpha=0,\ \beta=\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{2},\ \beta=0$. Следовательно, частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ - производные в направлении осей Ox и Oy соответственно.

Пример 1.1. Найти производную скалярного поля $z=x^2+xy^2$ в точке $M(1;\ 2)$ по направлению вектора $\bar{s}=\overline{MN}$, где точка $N(3;\ 0)$.

Решение.

Координаты вектора $\overline{MN}(2;\ -2)$, тогда длина вектора $\left|\overline{MN}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$. Найдем направляющие косинусы вектора $\overline{MN}$:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\left|\overline{MN}\right|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta=\frac{y}{\left|\overline{MN}\right|}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Находим частные производные функции z и их значения в заданной точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y^2;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\cdot1+2^2=2+4=6;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2xy;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\cdot1\cdot2=4.$$

Тогда по формуле (1.1) получим:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Определение*. Градиентом функции (скалярного поля) $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Обозначается:*

$$grad\ z=\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$$

Связь между градиентом и производной по направлению устанавливается формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = |grad\, z| \cdot \cos\varphi, \tag{1.2}$$

где φ – угол между векторами $grad\, z$ и $\bar{s}$.

Аналогично определяется производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению вектора $\bar{s}$ для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{s}$. Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Связь между градиентом и производной по направлению устанавливается формулой

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |grad\, u| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $grad\, u$ и $\bar{s}$.

2.2 Понятие векторного поля. Векторные линии

Аналогично с понятием скалярного поля вводится понятие векторного поля. Говорят, что в плоской или пространственной области D задано *векторное поле*, если в D задана векторная функция $\bar{a} = \bar{a}(M)$, т. е. каждой точке M из D поставлен в соответствие некоторый вектор $\bar{a}$.

Примеры векторных полей:

1. В пространстве, окружающем Землю, существует гравитационное векторное поле: на материальную точку, внесенную в любую точку M указанного пространства, действует сила тяжести $\bar{P}(M)$.

2. Вокруг тела, заряженного электричеством, наблюдается векторное поле напряженности, которое проявляется при внесении в любую точку пространства, окружающего тело, заряженной частицы.

3. Пусть некоторая пространственная область D занята текущей жидкостью. Если любая частица жидкости, протекая через данную точку M области D, имеет один и тот же вектор скорости $\overline{a} = \overline{a}(M)$, то в области D имеет место гидродинамическое поле $\overline{a}(M)$ скоростей текущей жидкости.

Если в пространственной области D введена система координат $Oxyz$, то задание пространственного векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M)$ равносильно заданию трех скалярных функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$являющихся проекциями вектора $\overline{a}(M)$ на оси координат:

$$\overline{a}(M) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}, \qquad (2.1)$$

где $x, y, z -$координаты точки $M \in D$.

Если векторное поле $\overline{a} = \overline{a}(M)$ *плоское* (D- область на плоскости Oxy), то

$$\overline{a}(M) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j} \,. \qquad (2.2)$$

Пример 2.1. Найти векторное поле напряженности, создаваемое точечным положительным зарядом величиной q.

Решение.

В пространстве зафиксируем систему координат $Oxyz$ и поместим заряд в точку O. В каждой точке $M(x, y, z)$ пространства на единичный положительный заряд действует отталкивающая сила $\overline{E}$, называемая *напряженностью электростатического поля*. Вектор $\overline{E}$ направлен вдоль линии, соединяющей заряды. По закону Кулона $\left|\overline{E}\right| = \dfrac{q}{r^2}$, где $r = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние между зарядами. Найдем проекции вектора $\overline{E}$ на координатные оси. Заметим, что векторы $\overline{E}$ и $\overline{OM}$ коллинеарны и сонаправлены, следовательно, $\overline{E} = \lambda \cdot \overline{OM}$, $\lambda > 0$. Отсюда находим $\lambda = \dfrac{\left|\overline{E}\right|}{\left|\overline{OM}\right|} = \dfrac{q}{r^3}$. Тогда вектор

$\overline{E} = \lambda \cdot \overline{OM} = \lambda x\overline{i} + \lambda y\overline{j} + \lambda z\overline{k} = \dfrac{qx}{r^3}\overline{i} + \dfrac{qy}{r^3}\overline{j} + \dfrac{qz}{r^3}\overline{k}$ - искомое векторное поле.

***Определение**. Векторной линией* *поля $\overline{a} = \overline{a}(M)$ называется линия, в каждой точке M которой направление касательной совпадает с направлением соответствующего вектора поля (Рис. 9).*

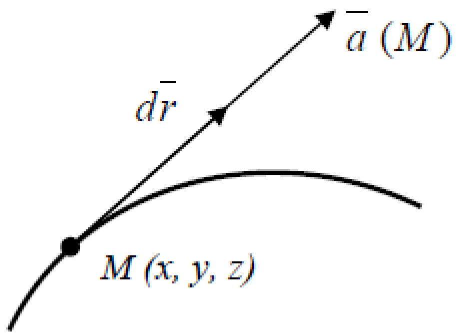

Рис. 9

В силу этого определения вектор $d\overline{r} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$, направленный по касательной к векторной линии поля $\overline{a} = \overline{a}(M)$ в точке M, коллинеарен вектору $\overline{a}(M)$ в указанной точке. Условие коллинеарности этих двух векторов, которое записывается в форме

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}, \tag{2.3}$$

дает систему дифференциальных уравнений для определения векторных линий поля $\overline{a} = \overline{a}(M)$.

Векторные линии характеризуют поле геометрически и дают определенную информацию о структуре этого поля. Так, если $\overline{a} = \overline{a}(M)$ поле скоростей текущей жидкости, то в этом поле векторные линии, очевидно, будут являться траекториями частиц жидкости; называются они в этом случае *линиями тока*. В силовых полях векторные линии называются *силовыми линиями*.

2.3 Поток векторного поля

Пусть S – гладкая или кусочно-гладкая двусторонняя поверхность, $\overline{n}$ – единичная нормаль к поверхности S. Выберем одну из сторон поверхности S, т.е. одно из двух возможных направлений нормали $\overline{n}$.

***Определение**. Потоком векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M)$ через поверхность S в направлении нормали $\bar{n}$ называется число*

$$K = \iint_S (\bar{a}, \bar{n}) d\sigma, \qquad (3.1)$$

где $(\bar{a}, \bar{n})$ - скалярное произведение вектора $\bar{a}(M)$ и вектора нормали $\bar{n}$.

Обозначим через $\alpha, \beta, \gamma -$ углы, составленные нормалью $\bar{n}$ с осями координат. Выражая в формуле (3.1) скалярное произведение через координаты векторов, получаем

$$K = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma, \qquad (3.2)$$

и

$$K = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \qquad (3.3)$$

Если поверхность *S* замкнута и ограничивает некоторую пространственную область *T*, то в этом случае за направление вектора *n* обычно берут направление внешней нормали (Рис. 10), а формулу (3.1) записывают в виде $K = \oiint_S (\bar{a}, \bar{n}) d\sigma$.

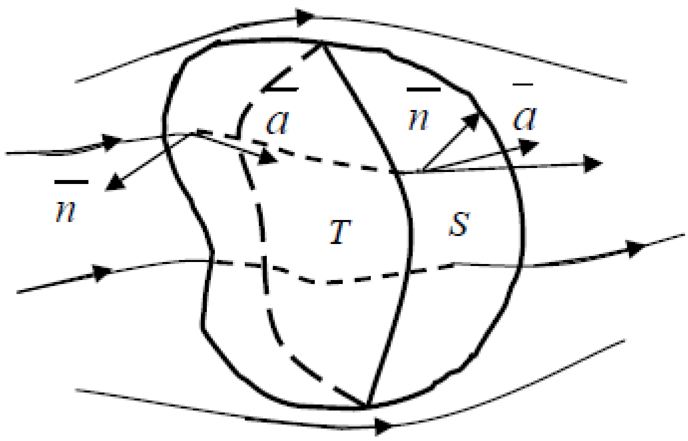

Рис. 10

Интеграл (3.1) определяет количество жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность S в направлении нормали $\bar{n}$ (физический смысл потока).

В точках, где векторные линии выходят из области T (жидкость вытекает), внешняя нормаль образует с вектором $\bar{a}$ острый угол и скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{n}) > 0$; в точках же поверхности, где векторные линии входят в область T (жидкость втекает), внешняя нормаль составляет с вектором $\bar{a}$ тупой угол, поэтому $(\bar{a}, \bar{n}) < 0$. Отсюда следует, что поток вектора, определяемый интегралом (3.1), дает разность между количествами жидкости, вытекающей из области T и втекающей в нее за единицу времени.

2.4 Дивергенция векторного поля

Рассмотрим векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$ и некоторую замкнутую поверхность S в этом поле. Допустим, что поток вектора через внешнюю сторону поверхности S положителен: $K = \oiint\limits_S (\bar{a}, \bar{n})d\sigma > 0$.

Если данное векторное поле рассматривать как поле скоростей движущейся жидкости, то положительность потока означает, что количество жидкости, вытекающей из области T, ограниченной поверхностью S, больше, чем количество жидкости, втекающей в эту область. Иначе говоря, внутри объема должны находиться источники поля, интенсивность (мощность) которых характеризуется величиной потока векторного поля через поверхность S. Более точной характеристикой является средняя интенсивность, которая определяется отношением потока вектора через поверхность S к объему V области T, ограниченной этой поверхностью

$$\frac{\oiint\limits_S (\bar{a}, \bar{n})d\sigma}{V}. \tag{4.1}$$

Чтобы получить характеристику интенсивности потока в точке $M_0 \in T$, будем в (4.1) стягивать поверхность S в точку M_0.

Определение. *Дивергенцией, или расходимостью, векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M)$ в точке M_0 называется предел отношения (4.1) при условии, что поверхность S стягивается в точку M_0 $(S \to M_0)$.*

Обозначается символом $div\,\bar{a}(M_0)$.

Таким образом, по определению

$$div\,\bar{a}(M_0)=\lim_{S\to M_0}\frac{\oint\!\!\!\oint_S(\bar{a},\,\bar{n})d\sigma}{V}. \qquad (4.2)$$

Дивергенция векторного поля – скалярная величина. Она образует скалярное поле в данном векторном поле.

Дивергенция векторного поля $\bar{a}=\bar{a}(M)$ в произвольной точке $M(x,y,z)$ пространства определяется формулой

$$div\,\bar{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (4.3)$$

Пример 4.1. Найти дивергенцию вектора напряженности $\bar{E}$ электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q, помещенным в начало координат.

Решение.

Проекции вектора $\bar{E}$ определяются следующими формулами (см. пример 2.1):

$$P=\frac{qx}{r^3},\ Q=\frac{qy}{r^3},\ R=\frac{qz}{r^3},\ \text{где}\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=q\cdot\frac{r^3-3xr^2\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6},\quad \text{где}\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x=\frac{x}{r},\quad \text{поэтому}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=q\cdot\frac{r^2-3x^2}{r^5}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=q\cdot\frac{r^2-3y^2}{r^5},\ \frac{\partial R}{\partial z}=q\cdot\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

Тогда по формуле (4.3) получим:

$$div\,\overline{E}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=q\cdot\frac{3r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}=0\ \text{(при } r\neq 0\text{)}.$$

Итак, дивергенция вектора $\overline{E}$ равна нулю всюду за исключением начала координат, где помещен заряд.

Используя выражение для дивергенции (4.3) и понятие потока вектора через поверхность (3.1), *формулу Остроградского-Гаусса* можно записать в более компактной форме

$$\oiint_S \left(\overline{a},\ \overline{n}\right)d\sigma=\iiint_T div\,\overline{a}\,dV\,. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) означает, что поток векторного поля $\overline{a}=\overline{a}(M)$ через замкнутую поверхность S в направлении ее внешней нормали равен тройному интегралу по области T, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля.

2.5 Циркуляция и ротор векторного поля

Пусть в некоторой области D задано векторное поле $\overline{a}(M)=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$, и пусть L – гладкая или кусочно-гладкая кривая, расположенная в этой области. Выберем на L одно из двух направлений движения и обозначим через $d\overline{r}\,(dx,dy,dz)$ вектор, имеющий в каждой точке кривой L направление, совпадающее с направлением движения по этой кривой.

Определение*. Линейным интегралом векторного поля* $\overline{a}=\overline{a}(M)$ *вдоль кривой L называется криволинейный интеграл второго рода*

$$\int_L \left(\overline{a},d\overline{r}\right)=\int_L Pdx+Qdy+Rdz\,. \tag{5.1}$$

Пусть L – замкнутая кривая.

Определение. *Циркуляцией векторного поля* $\bar{a}=\bar{a}(M)$ *вдоль замкнутой линии L называется линейный интеграл*

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint\limits_L(\bar{a},d\bar{r}). \qquad (5.2)$$

Определение. *Ротором (или вихрем) векторного поля* $\bar{a}=\bar{a}(M)$ *называется вектор*

$$rot\ \bar{a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}, \qquad (5.3)$$

где $P,Q,R-$проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси.

Для вычисления вектора $rot\,\bar{a}$ удобнее использовать символический определитель третьего порядка

$$rot\,\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}. \qquad (5.4)$$

С помощью понятий ротора и циркуляции *формула Стокса* записывается в более компактной векторной форме следующим образом:

$$\oint\limits_L(\bar{a},d\bar{r})=\iint\limits_S(rot\,\bar{a},\ \bar{n})d\sigma. \qquad (5.5)$$

Таким образом, всякое векторное поле $\bar{a}=\bar{a}(M)$ порождает новое векторное поле – поле ротора исходного поля, причем вектор $rot\,\bar{a}$ в данной точке M векторного поля $\bar{a}=\bar{a}(M)$ характеризует тенденцию к вращению, или завихренность поля $\bar{a}(M)$ в рассматриваемой точке M.

2.6 Простейшие векторные поля

Из всего многообразия векторных полей рассмотрим три типа полей, отличающихся наиболее простой структурой и особенно часто встречающихся в приложениях: потенциальное, соленоидальное и гармоническое векторные поля.

Определение. *Векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$, заданное в области D, называется* *потенциальным*, *если существует такая скалярная функция $u = f(M)$, что во всех точках области D будет выполняться равенство*

$$\bar{a}(M) = grad\ \ f(M). \tag{6.1}$$

Функция $u = f(M)$ называется при этом *потенциалом векторного поля*.

Теорема 6.1. Векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$ будет потенциальным тогда и только тогда, когда $rot\,\bar{a}(M) = 0$.

Из теоремы 6.1. следует, что циркуляция потенциального векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M)$ по любому замкнутому контуру L, принадлежащему односвязной области D, в которой задано это поле, всегда равна нулю:

$$\oint\limits_L (\bar{a}, d\bar{r}) = 0.$$

Определение. *Векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$, заданное в области D, называется* *соленоидальным*, *если во всех точках области выполняется условие $div\,\bar{a}(M) = 0$.*

Определение. *Векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$, заданное в области D, называется* *гармоническим*, *если оно одновременно и потенциальное, и соленоидальное.*

В гармоническом поле во всех точках области D выполняется равенство:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{6.2}$$

Равенство (6.2) называется *уравнением Лапласа*, а функции, ему удовлетворяющие, - *гармоническими функциями*.

ПРАКТИКУМ ПО ТЕМЕ «ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

Задача 1. Вычислить поверхностный интеграл I-го рода: $\iint\limits_S (x+y)dS$, где S – часть плоскости $2x+5y+z=10$, лежащая в первом октанте (Рис. 11).

Решение.

Поверхность S задана уравнением $z=10-2x-5y$, откуда находим $z'_x=-2,\ \ z'_y=-5$ и $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30}$. Следовательно,

$$\iint\limits_S (x+y)dS=\iint\limits_D (x+y)\sqrt{30}\,dxdy,$$

где D – треугольник OAB на плоскости Oxy (Рис. 12), ограниченный прямыми $x=0,\ y=0,\ 2x+5y=10$.

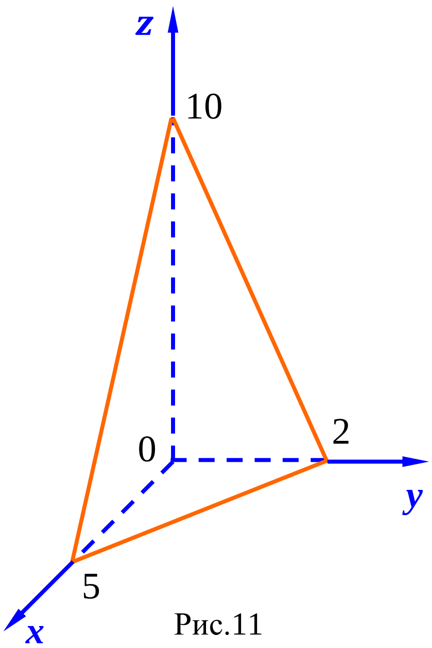

Рис.11

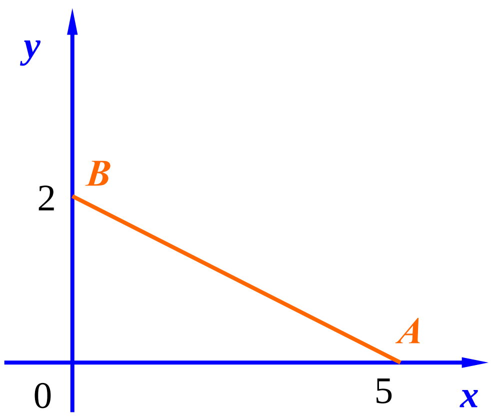

Рис.12

Зададим область D на плоскости Oxy системой неравенств:

$$D:\ \begin{cases} 0\le x\le 5, \\ 0\le y\le 2-\dfrac{2}{5}x. \end{cases}$$

Вычисляя теперь двойной интеграл по области D, получим:

$$\iint_S (x+y)dS = \sqrt{30}\iint_D (x+y)dxdy = \sqrt{30}\int_0^5 dx \int_0^{2-\frac{2}{5}x}(x+y)dy =$$

$$= \sqrt{30}\int_0^5 dx\left(x\int_0^{2-\frac{2}{5}x} dy + \int_0^{2-\frac{2}{5}x} ydy \right) = \sqrt{30}\int_0^5 dx\left(xy\Big|_0^{2-\frac{2}{5}x} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-\frac{2}{5}x} \right) =$$

$$= \sqrt{30}\int_0^5 \left(2 + \frac{6}{5}x - \frac{8}{25}x^2 \right)dx = \frac{35}{3}\sqrt{30}.$$

Задача 2. Вычислить поверхностный интеграл I-го рода $\iint_S xy\,dS$, где S – часть поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=25$, расположенная внутри цилиндра $x^2+y^2=9$ и лежащая в первом октанте (Рис. 13).

Решение.

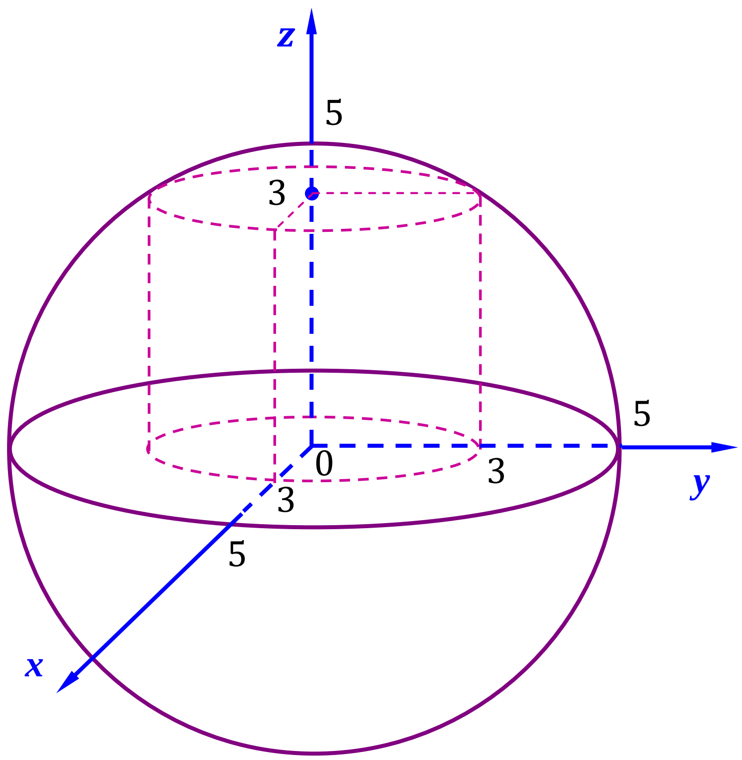

Рис.13

Поверхность задана уравнением $x^2+y^2+z^2=25$, откуда находим $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$. Тогда частные производные равны:

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}};$$

$$z'_y = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}.$$

Тогда для исходного интеграла получаем:

$$\iint_S xy\,dS = \iint_D xy \cdot \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\,dxdy,$$

где $D-$область на плоскости Oxy: четверть окружности радиуса 3 с центром в начале координат (Рис. 14).

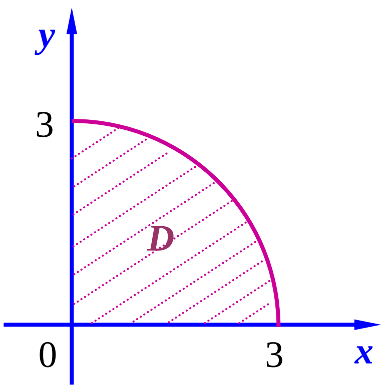

Рис.14

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. Зададим область D в полярных координатах:

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le 3. \end{cases}$$

Выразим подынтегральную функцию в полярных координатах:

$$\frac{5xy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = \frac{5\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{25 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\rho^2\sin 2\varphi}{\sqrt{25 - \rho^2}}.$$

Тогда для исходного интеграла получим

$$\iint_S xy\,dS = \iint_D xy \cdot \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^3 \frac{\rho^2\sin 2\varphi}{\sqrt{25 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^3 \frac{\rho^2}{\sqrt{25 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho =$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=25-\rho^2 \\ dt=-2\rho d\rho \\ \rho d\rho=-\dfrac{1}{2}dt \\ \rho^2=25-t \\ \alpha=25-0=25 \\ \beta=25-3^2=16 \end{array}\right| =\frac{5}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\int\limits_{25}^{16}\frac{25-t}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2}dt\right)=\frac{5}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\int\limits_{16}^{25}\left(\frac{25}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)dt=$$

$$=\frac{5}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\left(25\int\limits_{16}^{25}t^{-\frac{1}{2}}dt-\int\limits_{16}^{25}t^{\frac{1}{2}}dt\right)=\frac{5}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\left(25\cdot 2\sqrt{t}\Big|_{16}^{25}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_{16}^{25}\right)=$$

$$=\frac{5}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\left(50(5-4)+\frac{2}{3}(125-64)\right)=\frac{5}{4}\cdot\frac{28}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi=\frac{35}{3}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{35}{6}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{35}{6}\cdot(-2)=\frac{35}{3}.$$

Задача 3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S xyz\,dS$, где S – фрагмент конической поверхности $\frac{1}{4}z^2=x^2+y^2$, заключенный между плоскостями $z=0,\ z=2$ (Рис. 15).

Решение.

Определим линию, по которой пересекаются конус и плоскость $z=2$:

$\frac{1}{4}\cdot 2^2=x^2+y^2,\quad x^2+y^2=1$ - окружность с центром в начале координат и радиусом $R=1$.

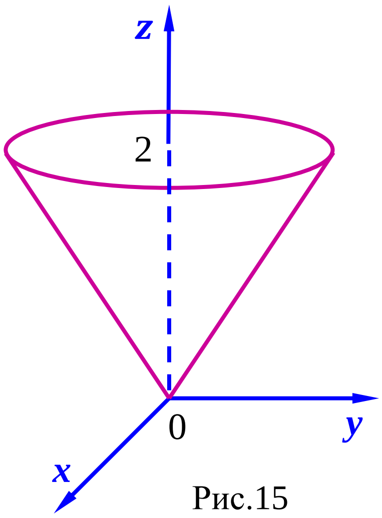

Рис.15

Верхнюю часть конуса задает функция: $z^2=4\left(x^2+y^2\right),\ z=2\sqrt{x^2+y^2}$. Найдем её частные производные:

$$z'_x=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$z'_y = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}\cdot 2y = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{1+\frac{4x^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{5(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \sqrt{5}.$$

Тогда для исходного интеграла получаем:

$$\iint\limits_S xyz\,dS = \iint\limits_D xy\cdot 2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{5}dxdy = 2\sqrt{5}\iint\limits_D xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

где $D-$область на плоскости Oxy: окружности радиуса 1 с центром в начале координат (Рис. 16).

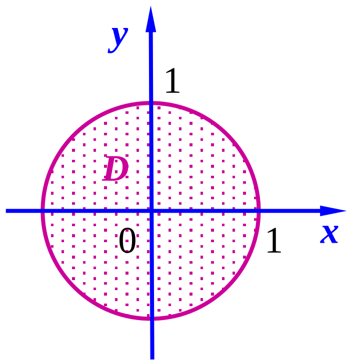

Рис.16

Перейдем в двойном интеграле к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$.

Зададим область D в полярных координатах:

$$D:\ \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 0\le\rho\le 1. \end{cases}$$

Выразим подынтегральную функцию в полярных координатах:

$$xy\sqrt{x^2+y^2} = \rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} =$$

$$=\rho^3\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\rho^3\sin 2\varphi.$$

Тогда для исходного интеграла получим

$$\iint\limits_S xyz\,dS = 2\sqrt{5}\iint\limits_D xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy = 2\sqrt{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{1}{2}\rho^3\sin 2\varphi\cdot\rho d\rho =$$

$$=\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi d\varphi\int_0^1\rho^4 d\rho = \sqrt{5}\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi d\varphi\left(\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^1\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi d\varphi =$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\left.\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\right|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{1}{2}\cos 4\pi+\frac{1}{2}\cos 0\right) = 0.$$

Задача 4. Вычислить поверхностный интеграл II рода (по координатам): $G=\iint_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=4$.

Решение.

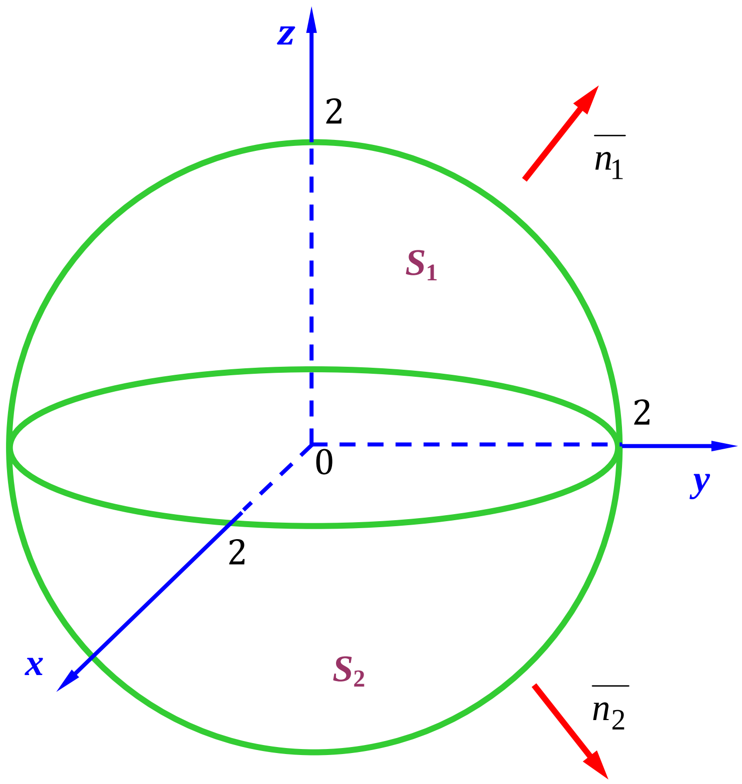

Рис.17

Здесь $P=x,\ Q=y,\ R=z$. Поверхность S можно представить в виде: $S=S_1\cup S_2$, где S_1 – верхняя полусфера, а S_2 – нижняя полусфера (Рис. 17). Выразим уравнения поверхностей S_1 и S_2 из заданного по условию уравнения сферы:

$$z^2=4-x^2-y^2,\quad z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Значит, поверхность S_1 задается уравнением $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, а поверхность S_2 - уравнением $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$. Тогда по свойству поверхностного интеграла второго рода имеем:

$$G=\iint_{S_1} xdydz+ydxdz+zdxdy+\iint_{S_2} xdydz+ydxdz+zdxdy=G_1+G_2.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно. Воспользуемся для этого формулой (2.6) (см. лекцию).
Имеем

$$G_1 = \iint\limits_{S_1} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint\limits_{D} \left(R - z'_x \cdot P - z'_y \cdot Q\right) dxdy .$$

Перед интегралом в правой части берется знак «плюс», т.к. вектор $\overline{n}_1$ образует с осью Oz острый угол и $\cos\gamma > 0$ (Рис. 17). Найдем частные производные функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, задающей поверхность S_1:

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}};$$
$$z'_y = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Тогда выражение $R - z'_x \cdot P - z'_y \cdot Q$ будет иметь вид:

$$R - z'_x \cdot P - z'_y \cdot Q = z + \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \cdot x + \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \cdot y =$$
$$= \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Тогда

$$G_1 = \iint\limits_{S_1} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint\limits_{D} \frac{4}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

где D – проекция поверхности S_1 на плоскость Oxy, в нашем случае это круг с центром в начале координат и радиусом $r = 2$: $x^2 + y^2 = 4$ (Рис. 18). Для вычисления двойного интеграла удобнее перейти к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

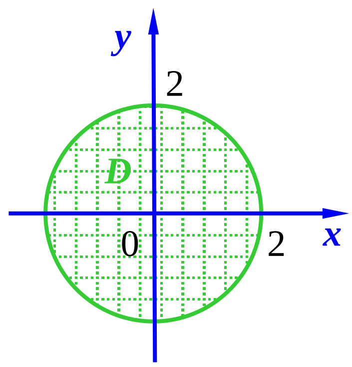

Рис.18

Зададим область D в полярных координатах:

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le 2. \end{cases}$$

Выразим подынтегральную функцию в полярных координатах:

$$\frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=\frac{4}{\sqrt{4-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}}=\frac{4}{\sqrt{4-\rho^2}}.$$

Получим

$$G_1=\iint_D \frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\frac{4}{\sqrt{4-\rho^2}}\cdot\rho d\rho=\left|\begin{array}{l} t=4-\rho^2\\ dt=-2\rho d\rho\\ \rho d\rho=-\frac{1}{2}dt\\ \alpha=4-0=4\\ \beta=4-4=0\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_4^0\frac{-2dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4 t^{-\frac{1}{2}}dt=2\int_0^{2\pi}d\varphi\left(2\sqrt{t}\Big|_0^4\right)=8\int_0^{2\pi}d\varphi=8\varphi\Big|_0^{2\pi}=16\pi.$$

Аналогично вычисляет второй интеграл G_2. По формуле (2.6) имеем:

$$G_2=\iint_{S_2} xdydz+ydxdz+zdxdy=-\iint_D\left(R-z'_x\cdot P-z'_y\cdot Q\right)dxdy.$$

Перед интегралом в правой части берется знак «минус», т.к. вектор $\overline{n_2}$ образует с осью Oz острый угол и $\cos\gamma<0$ (Рис. 17). Найдем частные производные функции $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$, задающей поверхность S_2:

$$z'_x=-\frac{1}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}};$$

$$z'_y=-\frac{1}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\cdot(-2y)=\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Тогда выражение $R-z'_x\cdot P-z'_y\cdot Q$ будет иметь вид:

$$R - z'_x \cdot P - z'_y \cdot Q = z - \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \cdot x - \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \cdot y =$$

$$= -\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = -\frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

Тогда

$$G_2 = \iint\limits_{S_2} xdydz + ydxdz + zdxdy = -\iint\limits_{D} \frac{-4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dxdy = \iint\limits_{D} \frac{4}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dxdy,$$

где D – проекция поверхности S_2 на плоскость Oxy, в нашем случае это тоже круг с центром в начале координат и радиусом $r=2$: $x^2+y^2=4$ (Рис. 18).

Получили интеграл, в точности совпадающий с интегралом G_1, значит, $G_2 = 16\pi$.

Таким образом, для исходного интеграла получаем:

$$G = \iint\limits_{S} xdydz + ydxdz + zdxdy = 16\pi + 16\pi = 32\pi.$$

Задача 5. Вычислить поверхностный интеграл II рода (по координатам): $\oiint\limits_{S} 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^4dxdy$, где S – полная поверхность цилиндра $x^2+y^2=16,\ 0 \le z \le 2$ (Рис. 19).

Решение.

Применим формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy,$$

где T – тело в пространстве, ограниченная поверхностью S.

В нашем случае $P = 4x^3$, $Q = 4y^3$, $R = -6z^4$, тогда $\frac{\partial P}{\partial x} = 12x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 12y^2$, $\frac{\partial R}{\partial z} = -24z^3$. Тогда, применяя формулу Остроградского-Гаусса, получим:

$$\oiint\limits_S 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^4dxdy = \iiint\limits_T \left(12x^2 + 12y^2 - 24z^3\right)dxdydz =$$
$$= 12\iiint\limits_T \left(x^2 + y^2 - 2z^3\right)dxdydz$$

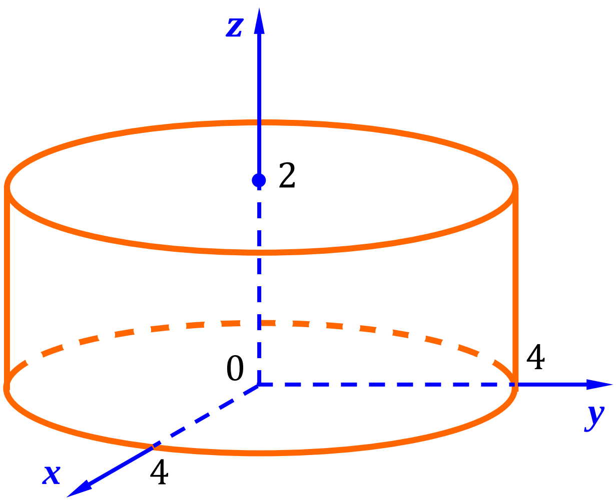

Рис.19

Тройной интеграл вычислим с помощью перехода к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z$. Зададим область интегрирования T в цилиндрических координатах:

$$T: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le 4, \\ 0 \le z \le 2. \end{cases}$$

Выразим в цилиндрических координатах подынтегральную функцию:

$$x^2 + y^2 - 2z^3 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 2z^3 = \rho^2 - 2z^3.$$

Тогда для исходного интеграла получим:

$$\oiint\limits_S 4x^3dydz + 4y^3dxdz - 6z^4dxdy = 12\iiint\limits_T \left(x^2 + y^2 - 2z^3\right)dxdydz =$$
$$= 12\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 d\rho \int\limits_0^2 \left(\rho^2 - 2z^3\right)\rho\, dz = 12\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \rho d\rho \left(\rho^2\int\limits_0^2 dz - 2\int\limits_0^2 z^3dz\right) =$$

$$=12\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\left(\rho^2\cdot z\Big|_0^2-2\cdot\frac{z^4}{4}\Bigg|_0^2\right)=12\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho\left(2\rho^2-8\right)d\rho=$$

$$=24\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\int_0^4\rho^3d\rho-4\int_0^4\rho d\rho\right)==24\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^4-4\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^4\right)=24\cdot32\int_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=768\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=1536\pi.$$

Задача 6. Вычислить криволинейный интеграл, используя формулу Стокса: $\oint\limits_C(x+z)dx+(x-y)dy+xdz$, где C – кривая, имеющая форму эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\quad z=1$ (Рис. 20).

Решение.

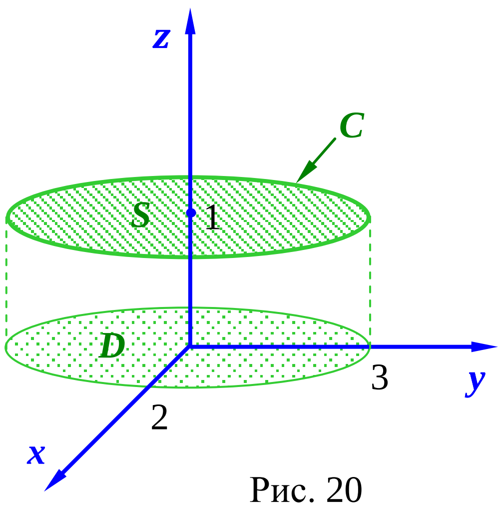

Рис. 20

Пусть поверхность S – это часть плоскости $z=1$, ограниченная эллипсом (Рис. 20). Пусть $P=x+z$, $Q=x-y$, $R=x$, тогда находим частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=1,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=0.$$

Применим формулу Стокса:

$$\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=\oint\limits_C Pdx+Qdy+Rdz.$$

Имеем:

$$\oint\limits_C(x+z)dx+(x-y)dy+xdz=\iint\limits_S\left[(0-0)\cos\alpha+(1-1)\cos\beta+(1-0)\cos\gamma\right]d\sigma=$$

$$= \iint_S \cos\gamma \, d\sigma = \iint_D dxdy,$$

где D – проекция поверхности S на плоскость Oxy, эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 3$ (Рис. 21).

Зададим область D системой неравенств, для этого выразим y из уравнения эллипса:

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{4}, \; y^2 = \frac{9}{4}\left(4 - x^2\right),$$

$$y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}.$$

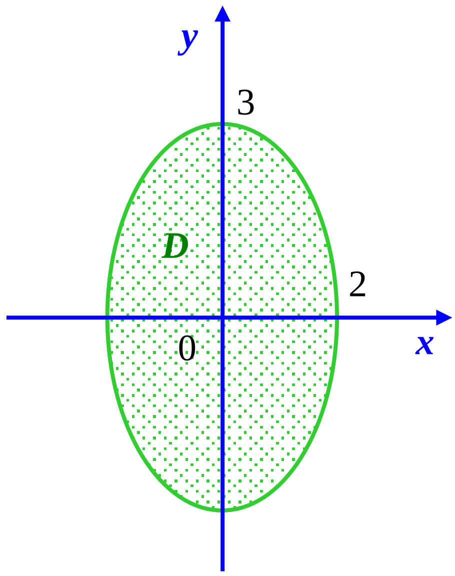

Рис. 21

Тогда

$$D: \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ -\frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} \le y \le \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}. \end{cases}$$

Следовательно, для исходного интеграла имеем:

$$\oint_C (x+z)dx + (x-y)dy + xdz = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} dy = \int_{-2}^{2} dx \left(y\Big|_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} \right) =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right)dx = 3\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} \\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 12\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 12\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt +$$

$$+ 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = 6t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 6\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi + 3\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 6\pi.$$

ПРАКТИКУМ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ»

Задача 1. Скалярное поле задано функцией $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Найти уравнения поверхностей уровня. Какая из этих поверхностей проходит через точку $A\left(2;0;-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$?

Решение.

Поверхности уровня задаются уравнением $f(x,y,z)=C,\ C=const$. В нашем случае

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C.$$

Если поверхность проходит через точку A, то координаты точки удовлетворяют уравнению поверхности, т.е. справедливо равенство

$$C=\frac{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2^2+0^2+\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}}=-\frac{1}{2},$$

Значит, ее уравнение имеет вид

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{1}{2},$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+y^2=3z^2, \\ z<0 \end{cases}$$

Это поверхность прямого кругового конуса, а точнее, одна из двух ее полостей (Рис. 22).

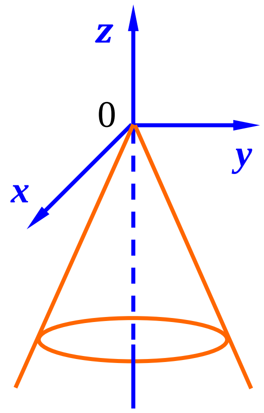

Рис.22

Задача 2. Найти градиент скалярного поля $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}$ и его модуль в точке $M_0(1;2)$.

Решение.

Градиент скалярного поля определим по формуле: $grad\ z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\bar{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$.

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{\frac{y^2-x^4}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y}\cdot 2x=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}}\cdot\frac{2x}{y}=\frac{2x}{\sqrt{y^2-x^4}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_y=\frac{1}{\sqrt{\frac{y^2-x^4}{y^2}}}\cdot x^2\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}}\cdot\frac{-x^2}{y^2}=\frac{-x^2}{y\sqrt{y^2-x^4}}$$

Тогда градиент $grad\, z=\frac{2x}{\sqrt{y^2-x^4}}\cdot\bar{i}-\frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^4}}\cdot\bar{j}$. Подставим в эту формулу теперь координаты точки $M_0(1;2)$, получим: $grad\, z\big|_{M_0}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\bar{i}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\bar{j}$.

Найдем модуль градиента:

$$\left|grad\, z\right|_{M_0}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{9}{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Задача 3. Найти производную скалярного поля $z=\ln\frac{x^2+y^2}{xy}$ в точке $M_0(1;\ 2)$ по направлению вектора $\bar{s}=6\bar{i}+8\bar{j}$.

Решение.

Координаты вектора $\bar{s}(6;\ 8)$, тогда длина вектора

$$\left|\bar{s}\right|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{s}$:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\left|\bar{s}\right|}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ \cos\beta=\frac{y}{\left|\bar{s}\right|}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

Находим частные производные функции z и их значения в заданной точке M_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{xy}}\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)'_x=\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x\cdot xy-\left(x^2+y^2\right)\cdot y}{x^2y^2}=\frac{x^2y-y^3}{xy\left(x^2+y^2\right)}=$$

$$=\frac{y\left(x^2-y^2\right)}{xy\left(x^2+y^2\right)}=\frac{x^2-y^2}{x\left(x^2+y^2\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{xy}}\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)'_y=\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{2y\cdot xy-\left(x^2+y^2\right)\cdot x}{x^2y^2}=\frac{xy^2-x^3}{xy\left(x^2+y^2\right)}=$$

$$=\frac{x\left(y^2-x^2\right)}{xy\left(x^2+y^2\right)}=\frac{y^2-x^2}{y\left(x^2+y^2\right)}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1-4}{1\cdot(1+4)}=-\frac{3}{5},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{4-1}{2(1+4)}=\frac{3}{10}.$$

Тогда производная по направлению в указанной точке равна

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{3}{25}.$$

Задача 4. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\frac{x}{yz^2}$ и $v=x^2-y^2-3z^2$ в точке $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Решение.

Определим градиент для каждого скалярного поля по формуле

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{yz^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{z^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{1}{2z^3}\right)=-\frac{x}{2yz^3}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=-6z.$$

Тогда градиенты заданных скалярных полей имеют вид:

$$grad\,u=\frac{1}{yz^2}\cdot\bar{i}-\frac{x}{y^2z^2}\cdot\bar{j}-\frac{x}{2yz^3}\cdot\bar{k};$$

$$grad\,v=2x\cdot\bar{i}-2y\cdot\bar{j}-6z\cdot\bar{k}.$$

Подставим в эти формулы координаты точки M_0:

$$\left.grad\,u\right|_{M_0}=3\sqrt{2}\cdot\bar{i}-3\sqrt{2}\cdot\bar{j}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\bar{k};$$

$$\left.grad\,v\right|_{M_0}=\sqrt{2}\cdot\bar{i}-\sqrt{2}\cdot\bar{j}-2\sqrt{3}\cdot\bar{k}.$$

Таким образом, требуется найти угол φ между получившимися векторами. Обозначим для удобства $\bar{a} = grad\, u|_{M_0}$, $\bar{b} = grad\, v|_{M_0}$. Тогда $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$.

Вычислим модули векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и их скалярное произведение:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(-3\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{18 + 18 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{171}}{2} = \frac{3\sqrt{19}}{2};$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2 + 2 + 12} = \sqrt{16} = 4;$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \left(-3\sqrt{2}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-2\sqrt{3}\right) = 6 + 6 + 9 = 21.$$

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{21}{\frac{3\sqrt{19}}{2} \cdot 4} = \frac{7}{2\sqrt{19}}, \quad \text{откуда находим} \quad \varphi = \arccos\frac{7}{2\sqrt{19}} \approx 37^\circ.$$

Задача 5. Задано векторное поле $\bar{a} = xy^2\bar{i} + yz^3\bar{j} + zx^4\bar{k}$. Найти дивергенцию $div\, \bar{a}$ и ротор $rot\, \bar{a}$ векторного поля в точке $M_0(2; -1; 5)$. Проверить потенциальность и соленоидальность данного поля.

Решение.

Дивергенцию векторного поля определяем по формуле:

$$div\, \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

По условию, $P = xy^2$, $Q = yz^3$, $R = zx^4$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = z^3, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = x^4.$$

Тогда $div\, \bar{a} = y^2 + z^3 + x^4$. Подставляя сюда координаты точки M_0, получим:

$$div\, \bar{a}\Big|_{M_0} = (-1)^2 + 5^3 + 2^4 = 1 + 125 + 16 = 142.$$

Так как $div\, \bar{a}\Big|_{M_0} \neq 0$, то векторное поле *не является соленоидальным*.

Для вычисления ротора векторного поля $rot\, \bar{a}$ воспользуемся символическим определителем третьего порядка

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & yz^3 & zx^4 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}\left(zx^4\right)\bar{i} + \frac{\partial}{\partial x}\left(yz^3\right)\bar{k} + \frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2\right)\bar{j} - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right)\bar{k} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(yz^3\right)\bar{i} - \frac{\partial}{\partial x}\left(zx^4\right)\bar{j} = \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} - 2xy\bar{k} - 3yz^2\bar{i} - 4zx^3\bar{j} =$$

$$= -3yz^2\bar{i} - 4zx^3\bar{j} - 2xy\bar{k}$$

Подставляя координаты заданной точки $M_0(2;-1;5)$, получим:

$$rot\,\bar{a}\Big|_{M_0} = -3(-1)\cdot 25\bar{i} - 4\cdot 5\cdot 8\bar{j} - 2\cdot 2\cdot(-1)\bar{k} = 75\bar{i} - 160\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Поскольку $rot\,\bar{a}\Big|_{M_0} \neq \bar{0}$, то заданное векторное поле *не является потенциальным.*

Задача 6. Найти поток векторного поля $\bar{a} = 2x\bar{i} + y\bar{j} - 2z\bar{k}$ через часть плоскости P: $2x + \dfrac{y}{2} + z = 1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Решение.

Изобразим заданную плоскость на чертеже (Рис. 23). Для этого приведем уравнение плоскости к виду в отрезках на осях:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1.$$

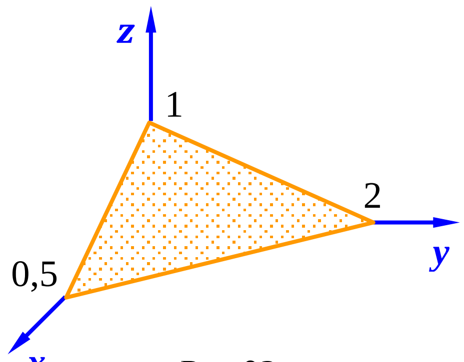

Рис.23

Поток векторного поля $\bar{a}$ через поверхность S определяем с помощью поверхностного интеграла

$$K = \iint_S (\bar{a}, \bar{n})\,d\sigma,$$

где $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали.

Определим координаты вектора нормали плоскости P, для этого приведем уравнение плоскости к общему виду, умножив обе части на 2: $4x + y + 2z - 2 = 0$. Значит, вектор нормали $\overline{N}(4;1;2)$.

Единичный вектор нормали определяем по формуле: $\bar{n}=\dfrac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$, где $|\bar{N}|$- длина вектора нормали. Находим: $|\bar{N}|=\sqrt{4^2+1^2+2^2}=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21}$, тогда искомый единичный вектор нормали плоскости P равен

$$\bar{n}\left(\frac{4}{\sqrt{21}};\frac{1}{\sqrt{21}};\frac{2}{\sqrt{21}}\right).$$

Вычислим скалярное произведение $(\bar{a},\bar{n})$:

$$(\bar{a},\bar{n})=2x\cdot\frac{4}{\sqrt{21}}+y\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}-2z\cdot\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{8x+y-4z}{\sqrt{21}}.$$

Спроектируем заданную плоскость P на координатную плоскость Oxy (Рис. 3). Тогда искомый поток можно рассчитать по формуле

$$K=\iint\limits_S(\bar{a},\bar{n})d\sigma=\iint\limits_D(\bar{a},\bar{n})\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy,$$

где $D-$проекция плоскости P на плоскость Oxy, $z=z(x,y)$ - уравнение плоскости P, в котором переменная z выражена явным образом.

Имеем

$$P:\ \ 2x+\frac{y}{2}+z=1,\ \ z=1-2x-\frac{y}{2}.$$

Найдем частные производные: $z'_x=-2,\ \ z'_y=-\dfrac{1}{2}$, тогда

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+4+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{2};$$

$$(\bar{a},\bar{n})=\frac{8x+y-4z}{\sqrt{21}}=\frac{8x+y-4\left(1-2x-\frac{y}{2}\right)}{\sqrt{21}}=\frac{16x+3y-4}{\sqrt{21}}.$$

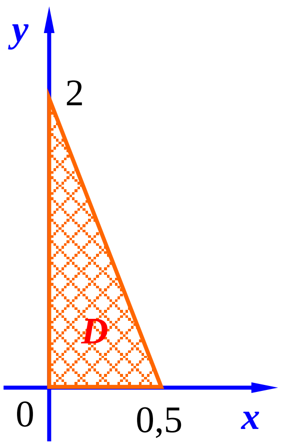

Рис.24

Область D на плоскости Oxy ограничена осями координат и прямой $2x+\dfrac{y}{2}=1$, или $y=2-4x$ (Рис. 24). Зададим область D системой неравенств:

$$D:\ \begin{cases}0\le x\le\frac{1}{2},\\ 0\le y\le 2-4x.\end{cases}$$

Тогда искомый поток равен

$$K=\iint\limits_D(\overline{a},\overline{n})\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\iint\limits_D\frac{16x+3y-4}{\sqrt{21}}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D(16x+3y-4)dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dx\int\limits_0^{2-4x}(16x+3y-4)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dx\left((16x-4)\int\limits_0^{2-4x}dy+3\int\limits_0^{2-4x}ydy\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dx\left((16x-4)\cdot y\Big|_0^{2-4x}-3\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{2-4x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left((16x-4)(2-4x)-\frac{3}{2}(2-4x)^2\right)dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(36x-44x^2-7)dx=36\int\limits_0^{\frac{1}{2}}xdx-$$

$$-44\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x^2dx-7\int\limits_0^{\frac{1}{2}}dx=36\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-44\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-7\cdot x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}-\frac{11}{6}-\frac{7}{2}=-\frac{5}{6}.$$

Задача 7. Найти поток векторного поля $\overline{a}=x\overline{i}+z\overline{j}-y\overline{k}$ через замкнутую поверхность S: $\begin{cases} z=4-2(x^2+y^2) \\ z=2(x^2+y^2) \end{cases}$. Нормаль к поверхности внешняя.

Решение.

Заданная замкнутая поверхность S образована пересечением двух параболоидов (Рис. 25). Найдем уравнение линии, по которой они пересекаются:

$$4-2(x^2+y^2)=2(x^2+y^2),\ 4(x^2+y^2)=4,\ x^2+y^2=1;$$

$$z=2(x^2+y^2)=2.$$

Следовательно, линия пересечения параболоидов – окружность радиуса 1, лежащая в плоскости $z=2$.

Для вычисления потока векторного поля через замкнутую поверхность воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса:

$$K=\oiint\limits_S(\overline{a},\ \overline{n})d\sigma=\iiint\limits_T \operatorname{div}\overline{a}\,dV.$$

Вычислим дивергенцию векторного поля $\overline{a}$. Имеем: $P=x,\ Q=z,\ R=-y$, частные производные: $\frac{\partial P}{\partial x}=1,\ \ \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial R}{\partial z}=0$. Тогда дивергенция равна

$$div\,\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Таким образом, поток векторного поля равен

$$K = \iiint\limits_T dxdydz\,.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Выразим уравнения поверхностей через цилиндрические координаты:

$$z = 4 - 2\left(x^2 + y^2\right),$$
$$z = 4 - 2\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right),$$
$$z = 4 - 2\rho^2;$$

$$z = 2\left(x^2 + y^2\right),$$
$$z = 2\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right),$$
$$z = 2\rho^2.$$

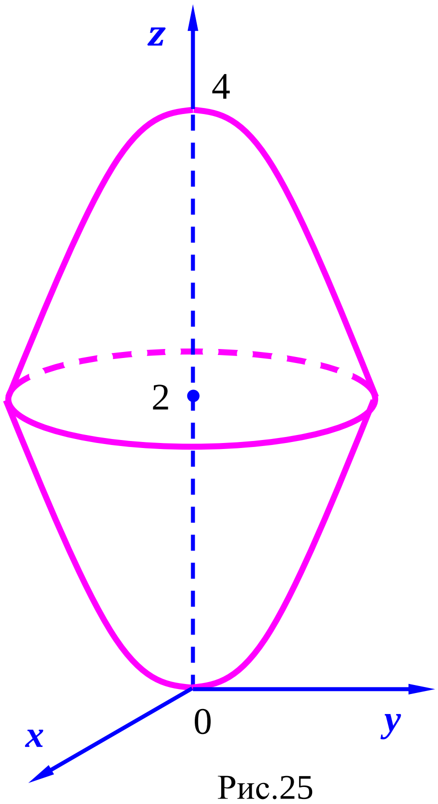

Рис.25

Таким образом, область интегрирования T может быть задана системой неравенств:

$$T: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le 1, \\ 2\rho^2 \le z \le 4 - 2\rho^2. \end{cases}$$

Модуль функционального определителя Якоби равен $\left|I(\varphi, \rho, z)\right| = \rho$.

Таким образом, искомый поток векторного поля равен

$$K = \iiint\limits_T dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 d\rho \int\limits_{2\rho^2}^{4-2\rho^2} \rho\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \left(z\Big|_{2\rho^2}^{4-2\rho^2} \right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\left(4 - 4\rho^2\right) d\rho = 4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_0^1 \rho d\rho - \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho \right) = 4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 \right) =.$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Задача 8. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Решение.

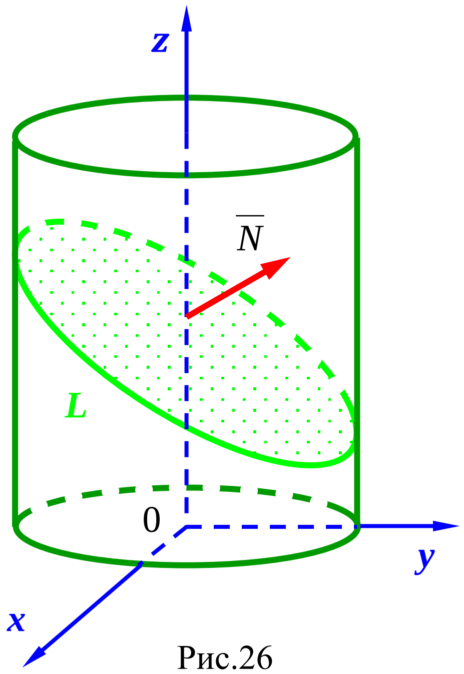

Рис.26

Контур L представляет собой линию пересечения прямого кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 9$ и плоскости $x + y + z = 1$ (Рис. 26).

В качестве поверхности S, натянутой на контур L, выберем часть плоскости $x + y + z = 1$, заключенной внутри контура.

Циркуляцию векторного поля определим по формуле Стокса:

$$C = \oint_L \left(\bar{a}, d\bar{r}\right) = \iint_S \left(rot\,\bar{a},\ \bar{n}\right) d\sigma .$$

Определим единичный вектор нормали $\bar{n}$ к поверхности S:

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{\left|\bar{N}\right|},\ \bar{N}(1;\ 1;\ 1),\ \left|\bar{N}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

тогда $\bar{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Вычислим ротор векторного поля $\bar{a}$. Имеем: $P = xy,\ \ Q = yz,\ \ R = xz$, тогда

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}(xz)\,\bar{i} + \frac{\partial}{\partial x}(yz)\bar{k} + \frac{\partial}{\partial z}(xy)\bar{j} - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\bar{k} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}(yz)\bar{i} - \frac{\partial}{\partial x}(xz)\bar{j} = \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} - x\bar{k} - y\bar{i} - z\bar{j} = -y\bar{i} - z\bar{j} - x\bar{k}$$

Вычисляем скалярное произведение $\left(rot\,\bar{a},\ \bar{n}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z)$. Тогда искомую циркуляцию векторного поля можно найти по формуле

$$C = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) d\sigma .$$

Перейдем от поверхностного интеграла к двойному, спроектировав поверхность S на плоскость Oxy в область D – круг радиуса 3 с центром в начале координат (Рис. 27).

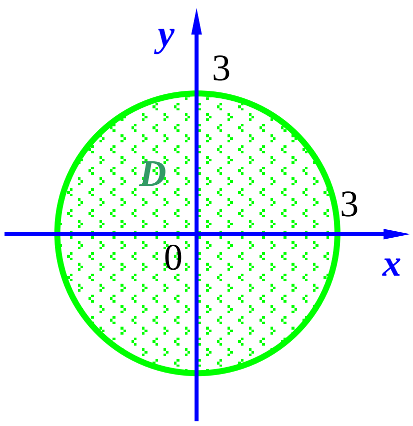

Рис.27

$$C=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)d\sigma=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_D (x+y+z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

Выразим из уравнения плоскости переменную z: $z=1-x-y$. Найдем частные производные: $z'_x=-1,\ z'_y=-1$. Тогда $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{3}$.

Следовательно, циркуляция может быть найдена с помощью двойного интеграла

$$C=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_D (x+y+1-x-y)\sqrt{3}dxdy=-\iint_D dxdy.$$

Двойной интеграл вычислим с помощью перехода к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Зададим область D в полярных координатах:

$$D:\ \begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le 3.\end{cases}$$

Тогда искомая циркуляция равна

$$C=-\iint_D dxdy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\rho d\rho=-\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^3\right)=-\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=-\frac{9}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}=-9\pi.$$

Задача 9. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}=x\bar{i}-z\bar{j}+y\bar{k}$ вдоль контура L (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t),

$$L:\ \begin{cases}x=2\cos t,\\ y=3\sin t,\\ z=4\cos t-3\sin t-3.\end{cases}$$

Решение.

Искомую циркуляцию определим по формуле: $C=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$.

Имеем:

$$P=x,\ \ Q=-z,\ \ R=y,$$
$$dx=-2\sin t dt,\ dy=3\cos t dt,\ dz=(-4\sin t-3\cos t)dt.$$

Тогда циркуляция равна

$$C=\int_0^{2\pi}\left(-2\sin t\cdot 2\cos t-3\cos t(4\cos t-3\sin t-3)+3\sin t(-4\sin t-3\cos t)\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-2\sin 2t-12-9\cos t)dt=-2\int_0^{2\pi}\sin 2t dt-12\int_0^{2\pi}dt-9\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=\cos 2t\Big|_0^{2\pi}-$$

$$-12t\Big|_0^{2\pi}-9\sin t\Big|_0^{2\pi}=\cos 4\pi-\cos 0-24\pi-9(\sin 2\pi-\sin 0)=-24\pi.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вычислить поверхностный интеграл I рода:

1) $\iint\limits_S x^3 dS$, где S – часть плоскости $x + y + z = 4$, расположенная в первом октанте;

2) $\iint\limits_S (x + y + z) dS$, где S – верхняя полусфера $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;

3) $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dS$, где S – конус $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$.

2. Вычислить поверхностный интеграл II рода при условии, что нормаль к поверхности S образует острый угол с осью Oz:

1) $\iint\limits_S \left(y^2 + z^2\right) dxdy$, где S: $z = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le y \le 1$;

2) $\iint\limits_S 3xdydz + 2ydxdz + zdxdy$, где S: $x + y + 2z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

3) $\iint\limits_S xdydz + (y + 2z)dxdz + (z - 2y)dxdy$, где S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

3. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл по внешней стороне замкнутой поверхности S:

1) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S: $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 6$;

2) $\iint\limits_S \left(e^z + x\right)dydz + \left(\sqrt{x} + y\right)dxdz + (xy - z)dxdy$, где S: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$;

3) $\iint\limits_S (x + y)dydz + (y + z)dxdz + (x + z)dxdy$, где S: $z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

4. Найти производную скалярного поля $u = x^2 - arctg(y + z)$ по направлению вектора $\bar{s} = 18\bar{i} + 9\bar{j} + 18\bar{k}$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

5. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \sqrt{2}x - yz + z^3$, $v = \dfrac{xy^2}{z^4}$ в точке $M_0(0;\ 2;\ 1)$.

6. Найти поток векторного поля $\overline{a} = 2x\overline{i} + 3y\overline{j} + 4z\overline{k}$ через поверхность S: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$ $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$, если нормаль к поверхности S образует острый угол с осью Oz.

7. Найти поток векторного поля $\overline{a} = \left(x^2 + y^2\right)\overline{i} + \left(y^2 + z^2\right)\overline{j} + \left(x^2 + z^2\right)\overline{k}$ через замкнутую поверхность S: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ в направлении внешней нормали.

8. Найти дивергенцию векторного поля $\overline{a} = 2xy^2\overline{i} - yz\overline{j} + 3z^2\overline{k}$ в точке $M_0(1; -2; 1)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a} = y^2z^2\overline{i} + x^2z^2\overline{j} + x^2y^2\overline{k}$ вдоль контура $L: x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 2\cos 3t$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t.

10. Найти ротор векторного поля $\overline{a} = x^2yz\overline{i} + xy^2z\overline{j} + xyz^2\overline{k}$ в точке $M_0(0; 1; 1)$.

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1.

Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Вариант	$u(x,y,z)$	$v(x,y,z)$	$M_0(x_0,y_0,z_0)$
1	$u=\dfrac{yz^2}{x^2}$	$v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$	$M_0\left(\sqrt{2};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
2	$u=x^2yz^3$	$v=\dfrac{4\sqrt{6}}{x}-\dfrac{\sqrt{6}}{9y}+\dfrac{3}{z}$	$M_0\left(2;\ \dfrac{1}{3};\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$
3	$u=\dfrac{z^3}{xy^2}$	$v=9\sqrt{2}x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$	$M_0\left(\dfrac{1}{3};\ 2;\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$
4	$u=\dfrac{z}{x^3y^2}$	$v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}z}$	$M_0\left(1;\ 2;\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$
5	$u=\dfrac{x^2}{yz^2}$	$v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$	$M_0\left(\sqrt{2};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
6	$u=\dfrac{z^2}{xy^2}$	$v=3\sqrt{2}x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$	$M_0\left(\dfrac{1}{3};\ 2;\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$
7	$u=\dfrac{xz^2}{y}$	$v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$	$M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};\ \dfrac{1}{\sqrt{6}};\ 1\right)$
8	$u=\dfrac{yz^2}{x}$	$v=\dfrac{\sqrt{6}}{2x}-\dfrac{\sqrt{6}}{2y}+\dfrac{2}{3z}$	$M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
9	$u=\dfrac{xy^2}{z^2}$	$v=3\sqrt{2}x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$	$M_0\left(\dfrac{1}{3};\ 2;\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$
10	$u=\dfrac{x^3y^2}{z}$	$v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}z}$	$M_0\left(1;\ 2;\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$
11	$u=\dfrac{1}{x^2yz}$	$v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}z}$	$M_0\left(2;\ \dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$
12	$u=\dfrac{x^2}{y^2z^3}$	$v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$	$M_0\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
13	$u=xyz$	$v=x^2+9y^2+6z^2$	$M_0\left(1;\ \dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

14	$u=\frac{y^3}{x^2z}$	$v=\frac{2}{x}+\frac{3}{2y}-\frac{\sqrt{6}}{4z}$	$M_0\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{\frac{3}{2}};\ \frac{1}{2}\right)$

Вариант	$u(x,y,z)$	$v(x,y,z)$	$M_0(x_0,y_0,z_0)$
14	$u=\frac{y^3}{x^2z}$	$v=\frac{2}{x}+\frac{3}{2y}-\frac{\sqrt{6}}{4z}$	$M_0\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{\frac{3}{2}};\ \frac{1}{2}\right)$
15	$u=xy^2z$	$v=\sqrt{2}x^2-\frac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$	$M_0\left(1;\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
16	$u=\frac{x}{yz^2}$	$v=-\frac{\sqrt{6}}{2x}+\frac{\sqrt{6}}{2y}-\frac{2}{3z}$	$M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
17	$u=\frac{y^2z^3}{x^2}$	$v=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$	$M_0\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
18	$u=\frac{y^2z^3}{x}$	$v=\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2z}$	$M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
19	$u=\frac{y}{xz^2}$	$v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$	$M_0\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ 1\right)$
20	$u=\frac{yz^2}{x}$	$v=x^2-y^2-3z^2$	$M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
21	$u=\frac{z^2}{x^2y^2}$	$v=\frac{3x^2}{\sqrt{2}}-\frac{y^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}z^2$	$M_0\left(\frac{2}{3};\ 2;\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
22	$u=\frac{x^2}{y^2z^3}$	$v=\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{2}}-\frac{8z^3}{\sqrt{3}}$	$M_0\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
23	$u=x^2yz^3$	$v=\frac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2$	$M_0\left(2;\ \frac{1}{3};\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
24	$u=\frac{xy^2}{z^3}$	$v=9\sqrt{2}x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-\frac{4z^3}{\sqrt{3}}$	$M_0\left(\frac{1}{3};\ 2;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
25	$u=\frac{1}{xy^2z}$	$v=\sqrt{2}x^2-\frac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$	$M_0\left(1;\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
26	$u=\frac{1}{xyz}$	$v=x^2+9y^2+6z^2$	$M_0\left(1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
27	$u=\frac{x}{y^2z^3}$	$v=\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2z}$	$M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

28	$u=x^2yz$	$v=-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}z}$	$M_0\left(2;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
29	$u=\frac{y^2z^3}{x^2}$	$v=\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{y^3}{\sqrt{2}}-\frac{8z^3}{\sqrt{3}}$	$M_0\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
30	$u=\frac{x^2z}{y^3}$	$v=-\frac{3x^3}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}y^3}{3}+8\sqrt{3}z^3$	$M_0\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{\frac{3}{2}};\ \frac{1}{2}\right)$

Задача 2.

Найти поток векторного поля $\bar{a}=\bar{a}(M)$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Вариант	$\bar{a}=\bar{a}(M)$	Плоскость P
1	$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
2	$\bar{a}=y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
3	$\bar{a}=2x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+y+z=1$
4	$\bar{a}=x\bar{i}+3y\bar{j}+2z\bar{k}$	$x+y+z=1$
5	$\bar{a}=2x\bar{i}+3y\bar{j}$	$x+y+z=1$
6	$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$\frac{x}{2}+y+z=1$
7	$\bar{a}=x\bar{i}+2y\bar{j}+z\bar{k}$	$\frac{x}{2}+y+z=1$
8	$\bar{a}=y\bar{j}+3z\bar{k}$	$\frac{x}{2}+y+z=1$
9	$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$
10	$\bar{a}=2x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$	$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$
11	$\bar{a}=3x\bar{i}+2z\bar{k}$	$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$
12	$\bar{a}=2x\bar{i}+3y\bar{j}+z\bar{k}$	$\frac{x}{3}+y+\frac{z}{2}=1$
13	$\bar{a}=x\bar{i}+3y\bar{j}-z\bar{k}$	$\frac{x}{3}+y+\frac{z}{2}=1$
14	$\bar{a}=-2x\bar{i}+y\bar{j}+4z\bar{k}$	$\frac{x}{3}+y+\frac{z}{2}=1$
15	$\bar{a}=x\bar{i}-y\bar{j}+6z\bar{k}$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1$
16	$\bar{a}=2x\bar{i}+5y\bar{j}+5z\bar{k}$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1$

17	$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$	$2x + \frac{y}{2} + z = 1$
18	$\overline{a} = 2x\overline{i} + y\overline{j} - 2z\overline{k}$	$2x + \frac{y}{2} + z = 1$
19	$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + 2z\overline{k}$	$2x + \frac{y}{2} + z = 1$
20	$\overline{a} = -x\overline{i} + y\overline{j} + 12z\overline{k}$	$2x + \frac{y}{2} + z = 1$
21	$\overline{a} = x\overline{i} + 3y\overline{j} + 8z\overline{k}$	$x + 2y + \frac{z}{2} = 1$
22	$\overline{a} = x\overline{i} - y\overline{j} + 6z\overline{k}$	$x + 2y + \frac{z}{2} = 1$
23	$\overline{a} = x\overline{i} + 2y\overline{j} + 5z\overline{k}$	$x + 2y + \frac{z}{2} = 1$
24	$\overline{a} = x\overline{i} + 4y\overline{j} + 5z\overline{k}$	$x + 2y + \frac{z}{2} = 1$
25	$\overline{a} = 2x\overline{i} + 3y\overline{j} + z\overline{k}$	$2x + 3y + z = 1$
26	$\overline{a} = 2x\overline{i} + 3y\overline{j} + 4z\overline{k}$	$2x + 3y + z = 1$
27	$\overline{a} = x\overline{i} + 9y\overline{j} + 8z\overline{k}$	$x + 2y + 3z = 1$
28	$\overline{a} = 8x\overline{i} + 11y\overline{j} + 17z\overline{k}$	$x + 2y + 3z = 1$
29	$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$	$2x + 3y + z = 1$
30	$\overline{a} = x\overline{i} - 8y\overline{j} + 6z\overline{k}$	$\frac{x}{4} + 2y + \frac{z}{2} = 1$

Задача 3.

Найти модуль циркуляции векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M)$ вдоль контура L.

Вариант	$\overline{a} = \overline{a}(M)$	Контур L
1	$\overline{a} = (x^2 - y)\overline{i} + x\overline{j} + \overline{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1 \end{cases}$
2	$\overline{a} = xz\overline{i} - \overline{j} + y\overline{k}$	$\begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4 \end{cases}$
3	$\overline{a} = yz\overline{i} + 2xz\overline{j} + xy\overline{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \ (z > 0) \end{cases}$
4	$\overline{a} = x\overline{i} + yz\overline{j} - x\overline{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

5	$\overline{a}=(x-y)\overline{i}+x\overline{j}-z\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=5 \end{cases}$
6	$\overline{a}=y\overline{i}-x\overline{j}+z^2\overline{k}$	$\begin{cases} z=3\left(x^2+y^2\right)+1, \\ z=4 \end{cases}$
7	$\overline{a}=yz\overline{i}+2xz\overline{j}+y^2\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=16\ (z>0) \end{cases}$
8	$\overline{a}=xy\overline{i}+yz\overline{j}+xz\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x+y+z=1 \end{cases}$
9	$\overline{a}=y\overline{i}+(1-x)\overline{j}-z\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=1\ (z>0) \end{cases}$
10	$\overline{a}=y\overline{i}-x\overline{j}+z^2\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=4 \end{cases}$
11	$\overline{a}=4x\overline{i}+2\overline{j}-xy\overline{k}$	$\begin{cases} z=2\left(x^2+y^2\right)+1, \\ z=7 \end{cases}$
12	$\overline{a}=2y\overline{i}-3x\overline{j}+z^2\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=1 \end{cases}$
13	$\overline{a}=-3z\overline{i}+y^2\overline{j}+2y\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x-3y-2z=1 \end{cases}$
14	$\overline{a}=2y\overline{i}+5z\overline{j}+3x\overline{k}$	$\begin{cases} 2x^2+2y^2=1, \\ x+y+z=3 \end{cases}$
15	$\overline{a}=2y\overline{i}+\overline{j}-2yz\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ z=2 \end{cases}$
16	$\overline{a}=(x-y)\overline{i}+x\overline{j}+z^2\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2-4z^2=0, \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$
17	$\overline{a}=xz\overline{i}-\overline{j}+y\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=1 \end{cases}$
18	$\overline{a}=2yz\overline{i}+xz\overline{j}-x^2\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=9\ (z>0) \end{cases}$
19	$\overline{a}=4x\overline{i}-yz\overline{j}+x\overline{k}$	$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y+z=1 \end{cases}$

20	$\bar{a} = -y\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 1 \end{cases}$
21	$\bar{a} = y\bar{i} + 3x\bar{j} + z^2\bar{k}$	$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1, \\ z = 3 \end{cases}$
22	$\bar{a} = 2yz\bar{i} + xz\bar{j} + y^2\bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \ (z > 0) \end{cases}$
23	$\bar{a} = (2 - xy)\bar{i} - yz\bar{j} - xz\bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$
24	$\bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + 3z^2\bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 1 \ (z > 0) \end{cases}$
25	$\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + 2z\bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 9, \\ z = 2 \end{cases}$
26	$\bar{a} = x^2\bar{i} + yz\bar{j} + 2z\bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4 \end{cases}$
27	$\bar{a} = y\bar{i} - 2x\bar{j} + z^2\bar{k}$	$\begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 2, \\ z = 6 \end{cases}$
28	$\bar{a} = 3z\bar{i} - 2y\bar{j} + 2y\bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$
29	$\bar{a} = (x + y)\bar{i} - x\bar{j} + 6\bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2 \end{cases}$
30	$\bar{a} = 4\bar{i} + 3x\bar{j} + 3xz\bar{k}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3 \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бермант А.Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов. СПб.: Лань, 2010. 736 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1985. 384 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. В 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 253 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437223
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник: учеб. пособие для академического бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 192 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/433433
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1990. 624 с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Физматлит, 2003. 336 с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров / под ред. А.Н. Тихонова. М.: Юрайт, 2012. 607 с.
8. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2003. 304 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

Поверхностные интегралы. Элементы теории поля

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Высшая математика»

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 20.11.2020 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 3,37. Тираж 25 экз. Изд. № 6756.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ