МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

ФГБОУ ВПО «БРЯНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

В.Н. Блохин

А.М. Случевский

Пособие по теоретической механике

«Рекомендовано Учебно – методическим объединением
вузов Российской Федерации по агроинженерному образованию
в качестве учебного пособия для студентов,
осваивающих образовательные программы бакалавриата
по направлению подготовки «Агроинженерия»

Брянск 2014

УДК 531(03)

ББК 22.21

Б 70

Блохин В.Н. Пособие по теоретической механике /В.Н. Блохин, А.М. Случевский.- Брянск: Издательство Брянской ГСХА, 2014. - 231 с.

ISBN 978-5-88517-235-6

Рецензент: профессор кафедры СХМ СМ В.К. Спиридонов.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно - технологического факультета от 18 февраля 2014 г., протокол №4.

ISBN 978-5-88517-235-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочник - словарь представляет собой книгу - пособие по теоретической механике для инженерно - технических работников, студентов, изобретателей, экспертов патентных организаций и работников средств массовой информации; является теоретическим пособием для подготовки студентов к олимпиадам по дисциплинам физико - математического профиля, математике, теоретической физике, технической и прикладной механике.

Справочник - словарь содержит термины, основные понятия и определения, формулы, законы, теоремы и аксиомы, а также методы определения величин, используемых в механике, изучаемых в высших учебных заведениях инженерно – технического профиля.

Для полного и быстрого усвоения пройденного материала все понятия и определения иллюстрируются схемами и рисунками.

Краткое и ясное изложение материала позволяет читателю быстро получить необходимую информацию. Справочником удобно пользоваться для систематизации знаний, получения фактического справочного материала (формулы, законы, определения), ускоренного повторения пройденного материала при подготовке к экзаменам и зачетам.

Для удобства пользования справочником - словарем всеми категориями читателей в приложении книги приведены таблицы тригонометрических формул, производных, определенных и неопределенных интегралов, а также список рекомендуемых учебников.

Основные обозначения

A – работа;

$a = \overline{a}$ – модуль ускорения;

a_x, a_y, a_z – проекции ускорения на оси декартовой системы координат;

$\overline{a}^n . \overline{a}^\tau$ – нормальное и касательное ускорения;

$\overline{a}, \overline{b}$ – скалярное произведение векторов;

$\overline{a} \times \overline{b}$ – векторное произведение векторов;

$\overline{F}$ – сила;

f – коэффициент трения;

$\mathcal{J}_z$ – момент инерции материальной точки относительно оси z;

k – коэффициент восстановления при ударе;

$\overline{K}_0$ – момент количества движения относительно оси O;

$\overline{M}_0$ – момент силы, момент пары сил относительно центра O;

L – кинетический потенциал;

$\varPi$ – потенциальная энергия;

m – масса тела;

$\overline{N}$ – сила нормального давления;

$\overline{Q}$ – количество движения;

$\overline{R}$ – главный вектор системы сил;

$\overline{R}^*$ – равнодействующая;

$\bar{r}_0$ − радиус-вектор, проведенный из точки O;

S − дуговая координата;

$\bar{S}$ − импульс силы;

T − кинетическая энергия;

t − время;

$V = \ \bar{V}$ − модуль скорости;

V_x, V_y, V_z − проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат;

x, y, z − декартовы координаты;

x − первая производная пути по времени;

x − вторая производная пути по времени;

Φ − сила инерции;

U − силовая функция;

Ψ − угол поворота;

ω − угловая скорость;

ε − угловое ускорение.

Терминологический минимум

Автоколебания

Аксиомы (принципы) статики

Апериодическое движение

Абсолютное движение

Абсолютно упругий удар

Абсолютно неупругий удар

Амплитуда колебаний

Амплитуда колебаний вынужденных

Аналогии электродинамические

Афелий

Бинормаль

Ватт

Вектор главный системы сил

Вектор главный сил инерции

Вектор свободный

Вектор скользящий

Вес тела

Взаимодействие механическое

Винт динамический

Виртуальная работа

Вращение тела равномерное

Вращение тела равнопеременное

Вращение собственное

Вращательное движение

Время удара

Время установления колебаний

Вторая задача динамики

Возмущающая сила

Восстанавливающая сила

Вынужденные колебания

Гармонические колебания

Геометрия масс

Гироскоп

Гироскопический эффект

Главные оси

Главный вектор

Главный момент

Годограф

Голономные связи

Графики движения точки

Движение механическое

Движение переносное

Движение плоской фигуры

Движение по инерции

Движение свободного твердого тела

Движение твердого тела винтовое

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

Движение твердого тела вращательное вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела мгновенно поступательное

Движение твердого тела плоскопараллельное (плоское)

Движение твердого тела поступательное

Движение твердого тела сложное

Движение точки абсолютное

Движение точки брошенной под углом к горизонтальной плоскости

Движение точки криволинейное

Движение точки несвободное

Движение точки относительное

Движение точки прямолинейное

Движение точки равномерное

Движение точки сложное (составное)

Декартовая система координат

Декремент колебаний

Декремент логарифмический

Джоуль (единица измерения)

Динамика

Длина приведенная физического маятника

Единицы измерения

Естественные оси

Жесткость упругого элемента

Задача краевая

Задача статистически неопределенная

Задача статистически определенная

Задачи динамики

Заделка жесткая

Закон движения

Закон динамики второй (основной)

Закон динамики первый (закон инерции)

Закон движения третий (о равенстве действия и противодействия)

Закон независимости действия

Закон параллелограмма сил

Закон площадей

Закон сохранения главного момента количеств движения

Закон сохранения движения центра масс

Закон сохранения количества движения

Закон сохранения механической энергии

Законы динамики

Законы Ньютона

Законы трения скольжения

Затухающие колебания

Идеальные связи

Импульс силы

Импульс силы элементарный

Импульс ударный

Инертность

Инерционный коэффициент

Интенсивность нагрузки

Квазиупругий коэффициент

Киловатт-час

Кинематика

Кинематика твердого тела

Кинетическая энергия

Кинетический момент

Кинетический потенциал

Колебания тел

Колебания точки вынужденные

Колебания точки гармонические

Колебания главные

Колебания затухающие

Колебания линейные

Колебания нелинейные

Колебания параметрические

Колебания свободные при отсутствии сопротивления

Колебания системы с двумя степенями свободы малые

Колебания системы с одной степенью свободы малые

Колебания собственные

Количество движения

Количество движения жидкости секундное

Координаты обобщенные

Консервативная система

Конус трения

Коэффициент восстановления при ударе

Коэффициент динамичности

Коэффициент жесткости обобщенный

Коэффициент жесткости пружины

Коэффициент затухания

Коэффициент инерционный

Коэффициент квазиупругий

Коэффициент трения качения

Коэффициент трения скольжения

Коэффициент сопротивления

Коэффициенты формы

Краевые условия

Кривизна траектории

Круговая частота

Линия действия силы

Линия тока

Линия узлов

Малые колебания

Масса

Масса гравитационная

Масса инертная

Материальная точка

Маятник математический

Маятник оборотный

Маятник физический

Мгновенный центр скоростей

Мгновенный центр ускорения

Мгновенная ось вращения

Метод вырезания узлов

Метод остановки (метод Виллиса)

Метод сечений (метод Риттера)

Механика

Механика теоретическая (общая)

Механическая энергия

Механическое взаимодействие

Многоугольник силовой

Момент вращающий

Момент гироскопический

Момент главный системы сил

Момент главный сил инерции

Момент инерции осевой

Момент инерции относительно оси

Момент инерции центробежный

Момент кинетический

Момент количества движения жидкости секундный

Момент количества точки

Момент количеств движения системы главный

Момент пары сил

Момент силы относительно оси

Момент силы относительно точки (центра)

Момент силы относительно точки (центра) алгебраический

Моменты инерции главные

Моменты инерции относительно параллельных осей

Момент центробежный

Мощность

Начальная скорость

Начальные условия

Начальная фаза

Невесомость

Нормаль главная

Неголономные связи

Несвободное тело

Неустойчивое равновесие

Нутация

Ньютон (единица измерения)

Обобщенные координаты

Обобщенный коэффициент жесткости

Обобщенные силы

Обобщенная скорость

Общее уравнение динамики

Осевой момент инерции

Оси вращения

Оси естественного трехгранника

Оси инерции главные

Оси инерции центральные

Ось винтовая мгновенная

Ось вращения

Ось вращения мгновенна

Отклонение статическое

Относительное движение

Относительная скорость

Относительное ускорение

Пара вращений

Пара гироскопическая

Пара сил

Пара угловых скоростей

Первая задача динамики

Перемещение возможное (виртуальное)

Переносное движение

Переносная скорость

Переносное ускорение

Период колебаний

Переменная масса

Перигелий

Период колебаний

Период колебаний затухающих

Платформа Жуковского

Плечо силы

Плоское движение

Поле тяжести

Положение устойчивого равновесия

Поступательное движение

Потенциальная сила

Потенциальная энергия

Потеря кинетической энергии

Прецессия

Прецессия гироскопа

Прецессия гироскопа регулярная

Приведение сил инерции

Приведение системы сил к данному центру

Принцип возможных перемещений

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера-Лагранжа

Принцип отвердевания

Принцип относительности классической механики

Принципы механики

Проекция вектора

Проекция силы на ось

Проекция силы на плоскость

Произведения инерции

Прямой центральный удар двух тел

Работа возможная

Работа потенциальной силы

Работа сил, приближенных к вращающемуся телу

Работа силы

Работа силы трения

Работа силы трения действующей на катящееся тело

Работа силы тяготения

Работа силы тяжести

Работа силы упругости

Работа силы элементарная

Равновесие

Равновесие абсолютное

Равновесие механической системы

Равновесие относительное

Равновесие при наличии трения

Равновесие при наличии трения предельное

Равновесие плоской системы сил

Равновесие пространственной системы сил

Равновесие системы сходящихся сил

Равновесие системы тел

Равнодействующая сила

Равнодействующая системы сил

Радиус-вектор

Радиусы инерции

Радиус кривизны

Разложение сил

Размерность величины

Распределенная нагрузка

Расход жидкости секундный

Расход топлива секундный

Реакции динамические, действующие на ось вращающегося тела

Реакция динамическая

Реакция связи

Резонанс

Результирующая сила

Самоторможение

Связи

Связи идеальные

Свободное тело

Свободные колебания

Сдвиг фаз

Сила

Сила активная

Сила аэродинамического сопротивления

Сила внешняя

Сила внутренняя

Сила возмущающая

Сила возмущающая гармоническая

Сила восстанавливающая

Сила вязкого трения

Сила давления

Сила диссипативная

Сила инерции

Сила инерции кориолисова

Сила инерции обобщенная

Сила инерции переносная

Сила инерции центробежная

Сила массовая

Сила непотенциальная
Сила обобщенная
Сила обобщенная активная
Сила объемная
Сила поверхностная
Сила потенциальная
Сила распределенная
Сила реактивная
Сила сопротивления аэродинамического (гидродинамического)
Сила сосредоточенная
Сила сцепления
Сила трения предельная
Сила трения скольжения
Сила тяготения
Сила тяжести
Сила ударная
Сила упругости
Сила уравновешивающая
Сила центральная
Силы внутренние, их свойства
СИ – система единиц международная
Система единиц МКГСС
Система единиц
Система координат правая
Система механическая
Система механическая голономная
Система механическая диссипативная
Система механическая консервативная
Система механическая неголономная
Система механическая неизменяемая

Система механическая с идеальными связями

Система отсчета

Система отсчета инерциальная

Система отсчета местная

Система отсчета неинерциальная

Система отсчета основная (неподвижная)

Система отсчета подвижная

Система сил

Система сил уравновешенная

Система сил эквивалентная нулю

Система тел статистически неопределимая

Система тел статистически определимая

Скорость космическая вторая

Скорость космическая первая

Скорость космическая третья

Скорость круговая

Скорость обобщенная

Скорость падения предельная

Скорость параболическая

Скорость потерянная при ударе

Скорость прецессии угловая

Скорость тела угловая

Скорость тела угловая мгновенная

Скорость точки

Скорость точки абсолютная

Скорость точки в полярных координатах

Скорость точки, ее числовое (алгебраическое) значение

Скорость точки линейная (окружная)

Скорость точки относительная

Скорость точки переносная

Скорость точки поперечная

Скорость точки радиальная

Скорость точки секторная

Скорость точки средняя

Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Сложение пар сил

Сложение поступательных движений

Сложение сил

Сложение скоростей точки

Сложение угловых скоростей

Сложение угловых ускорений

Сложение ускорений точки

Сложное движение

Собственная частота

Сосредоточенная сила

Составляющая вектора

Сочлененная система тел

Сохранение механической энергии

Спутники Земли искусственные

Статика

Статическая неопределенность

Степень свободы

Твердое тело

Тело абсолютно твердое

Тело несвободное

Тело переменной массы

Тело свободное

Тензор инерции

Теорема Вариньона

Теорема Гюйгенса

Теорема Карно

Теорема Кенига

Теорема Кориолиса

Теорема Лагранжа-Дирихле

Теорема динамики

Теорема моментов

Теорема моментов относительно центра

Теорема моментов при ударе

Теорема об изменении главного момента количеств движения системы

Теорема об изменении главного момента количеств движения системы при ударе

Теорема об изменении кинетического момента системы

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Теорема об изменении кинетической энергии точки

Теорема об изменении количества движения системы

Теорема об изменении количества движения системы при ударе

Теорема об изменении количества движения точки

Теорема об изменении количества движения точки при ударе

Теорема об изменении момента количества движения точки

Теорема о движении центра масс

Теорема о параллельном переносе силы

Теорема о трех силах

Теорема Резаля

Теорема Эйлера

Теоремы динамики общие

Течение жидкости установившееся

Точка материальная

Точка переменной массы

Траектория точки

Траектория эллиптическая

Трение

Трение качения

Трение скольжения

Угловая скорость

Угловое ускорение

Углы Эйлера

Угол нутации

Угол прецессии

Угол смежности

Угол собственного вращения

Угол трения

Удар

Удар абсолютно неупругий

Удар абсолютно упругий

Удар косой

Удар по вращающемуся телу

Удар прямой

Удар тела о неподвижную преграду

Удар центральный

Удар шаров

Уравнение динамики общее

Уравнение Мещерского

Уравнение теории удара основное

Уравнение частот

Уравнение Эйлера турбинное

Уравнения движения системы дифференциальные

Уравнения движения системы дифференциальные в обобщенных координатах

Уравнения движения точки дифференциальные

Уравнения Лагранжа

Уравнения Эйлера динамические

Уравнения Эйлера кинетические

Усилия внутренние

Ускорение

Ускорение Кориолиса

Ускорение свободного падения

Ускорение силы тяжести

Ускорение тела угловое

Ускорение точки

Ускорение точки абсолютное

Ускорение точки вращательное

Ускорение точки касательное

Ускорение точки кориолисово

Ускорение точки нормальное

Ускорение точки осестремительное

Ускорение точки относительное

Ускорение точки переносное

Ускорение точки поворотное

Условия краевые

Условия начальные

Условия равенства динамических реакций статическим

Условия равновесия системы в обобщенных координатах

Устойчивость равновесие

Фаза колебаний

Фаза колебаний начальная

Ферма

Формула Галилея

Формула Циолковского

Формулы Эйлера

Функция Лагранжа

Функция силовая

Центр вращения мгновенный

Центр инерции

Центр качаний физического маятника

Центр масс

Центр параллельных сил

Центр приведения

Центр скоростей мгновенный

Центр тяжести

Центр удара

Центр ускорений мгновенный

Центроида неподвижная

Центроида подвижная

Циклическая частота

Частота возмущающей силы

Частота вращения

Частота колебаний

Частота собственная

Число степеней свободы

Число Циолковского

Шарнирно-сочлененное тело

Эвклидово пространство

Элементарная работа

Элементарный импульс

Энергия кинетическая

Энергия механическая полная

Энергия потенциальная

Эффект гироскопический

А

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА какого-либо действительного числа равна этому числу, если оно положительное или нуль, и равна противоположному числу, если оно отрицательное. Например, абсолютная величина (или модуль чисел 10 и -10) равна 10.

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА$a+bi$равна $\sqrt{a^2 + b^2}$.

АБСОЛЮТНАЯ ВЫСОТА – высота точки земной поверхности над уровнем моря.

АБСОЛЮТНОЕ ДВИЖЕНИЕ – полное, безотносительное движение.

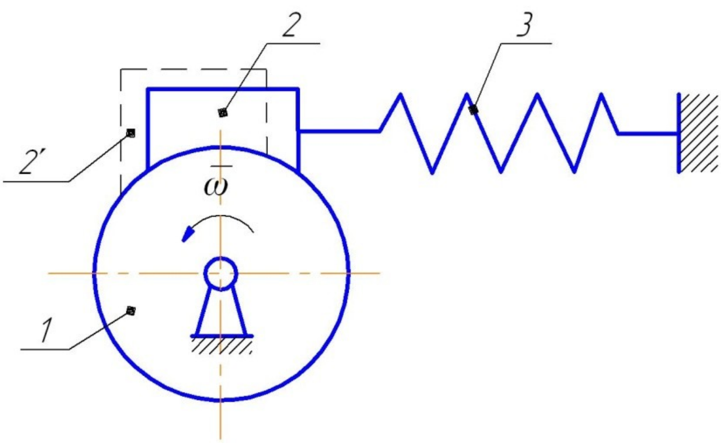
АБСОЛЮТНЫЙ (от лат. absolutus) – безотносительный, совершенный, полный.

АБСЦИССА(от лат. abscissus–отрезанный) – одна из декартовых координат точки, обычно обозначаемой буквой *x*.

АВТО… (от греч. autos – сам) – составная часть сложных слов.

АВТОБЛОКИРОВКА- автоматическое изменение режима работы механизма для предотвращения аварии.

АВТОКОЛЕБАНИЯ- незатухающие колебания неконсервативной (например, диссипативной) системы, установившаяся амплитуда и частота которой определятся свойствами самой системы. Источник энергии автоколебаний составляет неотъемлемую часть системы. Примером автоколебаний в часах являются колебания, осуществляющиеся за счет опускаю-



щейся гири или заводной пружины. Весьмараспространены фрикционные механизмы, благодаря которым происходят незатухающие автоколебания. При вращении шкива *1* колодка *2*, прижатая к шкиву, перемещается в положение *2'*, затем под действием упругости системы (пружина *3*) возвращается назад, так как сила трения движения меньше силы трения покоя. Затем силы трения снова оказываются больше сил упругости системы, и колодка опять увлекается шкивом и т.д.

АГРЕГАТ (от лат. aggrego-присоединяю)- узел машины, выполняющий определенные функции в технологическом процессе и обладающий полной взаимозаменяемостью.

АККУМУЛЯТОР (от лат. accumulator- собиратель) –устройство для накопления энергии с целью ее последующего использования. В механических аккумуляторах используют упругость пружины (упругость газов), силу тяжести и инерции звеньев.

АКСЕЛЕЛОГРАФ(от лат. asselelro - ускоряю и греч. grapho – пишу) – прибор для автоматической записи ускорения.

АКСИОМЫ (ПРИНЦИПЫ) (от лат.axioma) –истины, принимаемые без доказательств.

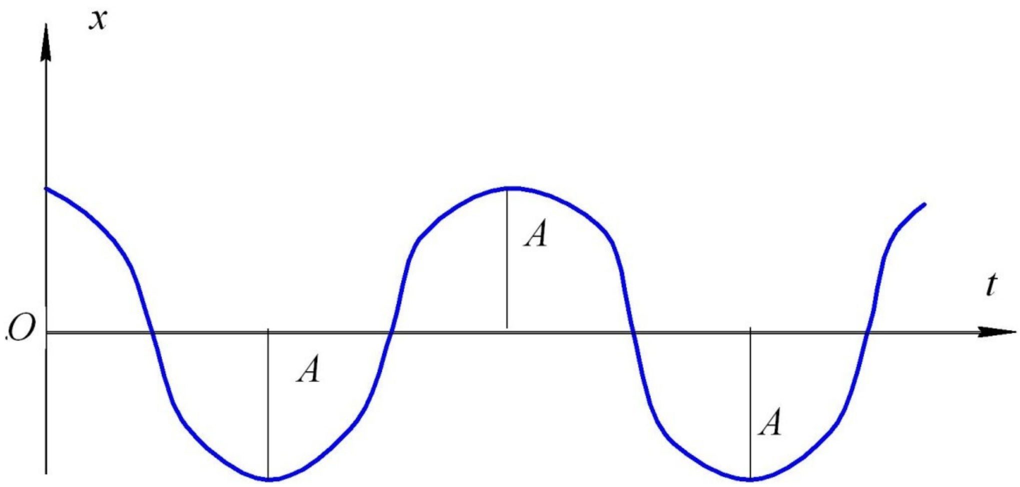
АЛГЕБРА ЛОГИКИ – раздел математической логики, изучающий высказывания, которые рассматриваются со стороны их логических значений (истинности или ложности), и логические операции над ними. Алгебралогики используется при анализе и синтезе автоматических систем.

АЛГОРИТМ(от лат.algorihmi – транслитерация арабского имени Хорезмийского математика IX века Аль-Хорезми) – формальное предписание, однозначно определяющее содержание и последовательность операций, переводящих совокупность исходных данных в искомый результат.

АМОРТИЗАТОР (от франц.amortir – ослаблять, смягчать) - устройство длясмягчения ударов и гашения колебаний.

АМПЛИТУДА (от лат. amplitudo – величина, обширность) – максимальное отклонение периодической кривой от нулевой линии.

АМПЛИТУДА КОЛЕБАНИЙ – наибольшее отклонение (А) синусоидально колеблющейся величины от ее среднего значения. Амплитуда равна по-



луразмаху синусоидальных колебаний. На рисунке показано колебание точки, происходящее по гармоническому закону. Величина A, равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний O, называется *амплитудой колебаний*.

АМПЛИТУДА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙПРИ ОТСУТСТВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ. Дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления является

$$x + k^2x = P_0 \sin pt$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

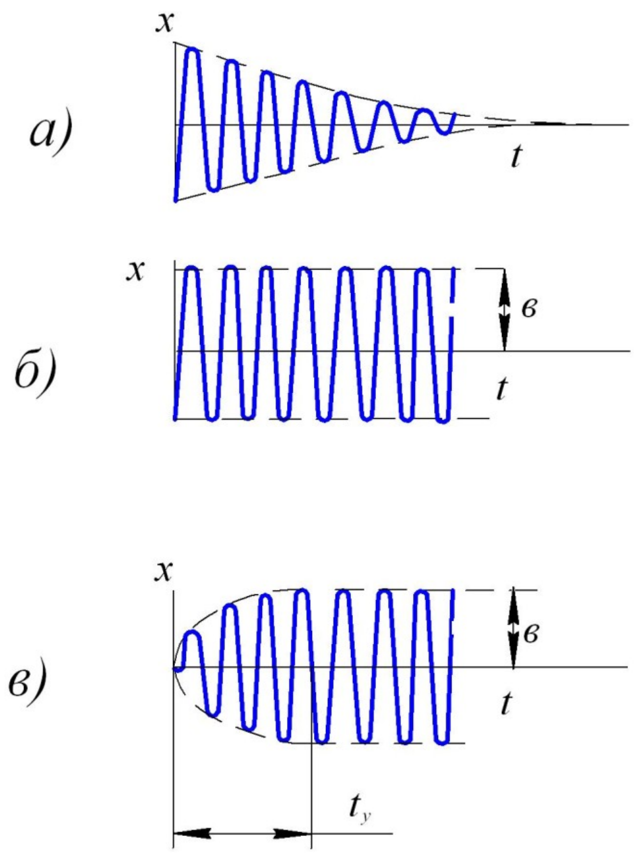
$$x = A\sin\ kt + \alpha\ \ + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin pt,$$

где Aиα – постоянные интегрирования;k–частота собственных колебаний;

p–частота вынужденных колебаний.

Величина $B = \frac{P_0}{/k^2 - p^2/}$называется амплитудой вынужденных колебаний и не зависит от начальных условий, а зависит от p и k.

АМПЛИТУДА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВЯЗКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ



Дифференциальным уравнением при наличии вязкого сопротивления является

$$x + 2bx + k^2x = P_0 \sin pt$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = Ae^{-bt}\sin\ kt + \alpha\ \ + B\ \sin(pt - \beta),$$

где *A* и *α* – постоянные интегрирования;
B – амплитуда вынужденных колебаний;

$$\text{В} = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}},$$

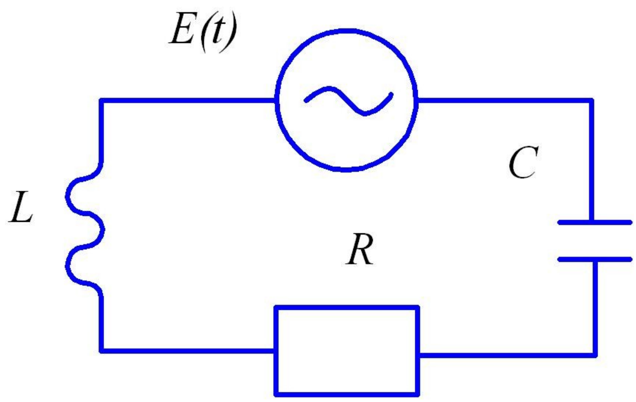
$tg\,\beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}$ и от начальных условий не зависят.

Рассматриваемые колебания являются сложными и слагаются из собственных (рис. *а*) и вынужденных (рис. *б*).

Картина возможных установившихся вынужденных колебаний при вязком сопротивлении, начинающихся из состояния покоя, показана на рис. (*в*), где t_y – время установления вынужденных колебаний.

АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ – исследование кинематических и динамических свойств механизмов по заданной его схеме.

АНАЛОГИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ – колебательные процессы, рассматриваемые в разных областях физики, которые описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями. Примером служит электрический контур, состоящий из последовательно соединенных катушки с индуктивностью L, омического сопротивленияR,конденсатора с емкостью C и источника переменной электродвижущей силы (э.д.с.) $E(t)$.



Тогда, исходя из второго закона Кирхгофа, можно установить, что заряд q конденсатора удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Lq + Rq + \frac{1}{c}q = E(t)$$

Сравнивая это уравнение с дифференциальным уравнением движения точки в вынужденных колебаниях при вязком сопротивлении

$$mx = -cx - \mu x + Q_0 \sin pt,$$

видим, что оба уравнения совпадают с точностью до обозначений. Следовательно, закон механических колебаний и закон изменения заряда конденсатора аналогичны.

Сравнивая уравнения, видим, что аналогами являются:

1) для смещения (координаты) x- заряд q;
2) для массы m– индуктивностьL;
3) для коэффициента вязкого сопротивления μ- омическое сопротивление R;
4) для коэффициента жесткости C- величина $\frac{1}{C}$, обратная емкости;
5) для возмущающей силы Q – э.д.с. $E(t)$.

Эта аналогия относится и к свободным (затухающим и незатухающим) колебаниям. Эти аналогии используются для моделирования в электронных аналоговых машинах.

АНАЛОГ СКОРОСТИ ТОЧКИ – первая производная радиус-вектора по обобщенным координатам S_iили φ_i

$$\frac{dS_i}{d\varphi_1} = \frac{dS_i}{dt}\frac{dt}{d\varphi_i} = \frac{V_i}{\omega_1},$$

где V_i– скорость точки i;

ω_1 – угловая скорость начального звена.

АНАЛОГ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ЗВЕНА – первая производная от угла поворота φ звена по обобщенным координатам$d\varphi_1$

$$\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_i}{dt}\frac{dt}{d\varphi_1} = \frac{\omega_i}{\omega_1}$$

АНАЛОГ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯЗВЕНА – вторая производная угла поворота φ_iзвена по обобщенной координате φ_i

$$\varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d(\varphi_i'\omega_1)}{dt} = \varphi_i''\omega_1^2 + \varphi_i'\varepsilon_1,$$

гдеω_1и ε_1 – соответственно угловая скорость и угловое ускорение начального звена.

АНАЛОГ УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ – вторая производная радиус – вектора точки по обобщенной координате S_l или φ_l. При вращающемся начальном звене ускорение a_iточки при известных$S_i' = \frac{dS_i}{d\varphi_1}$и $S_i'' = \frac{d^2S_i}{d\varphi_1^2}$определяется из соотношений

$$a_i = \frac{dV_i}{dt} = \frac{d(S_i'\omega_1)}{dt} = S_i''\omega_1^2 + S_i'\varepsilon_1,$$

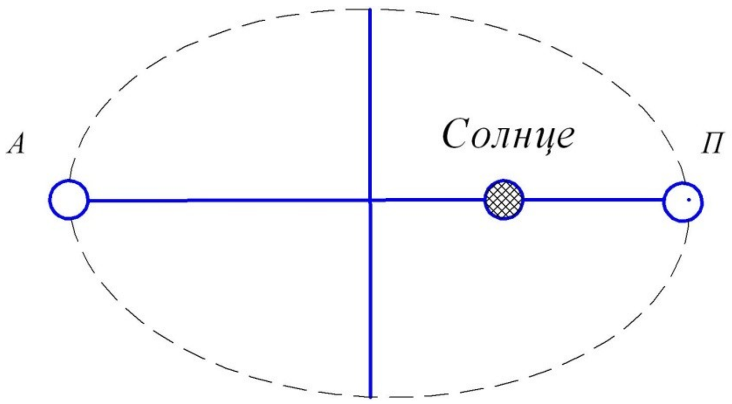
где S_i'' - аналог ускорения точки i;

V_i – скорость точки i;

S_i' -аналог скорости точкиi;

ω_1и ε_1 – соответственно угловая скорость и угловое ускорение начального звена.

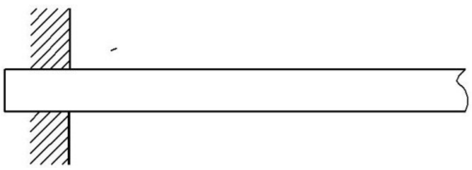
АСИМПТОТА КРИВОЙ ЛИНИИ (от греч. asymtotos – несовпадающий) – прямая, к которой неограниченно приближается бесконечно простирающаяся ветвь этой кривой.



АФЕЛИЙ – наиболее удаленная от конца точкаA, принадлежащая орбите (эллипсу) какой-то планеты.

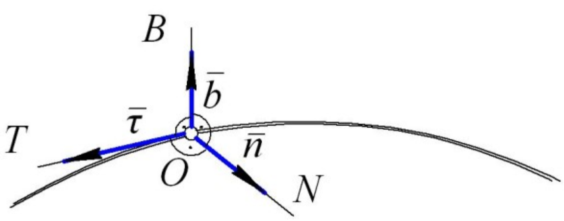
Б

БАЛКА – (от голл. balk) –стержень, брус, работающий в основном на изгиб.



БАЛКА ЗАЩЕМЛЕННАЯ – твердое тело, один конец которого жестко заделан в неподвижную балку.

БАРАБАН – деталь, имеющая формы цилиндра или конуса с осью вращения и обычно пустотелая внутри.



БИНОРМАЛЬ прямая *OB,* перпендикулярная к касательной *OT* и нормали *ON*.

БЛОК – (от англ. blok, нем. Blok, франц. bloc) – колесо с желобом по окружности для цепи, каната или нити.

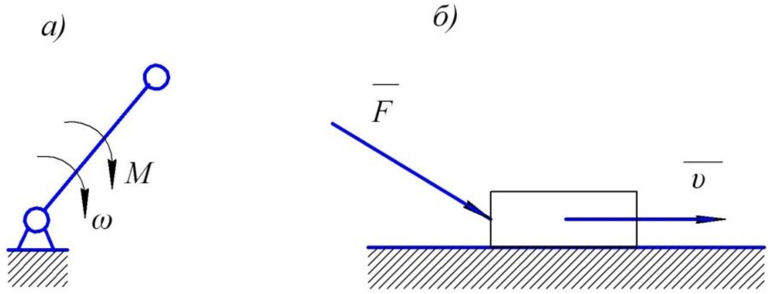
БУКСА –(от нем.buchse) – коробка, внутри которой помещается подшипник и устройство для подачи смазки.

БУКСОВАНИЕ – относительное перемещение всех соприкасающихся точек взаимодействующих тел во фрикционных механизмах, обусловленное недостаточным их прижатием друг к другу.

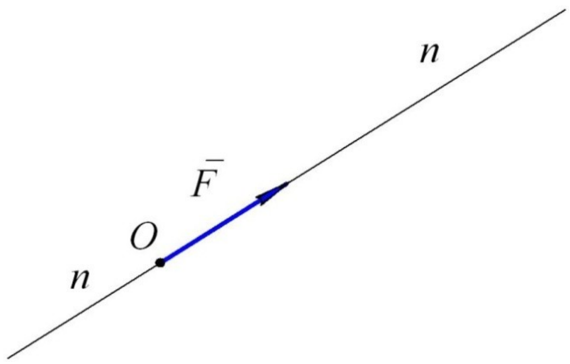
БУФЕР (от агл. buffer) –устройство для смягчения ударов.

В

ВЕДУЩЕЕ ЗВЕНО – звено, для которого сумма элементарных работ внешних сил, приложенных к нему, положительна..Для вращающегося ведущего звена (схема *а*) моментM и угловая скорость ω, а для поступательно движущегося (схема *б*) проекция силы $\overline{F}$на направление движения и линейная скорость $\overline{V}$ направлены в одну стороны.

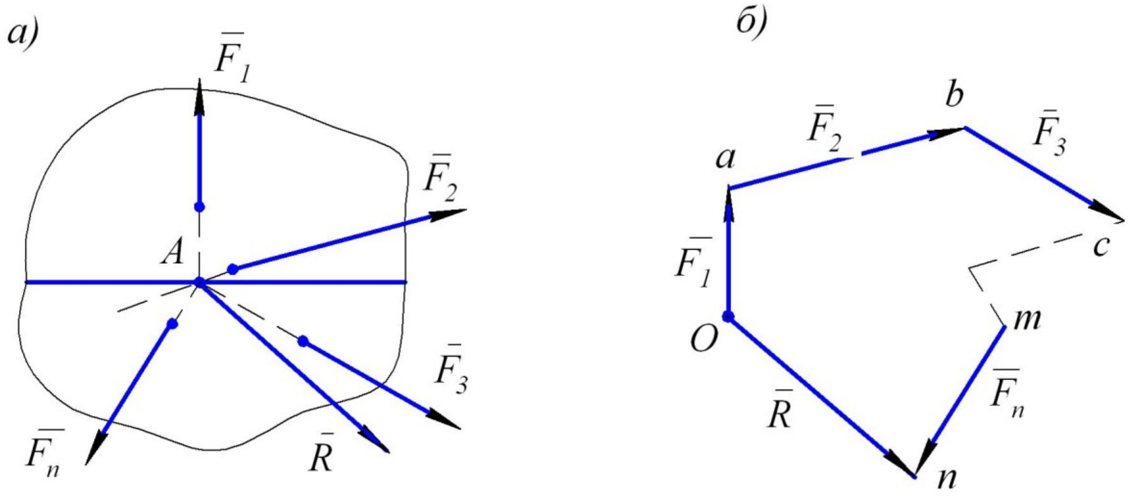


Ватт – 1 Вт = 1 Дж/с – мощность, определяющая работу в 1 Дж, совершаемую силой за 1 с.



ВЕКТОР-(от лат. vector-ведущий, несущий) – величина, которая характеризуется не только численным значением, но и направлением действия и точкой приложения.

ВЕКТОРГЛАВНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ – геометрическая сумма слагаемых сил.



$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \cdots + \overline{F_n} = \qquad \overline{F_K}$$

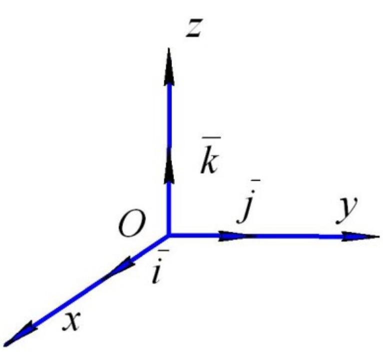
ВЕКТОР СИЛ ИНЕРЦИИ – главный вектор сил инерции механической системы, равен произведению массы системы (тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

$$\overline{R}^{\text{и}} = -m\overline{a}_c$$

Если ускорение $\overline{a}_c$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\overline{R}^{\text{и}}$ разложится на составляющие:

$$\overline{R}^{\text{и}} = -m\overline{a_c^{\tau}}, \qquad \overline{R}^{\text{и}} = -m\overline{a_c^{n}}$$

Нормальную составляющую силы инерции называют еще центробежной составляющей или центробежной силой инерции.



ВЕКТОР ЕДИНИЧНЫЙ – от оси, задающей положительное направление.

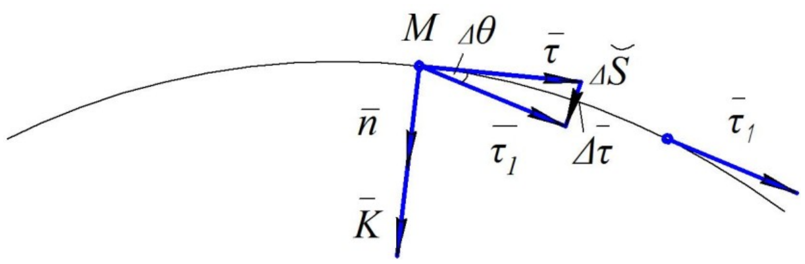
Орт оси x обозначают через $\overline{i}$;

Орт оси yобозначают через $\overline{j}$;

Орт оси z обозначают через $\overline{k}$.

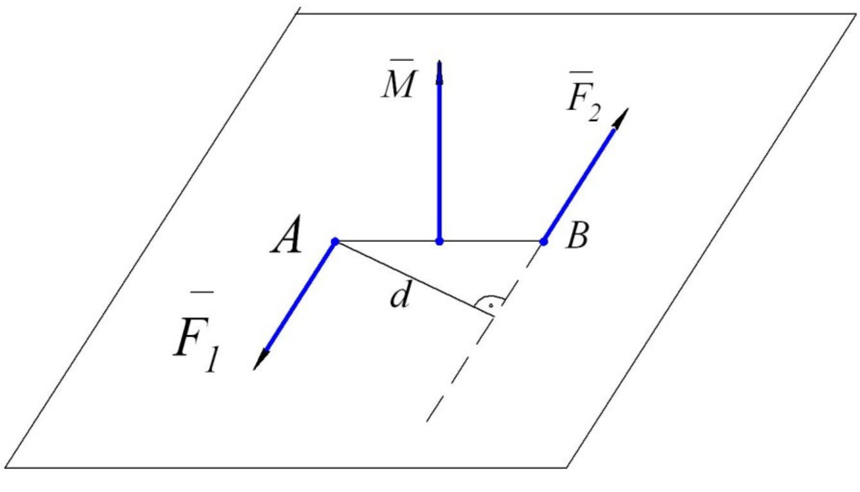
ВЕКТОР КРИВИЗНЫ. Вектор кривизны кривой имеет модуль, обратно пропорциональный радиусу кривизны и направлен по нормали к кривой в данной точке в сторону ее вогнутости.

$$\overline{K} = \frac{d\tau}{dS} = \frac{d\theta}{dS}\overline{n} = K\overline{n} = \frac{1}{\rho}\overline{n}$$



ВЕКТОР КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ – векторная величина, равная произведению массы точки на скорость ее движения:

$$\overline{q} = m\overline{V}$$

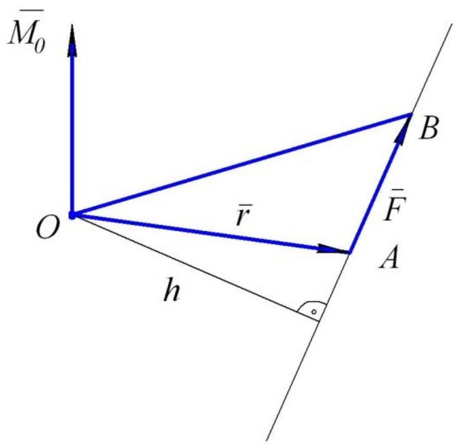


ВЕКТОР МОМЕНТА ПАРЫ СИЛ направлен перпендикулярно плоскости действия пары в сторону, откуда действие пары видно происходящим (поворот) против хода часовой стрелки.

$$\overline{M}_{\mathrm{A}}(\overline{F}_2) = \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{F}_2$$

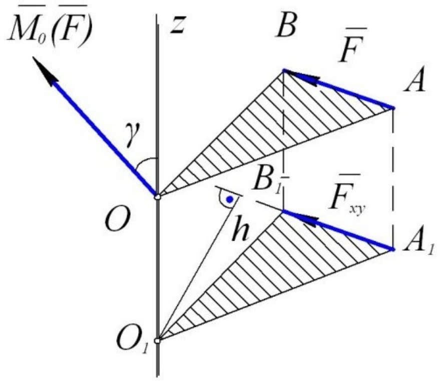
$$\overline{M}_B(\overline{F}_1) = \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{F}_1$$

ВЕКТОР МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА – есть векторная величина равная



$$\overline{M_0}\ \overline{F}\ = \overline{r}\times\overline{F}$$

Этот вектор $\overline{\mathrm{M}_0}$ направлен перпендикулярно к плоскости AOB в ту сторону, откуда видно стремление силы $\overline{F}$ повернуть плоскость AOB, связанную с телом, против хода часовой стрелки.

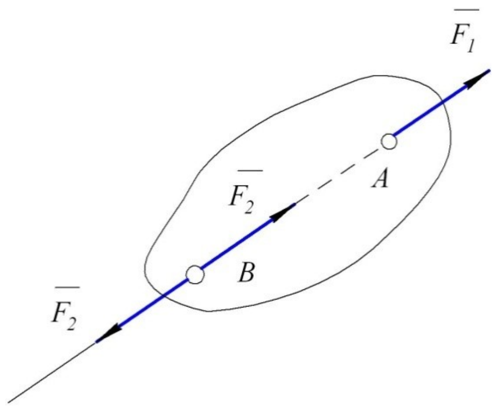


ВЕКТОР МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ – направлен по оси в сторону, откуда действие момента $\overline{\mathrm{M}_z}(\overline{F})$ видно против хода часовой стрелки

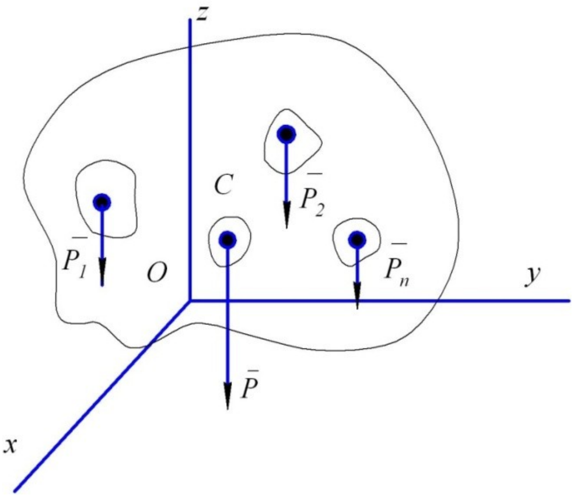
$$\mathrm{M}_z(\overline{F}) = \ \overline{\mathrm{M}_0}\,(\overline{F})\ \cos\gamma$$

$$\mathrm{M}_z(\overline{F}) = \ \mathrm{M}_{0_1}\,(\overline{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h$$

ВЕКТОР СВОБОДНЫЙ - это вектор момента пары сил, приложенный в любой точке. Так как две пары сил, независимо от точки, где каждая из них расположена в данной плоскости (или в параллельных плоскостях) и чему равны в отдельности модули их сил и их плечи, если их моменты имеют одно и то же значение $\overline{m}$, будут эквивалентны и выбор центра O произволен, то вектор $\overline{m}$ можно считать приложенным в любой точке, т.е. это вектор свободный.



ВЕКТОР СКОЛЬЗЯЩИЙ – это вектор, изображающий силу и приложенный в любой точке на линии действия силы.



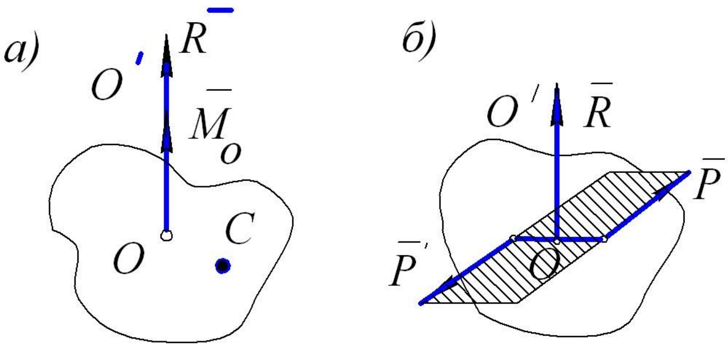
ВЕС ТЕЛА - равнодействующая сил тяжести $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots\ldots \overline{p_n}$, действующих на частицы данного тела называется весом тела и определяется равенством

$$P = \quad p_K.$$

.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕХАНИЧЕСКОЕ – это действие материальных тел друг на друга, в результате чего происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация).

ВИНТ ДИНАМИЧЕСКИЙ – если для данной системы сил$\overline{R} \neq 0, \overline{\mathrm{M}_0} \neq 0$, и при этом вектор$\overline{\mathrm{M}_0}$ параллелен $\overline{R}$ (рис.*а*), то это означает, что система сил приводится к совокупности силы $\overline{R}$ и пары $\overline{P}, \overline{P'}$, лежащей в плоскости, перпендикулярной силе (рис. *б*). Такая совокупность силы и пары называется *динамическим винтом*, а прямая, вдоль которой направлен вектор $\overline{R}$, *осью винта*.



ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА – это вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными.

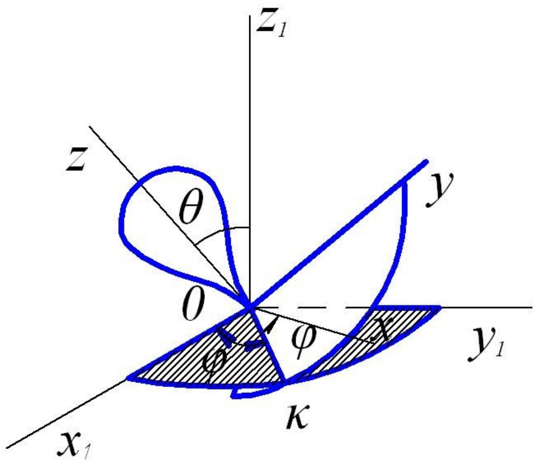
ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА РАВНОМЕРНОЕ – это такое вращение, когда угловая скорость тела остается во все время движения постоянной (*ω=const*).

ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА РАВНОПЕРЕМЕННОЕ– это такое вращение, когда угловое ускорение *ε* тела во все время движения остается постоянным *(ε=const).*

Закон равнопеременного вращения будет:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где $\varphi = \varphi_0$ при $t=0$; ω_0 – начальная угловая скорость.



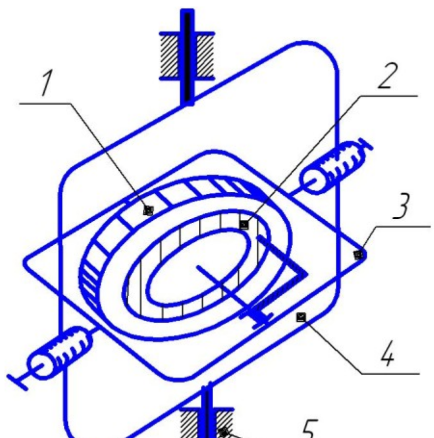
ВРАЩЕНИЕ СОБСТВЕННОЕ– когда при изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси Oz (собственное вращение) с угловой скоростью

$$\omega_1 = \varphi$$

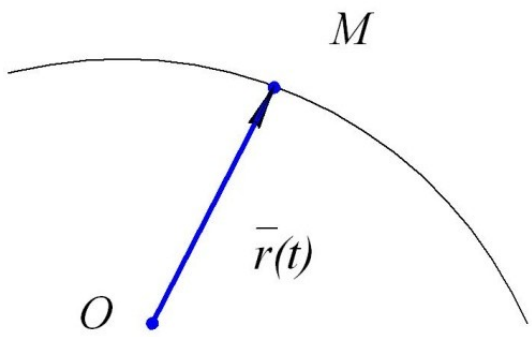
ВРЕМЯ УДАРА – промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, называется *временем удара*.

ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ – см. раздел «амплитуда вынужденных колебаний при вязком сопротивлении». Временем t_y, называемым временем установления, практически можно пренебречь.

Г

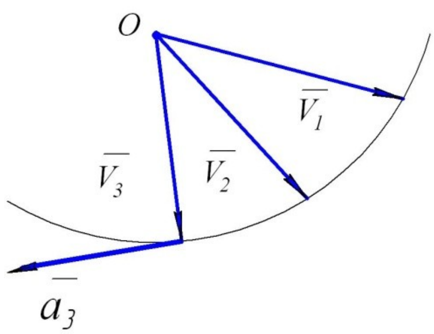


ГИРОСКОП – (от греч. gyreuΘ –кружусь, вращаюсь и греч. skopeδ–смотрю, наблюдаю) – быстро вращающееся твердое тело, ось которого может изменять свое положение в пространстве. Простейшим примером гироскопа является детский волчок. Очень часто в качестве гироскопа применяют ротор *1* электродвигателя, статор *2* которого установлен в карданном подвесе, обеспечивающем для ротора три степени свободы и содержащие относительно подвижные рамки (кольца) *3* и *4*. Если центр тяжести гироскопа совпадает с центром подвеса (точкой пересечения осей вращения рамок), то такой гироскоп называется астатическим (уравновешенным), в противном случае – тяжелым. Астатический гироскоп, свободный от внешних воздействий, устойчиво сохраняет первоначальное положение оси вращения ротора.



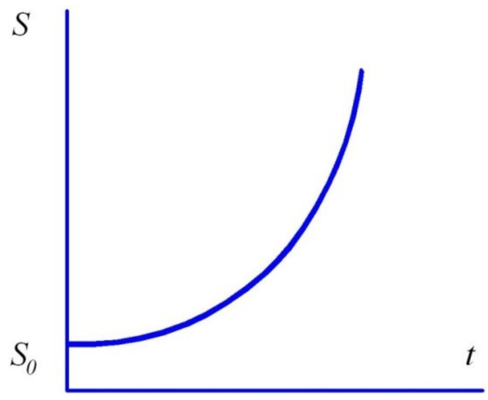
ГОДОГРАФ РАДИУСА – ВЕКТОРА – это линия, которую описывает конец радиус - вектора точки при его изменении.

ГОДОГРАФ СКОРОСТИ – это геометрическое место точек концов векторов скорости, проведенных из одного полюса, для всех положений точки на траектории.



Так как $\overline{a} = \overline{V}$, по аналогии с $\overline{V} = \overline{r}$ следует, что вектор ускорения касателен к годографу скорости $\overline{V}$.

ГОДОГРАФ (от греч. hodos – путь+… граф) – это кривая, являющаяся геометрическим местом концов векторов, выходящих из одной произвольной точки и равных различным значениям некоторого переменного вектора.

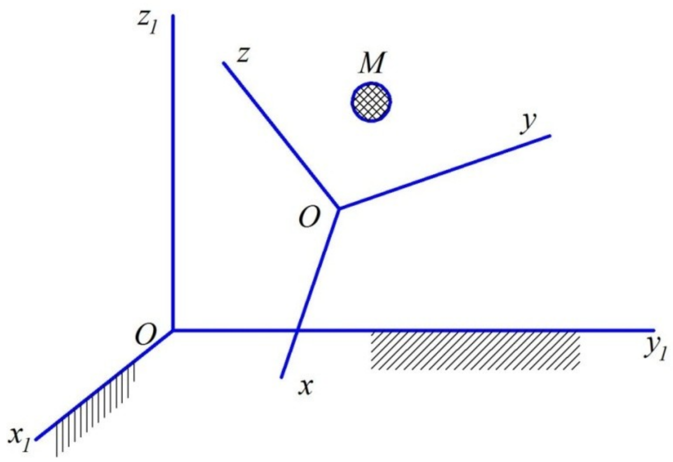


ГРАФИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ – это кривая, построенная в соответствующем масштабе при откладывании вдоль оси абсцисс времени *t*, а вдоль оси ординат – расстояния *S*). По этому графику видно, как изменяется положение точки (ее координата *S*) с течением времени.

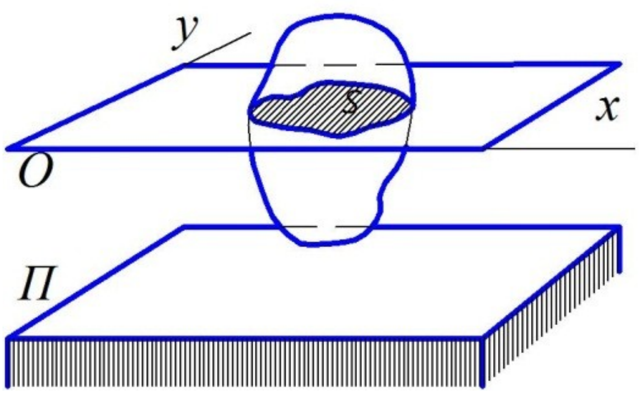
Д

ДВИГАТЕЛЬ – энергетическая машина, предназначенная для преобразования энергии любого вида в механическую энергию твердого тела.

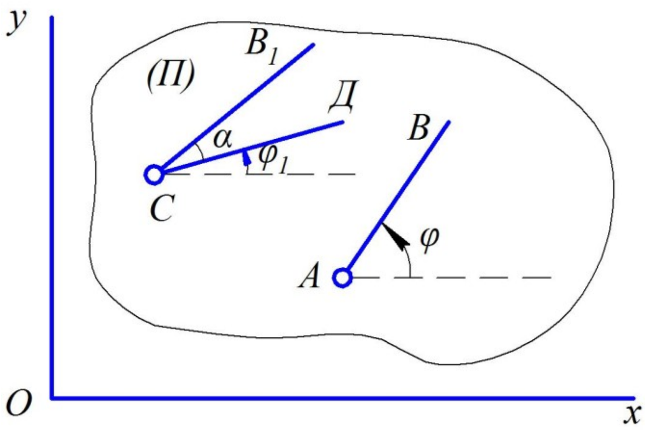
ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЕ – это движение материальных тел, при котором происходит изменение их положений стечением времени.



ДВИЖЕНИЕ ПЕРЕНОСНОЕ – движение, совершаемое подвижной системой отсчета *Oxyz* (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки *M* *переносным движением*.



ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ – плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости *П*.



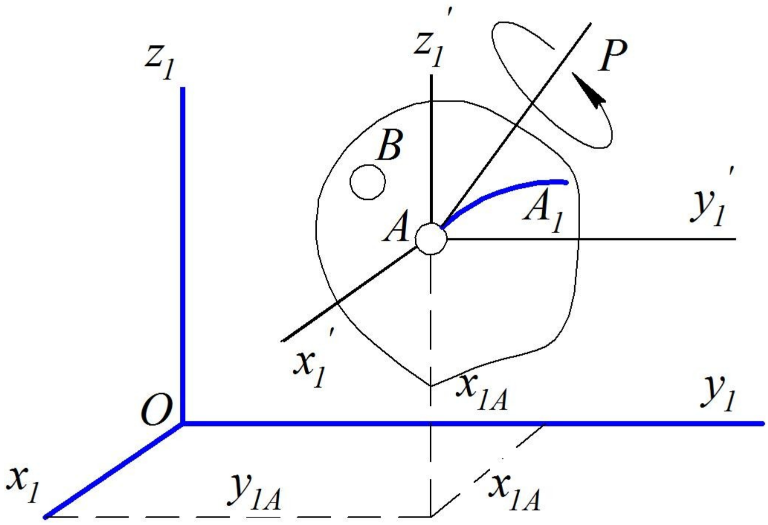
В общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же как полюс *A*, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Или плоскопараллельное движение твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения вместе с полюсом *А* и вращательного вокруг оси, перпендикулярной плоскости *П.*

ДВИЖЕНИЕ ПО ИНЕРЦИИ – это движение, совершаемое точкой при отсутствии сил.

Закон инерции: изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

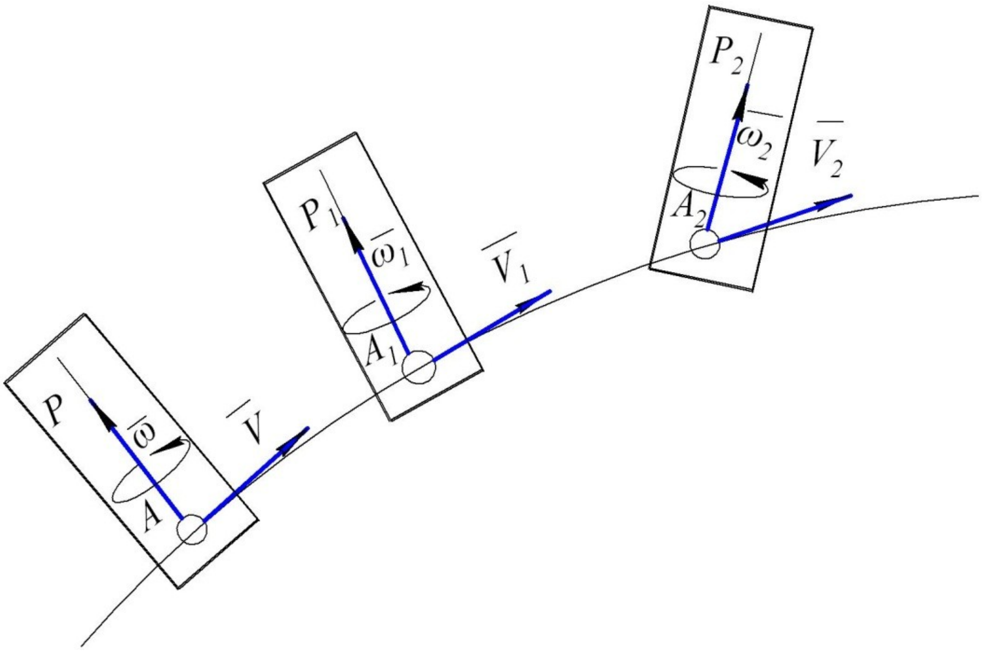
ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА – это такое движение, когда положение тела в системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ будет известно и будет известно положение полюса *А*, т.е. его координаты x_{1A}, y_{1A}, z_{1A} и положение тела по отношению к осям Ax'_1, y'_1, z'_1, определяемое углами Эйлера φ, Ψ, θ (см. раздел «вращение собственное»).



Следовательно, уравнения движения свободного твердого тела, позволяющие найти его положение по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, имеют вид

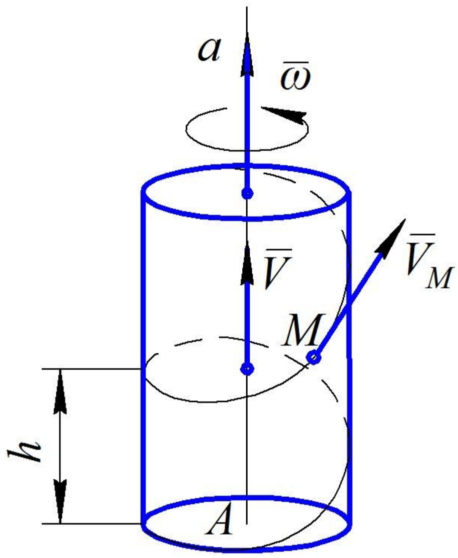
$$x_{1A} = f_1\ t\ , \quad y_{1A} = f_2\ t\ , \quad z_{1A} = f_3\ t\ ;$$

$$\varphi = f_4\ t\ , \Psi = f_5\ t\ , \theta = f_6\ t\ .$$



В геометрической картине рассматриваемого положения видно, что первые три уравнения определяют то движение, которое тело совершало при постоянных углах φ, Ψ, θ, т.е. при поступательном движении тела вместе с полюсом A. Последние же три уравнения определяют движение, которое происходит при постоянных значениях координат x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}, т.е. когда точка A неподвижна. Как известно, движение тела вокруг неподвижной точки слагается из элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения. Поэтому, в общем случае движение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс A со скоростью $\overline{V_A}$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг мгновенных осей вращения, происходящих через полюс A. Примером такого движения являются движение в воздухе брошенного камня, самолета, проделывающего фигуры высшего пилотажа, артиллерийского снаряда и т.д.

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВИНТОВОЕ – это такое сложное движение, когда $\overline{\omega} \parallel \overline{V}$ и слагается из вращательного вокруг оси Aa с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и поступательного со скоростью $\overline{V}$, направленной параллельно оси Aa. Ось Aa называется *осью винта*. Когда векторы $\overline{V}$ и $\overline{\omega}$ направлены в одну сторону, то при принятом нами правиле изображения $\overline{\omega}$ винт будт правым; если в разные стороны – левым.

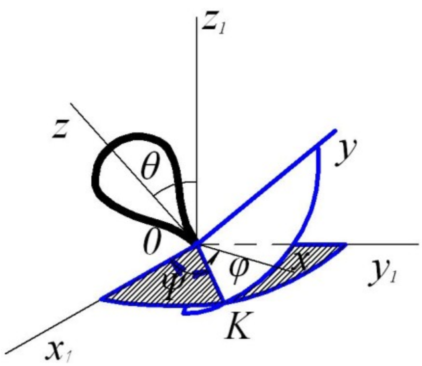


Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется *шагом h винта*. При постоянном шаге любая точка *M* тела, не лежащая на оси винта, описывает *винтовую линию*. Скорость точки *M,* находящейся от оси винта на расстоянии *r*, слагается из поступательной скорости $\overline{V}$ и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном движении, которая численно равна $\omega \cdot r$. Следовательно,

$$V_{\text{м}} = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2}.$$

Направлена скорость $\overline{V}$ по касательной к винтовой линии.

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.



Если рассматривать движение твердого тела по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ при неподвижной точке *O*, то такое движение совершает, например, волчок.

Параметрами, определяющими положение тела, имеющего неподвижную точку *O*, будут:

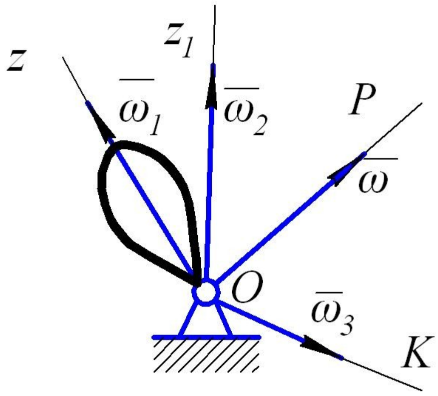
$$\varphi = \angle KOx, \quad \Psi = \angle x_1OK, \quad \theta = \angle z_1Oz$$

Это углы Эйлера: *φ – угол собственного вращения*, *Ψ – угол прецессии*; *θ – угол нутации*.

Чтобы знать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям O_{x1y1z1} в любой момент времени:

$$\varphi = f_1(t), \quad \Psi = f_2(t), \ \theta = f_3(t).$$

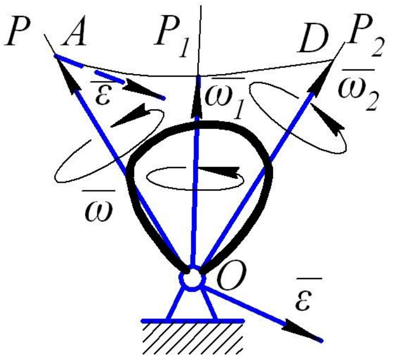
Эти уравнения определяют закон движения и называются уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной оси.



Угловая скорость тела ω будет:

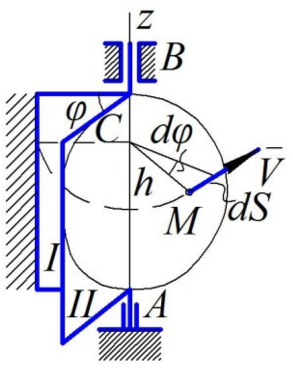
$$\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \overline{\omega_3},$$

так как при изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси *Oz*(собственное вращение) с угловой скоростью $\omega_1 = \varphi$, при изменении угла ψ – вращение вокруг оси Oz_1 (прецессия) с угловой скоростью $\omega_2 = \psi$ и при изменении угла θ вращение вокруг линии узлов *ОК* (нутация) с угловой скоростью $\omega_3 = \theta$. Векторы $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}$ этих угловых скоростей направлены соответственно по осям *Oz*, Oz_1, *OK*.



Угловое ускорение тела есть векторная величина, равная $\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}$, которая характеризует изменение с течением времени угловой скорости по модулю и направлению и называется угловым ускорением тела в данный момент времени или мгновенным угловым ускорением. Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ являются основными кинематическими характеристиками движения твердого тела, имеющего неподвижную точку.

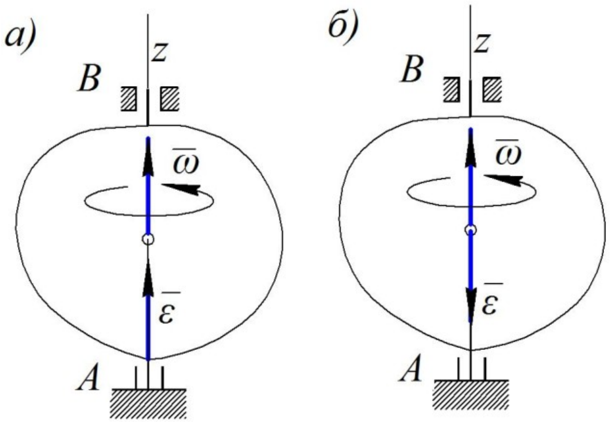
ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ – это такое движение, при котором каких-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными.



Ось, проходящая через неподвижные точки *A* и *B*, называется осью вращения.

Положение тела в любой момент времени определяется углом φ, называемым углом поворота тела, который измеряется в радианах и зависит от времени *t*, т.е. $\varphi = f_1(t)$.

Считается угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Уравнение $\varphi = f(t)$ выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.



Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \varphi$$

Знак ω определяется направлением вращения тела. Очевидно, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, $\omega > 0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$. Размерность угловой скорости $\frac{1}{T}$ т. е. $\frac{1}{\text{время}}$; в качестве единицы измерения обычно применяют $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ или что то же, $\frac{1}{\text{с}}$ с^{-1} , так как радиан величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\overline{\omega}$, модуль которого равен ω и который направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

Угловое ускорение ε характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела и равно

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \omega = \varphi$$

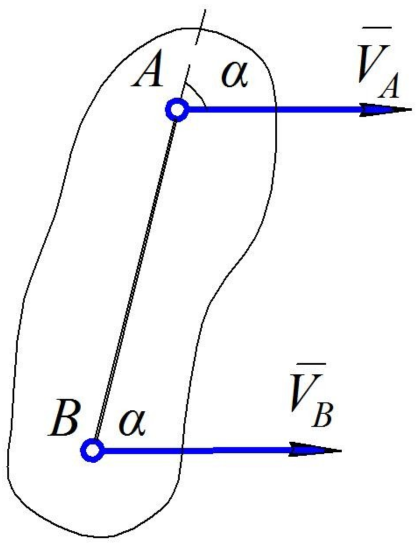
Размерность углового ускорения $\frac{1}{T^2}$ т. е. $\frac{1}{\text{время}^2}$; в качестве единицы измерения является $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ или что то же, $\frac{1}{\text{с}^2}$ с^{-2} .

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение называется ускоренным, а если убывает – замедленным. Видно, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, – когда разные.

Угловое ускорение изображается в виде вектора $\bar{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом

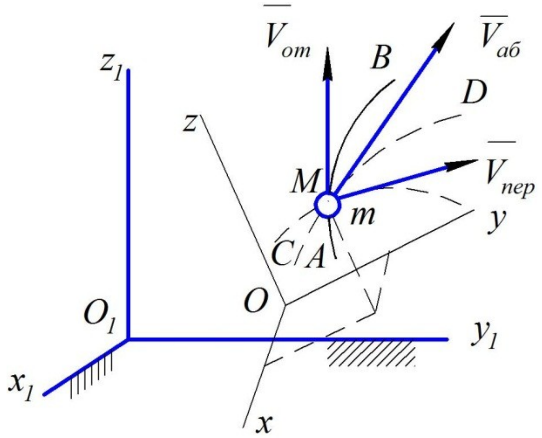
$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}$$

Направление $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\overline{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. *а*), и противоположно $\overline{\omega}$ при замедленном вращении (рис. *б*).



ДВИЖЕНИЕ МГНОВЕННО ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ – это такое движение, когда скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т.е. фигура имеет мгновенно поступательное распределение скоростей. Такое состояние движения тела называютеще мгновенно поступательным. Угловая скорость ω тела в этот момент времени равна нулю.

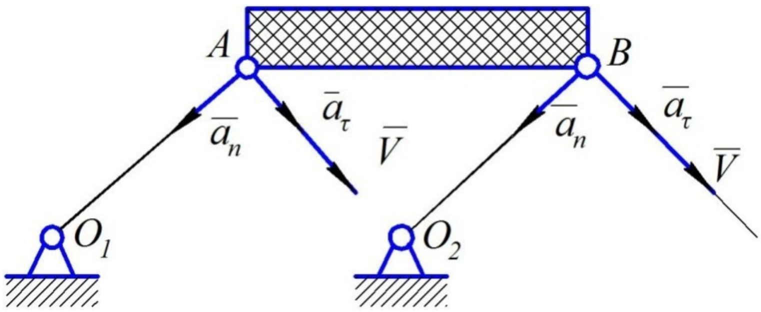
ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА СЛОЖНОЕ. Если тело (точка *M*) движется относительно подвижных осей *Oxyz*(см. рис.), а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$, то результирующее (абсолютное) движение тела называется сложным.



Задачей кинематики является нахождение зависимостей между характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений. Основными кинематическими характеристиками движения тела являются его поступательные и угловые скорости и ускорения. Причем

$$\overline{V}_{\text{аб}} = \overline{V}_{\text{от}} + \overline{V}_{\text{пер}}$$

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ – это такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается параллельно самой себе. Скорости точек A и B в любой момент времени одинаковы по модулю и направлению



$$\overline{V_{\text{A}}} = \overline{V_{\text{B}}}$$

и ускорения всех точек твердого тела в любой момент времени одинаковы по модулю и направлению

$$\frac{d\overline{V}_A}{dt} = \frac{d\overline{V}_B}{dt} \quad \text{или} \quad \overline{a}_A = \overline{a}_B$$

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ, БРОШЕННОЙ ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ.

Пусть тело массы m брошено с начальной скоростью под углом αк горизонтальной плоскости. Если пренебречь сопротивлением воздуха, а силу тяжести считать однородной ($\overline{P} = const$), то

$$P_x=0, \quad P_y= - mg, \quad P_z= 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = V_0 \sin\alpha, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

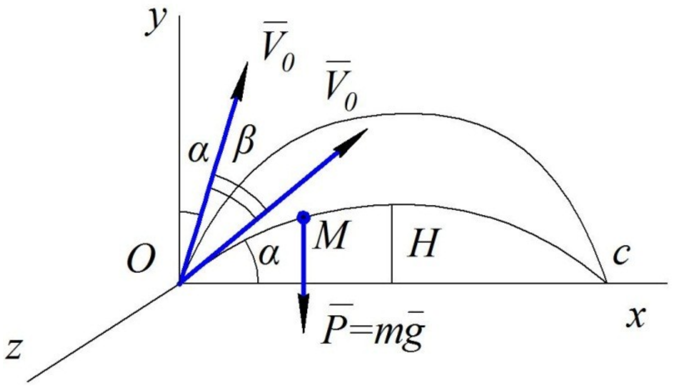
А уравнениями движениями точки будут:

$$x = V_0 t\, cos\alpha, \qquad y = V_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0,$$

видно, движение происходит в плоскости *Oxy*. Исключая из первых двух уравнений время *t*, получим:

$$y = xtg\alpha - \frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}x^2, \quad \text{- парабола}$$

Брошенная под углом к горизонтальной плоскости тяжелая точка движется в безвоздушном пространстве по параболе (Галилей)



Горизонтальная дальность полета будет равна

$$x = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Из формулы видно, что такая же горизонтальная дальность *x*, будет получена при угле *β,* для которого $2\beta = 180^0$-2α, т.е. если угол $\beta = 90^0$-α.

При заданной начальной скорости V_0, наибольшая дальность в безвоздушном пространстве получается, когда $sin\ 2\ \alpha = 1$, т.е. при угле $\alpha=45^0$.

Высота траектории *H* будет

$$\mathrm{H} = \frac{V_0^2}{2g}sin^2\alpha.$$

Время полета $\quad \mathrm{T} = \frac{2V_0}{g}sin\ \ \alpha,$

При угле $\alpha = 45^0$ все найденные значения

$$x = \frac{V_0^2}{g}, \quad \mathrm{H} = \frac{V_0^2}{4g} = \frac{x}{4}, \qquad T = \frac{V_0\sqrt{2}}{g}$$

ДВИЖЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОЕ – это такое движение, при котором траекторией является кривая линия.

Равномерным криволинейным движением называется такое, при котором числовое значение скорости все время остается постоянным *V=const.* Тогда

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0,$$

и все ускорение точки равно одному только нормальному ускорению:

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению и направлено по нормали к траектории точки.

Закон равномерного криволинейного движения будет

$$S = S_0 + Vt,$$

где S_0– начальная координата.

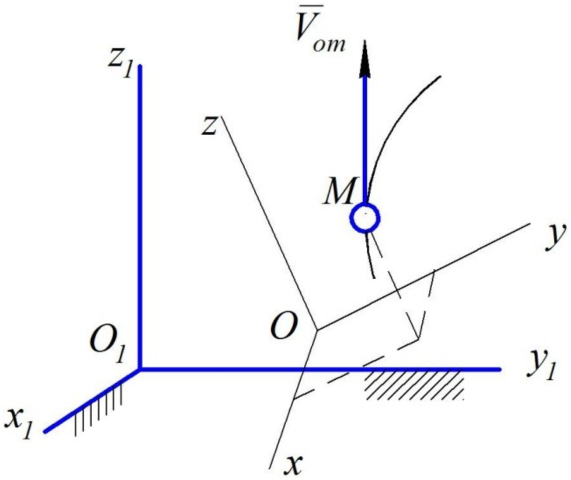
При равнопеременном криволинейном движении $a_\tau = const$ и тогда

$$V = V_0 + a_\tau t.$$

А закон такого движение точки

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НЕСВОБОДНОЕ - это такое движение, когда наложенные на точку связи заставят ее двигаться по заданной поверхности или кривой.



ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ – это движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Oxyz$).

Такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с этими осями и перемещающийся вместе с ними.

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ – это такое движение, когда ее траекторией является прямая линия. В этом случае $\rho = \infty$ и $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$ и все ускорение точки равно одному только касательному ускорению:

$$a = a_\tau = \frac{dV}{dt} = V.$$

В данном случае скорость изменяется численно, поэтому касательное ускорение характеризует изменение числового значения скорости.

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ РАВНОМЕРНОЕ Равномерным может быть прямолинейное и криволинейное движение.

При прямолинейном равномерном движении $a_n = a_\tau = 0$, а значит $a = 0$. Это единственное движение, когда ускорение все время равно нулю.

При равномерном криволинейном движении числовое значение скорости все время остается постоянным: V=*const.*Тогда $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$ и все ускорение точки равно одному только нормальному ускорению

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ РАВНОПЕРЕМЕННОЕ. Равнопеременным движением может быть как криволинейное, так и прямолинейное движение.

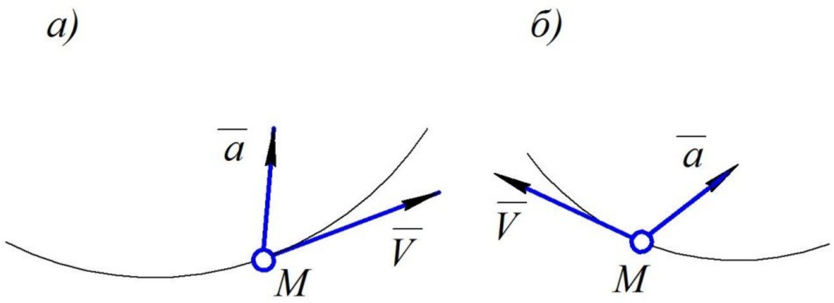
Равнопеременным прямолинейным движением называется такое движение, при котором $a = const$ и тогда

$$V = V_0 + a_\tau t, \quad S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

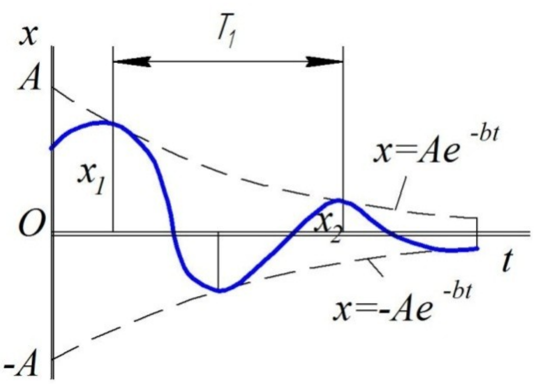
Равнопеременным криволинейным движением называется такое, при котором$a_\tau = const$ и законом движения будет

$$V = V_0 + a_\tau t, \quad S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Если при таком движении модуль скорости возрастает, то движение называется ускоренным, а если убывает – замедленным.



Движение будет ускоренным, если величины M и a_τ имеют одинаковые знаки (угол между векторами $\overline{V}$и $\overline{a}$ острый, рис. *а*), и замедленным, если разные (угол между $\overline{V}$и $\overline{a}$ тупой, рис. *б)*.



ДЕКРЕМЕНТ КОЛЕБАНИЙ – это быстрота убывания условной амплитуды затухающих колебаний, которая равна

$$\Delta_x = \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_2}{x_1} = e^{-bT_1}$$

Размахи колебаний будут убывать по закону геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессииe^{-bT_1}называется декрементом колебаний, где

$$x_1 = Ae^{-bt_1}\sin(k_1t_1+\alpha),$$

$$x_2 = Ae^{-b(t_1+T_1)}\sin(k_1t_1+k_1T_1+\alpha) = x_1e^{-bT_1}.$$

ДЕКРЕМЕНТ КОЛЕБАНИЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ – это величина, равная bT_1, и служит для оценки быстроты затухания колебательного процесса.

ДЕФОРМАЦИЯ (от лат. deformatio–искажение) - изменение формы и размеров тела или его части под действием внешних сил. Различают упругую деформацию, исчезающую после устранения воздействия, и пластическую деформацию, остающуюся после удаления воздействия.

ДЖОУЛЬ (ЕДИНИЦА ИЗМЕРЕНИЯ) – единица измерения работы:

а) в системе СИ - 1 джоуль (1 Дж = 1 Н·м= 1 кг·м^2/с^2);

б) в системе МКГСС - 1 кГ·м.

ДИАПАЗОН (от греч.diapason – буквально- через все) – область изменения какой-либо величины.

ДИНАМИКА (от греч. dynamikos – сильный, dynamis – сила) – раздел механики, в котором рассматриваются закономерности механического движения под действием приложенных к ним сил.

ДЛИНА ПРИВЕДЕННАЯ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА – это длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

ДИСБАЛАНС (от франц. disbalanse, от лат dis – нарушение, утрата и франц. balance – буквально – весы) – векторная величина, равная произведению неуравновешенной массы *m*на ее эксцентриситет *e* относительно оси ротора:

$$\overline{\text{Д}}_{\text{ст}} = me.$$

З

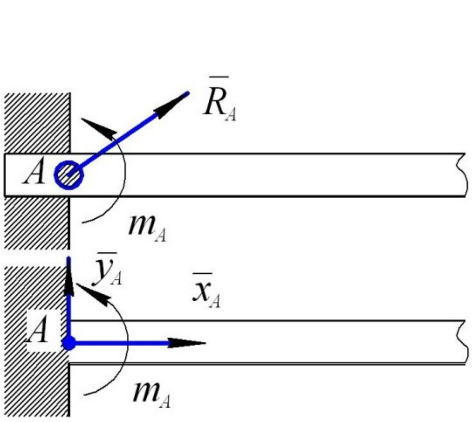
ЗАДАЧА КРАЕВАЯ – это такая задача, в которой для определения постоянных интегрирования вместо начальных условий задаются так называемые краевые условия.

ЗАДАЧА КРАЕВАЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ – это такая задача, в которой число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия.

ЗАДАЧА КРАЕВАЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЕННАЯ – эта такая задача, в которой число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия.

ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ. Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие: 1) зная закон движения точки, определить действующие на нее силы (первая задача динамики); 2) зная действующие на точку силы, определить закон движения точки (вторая, или основная, задача динамики).

Для несвободной материальной точки первая задача динамики состоит в том, чтобы, зная закон движения точки и действующие на нее активные силы, определить реакции связей. Вторая (основная) задача динамики при несвободном движении распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить: 1) закон движения точки; 2) реакции наложенных связей.



ЗАДЕЛКА ЖЕСТКАЯ - неподвижная защемляющая опора. Для нахождения реакций жесткой заделки надо определить три неизвестные наперед величины

$$\overline{x}_A, \overline{y}_A, m_A.$$

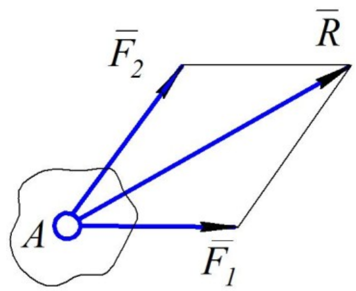
ЗАКОН ДИНАМИКИ ВТОРОЙ (ОСНОВНОЙ) устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой-нибудь силы: произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

ЗАКОН ДИНАМИКИ ПЕРВЫЙ (ЗАКОН ИНЕРЦИИ): изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движение по инерции.

ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТРЕТИЙ (О РАВЕНСТВЕ ДЕЙСТВИЯ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ): две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

ЗАКОН НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ - это закон, согласно которому при одновременном действии на точку нескольких сил каждая из них сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщила бы, действуя одна.

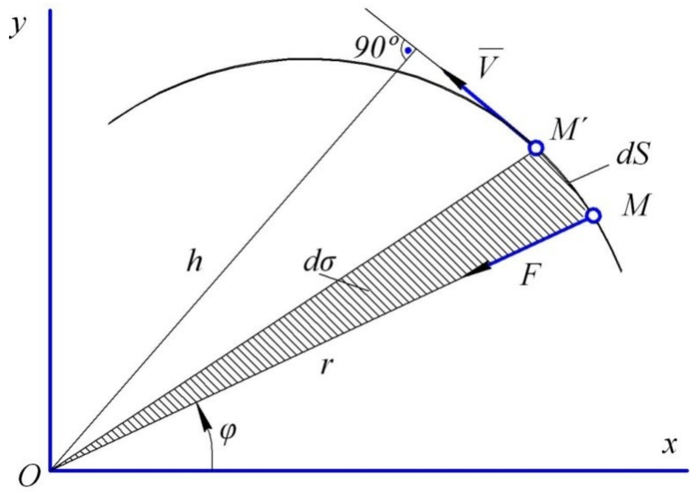


ЗАКОН ПАРАЛЛЕЛОГРАММА СИЛ: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в этой же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ. При движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой с постоянной секторной скоростью, т.е. так, что радиус – вектор точки в любые равные промежутки времени ометает равные площади (закон площадей), т.к. при движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой, а ее скорость изменяется так, что момент вектора $\overline{V}$ относительно центра остается постоянным:

$$\overline{m}_0(\overline{V}) = Vh = const, \text{ где } Vh = h\frac{dS}{dt}, \text{а } hdS = 2d\sigma$$

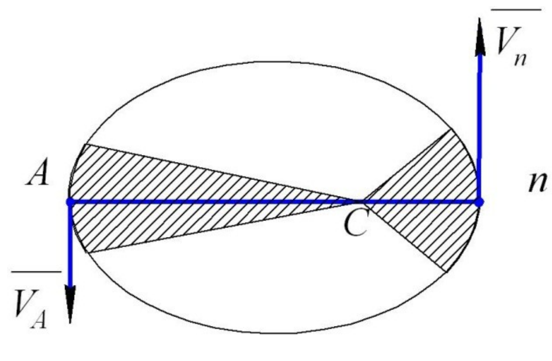


где $d\sigma$– площадь элементарного треугольника OMM'. Следовательно,

$$Vh = \frac{2d\sigma}{dt}$$

Величина $\frac{d\sigma}{dt}$ определяет скорость, с которой растет площадь, и называется *секторной скоростью точки*.

Этот закон имеет место при движении планет или спутников и выражает собой один из законов Кеплера.



Орбитой планеты, движущейся под действием силы притяжения Солнца, является эллипс, причем Солнце находится в одном из фокусов *C* эллипса. Так сила притяжения является центральной, то при движении имеет место закон площадей. В ближайшей к Солнцу точке орбиты *П* (перигелий) скорость планеты V_n будет наибольшей, а в наиболее удаленной от Солнца точке *A* (афелий) скорость V_A будет наименьшей.

Согласно закона площадей выполняется равенство

$$V_{\text{А}} \cdot \text{АС} = V_{\text{П}} \cdot \text{ПС},$$

т.е. площади заштрихованных секторов равны, и, следовательно, за одно и тоже время планета вблизи точки *П* должна пройти больший путь, чем вблизи *A*.

Аналогичный результат имеет место при движении спутника.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ – если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

Математически это значит: - если

$$m_z(\overline{F_K^e}) = 0, \text{ то } K_z = const.$$

Отсюда следует, что внутренние силы изменить главный момент количества движения системы не могут.

Для случая вращающейся системы вокруг неподвижной оси z (или проходящей через центр масс) $K_z = \mathcal{J}_z \omega$. Если $m_z(\overline{F_K^e})$=0, то

$$\mathcal{J}_z \omega = const$$

Отсюда приходим к заключению:

а) если система не изменяема (абсолютно твердое тело), то $\mathcal{J}_z = const$и, следовательно, $\omega = const$, т.е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью;

б) если система изменяема, то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что приведет к увеличению $\mathcal{J}_z$,

или приближаться к оси, что приведет к уменьшению $\mathcal{J}_z$. Но поскольку

$\mathcal{J}_z\ \omega = const$, то при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции – увеличиваться.

Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость системы, так как постоянство K_zне означает вообще постоянства ω.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС. Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно.

В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое. Действие внутренних сил движение центра масс системы изменить не может.

Математически закон будет:

если $\overline{F_K^e} = 0$, то $\overline{a_c} = 0$ или $\overline{V_c} = const.$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

Если $\overline{F_k^e} = 0$, то $\overline{Q} = const.$

Внутренние силы изменить количество движения системы не могут.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. При движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергии системы в каждом ее положении остается величиной постоянной, т.е.

$$T+П=T_0+П_0 = const.$$

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА. Главные заслуги в развитии механики принадлежат гениальному ученому Исааку Ньютону (1643 - 1727).

В работе Ньютона «Математические начала натуральной философии», изданной в 1687 г.,были изложены в систематическом виде основные законы классической механики (законы Ньютона).

<u>Первый закон</u> (закон инерции): изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

<u>Второй закон</u> (основной закон динамики) устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой-нибудь силы, а именно: произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под дей-

ствием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). Он гласит: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

ЗАКОН ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ – это закономерности, установленные опытным путем, которые с достаточной степенью точности могут применяться в инженерных расчетах. Они называются законами трения скольжения при покое.

1) При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого предельной силой трения, и направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

2) Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление:

$$F_{пр}=f_0N,$$

где f_0 – статический коэффициент трения – величина безразмерная, определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел.

Из этих двух законов следует, что при равновесии

$F \leq F_{\text{пр}}$ или $F \leq f_0N$.

И

ИМПУЛЬС СИЛЫ. Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы.

Импульс $\overline{S}$ любой силы $\overline{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется:

$$\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F}\, dt.$$

ИМПУЛЬС СИЛЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ. Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\overline{S}$, равная произведению силы $\overline{F}$ на элементарный промежуток времени dt :

$$d\overline{S} = \overline{F} dt.$$

Направлен элементарный импульс вдоль линии действия силы.

ИМПУЛЬС УДАРНЫЙ. Ударные силы при ударе очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах и поэтому в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами ударные силы, а их импульсы. Ударный импульс

$$\overline{S}_{уд} = \int_0^{\tau} \overline{F_{уд}}\, dt = \overline{F_{уд}^{ср}} \cdot \tau$$

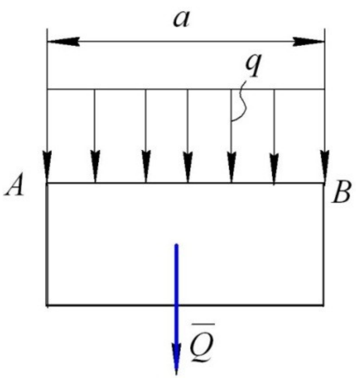
является величиной конечной.

ИНЕРТНОСТЬ тела проявляется в том, что оно сохраняет свое движение при отсутствии действующих сил, а когда на него начинает действовать сила, то скорости точек тела изменяются не мгновенно, а постепенно и тем медленнее, чем больше инертность этого тела. Количественной мерой инертности материального тела является физическая величина, называемая массой тела.

ИНЕРЦИЯ (от лат. inertia–бездействие) – свойство тел при отсутствии внешнего воздействия сохранять неизменным состояние своего движения. Мерой инерции является масса при поступательном движении тела и момент инерции тела относительно оси вращения при вращательном его движении.

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ ГИРОСКОП – гироскоп с двумя степенями свободы, служащий для измерения угла поворота объекта на котором установлен прибор.

ИНТЕНСИВНОСТЬ – значение силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в ньютонах, деленных на метры (Н/м).



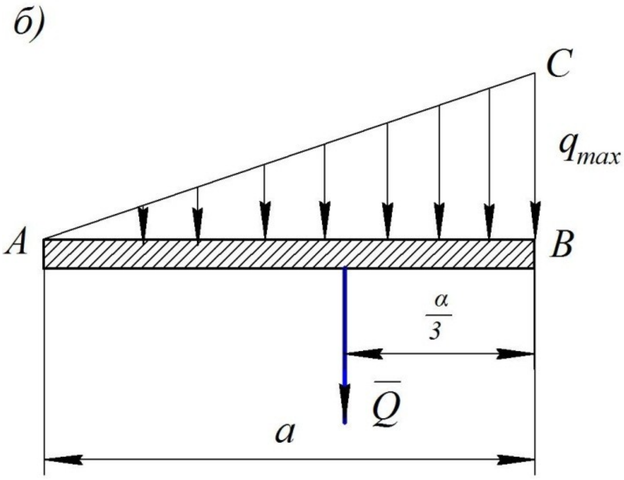
По модулю для случая *а*)

$$Q = q \cdot a.$$

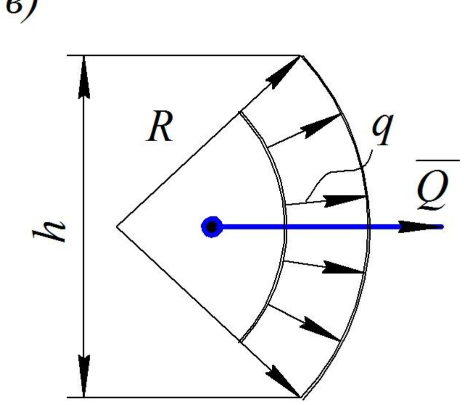
Приложена сила $\overline{Q}$ в середине отрезка *AB*.

Если силы распределены вдоль отрезка по линейному закону (рис. *б*), то

$$\overline{Q} = 0.5\, aq_{max}.$$



Примером такой нагрузки могут служить силы давления воды на плотину. Для этих сил интенсивность *q*является величиной переменной, растущей от нуля до максимального значения q_{max}. Приложена сила *Q*на расстоянии $\frac{a}{3}$ от стороны *BC*. Если силы равномерно распределены по дуге окружности (рис. в), то



$$Q = qh.$$

Примером таких сил могут служить силы гидростатического давления на боковые стенки цилиндрического сосуда.

К

КИЛОВАТТ-ЧАС - работа, произведенная какой-то машиной. Часто в технике употребляется единица измерения работы – киловатт – час

(1 кВт·ч=3,6×10^6Дж ≈367 100 кГ·м).

КИНЕМАТИКА (от греч. kinema (kinematos) – движение) – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства механического движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ПАРА – соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение.

КОЛЕБАНИЯ– изменение какой-либо величины, характеризующиеся поочередным возрастанием и убыванием.

КОЛЕБАНИЯ ГЛАВНЫЕ – это малые свободные колебания системы с двумя степенями свободы, определяемые уравнениями

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad q_2^{(1)} = n_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1);$$
$$q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad q_2^{(2)} = n_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2),$$

где k_1 и k_2 – собственные частоты системы;

n_1 и n_2 – коэффициенты формы, определяемые отношением амплитуд $\frac{\text{В}}{\text{А}} = n$ или самих координат $\frac{q_2}{q_1}$.

КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ – движение, при котором точка каждое из своих положений на траектории, кроме крайних, проходит поочередно в противоположных направлениях.

КОЛЕБАНИЕ ТОЧКИ ВЫНУЖДЕННЫЕ – колебания, происходящие под действием возмущающей силы, которая периодически изменяетсясо временем и проекция которой на ось *Ox*определяется равенством и является гармонической:

$$Q_x = Q_0 \sin pt,$$

где p – частота возмущающей силы.

Если на точку действуют только восстанавливающая сила $\overline{F}$ и возмущающая $\overline{Q}$, то дифференциальным уравнением движения точки вдоль оси *Ox* будет

$$mx = -cx + Q_o \sin pt,$$

где c – жесткость упругого элемента.

Положим $\frac{e}{m} = k^2$, $\frac{Q_0}{m} = P_{0,}$ тогда дифференциальное уравнение движения примет вид

$$x + k^2 x = P_0 \sin pt,$$

где P_0 имеет размерность ускорения;

k– круговая (циклическая) частота.

Решением этого уравнения будет

$$x = Asin\ \ kt + \alpha \ \ + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt,$$

где A и α – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям.

КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ ГАРМОНИЧЕСКИЕ – это колебания, происходящие по закону

$$x = A \cos kt,$$

где A и k – постоянные величины.

A – амплитуда колебаний;

k – частота колебаний.

КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ ЗАТУХАЮЩИЕ - это колебания, создаваемые силой вязкого трения $\overline{R} = -\mu\overline{V}$, где μ – коэффициент пропорциональности, $\overline{V}$ – скорость. Знак минус указывает, что сила $\overline{R}$ направлена противоположно $\overline{V}$.

Дифференциальным уравнением движения точки будет

$mx = -cx - \mu x$, деля на mобе части, получим $x + 2bx + k^2x = 0$,

где обозначено

$$\frac{c}{m} = k^2,\ \frac{\mu}{m} = 2b.$$

Величины k и b имеют одинаковые размерности, что позволяет их сравнивать друг с другом. Это дифференциальное уравнение второго порядка свободных колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости первой степени. Его решение имеется в виде

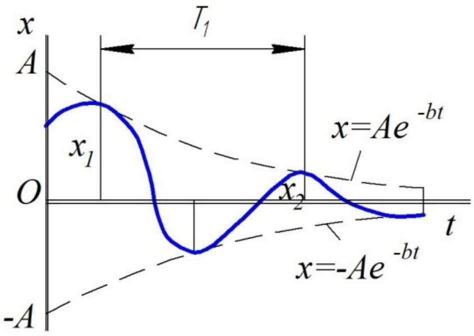
$$x = e^{nt},$$

характеристическим уравнением которого будет

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0$$

и корни которого будут

$$n_{1,2} = -b \mp \sqrt{b^2 - k^2}.$$



1. Рассмотрим случай $k>b$. Введя обозначения $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$, получим решение в виде

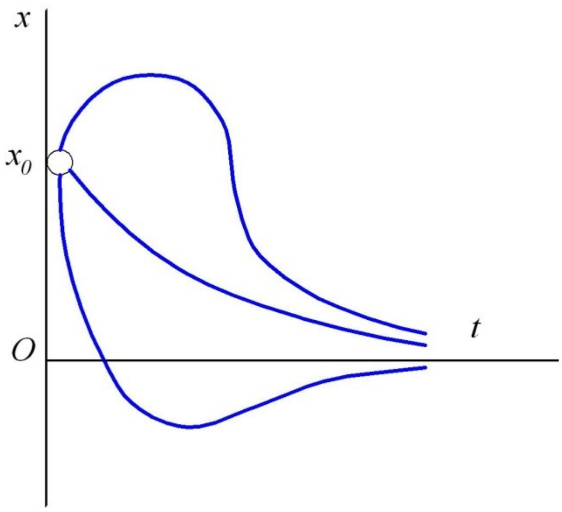
$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t)$$

или

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha).$$

Величины C_1, C_2, Aи αявляются постоянными интегрирования и определяются по начальным условиям. График колебаний показан на рисунке. Периодом затухающих колебаний будет

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\overline{k^2 - b^2}} \ .$$



2. Рассмотрим случай, когда $b>k$, т.е. сопротивление по сравнению с восстанавливающей силой велико. Введя обозначения $b^2 - k^2 = r^2$, найдем корни характеристического уравнения

$n_{1,2} = -b \pm r$,т.е. оба действительны и отрицательны (так как $r<b$).

Тогда решением дифференциального уравнения будет

$$x = C_1 e^{-\ b+r\ t} + C_2 e^{-\ b-r\ t}.$$

Графиком такого движения могут быть кривые, показанные на рисунке

3. Рассмотрим случай, когда $b = k$. Корни характеристического уравнения будут действительными и кратными $n_{1,2} = \pm b$ и общее решение уравнения примет вид

$$x = e^{-bt}(C_1 + \mathrm{C}_2 t).$$

Движение точки не будет носить колебательного характера и со временем будет стремиться к равновесному положению $x=0$. График кривых имеет тот же вид и зависит от начальных условий (см. рис.).

КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ ЛИНЕЙНЫЕ - это колебания, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями:

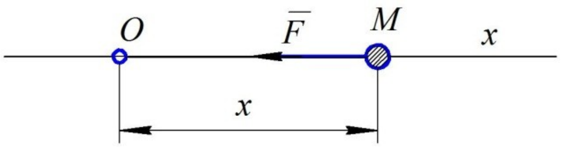
$$x + k^2 x = 0, \ x + 2bx + k^2 x = 0, \quad x + k^2 x = P_0 \sin pt.$$

КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ – это такие колебания, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, например

$$mxx = -cx^3.$$

КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ – это такие колебания, которые совершаются под действием периодически изменяющихся параметров системы. Например, при раскачивании качелей периодически меняются момент инерции и положение центра тяжести.

КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ СВОБОДНЫЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ – колебания, происходящие под действием восстанавливающей силы $F_x = -cx$. Дифференциальным уравнением движения в проекции на ось x будет $mx = -cx$.



Вводя обозначение $\frac{c}{m} = k^2$, получим $x + k^2 x = 0$,

Решением этого уравнения будет

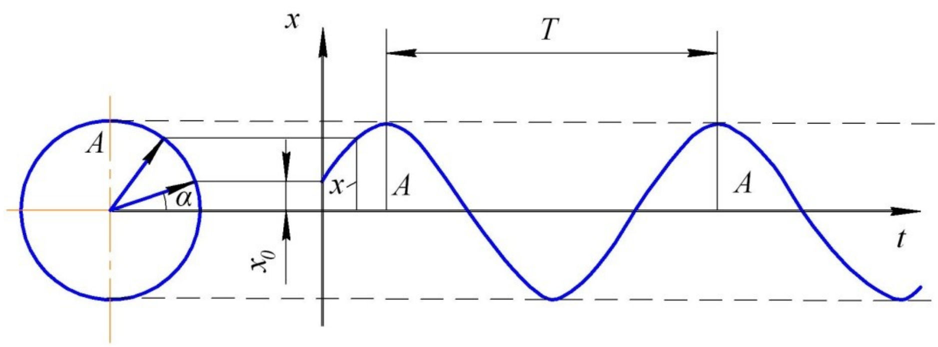
$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \text{или}$$

$$x = A \sin(kt + \alpha),$$

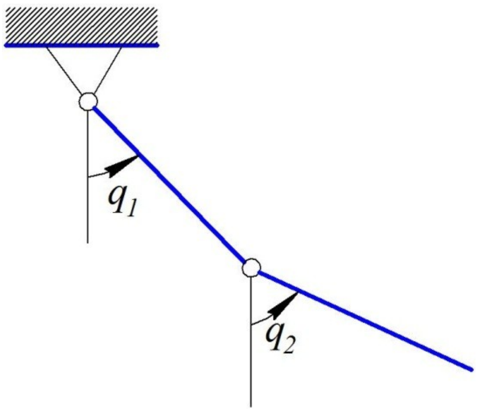
где C_1, C_2, A и α – постоянные интегрирования, которые определяются по начальным условиям задачи.

Графиком таких колебаний будет

Величина A, равная наибольшему отклонению точки от положения центра колебаний, называется амплитудой колебаний. Величина α- начальная фаза.



КОЛЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ МАЛЫЕ. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, положение которой определяется двумя обобщенными координатами *q₁, q₂* (см. рис.). Тогда дифференциальными уравнениями малых колебаний системы с двумя степенями свободы будут



$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0,$$

$$a_{12}q_1 + a_{22}q_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0.$$

Решением этих уравнений будет

$$q_1 = A\sin(kt+\alpha),$$

$$q_2 = B\sin(kt+\alpha),$$

где *A, B,k,α* –постоянные величины.

КОЛЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ МАЛЫЕ – это колебания, дифференциальным уравнением которых является уравнение

$$q + k^2 q = 0,$$

где q – обобщенная координата в консервативной механической системе, которая находится в некотором устойчивом равновесии;

$k^2 = \frac{c}{a}$ – частота колебаний;

с –квазиупругий коэффициент (или обобщенный коэффициент жесткости);

a– инерционный коэффициент (*a*>0), размерность которого зависит от размерности q ,в частности, *a*может иметь размерность массы или момента инерции.

Частота и период малых колебаний определяются равенствами:

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Малые колебания системы имеют свойства:

1) свободные (собственные) колебания системы являются колебаниями гармоническими, частота и период этих колебаний не зависят от начальных условий;

2) так как постоянные A и α зависят от начальных условий, то и амплитуды колебаний точек системы и начальная фаза α тоже зависят от начальных условий;

3) отношение амплитуд колебаний разных точек системы от начальных условий не зависят и определяются конфигурацией системы;

4) все точки системы в каждый момент времени находятся в одной и той же фазе *(kt+α)* и, следовательно, одновременно проходят через положение равновесия и одновременно достигают максимальных отклонений от этого положения.

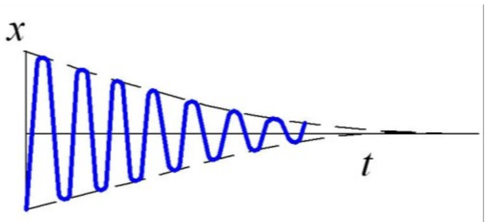
КОЛЕБАНИЯ СОБСТВЕННЫЕ – это такие колебания, которые происходят по закону

$$x = A\sin(kt + \alpha),$$

когда амплитуда A зависит от начальных условий и частоты $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

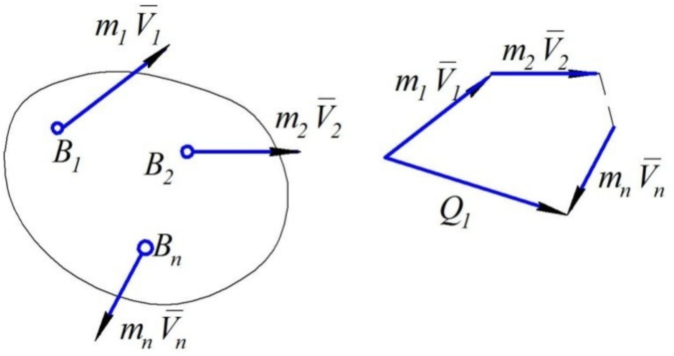
Если собственные колебания входят в сложные колебания, решением которых будет

$$x = Ae^{-bt}\sin(k\,t + \alpha) + B\sin(pt - \beta),$$



то первое слагаемое $Ae^{-bt}\sin(k\,t + \alpha)$ выражает *собственные* колебания, графиком которых является (см. рис.).

КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ. Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\overline{V}$, равная произведению массы точки на ее скорость.



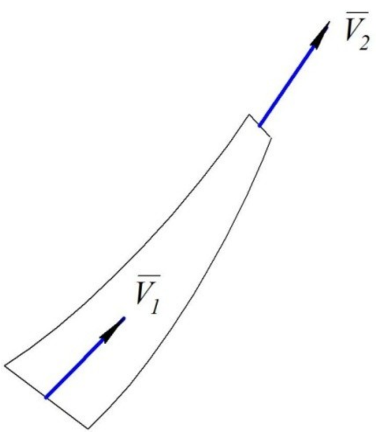
Направлен вектор $m\overline{V}$ так же, как и скорость точки, т.е. по касательной к ее траектории.

Количеством движения системы называется векторная величина $\overline{Q}$, равная геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы:

$$\overline{Q} = \quad m_k \overline{V_k}, \quad \text{или} \quad \overline{Q} = \mathrm{M}\overline{V}_{\text{c}}.$$

Количество движения системы равно произведения массы всей системы на скорость ее центра масс.

КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ СЕКУНДНОЕ – векторная величина, равная $G_{\text{c}}\overline{V}$,



$\overline{V}$ – средняя скорость движения жидкости в данном сечении;

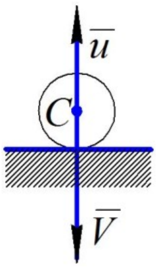
G_{c} –секундный массовый расход жидкости, равный

$$G_{\text{c}} = \rho S V,$$

где ρ – плотность;

S - площадь поперечного сечения трубки.

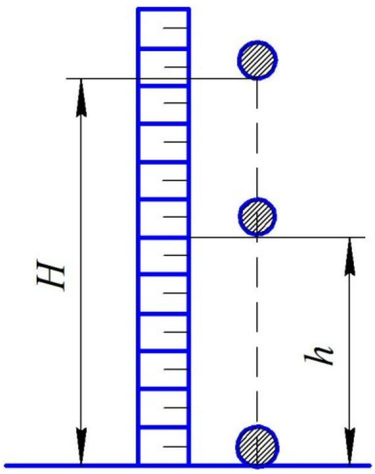
КООРДИНАТЫ ОБОБЩЕННЫЕ – независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют ее положение.



Обобщенные координаты могут иметь любой геометрический (или физический смысл), в частности, отрезки прямых или дуг, углы, площади и т.п.

КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ УДАРЕ - коэффициент k, равный при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара.

$$k = \frac{u}{V}.$$



Значение коэффициента восстановления для различных тел определяется опытным путем. Экспериментально величину kможно найти, если рассмотреть шар, свободно падающий на плиту с предварительно измеренной высотой H, и определить с помощью стоящей рядом вертикальной линейки (см. рис.) высоту подъема h после удара. Тогда по формуле Галилея

$$V = \sqrt{2gH}, \quad u = \sqrt{2gh} \quad \text{и} \quad k = \frac{u}{V} = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Значения коэффициента восстановления для тел для различных материалов дается в соответствующих справочниках. Например, при скорости соударения порядка 3 м/с для удара дерева о дерево $k \approx 0.5$, стали о сталь $k \approx 0.56$, стекла о стекло $k \approx 0.94$.

КООЭФФИЦИЕНТ ДИНАМИЧНОСТИ ηпоказывает во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний B (т.е. максимальное отклонение точки от центра колебаний) больше статического отклонения λ_0, и зависит от отношения частот z:

$$z = \frac{p}{k}, \quad \eta = \frac{B}{\lambda_0},$$

где p – частота возмущающей силы;

k – частота колебаний.

КООЭФФИЦИЕНТ ЖЕСТКОСТИ ОБОБЩЕННЫЙ

Дифференциальным уравнением движения малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0,$$

где q – обобщенная координата.

Это уравнение нелинейное, но его можно линеализировать и тем самым упростить. Для этого надо потенциальную энергию Π определить с точностью до малых величин второго порядка малости, т.е. с точностью до q^2 или q^2. Для этого разложим $\Pi(q)$ в ряд Тейлора и учитывая, что в положении равновесия $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 = 0$, найдем (с точностью до q^2)

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \frac{1}{2}cq^2, \quad \text{где } c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 > 0.$$

и называется *обобщенным коэффициентом жесткости* (или квазиупругим коэффициентом).

КООЭФФИЦИЕНТ ЖЕСТКОСТИ ПРУЖИНЫ

Сила упругости пружины согласно закона Гука равна

$$F = c\lambda,$$

где λ – удлинение (или сжатие) пружины;

c – коэффициент жесткости пружины.

В системе СИ коэффициент c измеряется в Н/м, и показывает, какую силу нужно приложить к пружине, чтобы ее растянуть (или сжать) на единицу длины.

КОЭФФИЦИЕНТ ИНЕРЦИОННЫЙ

Приближенное значение кинетической энергии $T(q, q)$с точностью до q^2, входящий в дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial T}{\partial q}\ \ - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$$

при разложении в ряд Тейлора функции

$$F\ \ q\ \ = F\ \ 0\ \ + F'\ \ 0\ \ q + \ldots \text{, будет равна}$$

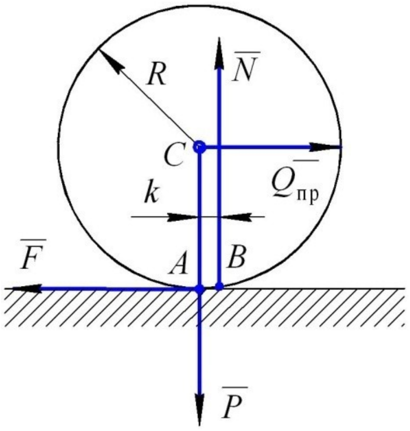
$$T = \frac{1}{2} a q^2,\ \text{где } a = F(0).$$

Коэффициент a называется инерционным коэффициентом. Так как $T>0$, то и постоянный коэффициент $a > 0$.

Размерность a зависит от размерности q, в частности, a может иметь размерность массы или момента инерции.

КОЭФФИЦИЕНТ КВАЗИУПРУГОСТИ(см. коэффициент инерционный).

КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ. При качении одного тела по поверхности другого, которые подвергаются деформации, соприкосновение этих тел происходит вдоль некоторой площади *AB* (см. рис.). При действии силы $\overline{Q}$интенсивность давления у края *A* убывает, а у края *B* возрастает. В результате реакция $\overline{N}$ оказывается смещенной в сторону действия силы $\overline{Q}$. С увеличением $\overline{Q}$ это смещение растет до некоторой предельной величины *k.* Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара $\overline{Q_{\text{пр.}}}$, $\overline{F}$ с моментом $\overline{Q_{\text{пр.}}} \cdot R$ и уравновешива-



ющая ее пара $\overline{N}, \overline{P}$ с моментом $N \cdot k$. Из равенства моментов находим $Q_{\text{пр.}} \cdot R = N \cdot k$ или

$$Q_{\text{пр}} = \frac{kN}{R},$$

где *k*– коэффициент трения качения.

Измеряют величину kобычно в сантиметрах. Значение коэффициента k зависит от материала тел и определяется опытным путем. Например, значение k (в см) для некоторых величин материалов:

дерево по дереву …………………….. 0,05÷0,08;

сталь мягкая по стали …………… ..…0,005 (колесо по рельсу);

сталь закаленная по стали……………..0,001 (шариковый подшипник).

Отношение $\frac{k}{R}$ для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0 . Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т.п.).

КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Предельная сила трения численно равна

$$F_{\text{пр}} = f_0 N,$$

где f_0 – статический коэффициент трения (величина безразмерная, определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхности;

N – сила нормального давления.

Значение коэффициента трения при покое для некоторых материалов:

дерево по дереву ………………………0,4 - 0,7;

металл по металлу ……………….…….0,15-0,25;

сталь по льду…………………………..0,027.

При движении одного тела по поверхности другого сила трения направлена в сторону, противоположную движению и равна

$$F=fN,$$

где *f*– динамический коэффициент трения скольжения.

Значение динамического коэффициента трения зависит еще и от скорости движущихся тел. В большинстве случаев с увеличением скорости коэффициент *f* сначала несколько убывает, а затем сохраняет свое почти постоянное значение, величина безразмерная и определяется опытным путем.

КОЭФФИЦИЕНТ ФОРМЫ

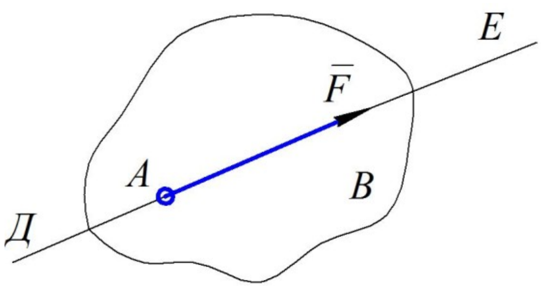
Решениями малых свободных колебаний системы с двумя степенями свободы являются уравнения:

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad q_2^{(1)} = n_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) \;;$$

$$q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2)\,, \quad q_2^{(2)} = n_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Числа n_1 и n_2определяются отношением амплитуд (или самих координат), т.е. $q_2(q_1)$ в каждом из этих колебаний, называют *коэффициентами формы*

Л



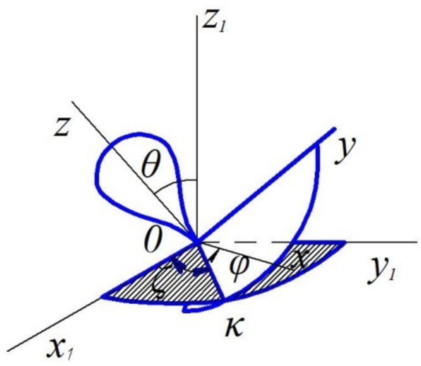
ЛИНИЯ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ – прямая *ДF*, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

ЛИНИЯ ДЕЙСТВИЯ ТОКА

Если рассмотреть установившееся течение жидкости, то можно заметить, что в каждой точке области, занятой жидкостью, скорость $\overline{V}$ее частиц, давление p и плотность ρ не изменяются со временем. При таком течении траектории жидких частиц являются кривыми линиями *(линиями тока)*, в каждой точке которых касательные направлены так же, как скорости жидких частиц, находящихся в данный момент времени в этих точках.

ЛИНИЯ ДЕЙСТВИЯ УЗЛОВ

Если рассмотреть движение твердого тела по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, закрепленного так, что одна его точка O остается во все время



движения неподвижной, то линия OK, вдоль которой пересекаются плоскости Oxy *и* Ox_1y_1 называется *линией узлов.* Тогда положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$трехгранника $Oxyz$, а с ним и самого тела можно определить углами

$$\varphi = \angle KOx,\ \psi = \angle x_1OK,\ \ \theta = \angle z_1Oz\,.$$

М

МАССА – количественная мера инертности материального тела. В классической механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

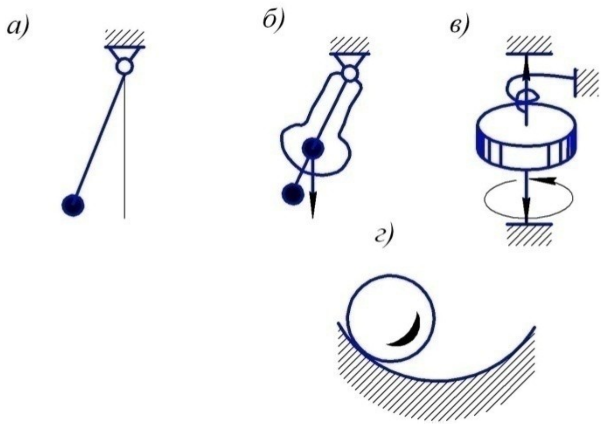
МАССА ГРАВИТАЦИОННАЯ исходя из закона всемирного тяготения $F = f\frac{m_1m_2}{r^2}$, заключаем, что масса может служить как мера гравитационных свойств тела и называется поэтому *гравитационной* (или тяжелой) массой.

МАССА ИНЕРТНАЯ

Исходя из закона $m\overline{a} = \overline{F}$видим, что масса является мерой инертности и называется поэтому *инертной массой.*

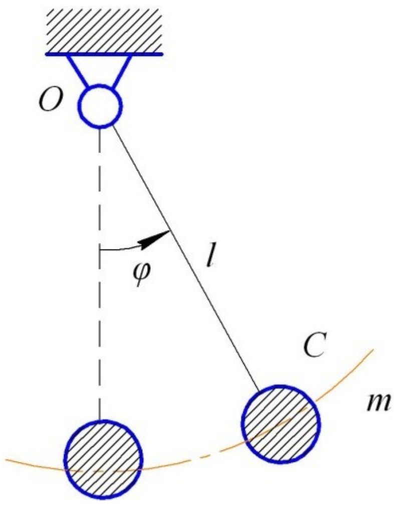
Ни откуда не следует, что масса инертная и гравитационная представляют собой одну и ту же величину. Многими экспериментами установлено, что значения общих масс совпадают с очень высокой степенью точности (по опытам советских физиков (1971), - с точностью до 10^{-11}).

Этот экспериментально установленный факт называют принципом эквивалентности. Энштейн положил его в основу своей общей теории относительности (теория тяготения), которая рассматривается в релятивистской механике.



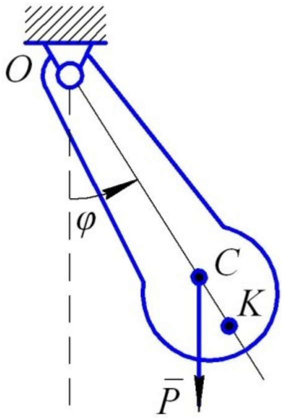
МАЯТНИК – твердое тело, совершающее под действием приложенных сил колебания около неподвижной точки или оси. На схеме *а)* - математический маятник; *б)* – физический маятник; *в)* – разновидность физического маятника – шар, совершающий колебания в круговом желобе, *г)* - крутильный маятник – диск, установленный на вертикальной оси и связанный со стойкой спиральной пружиной.

Маятник используется в приборах для определения времени, ускорения свободного падения, момента инерции тел и т.п.



МАЯТНИК МАТЕМАТИЧЕСКИЙ – это такой маятник, у которого груз малых размеров (рассматривается как материальная точка), подвешенный на тонкой нерастяжимой нити длиной l, массой m которой, по сравнению с мас-массой груза, можно пренебречь. Период малых колебаний

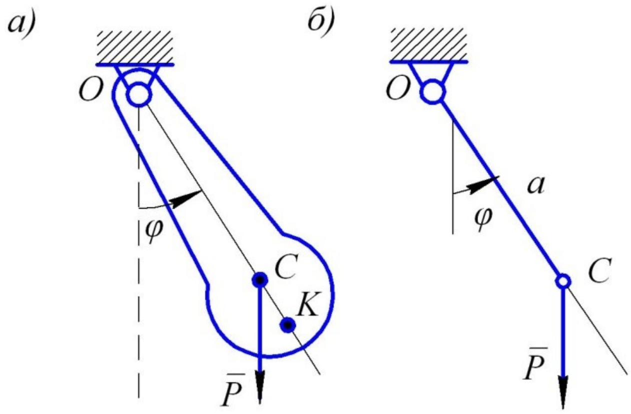
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



МАЯТНИК ОБОРОТНЫЙ. Если точки *K* и *O* являются взаимными, т.е. если ось подвеса будет проходить через точку *K*, то центром качаний будет точка *O* и период колебаний маятника не меняется. Это свойство используется в *оборотном маятнике,* который служит для определения ускорения силы тяжести.

МАЯТНИК ФИЗИЧЕСКИЙ – это твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.

Дифференциальным уравнением движения физического маятника будет



$$\mathcal{J}_0\varphi = -Pa\sin\varphi,$$

где *P*– вес маятника; *a* – расстояние *OC*;

$\mathcal{J}_0$ - момент инерции маятника относительно оси подвеса.

Решением этого уравнения будет

$$\varphi = \mathrm{C}_1 \sin kt + C_2 \cos kt \qquad \text{или}$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt\,, \qquad \text{где } k = \frac{Pa}{\mathcal{J}_0} \text{ - частота колебаний.}$$

Малые колебания физического маятника являются гармоническими и период его колебаний *T*равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}_0}{Pa}}\ .$$

Этот результат является приближенным, так как мы принимали для малых колебаний $sin\,\varphi \approx \varphi$. На самом деле период колебаний зависит от φ_0 и равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{Pa}}\cdot\left(1+\frac{J_0^2}{16}\right).$$

МЕТОД ВЫРЕЗАНИЯ УЗЛОВ. Этот метод применяется при расчете плоских ферм, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов.

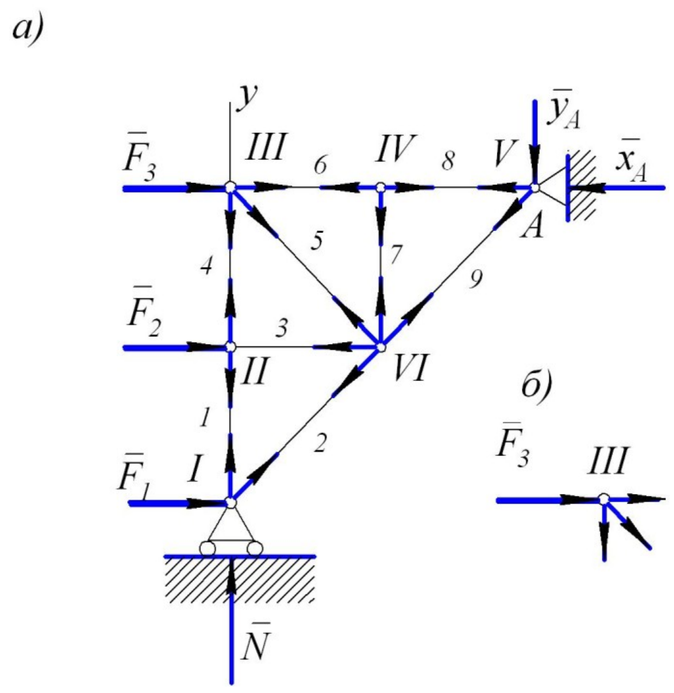
Пример. Рассмотрим ферму, образованную из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников; силы $F_1=F_2=F_3=F=20$*кН* и параллельны оси *x*. В этой ферме число узлов $n = 6$, число стержней $k = 9$. Составляя уравнения равновесия для фермы в целом

$$F_{Kx} = 0, \qquad F_{Ky} = 0, \qquad m_0\,(\overline{F}_K) = 0,$$

численно получим

$x_A = 3F = 60$ *кН;*

$y_A = N = 1.5\,F = 30$ *кН.*



Для определения усилий в стержнях пронумеруем узлы фермы римскими, а стержни арабскими цифрами. Искомые усилия обозначим *S* (S_1- в стержне *1*, S_2 -в стержне *2* и т.д.). Отрежем мысленно все узлы вместе со сходящимися в них стержнями от остальной фермы. Действие отброшенных стержней заменим силами, которые будут направлены вдоль соответствующих стержней и численно равны искомым усилиям *S₁, S₂* . Изображаем сразу все эти силы на рисунке, направляя их от узлов, т.к. считая все стержни растянутыми (рис. *а* и *б*). Если в результате расчета значения усилий в стержнях окажутся отрицательными, это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат.

Составляет последовательно уравнения равновесия

$$F_{Kx} = 0, \quad F_{Ky} = 0.$$

Начинаем с узла *I,* где сходятся два стержня, так как из двух уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия.

$$F_1 + S_2 \cos 45° = 0, \quad N_1 + S_1 + S_2 \sin 45° = 0.$$

Отсюда находим

$$S_2 = -F\ \overline{2} = -28.2 \text{ кН}, \qquad S_1 = -N - S_2 \frac{\overline{2}}{2} = -\frac{F}{2} = -10 \text{ кН}.$$

Теперь зная S_1, переходим к узлу *II*. Для него уравнения равновесия дают $S_3 + F_2 = 0$, $S_4 - S_1 = 0$, откуда

$$S_3 = -F = -20 \text{ кН}, S_4 = S_1 = -10\text{кН}.$$

Определив S_4, составляем аналогичным путем уравнения равновесия сначала для узла *III*, а затем для узла *IV*. Из этих уравнений находим

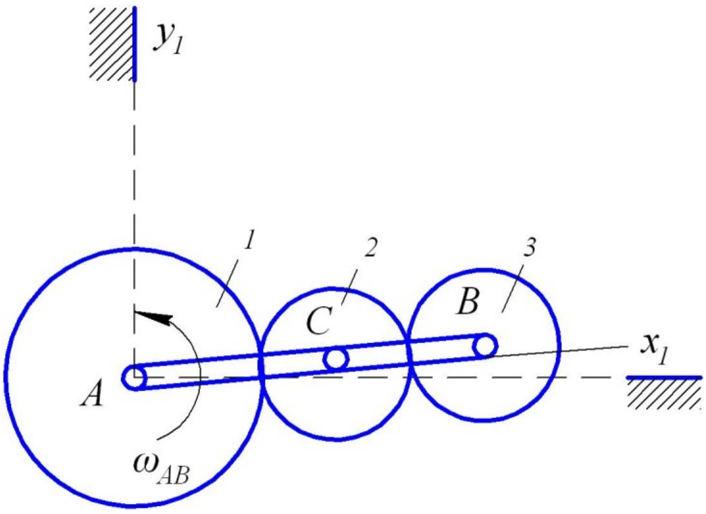
$$S_5 = -S_4\ \overline{2} = 14{,}1\text{кН}, \quad S_6 = S_8 = -30\text{кН}, S_7 = 0.$$

S_9 можно найти составив уравнение $y_A + S_0 \cos 45° = 0$

откуда $S_9 = -30\ \overline{2} = -42.3$ кН.

Как показывают знаки усилий, стержень *5* растянут, остальные стержни сжаты; стержень *7* не нагружен (нулевой стержень).

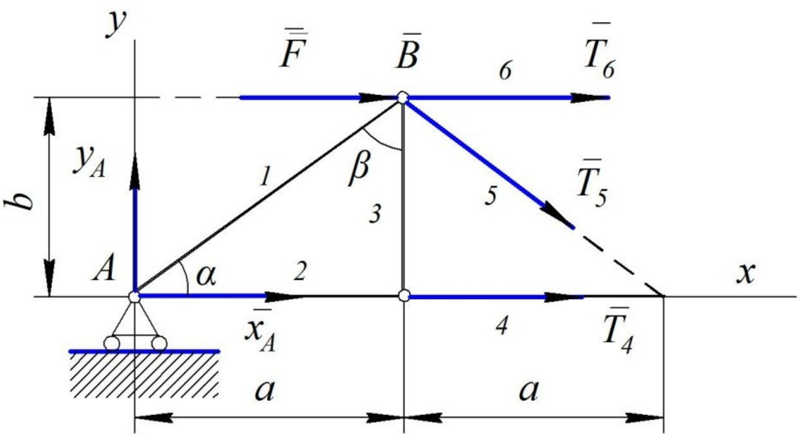
МЕТОД ОСТАНОВКИ (МЕТОД ВИЛИСА) – это метод, с помощью которого ведется расчет планетарных и дифференциальных передач. Для этого нужно мысленно сообщить неподвижной плоскости Ax_1y_1 вращение с угловой скоростью $-\omega_{AB}$, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа AB (метод остановки или метод Виллиса). Тогда кривошип в этом сложном движении будет неподвижен, а любая шестерня радиуса r_K будет иметь угловую скорость



$$\omega_K = \omega_K - \omega_{\text{AB}},$$

где ω_K – абсолютная угловая скорость этой шестерни по отношению к осям Ax_1y_1.

МЕТОД СЕЧЕНИЙ (МЕТОД РИТТЕРА). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы. Суть его состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня в которых (или в одном из которых) требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей.



Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считая стержни растянутыми, и составляют уравнения равновесия:

$$F_{Kx} = 0, \qquad F_{Ky} = 0, \qquad m_{В}\,(\overline{F}_K) = 0.$$

$$x_A + T_4 + F + T_5 \cdot \cos\alpha + T_6 = 0;$$

$$y_A - T_5 \cdot \sin\alpha = 0;$$

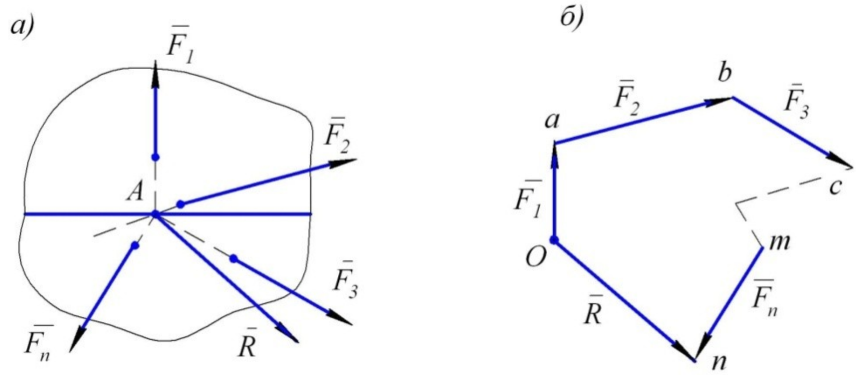
$$x_A \cdot b + T_4 \cdot b - y_A \cdot \alpha = 0;$$

Из трех уравнений определяем три неизвестных усилия T_4, T_5, T_6 в стержнях фермы.

МЕХАНИКА (от греч. mechanike (techne) – искусство построения машин) – наука о перемещениях тел в пространстве и происходящих при этом взаимодействиях между ними.

МЕХАНИКА ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ – наука, изучающая понятия и методы механических принципов, используемых в общей механике.

МНОГОУГОЛЬНИК СИЛОВОЙ – способ построения главного вектора любой системы сил. Этот способ является более простым и удобным по



сравнению с правилом параллелограмма. Для определения этим способом суммы сил

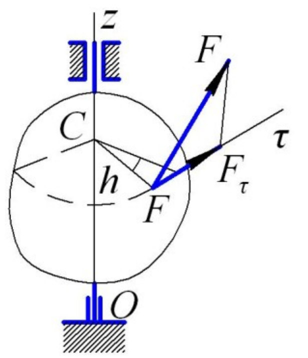
$$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3 \ldots \overline{F}_n$$

(рис. *а*), откладываем от произвольной точки *О*(рис. *б*) вектор $\overline{Oa}$, изображающий в выбранном масштабе силу $\overline{F_1}$, от точки *а*- вектора $\overline{ab}$, изображающий силу $\overline{F_2}$, от точки *b*– вектор $\overline{bc}$, изображающий силу $\overline{F_3}$, и т.д. От конца $\overline{m}$ предпоследнего вектора откладываем вектор $\overline{mn}$, изображающий силу $\overline{F_n}$. Соединяем начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \overline{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots \overline{F_n} \text{ или } \overline{R} = \quad \overline{F}_K.$$

МОМЕНТ ВРАЩАЮЩИЙ - величина, равная

$$m_z(\overline{F}) = F_\tau \cdot h \quad \text{или}$$



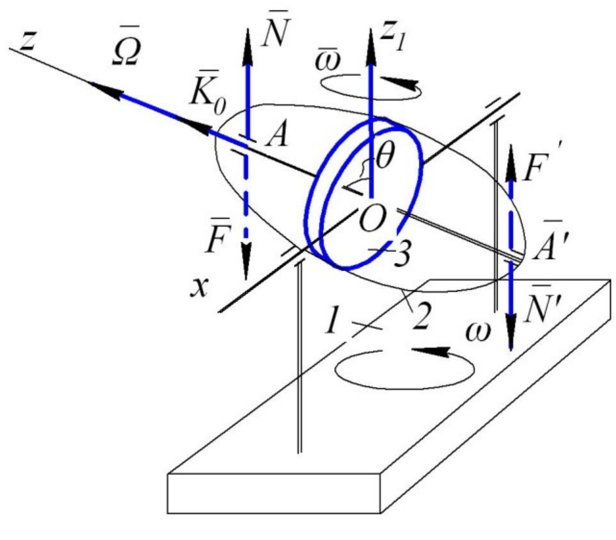
$$M_z = \mathcal{J}_z \cdot \varepsilon,$$

где h - плечо силы $\overline{F}_\tau$;

ε – угловое ускорение;

$\mathcal{J}_z$ – момент инерции.

МОМЕНТ ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ – есть векторная величина, равная



$$\overline{M}_{\text{гир}} = \overline{K}_0 \times \overline{\omega}.$$

Тогда скалярная величина

$$M_{\text{гир}} = K_0 \omega \sin\theta = \mathcal{J}_z \Omega \omega \sin\theta,$$

где $\overline{K}_0$ – кинетический момент;

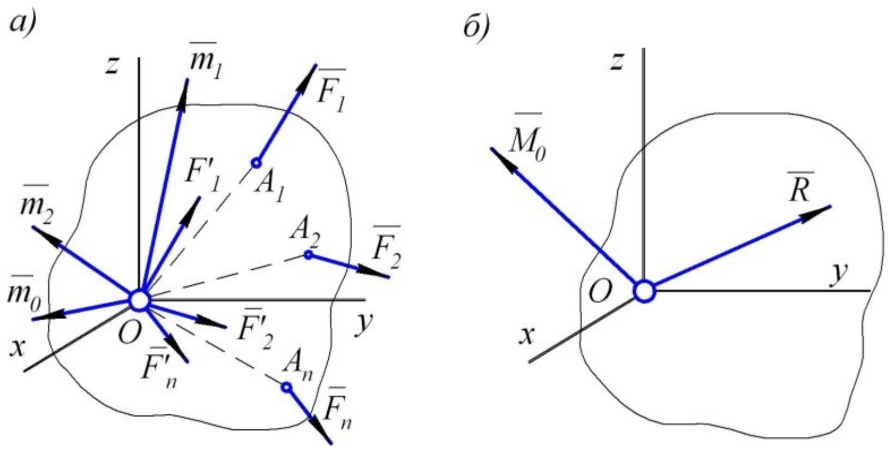
$\overline{\omega}$ – угловая скорость относительно оси z_1;

$\overline{\Omega}$ – угловая скорость относительно оси z;

θ – угол между осями *z*и z_1.

Гироскопический момент равен моменту гироскопической пары $(\overline{N}, \overline{N'})$.

Гироскопическая пара сил $\overline{N}, \overline{N'}$ - это пара, действующая на подшипники гироскопа со стороны оси *z*.



МОМЕНТ ГЛАВНЫЙ СИСТЕМЫ СИЛ – величина векторная, равная геометрической сумме момента всех сил относительно центра *O*:

$$\overline{M}_0 = \quad \overline{m}_0\ \overline{F}_K\ , \qquad \text{а} \quad \overline{R} = \quad \overline{F}_K$$

МОМЕНТ ВРАШАЮЩИЙ СИЛ ИНЕРЦИИ механической системы (твердого тела) относительно некоторого центра *O* или оси *z*равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра или той же оси.

$$\overline{M}_0^{\text{и}} = -\frac{d\overline{K_0}}{dt} \quad \text{и} \quad \overline{M}_z^{\text{и}} = -\frac{d\overline{K_z}}{dt},$$

МОМЕНТ ВРАЩАЮЩИЙ ИНЕРЦИИ ОСЕВОЙ – называется

скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси:

$$\mathcal{J}_z = \quad m_K\, h_K^2.$$

Осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении, величина положительная и не равна нулю.

Единицей измерения в системе СИ будет 1 кг·м^2.

Если дан радиус инерции твердого тела, то его момент инерции относительно оси *Oz* определяется равенством

$$\mathcal{J}_z = \mathrm{M}\rho_z^2,$$

где M – масса тела;

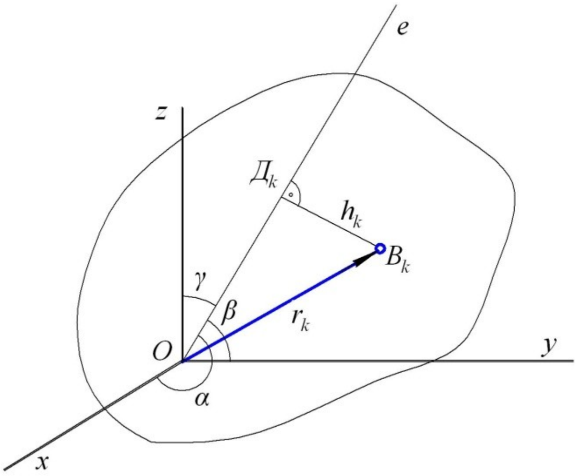
ρ_z – радиус инерции.

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ

Если в качестве осей *Oxyz* выбрать произвольные оси инерции тела для точки O, то ее момент инерции относительно оси *l*будет:

$$\mathcal{J}_l = \quad m_K \;\; x_K^2 + y_K^2 + z_K^2 - (x_K \cos\alpha + y_K \cos\beta + z_K \cos\gamma)^2$$

$$\mathcal{J}_l = \mathcal{J}_x cos^2\alpha + \mathcal{J}_y cos^2\beta + \mathcal{J}_z cos^2\gamma - 2\mathcal{J}_{xy} cos\alpha \cos\beta - 2\mathcal{J}_{yz} cos\beta cos\gamma - 2\mathcal{J}_{zx} cos\gamma cos\alpha$$



Эта формула позволяет, зная входящие в их правые части моменты инерции относительно заданных осей *Oxyz,* определить моменты инерции относительно любой оси, проходящей через точку *O*.

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ выражается через сумму произведений масс точек системы и двух из их координат.

$$\mathcal{J}_{xy} = \quad m_K\, x_K y_K, \quad \mathcal{J}_{yz} = \quad m_K\, y_K z_K, \quad \mathcal{J}_{zx} = \quad m_K\, z_K x_K,$$

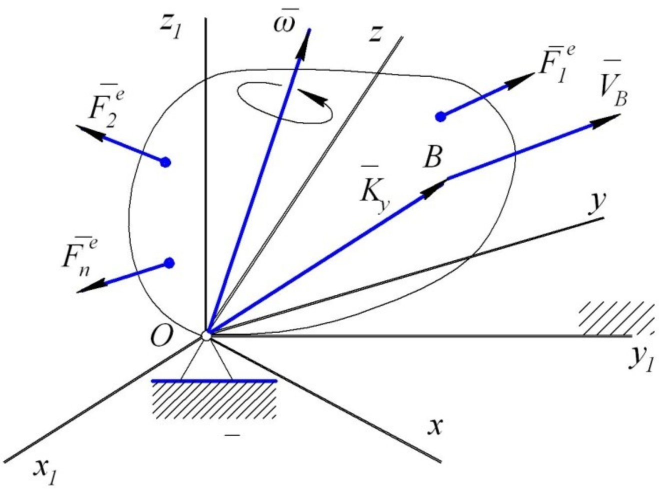
где m_K - массы точек;

x_K, y_K, z_K - их координаты.

В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, в частности, при определенном образе выбранных осей *Oxyz* ,могут обращаться в нули.

Центробежные моменты инерции $\mathcal{J}_{xz}$ и $\mathcal{J}_{yz}$ характеризуют степень динамической неуравновешенности тела при его вращении вокруг оси *z.*

МОМЕНТ ВРАЩАЮЩИЙ КИНЕТИЧЕСКИЙ относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.



$$K_z = \mathcal{J}_z \omega$$

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то

$$K_z = \mathcal{J}_{1z}\omega_1 + \mathcal{J}_{2z}\omega_2 + \ldots . \mathcal{J}_{nz}\omega_n.$$

Кинетический момент $\overline{K}$ - это вектор, который определяется по его проекции на три координатные оси *Oxyz,* если тело движется вокруг неподвижной точки, определяется $K_x = \mathcal{J}_x\omega_x$, $K_y = \mathcal{J}_y\omega_y$, $K_z = \mathcal{J}_z\omega_z$.

Эти формулы дают выражения проекций вектора $\overline{K}_0$на главные оси инерции тела для точки *O*.

Если оси *Oxyz*не будут главными, то формулы примут вид

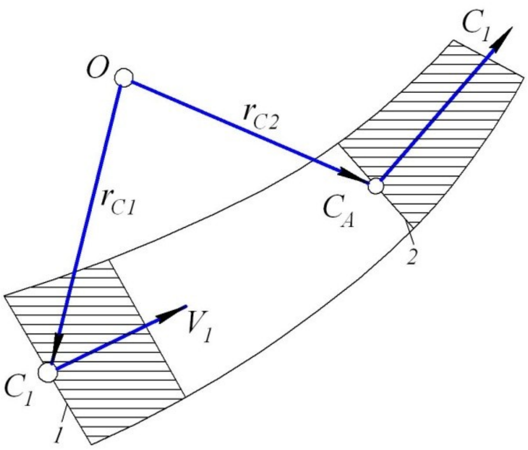
$$K_x = \mathcal{J}_x\omega_x - \mathcal{J}_{xy}\omega_y - \mathcal{J}_{xz}\omega_z,$$

$$K_y = -\mathcal{J}_{xy}\omega_x + \mathcal{J}_y\omega_y - \mathcal{J}_{yz}\omega_z,$$

$$K_z = -\mathcal{J}_{xz}\omega_x - \mathcal{J}_{yz}\omega_y + \mathcal{J}_z\omega_z.$$

МОМЕНТ ВРАЩАЮЩИЙ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ СЕКУНДНЫЙ

При установившемся течении жидкости (газа) в трубке тока (или трубе), когда векторы скоростей $\overline{V}_1$и $\overline{V}_2$ приложены в центрах тяжести площадей соответствующих сечений трубки тока (трубы) существует теорема: разность секундных моментов количества движения относительно центра O жидкости, протекающей через два поперечных сечения трубки тока (трубы), равна сумме моментов относительно того же центра всех внешних (массовых и поверхностных) сил, действующих на объем жидкости, ограниченной этими сечениями и поверхностью трубки тока (стенками трубы)



$$G_c \quad \overline{r}_{c_2} \times \overline{V}_2 \; - \; \overline{r}_{c_1} \times \overline{V}_1 \quad = \quad \overline{m}_0(\overline{F}_K^e) \quad \text{или}$$

$$G_c \; \overline{m}_0(\overline{V}_2) - \overline{m}_0(\overline{V}_1) \; = \; \overline{m}_0(\overline{F}_K^e),$$

где величина $G_c\overline{m}_0(\overline{V})$ называется *секундным моментом количества движения жидкости* относительно центра *O;*

G_c - секундный расход массы.

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Моментом количества движения точки относительно некоторого центра *O* называется векторная величина $\overline{m}_0 \;\; m\overline{V}$, определяемая равенством

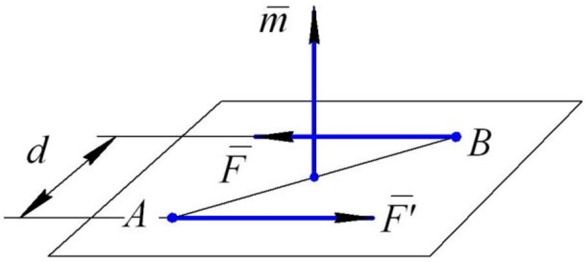
$$\overline{m}_0 \;\; m\overline{V} \;\; = \overline{r} \times m\overline{V}$$

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ГЛАВНЫЙ

Главным моментом количеств движения (или кинетическим моментом) системы относительно данного центра O называется сумма моментов количества движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\overline{K}_0 = \quad \overline{m}_0\,(m_K\overline{V}_K).$$

МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ есть вектор $\overline{m}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки:



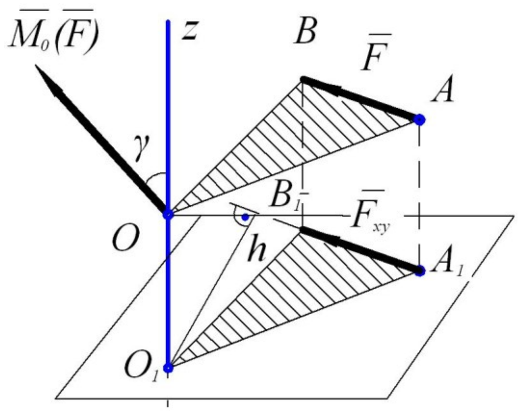
$$m=Fd$$

В векторной форме:

$$m = \overline{m}_A(\overline{F}) = \overline{AB} \times \overline{F}\text{-}$$

т. е. момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы.

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ Zравен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси *z*, взятому относительно точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью.

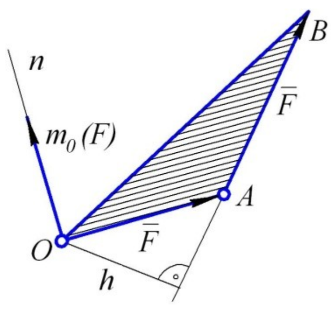


$$m_z(\overline{F}) = m_{O_1}\ \overline{F}_{xy}\ = \pm F_{xy} \cdot h,$$

где h - плечо силы $\overline{F}_{xy}$

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ (ЦЕНТРА)

Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра *O* называется приложенный в центре *O* вектор $\overline{m_0}$ $(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля *F*на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр *O* и силу, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра *O* против хода часовой стрелки.



$$\overline{m}_0(\overline{F}) = F \cdot h = 2 \text{ пл.} \Delta \text{ OAB},$$

или в векторной форме $\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$.

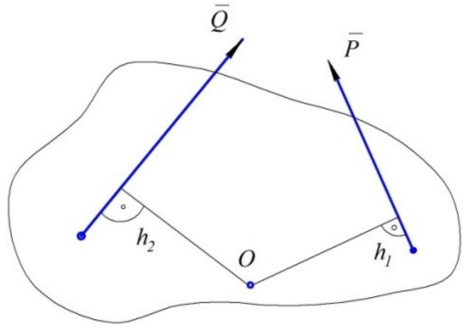
Момент силы обладает свойствами:

1) момент силы относительно центра не изменится при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия;

2) момент силы относительно центра O равен нулю или когда сила равна нулю, или когда линия действия силы проходит через цент O (плечо равно нулю).

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ

Алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно центра O равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо

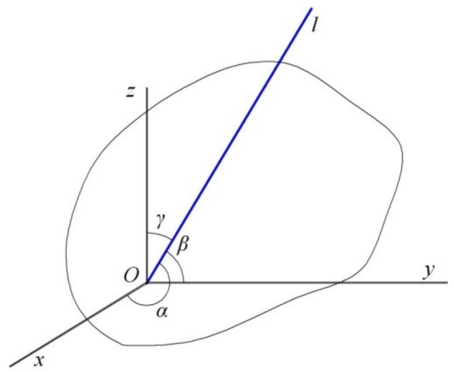


$$m_0(\overline{F}) = \pm F \cdot h.$$

При этом в правой системе координат, принятой в механике, момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и отрицательным – когда по ходу часовой стрелки. Так для сил, изображенных на рисунке:

$$m_0(\overline{P}) = \pm Ph_1, \quad m_0(\overline{Q}) = -Qh_{2,}.$$

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ГЛАВНЫЕ



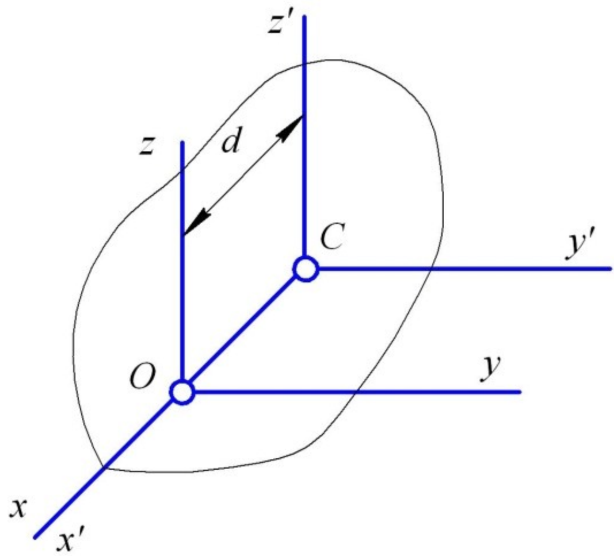
Если в качестве осей $Oxyz$выбрать главные оси инерции тела для точки O, то формула имеет вид:

$$\mathcal{J}_l = \mathcal{J}_x cos^2\alpha + \mathcal{J}_y cos^2\beta + \mathcal{J}_z cos^2\gamma.$$

Эта формула позволяет, зная входящие в

их правые части моменты инерции относительно заданных осей *Oxyz*, определить момент инерции относительно любой оси, проходящей через любую другую точку.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ – момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями:



$$\mathcal{J}_{oz} = \mathcal{J}_{cz'} + Md^2 ,$$

Эта формула выражает теорему Гюйгенса, где видно, что $\mathcal{J}_{oz} > \mathcal{J}_{cz'}$. Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно той оси, которая проходит через центр масс.

МОЩНОСТЬ - энергетическая характеристика определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность $N = \frac{A}{t}$, где t – время, в течение которого произведена работа A. В общем случае

$$N = \frac{dA}{dt} = F_\tau \frac{dS}{dt} = F_\tau V.$$

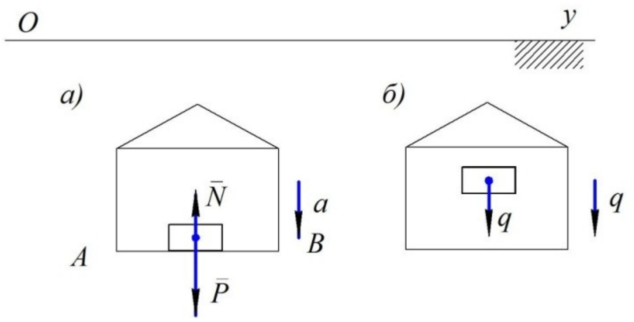
Мощность равна произведению касательной силы на скорость.

Единицей измерения мощности в СИ является ватт (1Вт=1 Дж/с). В технике за единицу мощности часто применяют 1 л.с., равную 736 Вт (или 75 кГ·м/с), а также употребляется единица измерения работы киловатт-час (1 кВт·ч=$3{,}6 \times 10^6$ Дж ≈367100кГ·м).

Н

НЕВЕСОМОСТЬ –это состояние любого тела, свободно движущегося (падающего) в поле сил тяжести (тяготения).

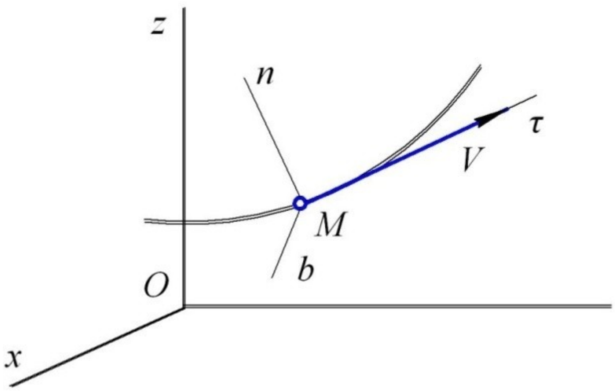
Рассмотрим груз массой m, покоящийся в лифте, который движется по отношению к неподвижным осям Oxy вертикально вниз с ускорением $\overline{a}$ (рис. *а*). На груз действует сила тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$ и реакция $\overline{N}$. Уравнением движения груза и лифта вдоль оси Oxбудет:

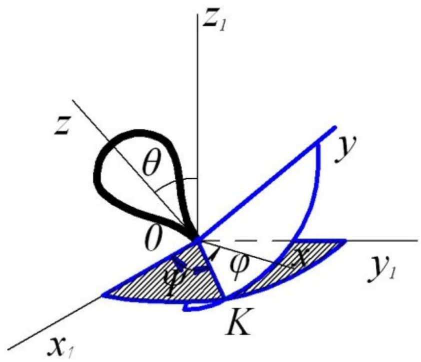


$ma=mg - N$ и$N = m(g-a)$.

Если $a=g$, то лифт свободно падает, $N=0$ и никакого давления на пол AB кабины не вызывает. Поэтому груз по отношению к лифту будет оставаться в покое (висеть) в любом месте, если его туда поместить. На чашу весов, находящихся в кабине, груз тоже не окажет давления и они покажут, что «вес» груза равен нулю. Аналогичное состояние будет и у груза, помещенного в кабину поступательно летящего космического летательного аппарата. Такое состояние груза (тела) и называется *невесомостью.*

НОРМАЛЬ ГЛАВНАЯ – нормаль *Mn,* лежащая в соприкасающейся (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), *называется главной нормалью*. Ось *Mn* направлена по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости, в сторону вогнутости траектории.



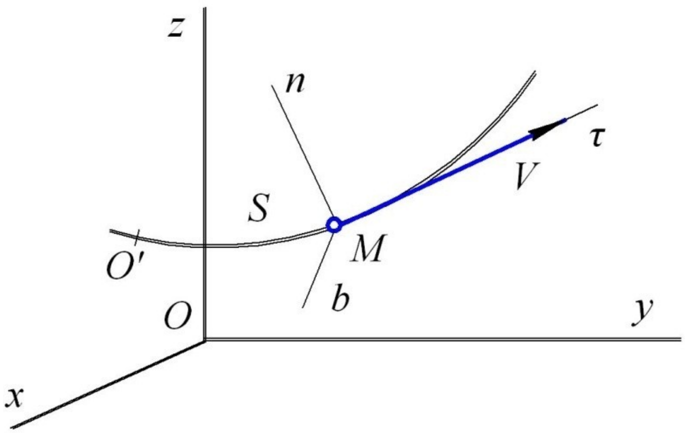


НУТАЦИЯ (от лат.nutatio – колебание) колебание угла наклона оси собственного вращения твердого тела (колебания (изменения) углаΘ). Изменение углаΘ - это вращение вокруг линии узлов *OK* (нутация) с угловой скоростью $\omega = \theta$.

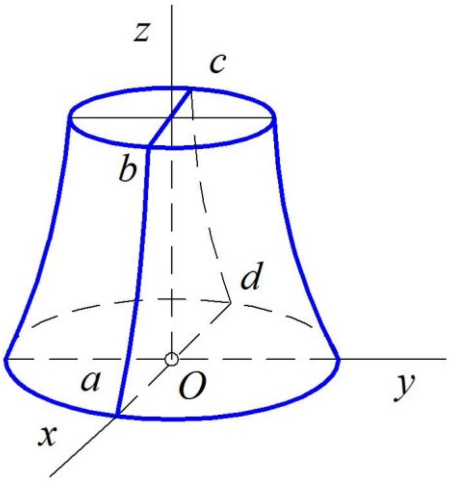
НЬЮТОН (ЕДИНИЦА ИЗМЕРЕНИЯ) – единица измерения силы, единица производная – 1 Н (Н); 1Н – это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2 (1 Н = 1 кг·м/с^2).

О

ОСИ ЕСТЕСТВЕННОГО ТРЕХГРАННИКА. При естественном способе задания движение точки, когда заданы траектория и закон движения в виде $S = f(t)$, то в этом случае значение векторов $\overline{V}$ и $\overline{a}$ определяются по их проекциям не на оси системы отсчета *Oxyz,* а на неподвижные оси *Mτnb,* имеющие начало в точке *M* и движущиеся вместе с нею. Эти оси называются *осями естественного трехгранника* (или скоростными осями), направлены следующим образом: ось *M* по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояний *S*; ось *Mn*по нормали к траектории, лежащей в плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось *Mb* - перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую систему осей. Нормаль *Mn*, лежащая в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось *Mτ*по касательной ной к траектории. Нормаль M_n называется *главной нормалью*, а перпендикулярная ей нормаль M_b*бинормалью.*



ОСИ ИНЕРЦИИ ГЛАВНЫЕ. Для однородного тела, имеющего ось симметрии (ось z) будет выполняться



$$\mathcal{J}_{xz} = 0, \mathcal{J}_{yz} = 0$$

Таким образом, симметрия в распределении масс относительно осиx характеризуется обращением в нуль двух центробежных моментов инерции $\mathcal{J}_{xz}$и $\mathcal{J}_{yz}$, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется *главной осью инерции тела для точки O.*

Если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела длялюбой своей точки.

Главная ось инерции не обязательно является осью симметрии. Если тело имеет плоскость симметрии (*abcd)* (см. рис.), то $\mathcal{J}_{xz} = 0, \mathcal{J}_{yz} = 0$, то ось *Oy* является главной осью инерции для точки *O.*

Таким образом, если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки *O* в которой ось пересекает плоскость.

Равенства $\mathcal{J}_{xy} = 0, \mathcal{J}_{yz} = 0$ выражают условия того, что ось является главной осью инерции тела для точки *O.* Аналогично, если $\mathcal{J}_{xy} = 0, \mathcal{J}_{yz} = 0$, то ось *Oy* будет для точки *O* главной осью инерции.

Следовательно, если все центробежные моменты инерции равны нулю, т.е.

$$\mathcal{J}_{xy} = 0, \mathcal{J}_{yx} = 0, \mathcal{J}_{zx} = 0,$$

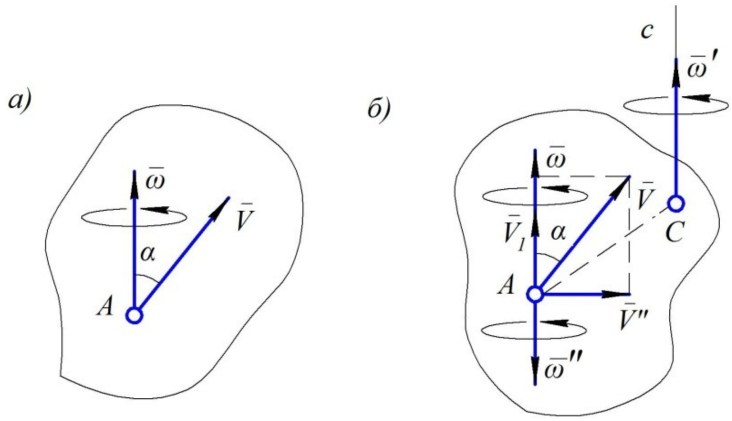
то каждая из координатных осей *Oxyz* является главной осью инерции тела для точки *O* (начала координат). На рисунке все три оси *Oxyz*являются для точки *O* главными осями инерции (ось *Oz* как ось симметрии, а оси *Ox* и *Oy* как перпендикулярные плоскостям симметрии).

ОСИ ИНЕРЦИИ ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ. Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют *главными центральными осями* инерции тела.

Если тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела, так как цент масс лежит на этой оси. Если же тело имеет плоскость симметрии, то эта ось, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через центр масс тела, будет также одной из главных центральных осей инерции тела. Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, будут равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела.

Любую ось, проведенную в теле, можно сделать главной центральной осью инерции прибавлением к телу двух точечных масс.

ОСЬ ВИНТОВАЯ МГНОВЕННАЯ. Винтовое движение твердого тела – это сложное движение (рис. *а*).



Разложим вектор $\overline{V}$(рис. *б*) на составляющие: $\overline{V}'$, направленную вдоль $\overline{\omega}$ ($\overline{V}' = V\cos\alpha$) , и V'', перпендикулярную $\overline{\omega}$ ($\overline{V}'' = V\sin\alpha$). Скорость $\overline{V}''$можно заменить парой угловых скоростей $\overline{\omega}' = \overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'' = -\overline{\omega}$, после чего векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}''$ можно отбросить. Расстояние *AC* можно найти:

$$AC = \frac{V''}{\omega} = \frac{V\sin\alpha}{\omega}.$$

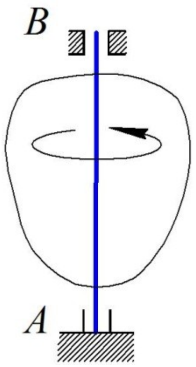
Тогда у тела остается вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}'$ и поступательное движение со скоростью $\overline{V}'$. Видно, что распределение скоростей точек тела в данный момент времени будет таким же, как при винтовом движении вокруг оси *Cc* с угловой скоростью $\omega'=\omega$ и поступательной скоростью $V' = V\cos\alpha$.

Проделанными операциями мы перешли от полюса A к полюсу C. Видно, что в общем случае движения твердого тела угловая скорость при перемене полюса не изменяется ($\overline{\omega'} = \overline{\omega}$), а меняется только поступательная скорость

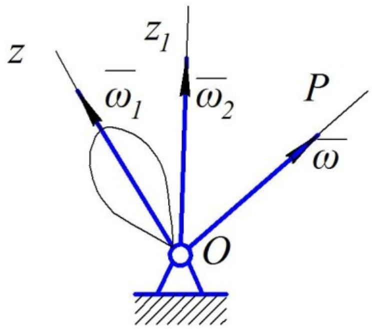
$$(\overline{V}' \neq V).$$

Так как при движении свободного твердого тела величины $\overline{V}, \overline{\omega}, \alpha$ будут вообще все время изменяться, то будет непрерывно меняться и положение оси *Cc,* которую поэтому называют *мгновенной винтовой осью.*

ОСЬ ВРАЩЕНИЯ. Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными. Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется *осью вращения*. При вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижными.

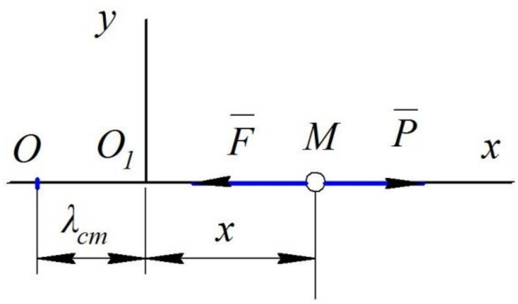


ОСЬ ВРАЩЕНИЯ МГНОВЕННАЯ. Если тело имеет в данный момент времени угловую скорость $\overline{\omega}$, то его элементарное перемещение за промежуток времени dt представляет собой элементарный поворот на угол $d\theta = \omega dt$ вокруг оси OP, вдоль которой направлен вектор $\overline{\omega}$ (см. рис). Эта ось OP называется *мгновенной осью вращения.*



Мгновенная ось вращения – это ось, элементарным поворотом вокруг которой, тело перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному. Ее направление в пространстве непрерывно меняется.

ОТКЛОНЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЕ. Если на точку M кроме восстанавливающей силы $\overline{F}$, направленной к центру O, действует еще постоянная по модулю и направлению сила $\overline{P}$ (см. рис.), то положением равновесия точки M, где



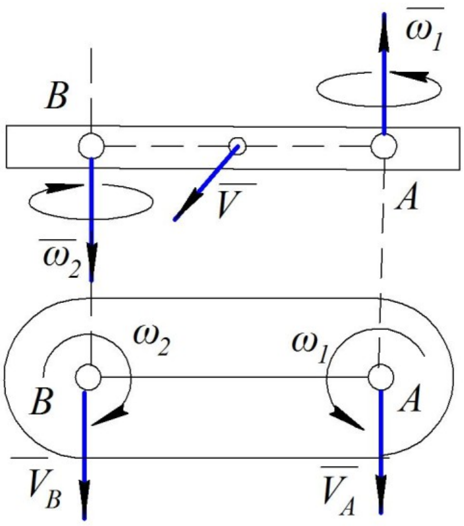
сила $\overline{P}$ уравновешивается силой $\overline{F}$, будет точка O_1, отстающая от O на расстояние $OO_1=\lambda_{cm}$, которое определяется равенством

$$c\lambda_{\text{ст}} = P \quad \text{или} \quad \lambda_{\text{ст}} = \frac{P}{c},$$

где λ_{cm} – статическое отклонение.

П

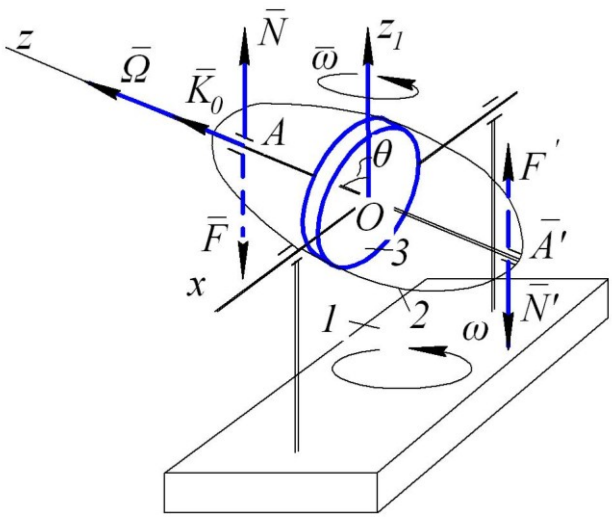
ПАРА ВРАЩЕНИЙ. Пусть вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны. (см. рис.), но по модулю равны $\omega_1=\omega_2$. Такая совокупность вращений называется *парой вращений*. В этом случае $V_A = \omega_1 \cdot AB$ и $V_B = \omega_1 \cdot AB$, т.е. $V_A = V_B$.



Тогда мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости.

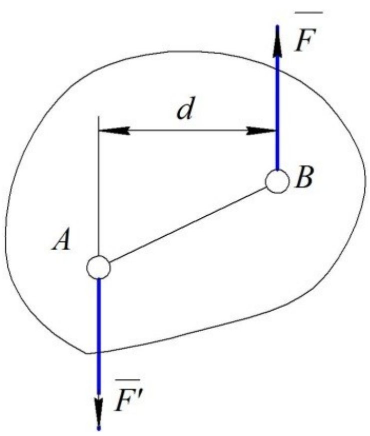
$$V = \omega_1 \cdot AB.$$

ПАРА ГИРОСКОПИЧЕСКАЯ – это пара сил $\overline{N}, \overline{N'}$ действующая на подшипники гироскопа со стороны оси *z*. Моментом гироскопической пары будет:



$$\overline{M}_{\text{гир}} = \overline{K}_0 \times \overline{\omega} \quad \text{и} \quad M_{\text{гир}} = K_0 \omega \sin\theta = \mathcal{I}_x \Omega \omega \sin\theta.$$

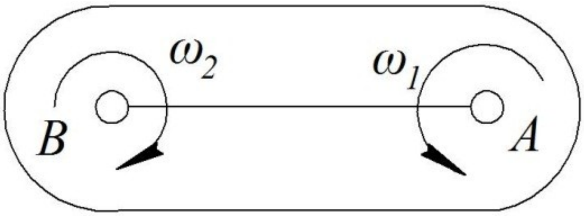
Отсюда получаем правило Н.Е. Жуковского: если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то на подшипники, в которых закреплена ось ротора гироскопа, начнет действовать гироскопическая пара с моментом $\overline{M}_{\text{гир}}$, стремящаяся кратчайшим путем установить ось ротора параллельно оси прецессии так, чтобы направления векторов $\overline{\Omega}$ и $\overline{\omega}$ совпали.



ПАРА СИЛ - две равные по абсолютной величине и противоположно направленные силы $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, приложенные к одному твердому телу на плече d – кратчайшем расстоянии между линиями действия сил. Пара сил характеризуется моментом пары равным

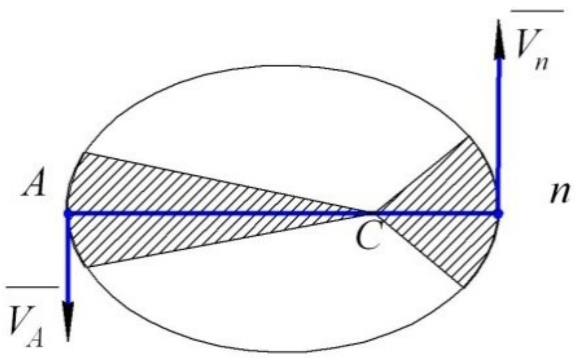
$$m = Fd.$$

ПАРА УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ



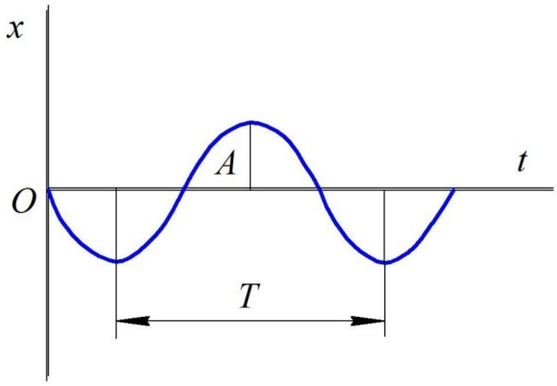
Если вращение вокруг параллельных осей направлены в разные стороны (см. рис), но по модулю $\omega_1=\omega_2$ то такая совокупность вращений называется парой вращений, а векторы $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2$ образуют *пару угловых скоростей.*

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВОЗМОЖНОЕ (ВИРТУАЛЬНОЕ) - перемещение точки из данного возможного положения в пространстве в другое возможное положение, допускаемое в данный момент связями без их деформаций.



ПЕРИГЕЛИЙ – ближайшая к Солнцу точка *П* орбиты. Скорость планеты в этой точке $V_П$ будет наибольшей, а в наиболее удаленной от Солнца точке *A* (афелий) скорость V_Aбудет наименьшей.

ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ – промежуток времени T, в течении которого точка совершает одно полное гармоническое колебание происходящее по закону



$$x = A\cos kt,$$

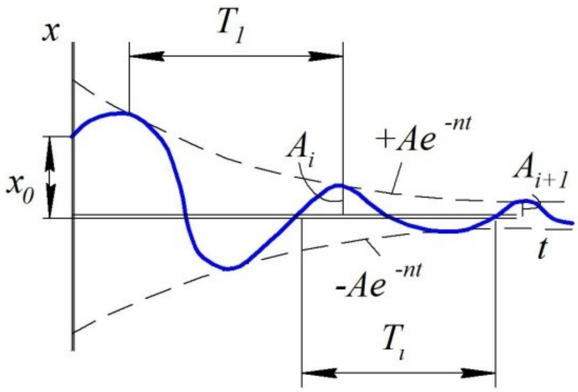
равный

$$T = t_1 = \frac{2\pi}{k},$$

где k – частота колебаний;

A – амплитуда.

ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ ЗАТУХАЮЩИХ – величина, равная



$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1},$$

где λ_1- круговая или циклическая частота и

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - n^2}, \text{ где } n = \frac{b}{2m};$$

b – коэффициент сопротивления среды,

m – масса колеблющейся точки.

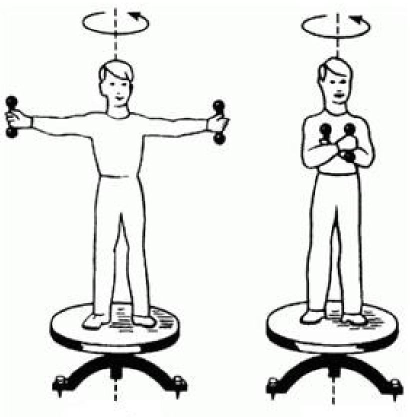
Период T_1 колебаний не зависит от начальных условий и определяется лишь параметрами колебательной системы – массой точки, жесткостью пружины и коэффициентом сопротивления среды.

Период колебаний T_1– промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями колеблющейся точки вправо (или влево).

За период точка совершает одно полное колебание.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – колебания, при которых состояние колеблющейся системы полностью повторяется через равные интервалы времени.

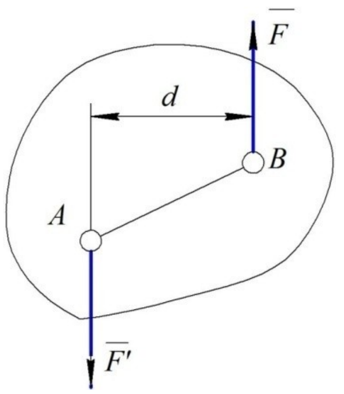
ПЛАТФОРМА ЖУКОВСКОГО представляет собой прибор для демонстрации закона сохранения момента количеств движения. Это круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси Z. Для человека, стоящего на такой платформе $m_z(\overline{F}_K^{l}) = 0$ и, следовательно, $\mathcal{J}_z\omega = const$. Если человек, разведя руки в стороны (рис.a), сообщит себе толчком вращение вокруг вертикальной оси, а затем опустит руки, (рис. *б*), то величина $\mathcal{J}_z$ уменьшится и, следовательно, угловая скорость вращения возрастет. Таким способом увеличения угловой скорости широко пользуются в балете, танцах на льду, при прыжках (сальто) и т.п.



а) б)

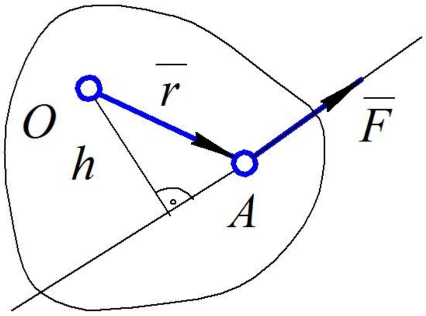
ПЛЕЧО ПАРЫ СИЛ – кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

d – плечо пары сил.



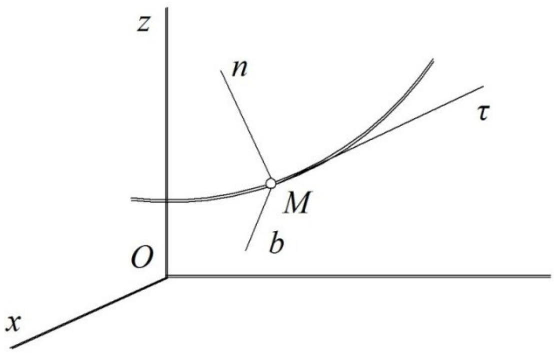
ПЛЕЧО СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА – перпендикуляр h, опущенный из точки на линию действия силы.

Плечо h – величина скалярная.

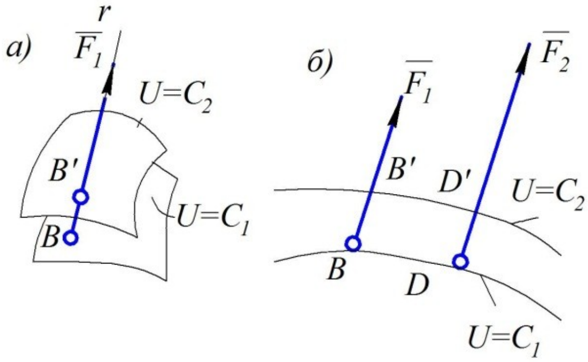


ПЛОСКОСТЬ СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой и является общей для всех ее точек.

Для пространственной кривой (например, для винтовой линии) в каждой точке кривой будет своя соприкасающаяся плоскость. Если рассматривать движение точки *M* по пространственной кривой в осях естественного трехгранника, где ось в в осях естественного трехгранника, где ось $M\tau$ направлена по касательной к траектории, ось Mn – по нормали к траектории, а ось Mb – перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую систему осей, то в результате образуется соприкасающаяся плоскость $nM\tau$, перпендикулярная касательной плоскости $bM\tau$и нормальной nMb.



ПОВЕРХНОСТИ РАВНОГО ПОТЕНЦИАЛА. Если силовая функция $U(x,y,z)=c$, где c – некоторая постоянная, то получим в пространстве уравнение поверхности, во всех точках *x*которой функция U имеет одно и то же значение c. Такие поверхности называют поверхностями уровня или *поверхностями равного потенциала*. Если силовая функция является однозначной функцией координат, то поверхности уровня не могут пересекаться и через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. На рис. *а* показаны две поверхности уровня $U(x,y,z)=c_1$, $U(x,y,z)=c_2$, а на рис. *б* – их сечения плоскостью, проходящей через нормаль Bn. $c_2-c_1>0$ и $c_2>c_1$, т.е. сила в потенциальном поле направлена в сторону возрастания силовой функции. Сила в потенциальном поле больше



там, где поверхности уровня проходят гуще. Эти свойства позволяют наглядно представить картину распределения сил в потенциальном силовом поле с помощью поверхностей уровня.

ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ (см. поверхности равного потенциала).

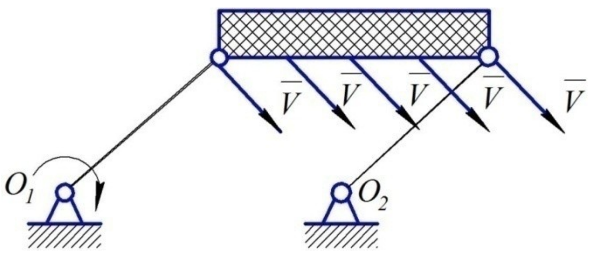
ПОЛЕ СИЛОВОЕ – область, в каждой точке которой, на помещенную туда материальную частицу действует сила, зависящая от положения координат этой точки, называется *силовым полем*. Примером силового поля является поле тяготения (поле сил притяжения к Земле или к любому другому небесному телу).

Если значения сил могут еще изменяться с течением времени, поле называется *нестационарным*.

Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется *потенциальным силовым полем.* Силовая функция считается однозначной функцией координат.

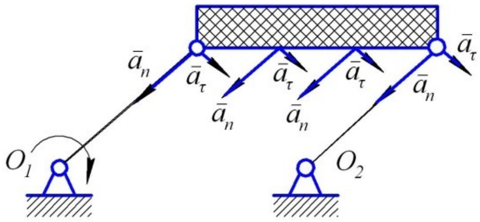
ПОЛЕ СИЛОВОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ – силовое поле, для которого существует силовая функция *U(x,y,z)*, т.е. функция, однозначно зависящая от координат *x,y,z*, называется *потенциальным силовым полем.*

ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ. При поступательном движении твердого тела скорости точек будут одинаковы. Значит, скорости точек движущего тела образуют векторное поле - поле скоростей, которое будет однородным.

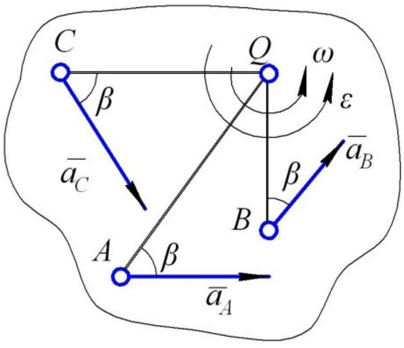


ПОЛЕ УСКОРЕНИЙ. При поступательном движении твердого тела ускорения точек в любой момент времени одинаковы по модулю и по направлению (рис.*а*).

Ускорения точек движущегося тела поступательно образуют векторное поле – поле ускорений тела.



а)

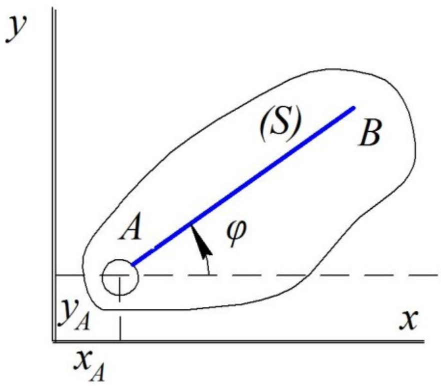


б)

Если тело совершает плоскопараллельное движение (рис.*б*), то ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстоянию от мгновенного центра ускорений. Картина распределения ускорений (т.е. поле ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени) показана на рисунке. Ускорения точек плоской фигуры определяется в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений *Q*. При этом

$$\frac{a_c}{Q_c} = \frac{a_B}{Q_B} = \frac{a_A}{Q_A} = \cdots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

ПОЛЮС (от лат. *polus*– земная и небесная ось) - точка на плоскости, относительно которой определяют положение любой другой точки той же плоскости в полярной системе координат.



Если тело совершает плоскопараллельное движение, то положение фигуры *S* в плоскости *Oxy* определяется отрезком *AB*, проведенным на этой фигуре. Само положение отрезка можно определить координатами x_A, y_A, точки *A* и углом φ, который отрезок *AB* образует с осью *x*. Точка *A*, выбранная для определения положения фигуры *S,* называется *полюсом.*

ПОСТОЯННАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ. Открытый Ньютоном Закон всемирного тяготения выражается равенством

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где m_1 и m_2 - массы точек;

r – расстояние между точками;

f- гравитационная постоянная (в СИ f= 6,673·10^{-11} м^3/кг·с^2).

ПОТЕНЦИАЛ КИНЕТИЧЕСКИЙ – функция Lот обобщенных координат и обощенных скоростей, равная разности между кинетической и потенциальной энергиями системы, называется *кинетическим потенциалом* или функцией Лагранжа

$$L=T-\Pi.$$

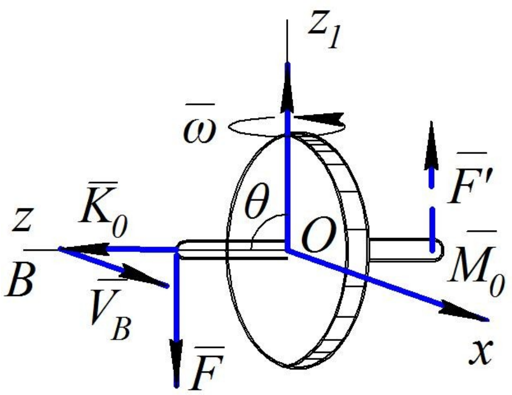
ПРАВИЛО ЖУКОВСКОГО. Поскольку гироскопический момент равен

$$\overline{M}_{гир} = \overline{K}_0 \times \overline{\omega} \quad \text{и} \quad M_{гир} = K_0\omega \sin\theta = \mathcal{I}_x \Omega\omega \sin\theta,$$

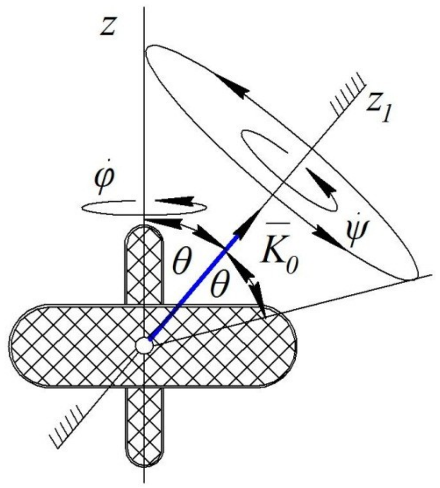
то отсюда вытекает правило Н.Е. Жуковского: если быстро вращаемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то на подшипники, в которых закреплена ось ротора гироскопа, начнет действовать гироскопическая пара с моментом $\overline{M}_{гир}$, стремящаяся кратчайшим путем установить ось ротора параллельно оси прецессии так, чтобы направления векторов $\overline{\Omega}$ и $\overline{\omega}$ совпали.

ПРЕЦЕССИЯ – движение оси гироскопа под действием приложенной силы называют *прецессией*.

ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСКОПА – если на гироскоп действует сила $\overline{F}$ (или пара сил $\overline{F}, \overline{F'}$, (см. рис.), то ось *Oz* в сторону действия силы не отклоняется и угол $\theta = \angle z_1Oz$ остается постоянным, а скорость $\overline{V}_в$ перпендикулярно плоскости z_1Oz. В этом случае ось *Oz*гироскопа будет вращаться (прецессировать) вокруг оси Oz_1с некоторой угловой скоростью $\overline{\omega}$, называемой угловой скоростью прецессии.



ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСКОПА РЕГУЛЯРНАЯ. Если при любых начальных условиях рассматриваемый гироскоп вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью φ_0, а сама эта ось вращается в свою очередь, вокруг неподвижной оси Oz_1с постоянной угловой скоростью φ, описывая коническую поверхность с постоянным углом при вершине 2θ, то такое движение гироскопа называется *регулярной прецессией.*

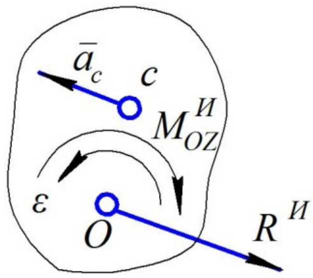


ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИИ – систему сил инерции твердого тела можно заменить одной силой, равной $\overline{R}^{и}$ и приложенной в произвольной выбранном центре *O*, и парой с моментом, равным $\overline{M}_{o}^{и}$.

1) При поступательном движении, когда ускорения всех точек тела одинаковы, силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей $\overline{R}$, проходящей через центр масс тела.

2) При вращательном движении твердого тела, которое имеет плоскость материальной симметрии *Oxy,* результирующая сила и пара будут лежать в этой плоскости и момент пары будет равен $\overline{M}_{oz}^{и}$. (см. рис.):

$$\overline{M}_{oz}^{и} = -\mathcal{J}_{oz} \cdot \omega = -\mathcal{J}_{oz} \cdot \varepsilon,$$



где ε – угловое ускорение тела.

А сила инерции $\overline{R}^{и}$ приложена к точке O и равна

$$\overline{R}^{и} = -m\overline{a_c}.$$

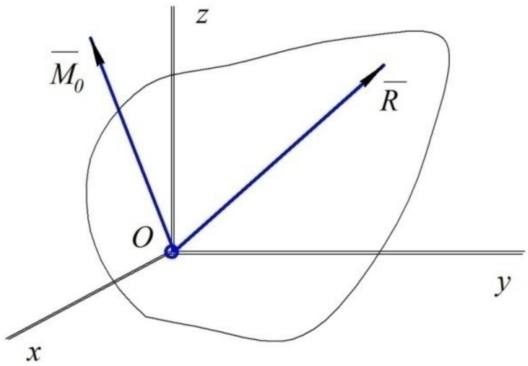
3) При вращении вокруг оси, приходящей через центр масс тела ускорение $\overline{a_c}. = 0$, и поэтому $\overline{R^{и}} = 0$.

В этом случае система сил инерции тела приводится к одной только паре с моментом $M_c^{и}$, лежащей в плоскости симметрии тел.

4) При плоскопараллельном движении твердого тела, которое имеет плоскость симметрии, которое движется параллельно этой плоскости, очевидно, что система сил приводится к силе $\overline{R}^{и}$, приложенной в центре масс C тела, и паре с моментом

$$M_{с}^{и} = -\mathcal{J}_{с} \cdot \varepsilon.$$

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ – любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру заменяется одной силой $\overline{R}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения O, с одной парой с моментом $\overline{M}$, равным главному моменту системы сил относительно центра O (см. рис.).



ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ – принцип механики, который устанавливает общее условие равновесия механической системы: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

Математически это условие выражается равенством

$$\delta A_{K}^{a} = 0 \qquad \text{или в аналитической форме}$$

$$(F_{Kx}^{a}\, \delta x_{K} + F_{Ky}^{a} \delta y_{K} + F_{Kz}^{a} \delta z_{K}) = 0.$$

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия механической системы, не требующее рассмотрения равновесия отдельных частей (или тел) этой системы и позволяющее при идеальных связях исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА – если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме действующих на нее внешних и внутренних сил, присоединять соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенна и к ней можно применять все уравнения статики:

$$\overline{F_K^e} + \overline{F_K^i} + \overline{F_K^и} = 0; \qquad \overline{m_0}(\overline{F_K^e}) + \overline{m_0}(\overline{F}_K^i) + \overline{m_0}(\overline{F}_K^и) = 0.$$

Если ввести обозначения: $\overline{R}^и = \overline{F}_K^и$, $\overline{M_о^и} = \overline{m_0}(\overline{F_K^и})$, то в результате получим

$$\overline{F_K^e} + \overline{R}^и = 0, \qquad \overline{m_0}(\overline{F}_K^e) + \overline{M}_о^и = 0.$$

Принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики.

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА – при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю:

$$\delta A_K^a + \delta A_K^и = 0.$$

то уравнение называют общим уравнением динамики и оно в аналитической форме имеет вид:

$$F_{Kx}^a + F_{Kx}^и \ \delta x_K + \ F_{Ky}^a + F_{Ky}^и \ \delta y_K + \ F_{Kz}^a + F_{Kz}^и \ \delta z_K = 0.$$

Эти уравнения позволяют составить дифференциальные уравнения движения механической системы.

ПРИНЦИП ОТВЕРДЕВАНИЯ – равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием системы сил, не нарушается, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ – никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение.

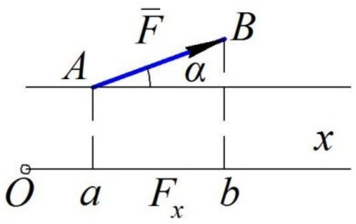
Это следует из того, что если подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\overline{F}^{\text{и}}_{\text{пер}} = \overline{F}^{\text{и}}_{\text{кор}} = 0$ и закон относительного движения.

$$m\overline{a} = \quad \overline{F}_K + \overline{F}^{\text{и}}_{\text{пер}} + \overline{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}$$

будет иметь такой же вид, как и закон движения по отношению к неподвижным осям.

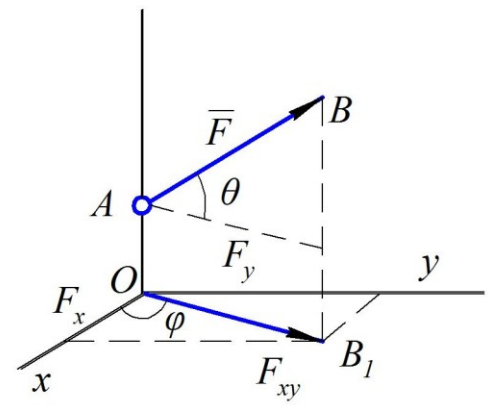
ПРИЦИПЫ МЕХАНИКИ – это когда уравнения движения или условие механической системы можно получить, положив в основы вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые *принципами механики.*

Эти принципы механики позволяют найти более эффективные методы решения соответствующих задач. К таким принципам относятся принцип Даламбера, принцип возможных перемещений, принцип Даламбера-Лагранжа и др.



ПРОЕКЦИЯ СИЛЫ НА ОСЬ – есть алгебраическая величина, равная произ-ведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси

$$F_x = F\cos\alpha = ab.$$



ПРОЕКЦИЯ СИЛЫ НА ПЛОСКОСТЬ – проекцией силы $\overline{F}$ на плоскость *Оху*называется вектор $\overline{F}_{xy} = \overline{OB_1}$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\overline{F}$ на эту плоскость (см. рис.). По модулю

$F_{xy} = F \cdot \cos\theta,$

где θ – угол между направлением силы $\overline{F}$ и ее проекции $\overline{F}_{xy}$. В отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная.

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi,$$

$$F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi.$$

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ИНЕРЦИИ – это центробежные моменты инерции $\mathcal{I}_{xy}, \mathcal{I}_{yz}, \mathcal{I}_{zx}$, определяемые равенствами в координатных осях *Oxyz:*

$$\mathcal{I}_{xy} = \quad m_K x_K y_K\,, \quad \mathcal{I}_{yz} = \quad m_K z_K y_K\,, \ \mathcal{I}_{zx} = \quad m_K z_K x_K.$$

Р

РАБОТА ВОЗМОЖНАЯ – это элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки

$$\delta A^a = \overline{F^a} \cdot \delta\overline{r}.$$

РАБОТА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИЛЫ – равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и от вида траектории движущейся точки не зависит :

$$A_{(M_1M_2)} = \ {}_{(M_2)}^{(M_1)} dU \ \ x, y, z \ \ = U_2 - U_1, \quad \text{где}$$

$$U_1 = U \ \ x_1, y_1, z_1 \ , \qquad U_2 = U \ \ x_2, y_2, z_2$$

– значения силовой функции в точках M_1и M_2поля соответственно. При перемещении по замкнутой траектории $U_2 = U_1$ и работа потенциальной силы равна нулю.

РАБОТА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ТЕЛУ

При повороте тела на конечный угол φ работа

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\,\varphi,$$

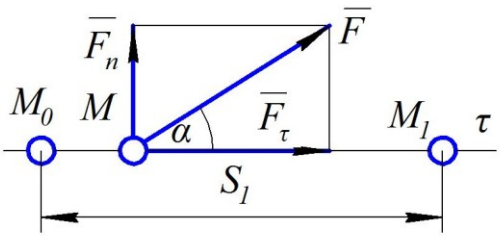
в случае постоянного момента

$$A = M_z \varphi,$$

где M_z – вращающий момент.

РАБОТА СИЛЫ. Если величина F_τпостоянна (F_τ=*const*), то работа

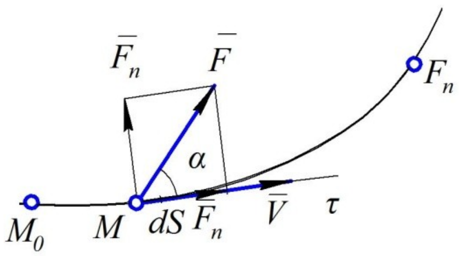
$$A_{(M_0 M_1)} = F_\tau S_1.$$



Такой случай может иметь место, когда действующая сила $\overline{F}$ постоянна по модулю и направлению ($\overline{F} = const$), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно. В этом случае $F_\tau = F\cos\alpha = const$и

$$A_{(M_0 M_1)} = F S_1 \cos\alpha.$$

Если точка движется по кривой линии (см. рис.), то работа силы на любом перемещении $M_0 M_1$будет



$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau dS \qquad \text{или}$$

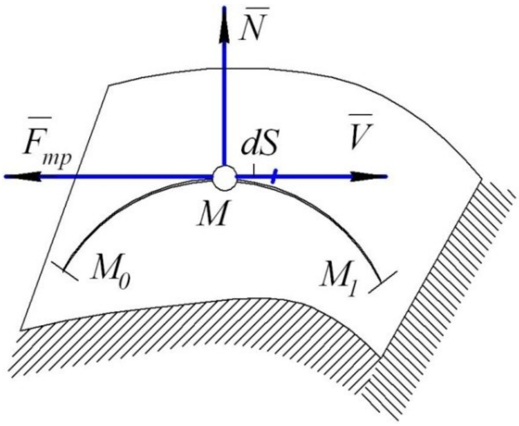
$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

РАБОТА СИЛЫ ТРЕНИЯ. При движении точки по какой-нибудь шероховатой поверхности (см. рис.), действующая на точку сила трения равна

$$F_{mp} = fN,$$

где f – коэффициент трения;

N – нормальная реакция поверхности.



Направлена сила трения противоположно перемещению точки. Следовательно,

$$F_{\text{тр}}^{\tau} = -F_{\text{тр}} = -fN.$$

Тогда работа силы трения равна

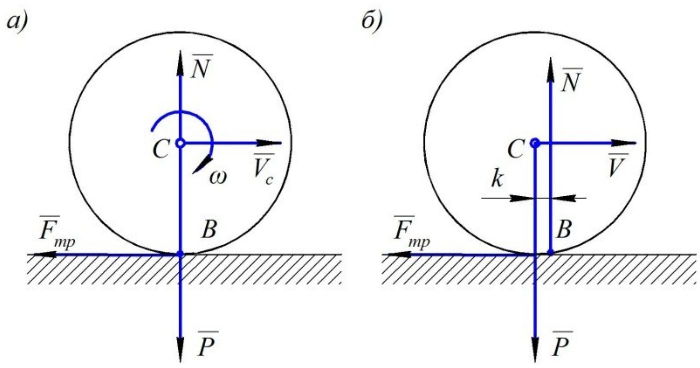
$$A_{(M_0M_1)} = -\int_{M_0}^{M_1} F_{\text{тр}}\,dS = -\int_{M_0}^{M_1} fNdS\ .$$

Если численно сила трения постоянна, то

$$A_{M_0M_1} = -F_{\text{тр}}S,$$

где S – длина дуги кривой M_0M_1, по которой перемещается точка. Работа силы трения при скольжении всегда отрицательна.

РАБОТА СИЛЫ ТРЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА КАТЯЩЕЕСЯ ТЕЛО. На колесо радиуса R (см. рис.), катящееся без скольжения, действует сила трения $\overline{F_{\text{тр}}}$, приложенная в точке B. Элементарная работа этой силы



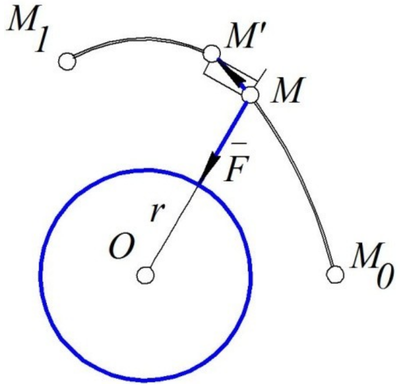
$dA = \overline{F}_{\text{тр}}^{\tau} dS_B$. Но точка в данном случае совпадает с мгновенным центром скоростей и $V_B=0$. Так как $dS_B = V_B dt$, то $dS_B = 0$ и для каждого элементарного перемещения $dA=0$.

Следовательно, при качении без скольжения работа силы трения, препятствующей скольжению на любом перемещении тела равна нулю.

РАБОТА СИЛЫ ТЯГОТЕНИЯ. Рассмотрим Землю (или планету) как однородный шар. Тогда на точку M, находящуюся на расстоянии rот центра шара будет действовать сила $\overline{F}$ (см. рис.) тяготения, направленная к центру O**,** значение которой определяется формулой

$$F = \frac{km}{r^2},$$

где $r=OM$. Определив коэффициент kиз того условия, что, когда точка находится на поверхности Земли ($R=r$), R– радиус Земли, сила притяжения равна mg, где g – ускорение силы тяжести (точнее силы тяготения) на земной поверхности. Тогда выполняется



$$mg = \frac{km}{R^2} \quad \text{и} \quad k = gR^2.$$

Элементарной работой силы $\overline{F}$ будет

$$dA = -Fdr = -km\frac{dr}{r^2} = -mgR^2\frac{dr}{r^2}.$$

Предположив теперь, что точка перемещается из положения M_0, где $r=r_0$, в положение M_1, где$r=r_1$, то тогда

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA = -mgR^2 = \int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2} = mgR^2\int_{r_0}^{r_1} d(\frac{1}{r}),$$

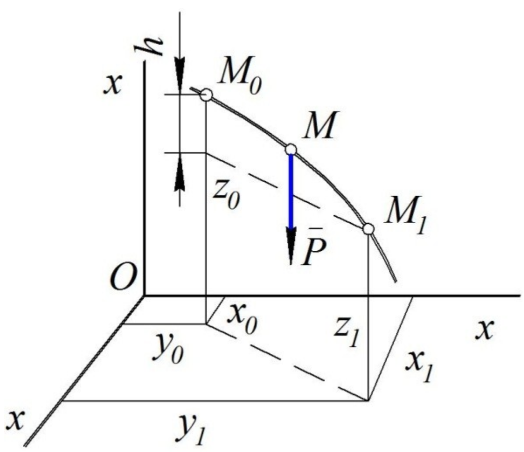
или окончательно

$$A_{M_0M_1} = mgR^2(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}).$$

Работа будет положительной, если $r_0 > r_1$, т.е. когда конечное положение точки ближе к земной поверхности, чем начальное, и отрицательной, если

$r_0 < r_1$. От вида траектории точки M работа силы тяготения не зависит.

РАБОТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ– равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения

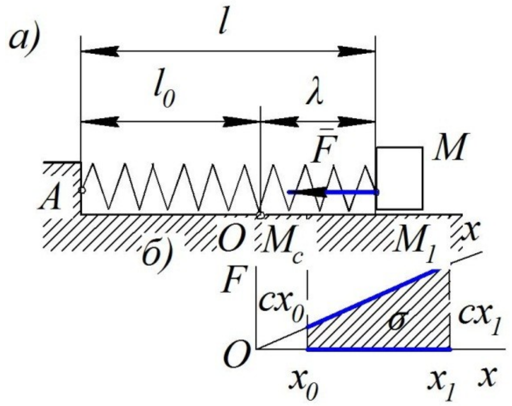


$$A_{(M_0M_1)} = \pm Ph.$$

Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной. Работа силы тяжести не зависит от вида траектории.

РАБОТА СИЛЫ УПРУГОСТИ. Если на тело действует сила упругости $\overline{F}$, равная

$$F = c\lambda = c\ x \qquad \text{и} \qquad F_x = -cx,$$



где $\lambda = l - l_0, l_0 = AO$ – длина ненапряженной пружины, l – длина растянутой пружины, то работа, совершаемая силой упругости при перемещении груза из положения $M_0(x_0)$в положение $M_1(x_1)$ (см. рис. *а*) будет

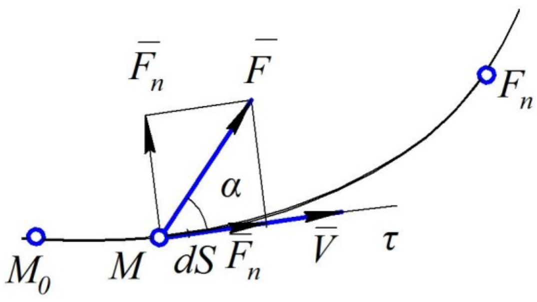
$$A_{(M_0M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} -cx\ dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2).$$

Этот результат можно получить по графику зависимости Fотx(см. рис. *б*), вычисляя площадь σ заштрихованной на чертеже трапеции и учитывая знак работы. Из рисунка видно, что x_0 – это начальное удлинение пружины λ_0, а x_1-конечное удлинение пружины λ_1. Тогда,

$$A_{M_0M_1} = \frac{c}{2}\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2\ ,$$

т.е. работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.

РАБОТА ЭЛЕМЕНТАРНАЯ – элементарной работой силы $\overline{F}$, приложенной в точке M (см. рис.), называется скалярная величина



$$dA = F_\tau dS,$$

где F_τ – проекция силы $\overline{F}$ на касательную $M\tau$;

dS – модуль элементарного перемещения точки M. Здесь dAи dS - символы элементарных величин, но не дифференциалов.

РАВНОВЕСИЕ – состояние покоя тела по отношению кдругим телам. Условие равновесия тела существенно зависит от того, является ли это тело твердым, жидким или газообразным. В теоретической механике рассматриваются вопросы равновесия твердых тел.

РАВНОВЕСИЕ АБСОЛЮТНОЕ – это состояние системы, при которой все ее точки под действием приложенных сил находятся в покое по отношению к инерциальной системе отсчета.

РАВНОВЕСИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия механической системы: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю. Математически это будет

$$\delta A_K^a = 0,$$

а в аналитической форме

$$(F_{Kx}^a \delta x_К + F_{Ky}^a \delta y_К + F_{Kz}^a \delta z_K) = 0.$$

В общем виде принцип впервые сформулировал и доказал Ж.Лагранж (1788 г.).

В обобщенных координатах условие равновесия механической системы будет: для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю:

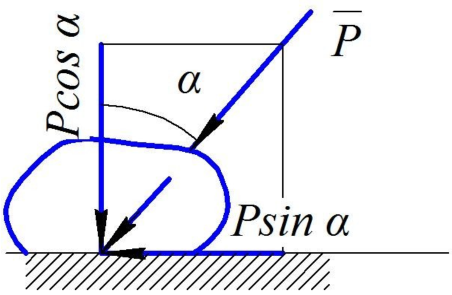
$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, Q_S = 0.$$

Число условий равновесия уравнений равно числу обобщенных координат, т.е. числу степеней свободы системы.

РАВНОВЕСИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ– уравнения относительного равновесия составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами добавить переносную силу инерции

$$\overline{F}_n + \overline{F}^{\text{и}}_{\text{пер}} = 0.$$

РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ наблюдается, когда



$$F \le F_{\text{пр}},$$

где F – сила трения;

$F_{пр}$ – предельная сила трения.

Или $F < f_0 N$,

где f_0 – статический коэффициент трения.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу $\overline{P}$, образующую угол α с нормалью (см. рис.), то тело сдвинется тогда, когда сдвигающее усилие *Psinα* будет больше $F_{\text{пр}} = f_0 P\cos\alpha$, *(*где *N=Pcosα).*

РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОЕ. Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию:

$$F_{\text{пр}} = f_0 N.$$

Равновесие, имеющее место, когда сила трения равна $\overline{F_{\text{пр}}}$, будем называть *предельным равновесием*.

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛсуществует в трех формах.

1. Основная форма условий равновесия.

Так как необходимыми и достаточными условиями равновесия любой системы сил являются $\overline{R}$=0 и $\overline{M_0}$=0, то отсюда вытекает

$$F_{Kx} = 0, \qquad F_{Ky} = 0, \qquad m_0(\overline{F}_K) = 0.$$

Эти формулы выражают аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

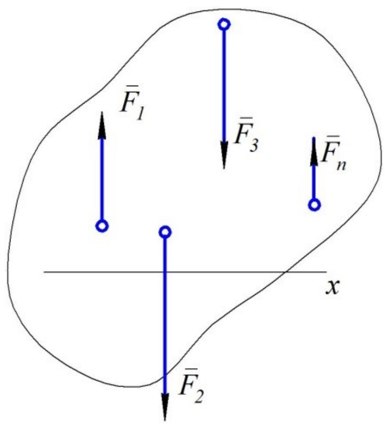
2. Вторая форма условий равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров *A* и *B* и сумма их проекций на ось *Ox*, не перпендикулярную прямой *AB*, были равны нулю:

$$m_A(\overline{F}_K) = 0, \qquad m_B(\overline{F}_K) = 0, \qquad F_{Kx} = 0.$$

3. Третья форма условия равновесия (уравнение трех моментов): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил, относительно любых трех центров *A, B*и *C,* не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$m_A(\overline{F}_K) = 0, \qquad m_B(\overline{F}_K) = 0, \qquad m_C(\overline{F_K}) = 0.$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно направить ось *Ox*перпендикулярно силам, а ось *Oy*параллельно им (см. рис.). Тогда проекция каждой из сил на ось *Ox* будет равна нулю и первое из равенств обратится в тождество 0≡0. В результате для параллельных сил останется два условия равновесия:



$$F_{Ky} = 0, \qquad m_0(\overline{F}_K) = 0.$$

Другая форма условий равновесия для параллельных сил имеет вид:

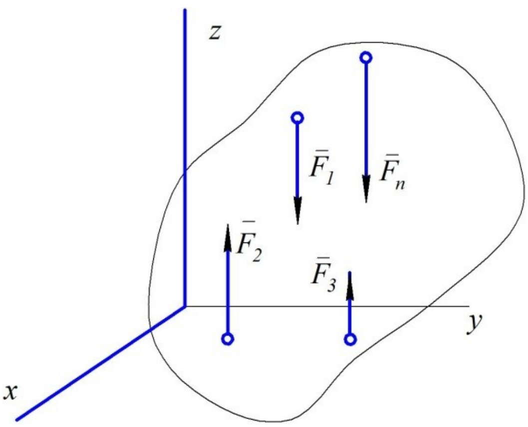
$$m_A(\overline{F}_K) = 0, \qquad m_B(\overline{F}_K) = 0,$$

где точки *A* и *B* не должны лежать на прямой, параллельной силам.

РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. Необходимое и достаточное условие равновесия любой системы сил выражается равенствами $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_0 = 0$. Отсюда следует, что $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$, т.е. должны выполняться условия

$$F_{Kx} = 0, \qquad F_{Ky} = 0, \qquad F_{Kz} = 0;$$

$$m_x(\overline{F}_K) = 0, \qquad m_y(\overline{F}_K) = 0, \qquad m_z(\overline{F}_K) = 0.$$



Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

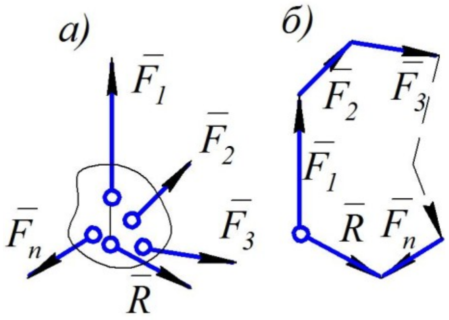
Эти уравнения одновременно выражают условия равновесия твердого тела, находящегося под действием любой пространственной системы сил.

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно выбрать координатные оси так, что ось z будет параллельна силам. Тогда проекции каждой из сил на оси xи y и их моменты равны нулю и система даст условия равновесия:

$$F_{Kx} = 0, \qquad m_x(\overline{F}_K) = 0, \qquad m_y(\overline{F}_K) = 0.$$

Остальные равенства обратятся в тождества.

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. Необходимым и достаточным условием равновесия системы сходящихся сил является: $\overline{R} = 0$.



Это условие можно выразить в геометрической и аналитической форме.

1. Геометрическое условие равновесия(см. рис. *а*). Так как главный вектор $\bar{R}$ системы определяется как замыкающая сторона силового многоугольника (см. рис. *б*), то $\bar{R}$ может обратиться в нуль тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой силы, т.е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.

2. Аналитическое условие равновесия. Главный вектор аналитически определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

и он обращается в нуль только тогда, когда $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$, т.е. действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам:

$$F_{Kx} = 0, \qquad F_{Ky} = 0, \qquad F_{Kz} = 0;$$

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил, и в этом случае условием равновесия является только два уравнения:

$$F_{Kx} = 0, \qquad F_{Ky} = 0.$$

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ. Система тел (число тел, входящих в конструкцию *n*), будет находиться в равновесии тогда, когда число *3n*уравнений, составленных для этой конструкции, позволит найти *3n* неизвестных реакций.

РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СИСТЕМЫ СИЛ. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей данной системы сил.

Для сходящейся системы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots \overline{F}_n$ равнодействующая равна главному вектору $\overline{R}$, приложенному в любой точке, лежащей на линии действия силы $\overline{R}$.

РАДИУС ИНЕРЦИИ– линейная величина, ρ_z, определяемая равенством

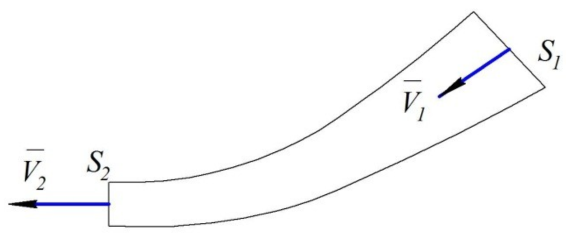
$$\mathcal{J}_z = M\rho_z^2,$$

где M – масса тела.

Из этого равенства следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси *Oz* той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Зная радиус инерции можно найти момент инерции тела и наоборот.

РАСХОД ЖИДКОСТИ СЕКУНДНЫЙ. В случае движения жидкости по трубе при установившемся течении через любое поперечное сечение трубки с площадью*S*за 1 с будет протекать одно и то же количество массы жидкости



$$G_c = \rho SV,$$

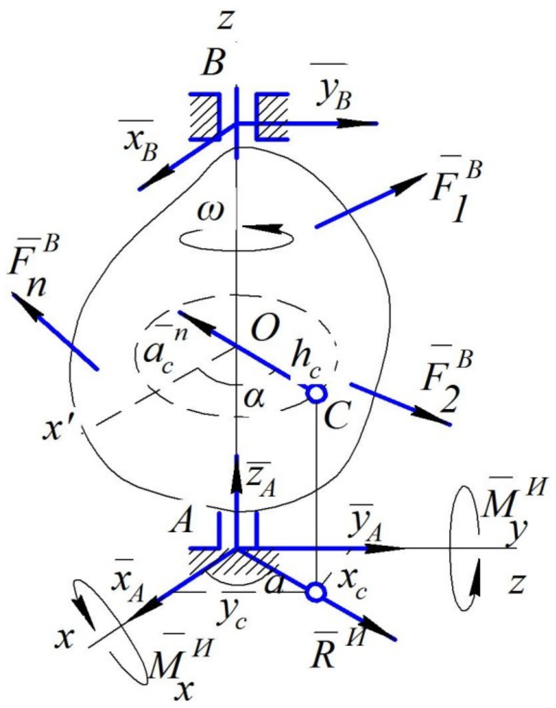
где G_c – секундный массовый расход жидкости;

ρ – плотность жидкости;

S – площадь поперечного сечения;

V – средняя скорость движения жидкости в данном сечении.

РАСХОД ТОПЛИВА СЕКУНДНЫЙ– величина $\frac{dM}{dt}$, равная массе топлива, расходуемого за единицу времени, т.е. $\frac{dM}{dt} = -G_c$.



РЕАКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИЕ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ОСЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА - динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела.

Этот вывод будет справедлив и в случае, когда тело вращается неравномерно.

Задача определения динамических реакций позволяет уяснить механический смысл величин $\mathcal{J}_{xz}$ и $\mathcal{J}_{yz}$, а именно: центробежные моменты инерции $\mathcal{J}_{xz}$ и $\mathcal{J}_{yz}$ характеризуют степень динамической неуравновешенности тела при его вращении вокруг оси *z*.

Если рассмотреть твердое тело, которое равномерно вращается вокруг оси *z* (см. рис.), закрепленной в подшипниках *A* и *B*, с угловой скоростью *ω*, то динамические реакции согласно принципа Даламбера будут:

$$x_A + x_B = -R_x^e - m x_c \omega^2;$$

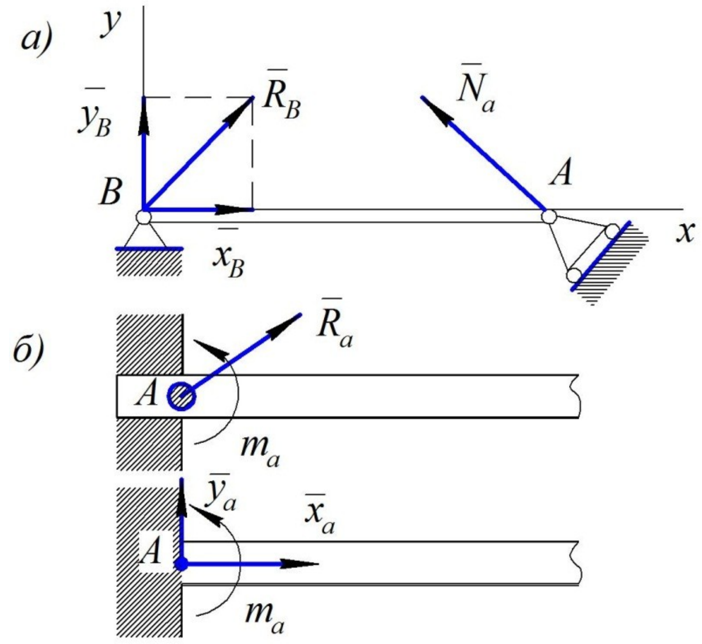
$$y_A + y_B = -R_y^e - m y_c \omega^2;$$

$$z_A = -R_z^e;$$

$$x_B b = -M_y^e - \mathcal{J}_{xz} \omega^2;$$

$$y_B b = M_x^e - \mathcal{J}_{yz} \omega^2;$$

РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ– сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силами реакции (противодействия) связи или просто реакцией связи.



Направлены силы реакции в сторону, противоположную той, куда бы двигалось тело при отсутствии связей.

При решении задач статики на равновесие надо в основном определять реакции опор. В технике обычно встречаются три типа опорных закреплений:

1. Подвижная шарнирная опора *A* (см. рис. *а*);
2. Неподвижная шарнирная опора *B* (см. рис. *б*);
3. Жесткая заделка (неподвижная защемляющая опора) (см. рис. *б*)

   Все реакции опор показаны на рисунках.

РЕАКЦИИ СТАТИЧЕСКИЕ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ОСЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА – называются такие реакции, которые дают уравнения

$$x_A + x_B = -R_x^e - m x_c \omega^2;$$

$$y_A + y_B = -R_y^e - m y_c \omega^2;$$

$$z_A = -R_x^e;$$

$$x_B b = -M_y^e - \mathcal{J}_{xz} \omega^2;$$

$$y_B b = M_x^e - \mathcal{J}_{yz} \omega^2,$$

если в них положить $\omega=0$ т.е.

$$x_A + x_B = -R_x^e;$$

$$y_A + y_B = -R_y^e;$$

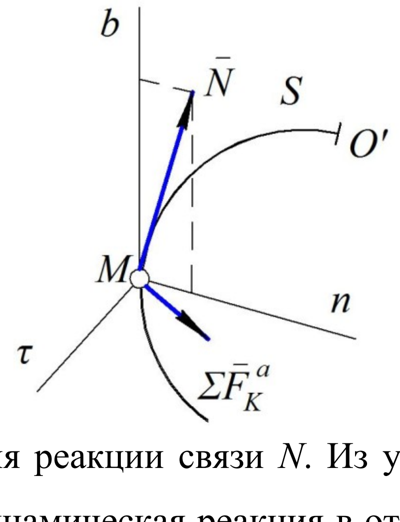
$$z_A = -R_x^e;$$

$$x_B b = -M_y^e;$$

$$y_B b = M_x^e;$$

РЕАКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ. На материальную точку, движущуюся по заданной кривой под действием активных сил $\overline{F}_1^a, \overline{F}_2^a, \dots \overline{F}_n^a$ действует еще реакция связи $\overline{N}$.

Дифференциальным уравнением движения точки по заданной кривой будут:

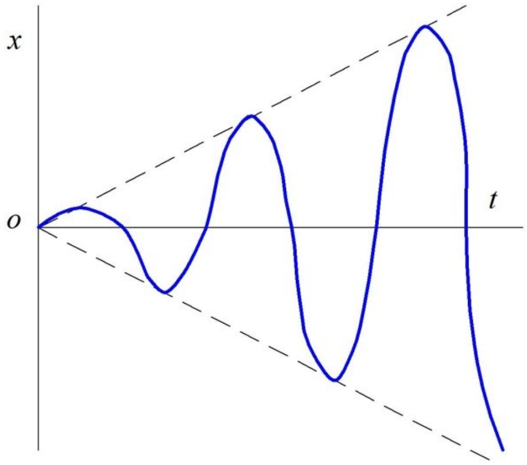


$$m\frac{dV}{dt} = F_{K\tau}^a \quad \text{или} \quad m\frac{d^2S}{dt^2} = F_{K\tau}^a;$$

$$m\frac{V^2}{\rho} = F_{Kn}^a + N_n, \quad 0 = F_{Kb,}^a + N_b,$$

Последние уравнения служат для определения реакции связи *N*. Из уравнений видно, что при криволинейном движении динамическая реакция в отличие от статической кроме действующих активных сил и вида связи зависит еще от скорости. Динамические реакции могут значительно отличаться от статических.

РЕЗОНАНС (от франц. resonans, от лат. resono - звучу в ответ, откликаюсь). При колебаниях материальной точки, в случае, когда частота собственных колебаний совпадает с частотой вынужденных колебаний, наблюдается явление резонанса. Размах вынужденных колебаний со временем неограниченно возрастает (см. рис.). Во многих инженерных сооружениях явление резонанса крайне нежелательно и его следует избегать, подбирая соотношения между частотами *p*и *k*(соответственно, вынужденных и собственных колебаний).

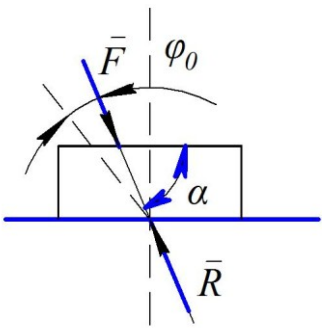


Но резонанс может быть и полезен, например, в радиотехнике, где четко надо отделить сигналы одной радиостанции от сигналов всех остальных.

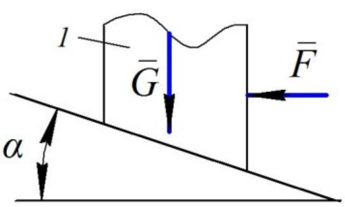
С

САМОТОРМОЖЕНИЕ – условие, при котором из-за сил трения относительное движение звеньев не может начаться, как бы ни велики были движущие силы.

Как бы не была велика сила F (см. рис.), если она отклонена от вертикали на угол $\frac{\pi}{2} - \alpha \ < \varphi_0$, где φ_0- угол трения, ползун невозможно сдвинуть с места. В технике самоторможение используют для предотвращения самопроизвольного движения, например, в клиновых и винтовых механизмах, механизмах свободного хода.



В частности, в клиновом устройстве (см. рис.) звено *1* может двигаться в направлении силы $\overline{F},$ но не может опускаться под действием силы $\overline{G}$ при отсутствии силы $\overline{F}$, так как линия действия силы $\overline{G}$ лежит внутри

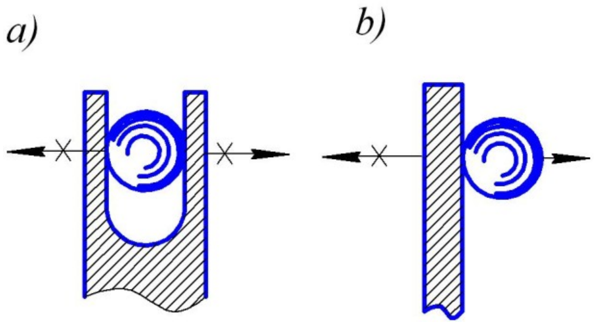


угла трения α. Сила трения в этом случае превышает составляющую силы вдоль поверхности относительного скольжения:

$$G\cos\alpha\, tg\,\varphi_0 \quad > G\sin\alpha \qquad \text{или} \qquad tg\,\varphi_0 > \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

т.е. $\varphi_0 > \alpha$, где α – угол клина (в винтовой передаче угол подъема резьбы).

СВЯЗИ – тела (ограничения условий), которые не позволяют точкам материальной системы занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости. Различают связи *удерживающие*, которые характеризуются ограничением для сближения тел, так и возможного их удаления (см. рис. *а*).



Неудерживающие связи характеризуются односторонним ограничением (рис. *б*).

Связи могут быть *стационарными*независимыми от времени, и *нестационарными*, зависимыми от времени. Связи, накладывающие ограничения только на перемещения, называются *геометрическими (голономными*), а связи, накладывающие ограничения на перемещения и скорости, называются*кинематическими.*

Если ограничения кинематических связей нельзя привести к ограничениям только на перемещения, то такие связи называют *неголономными (неинтегральными)*.

СВЯЗИ ИДЕАЛЬНЫЕ – это связи, не изменяющиеся со временем, у которых сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю.

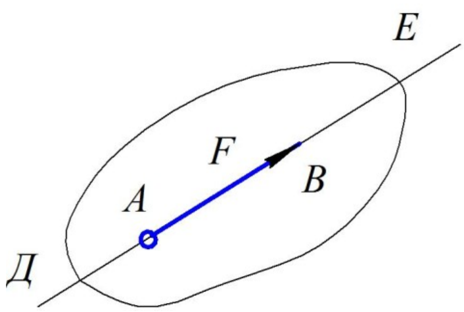
$$dA_K^r = 0.$$

СДВИГ ФАЗ. Уравнением вынужденных колебаний является

$$x = B\sin(pt - \beta).$$

Это незатухающие гармонические колебания с амплитудой B, частотой p, равной частоте возмущающей силы. Величина β характеризует *сдвиг фазы* вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы.

СИЛА – мера механического воздействия в данный момент времени на материальную точку (тело) со стороны других материальных объектов (тел или



полей). Сила характеризуется величиной и направлением действия и приложена к данной материальной точке. Эту точку называют точкой приложения силы (см. рис.). Сила измеряется в ньютонах (1Н); килоньютонах (1кН=1000Н). Прямая *ДЕ* - линия действия силы.

СИЛА АКТИВНАЯ – это сила, которая, начав действие на покоящееся тело, может привести его в движение. Активной силой может быть как внешняя, так и внутренняя сила. Активная сила может быть переменной, зависящей от времени, положения тела и его скорости.

СИЛА ВНЕШНЯЯ – это сила, действующая на тело (или систему тел) со стороны других тел.

При изучении условия равновесия тела (или конструкции) учитываются только внешние силы. Обозначается $\overline{F}^e$.

СИЛА ВНУТРЕННЯЯ – это сила $\overline{F}^i$, с которой части данного тела (или тела данной системы) действуют друг на друга. Все внутренние силы образуют уравновешенную систему сил, т.е. геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил или системы равняется нулю.

$$\overline{F}_k^i = 0,$$

Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю

$$\overline{m}_0(\overline{F}_k^i) = 0 \quad \text{и} \qquad \overline{m}_x(\overline{F}_k^i) = 0.$$

Из этих свойств не следует, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к разным материальным телам и могут вызвать взаимные перемещения этих тел. Уравновешенной вся совокупность внутренних сил будет у системы, представляющей собой абсолютно твердое тело.

Под действием внутренних сил будут изменяться модули скоростей точек системы, а значит и меняться кинетическая энергия системы, т.е. на кинетическую энергию оказывают влияние и внешние и внутренние силы.

СИЛА ВОЗМУЩАЮЩАЯ. Как известно, вынужденные колебания возникают, когда на точку кроме восстанавливающей силы действует еще периодически изменяющая со временем сила, проекция которой на ось *Ox*равна

$$Q_x = Q_0 \sin pt,$$

где p – частота возмущающей силы.

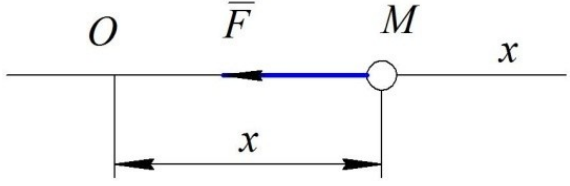
СИЛА ВОЗМУЩАЮЩАЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ – сила, изменяющаяся со временем по закону

$$Q_x = Q_0 \sin pt, \quad \text{или}$$

$$Q_x = Q \sin \omega t,$$

где *ω* – угловая скорость. Частота этой силы *p* = *ω*.

СИЛА ВОССТАНАВЛИВАЮЩАЯ. Если рассматривать прямолинейное движение точки *M*под действием силы F, направленной к неподвижному центру *O* и пропорциональной расстоянию от этого центра, то такая сила будет *восстанавливающей* – ее проекция на ось *Ox*



$$F_x = -cx.$$

Примером такой силы является сила упругости. Эта сила стремится вернуть точку в равновесное положение O. Значение этой силы в точке O равно нулю.

Под действием восстанавливающей силы происходят свободные колебания.

Затухающие, вынужденные колебания также происходят с участием восстанавливающей силы.

СИЛА ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ – это сила, зависящая от скорости, действует в вязкой среде и выражается равенством

$$R = \mu V,$$

где V – скорость тела; μ – коэффициент сопротивления.

Если на свободные колебания оказывает влияние сила вязкого трения $R = -\mu V$, то получаются затухающие колебания, происходящие по закону

$$x = Ae^{-bt}\sin(kt + \alpha).$$

СИЛА ДИССИПАТИВНАЯ – сила, вызывающая диссипацию (рассеивание, убывание) механической энергии.

Например, у колеблющегося маятника благодаря трению в оси и сопротивлению воздуха механическая энергия будет со временем убывать (рассеиваться).

СИЛА ИНЕРЦИИ – векторная величина, равна по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направлена противоположно этому ускорению

$$\overline{F}^{\text{и}} = -m\overline{a}.$$

СИЛА ИНЕРЦИИ КОРИОЛИСОВА

$$\overline{F}^{\text{и}}_{\text{кор}} = -m\overline{a}_{\text{кор}},$$

где $\overline{a}_{\text{кор}}$ – кориолисово ускорение точки.

СИЛА ИНЕРЦИИ ОБОБЩЕННАЯ.

Элементарная работа сил инерции равна

$$\delta A_{\text{К}}^{\text{И}} = Q_1^{\text{И}}\delta q_1 + Q_2^{\text{И}}\delta q_2 + \cdots + Q_s^{\text{И}}\delta q_s,$$

где $Q_1^{\text{И}}, Q_2^{\text{И}}, \ldots Q_s^{\text{И}}$ – обобщенные силы инерции. Они равны

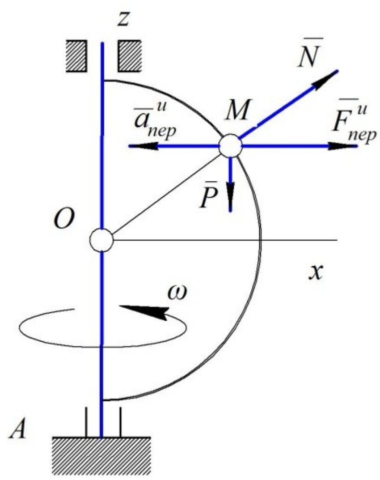
$$\overline{Q}_1^{\text{И}} = \overline{F_K^{\text{И}}} \cdot \frac{\partial \overline{r_K}}{\partial q_1}, \qquad \overline{Q}_2^{\text{И}} = \overline{F_K^{\text{И}}} \cdot \frac{\partial \overline{r_K}}{\partial q_2}$$

СИЛА ИНЕРЦИИ ПЕРЕНОСНАЯ

$$\overline{F}_{\text{пер}}^{\text{и}} = -m\overline{a}_{\text{пер}} ,$$

где $\overline{a}_{\text{пер}}$- переносное ускорение. Знак минус указывает, что переносная сила инерции направлена в противоположную сторону переносного ускорения.

СИЛА ИНЕРЦИИ ЦЕНТРОБЕЖНАЯ – нормальная составляющая силы инерции.



Так как главный вектор сил инерции механической системы равен

$$\overline{R}^{\text{и}} = -m\overline{a_c},$$

то его составляющие будут

$$\overline{R_\tau^{\text{и}}} = -m\overline{a}_c^{\tau}, \quad \overline{R_n^{\text{и}}} = -m\overline{a}_c^{n}$$

и составляющая $\overline{R_N^{\text{и}}} = -m\overline{a}_c^{n}$будет являться центробежной силой инерции.

Примером центробежной силы инерции является сила $\overline{F}_{\text{пер}}^{\text{и}}$, направленная в противоположную сторону переносному нормальному ускорению $\overline{a}_{\text{пер}}^{\text{и}}$, т.е. от оси вращения *z*, если точка *M* совершает сложное движение.

СИЛЫ МАССОВЫЕ или объемные называют силы, действующие на каждую из частиц данного тела и численно пропорциональные массам этих частиц. Примером массовых сил являются силы тяжести, а также силы тяжести частиц жидкости, движущейся в трубе.

СИЛА НЕПОТЕНЦИАЛЬНАЯ. Сила, работа которой зависит от вида траектории или от закона движения точки приложения силы, называется *непотенциальной.*

Непотенциальной силой является сила трения, так как ее работа отрицательна и зависит от длины пути, на котором действует сила.

СИЛА ОБОБЩЕННАЯ – это величина, равная коэффициенту при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.

Так как выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах равна

$$\delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s,$$

где $Q_1 = \quad \overline{F_k} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_1}, \qquad Q_2 = \quad \overline{F_k} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_2}$ и т. д. – обобщенные силы.

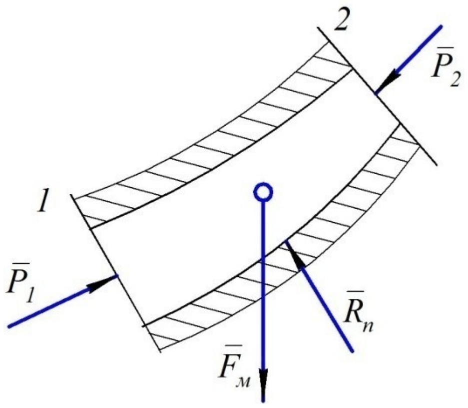
СИЛА ОБОЩЕННАЯ АКТИВНАЯ. Если все наложенные на систему связи являются идеальными, то работу при возможных перемещениях совершают только активные силы и величины Q_1, Q_2 , ...,Q_sбудут представлять в выражении полной элементарной работы

$$\delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s,$$

обобщенные активные силы системы.

СИЛА ОБЪЕМНАЯ (или массовая) – (см. массовая сила).

СИЛА ПОВЕРХНОСТНАЯ – поверхностными называются силы, приложенные к точкам поверхности данного тела; примером таких сил являются реакции всевозможных опор, силы тяги, силы сопротивления среды и т.п. Действие поверхностных сил передается частицам тела за счет давления на них соседних частиц.



На тело весом P, которое находится на поверхности Земли, действует реакция земной поверхности, которая является поверхностной силой и численно равна весу тела.

В случае движения жидкости в трубе все действующие внешние силы делятся на главный вектор массовых сил (сил тяжести) $\overline{F_м}$, действующих на все частицы жидкости, и главные векторы поверхностных сил $\overline{R}_n$ - сил давления на жидкость со стороны стенок трубы (реакций трубы), $\overline{P_1}$ и $\overline{P_2}$ - сил давления в сечениях *1* и *2* со стороны жидкости, находящейся вне объема *1-2* (см. рис.).

СИЛА ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ – сила, работа которой не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка. Такими силами являются, например, сила тяжести, сила упругости.

Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется потенциальным силовым полем, а силы, действующие в этом поле, - *потенциальными силами*.

Если на механическую систему действуют только потенциальные силы, то ее состояние можно определить только одной функцией Лагранжа

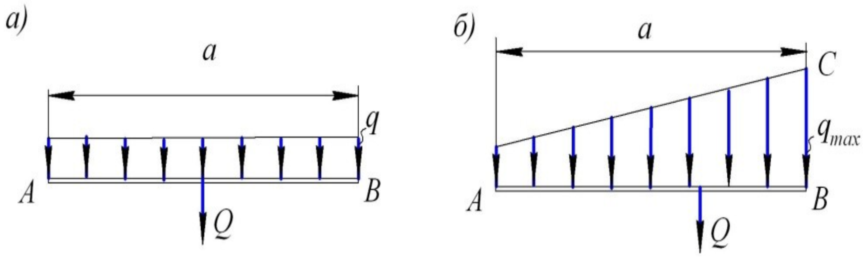
$$L=T-П,$$

знaя которую, можно составить дифференциальное уравнение движения системы.

СИЛА РАСПРЕДЕЛЕННАЯ – силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются *распределенными*.

В инженерных расчетах приходится встречаться с нагрузками, распределенными вдоль данной поверхности по тому или иному закону.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью q– это сила, приходящаяся на единицу длины нагруженного отрезка.



Измеряется интенсивность в ньютонах, деленных на метры (Н/м).

1. На рисунке *а)* изображены силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой. Для такой системы сил интенсивность q имеет постоянное значение. При статических расчетах равнодействующая Q находится по модулю

$$Q = aq.$$

Приложена сила $\overline{Q}$ в середине отрезка *AB*.

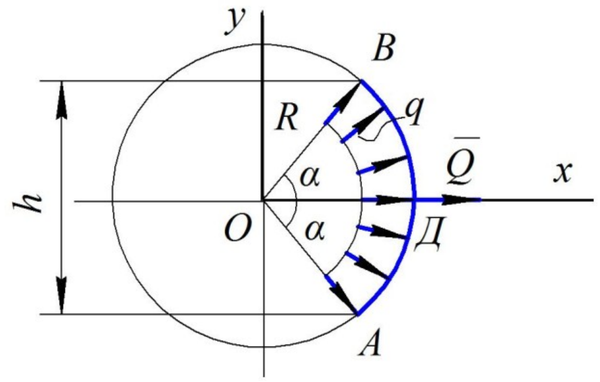
2. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис. *б*). Примером такой нагрузки могут служить силы давления воды на плотину, имеющую наибольшее значение у дна и падающие до нуля у поверхности воды. Для этих сил интенсивность qявляется величиной переменной, растущей от нуля до максимального значения q_{max}. Равнодействующая $\overline{Q}$ таких сил определяется аналогично равнодействующей сил тяжести

$$Q = \frac{1}{2} a q_{max} \,.$$

Приложена сила $\overline{Q}$ на расстоянии $\frac{a}{3}$ от стороны *BC* треугольника.

3. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по произвольному закону (рис. *в*). Равнодействующая $\overline{Q}$ таких сил, по аналогии с силой тяжести по модулю равна площади фигуры *АВДЕ* и проходит через центр тяжести этой площади.

4. Силы, равномерно распределенные по дуге окружности. Примером таких сил могут служить силы гидростатического давления на боковые стенки цилиндрического сосуда. Если радиус дуги равен *R,* а $\angle \text{ВОД} = \angle \text{АОД} = \alpha$, где



ОД – ось симметрии, тогда равнодействующая $\overline{Q}$ направлена вдоль оси *Ох*и численно $Q=Q_x$, где

$$Q_x = {}_{-\alpha}^{\alpha}\, d\,Qx = 2qR\sin\alpha.$$

Очевидно, что $R\sin\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{2}$. Следовательно

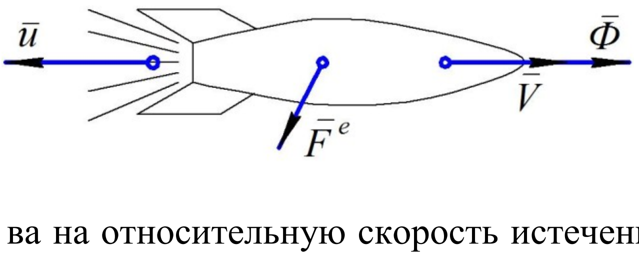
$$Q = qh.$$

СИЛА РЕАКТИВНАЯ. Уравнением движения точки переменной массы (уравнение Мещерского) является

$$M\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F}^e + \overline{u}\frac{dM}{dt},$$

где величина $\overline{u}\frac{dM}{dt} = \Phi$ - реактивная сила.

Величина $\frac{dM}{dt}$ – масса топлива, расходуемая в единицу времени (секундный расход массы топлива G_c). Учитывая, что $\frac{dM}{dt} = -G_c$, получаем



$$\overline{\Phi} = -\overline{u}G_c,$$

т.е. реактивная сила равна произведению секундного расхода массы топлива на относительную скорость истечения продуктов его сгорания и направлена противоположно этой скорости.

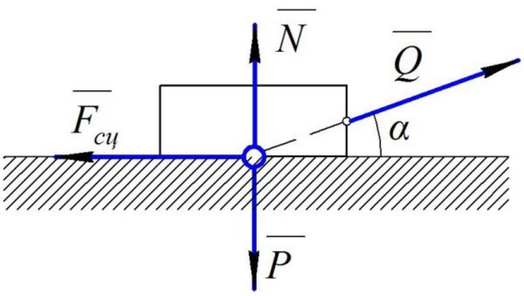
СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ (ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ) – это сила, действующая в среде с определенной плотностью и зависящая от скорости движения точки, которая выражается равенством

$$R = 0.5c\rho SV^2,$$

где ρ – плотность среды; S– площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения; C – безразмерный коэффициент сопротивления, определяется экспериментально и зависящий от формы тела и от того, как оно ориентировано при движении.

СИЛА СОСРЕДОТОЧЕННАЯ – сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке.

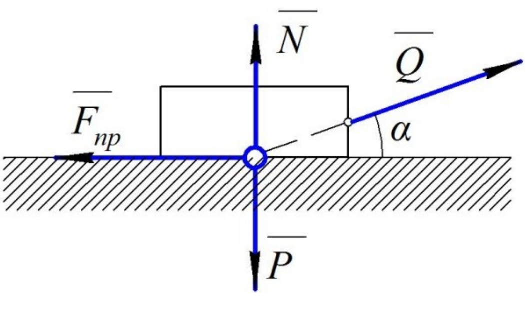
СИЛА СЦЕПЛЕНИЯ. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила *сцепления* (или сила трения), которая может принимать любые значения от нуля до значения $\overline{F}_{\text{пр}}$ (предельная сила трения).



СИЛА ТРЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ

При скольжении одного тела по поверхности другого возникает сила трения, которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого *предельной силой трения.*

Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию:



$$F_{\text{пр}} = f_0 N.$$

Значение предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся поверхностей.

СИЛА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

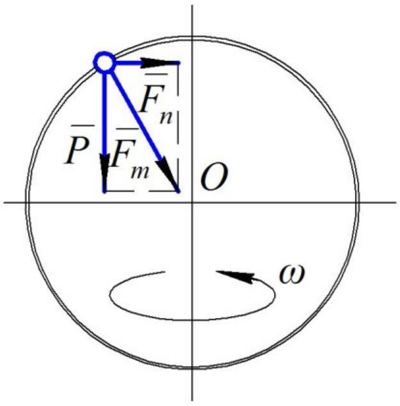
При скольжении одного тела по поверхности другого возникает *сила трения скольжения,*которая связана с нормальным давлением соотношением:

$$F_{\text{тр}} = fN \text{ – закон Кулона,}$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Изучением природы трения занимались такие исследователи как Леонардо да Винчи, Амонтон и Кулон. В 1781 г. Шарлем Огюстом Кулоном, членом Парижской академии наук, были установлены основные приближенные зависимости для сухого трения в покое и при скольжении.

СИЛА ТЯГОТЕНИЯ – это сила, с которой два материальных тела притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения:



$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где f –гравитационная постоянная (в СИ f будет f =6,673·10$^{-11}\frac{\text{м}^3}{\text{кг·с}^2}$)

Сила тяготения зависит от расстояния rмежду телами, массы которых m_1 и m_2. При решении многих технических задач систему отсчета, связанную с Землей, считают инерционной (неподвижной), тем самым не учитывают суточное вращение Земли по отношению к звездам. Поэтому сила тяготения $\overline{F}$ есть результирующая сил $\overline{P}$ и $\overline{F_n}$.

Сила $\overline{P}$ – сила тяжести;

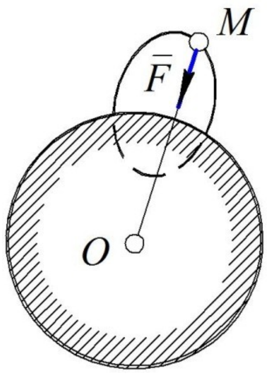
Сила $\overline{F_n} = m\overline{a_n}$ и численно

$F_n = m\omega^2 r$ очень мала, так как ω = 0,000073 с$^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли.

Поэтому сила тяготения мало отличается от силы тяжести, направлена к центру Земли, т.е. является силой центральной.

В задачах космических полетов, движении баллистических ракет и искусственных спутников Земли, на которые действует только сила тяготения $\overline{F}$, направленная к центру Земли, учитывается модуль этой силы в виде

$$F = \frac{mgR^2}{r^2},$$

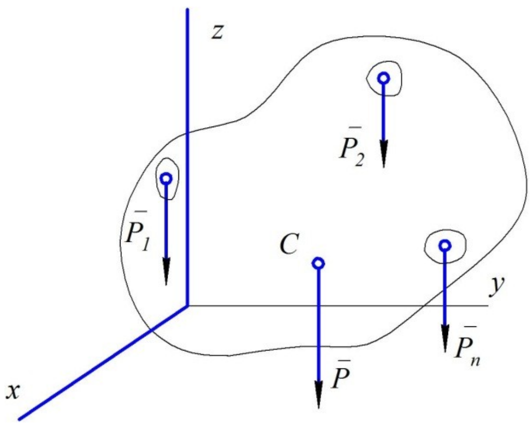


где R – радиус Земли;

r– расстояние от центра Земли до ракеты, т.е. $r = OM$ (см. рис.).

Если Землю считать неподвижной, то под действием центральной силы $\overline{F}$ ракета будет двигаться по плоской кривой (см. рис). Этой кривой может быть эллипс, парабола или гипербола.

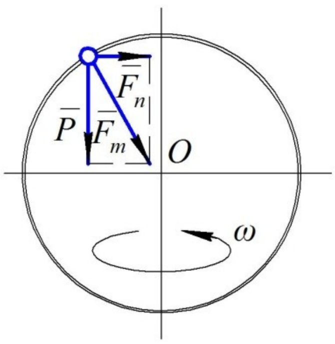
СИЛА ТЯЖЕСТИ. На каждую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, которая



называется *силой тяжести*. Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными друг другу. Равнодействующая сил тяжести $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots \overline{p}_n$ будет $\overline{P}$ (см.рис). Ее модуль определяется равенством.

$$P = \quad p_K$$

и называется *весом тела.*



Сила тяжести $\overline{P}$является составляющей силы тяготения $\overline{F_т}$:

$$\overline{P} = \overline{F_т} - \overline{F_n}$$

Сила тяжести $\overline{P}$ равна разности между всей силой тяготения $\overline{F_{т}}$ тел ее составляющей, которая обеспечивает участие тела в суточном вращении Земли.

СИЛА УДАРНАЯ. Силы, при действии которых происходит удар, называются *ударными силами*.

При ударе действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь.

СИЛА УПРУГОСТИ. Ее значение определяется исходя из закона Гука, согласно которому напряжение (сила, отнесенная кединицы площади) пропорционально деформации.

Сила упругости пружины будет

$$F = c\lambda,$$

где λ – удлинение (или сжатие) пружины;

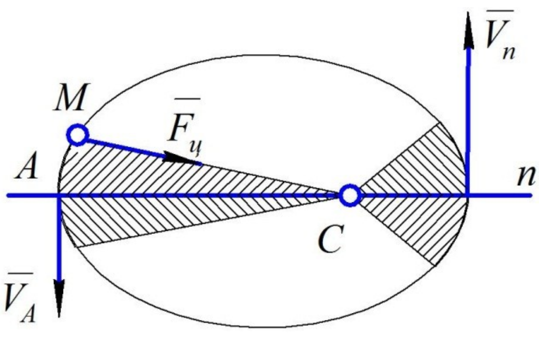
c – коэффициент жесткости пружины (в СИ измеряется в Н/м).

Сила упругости является потенциальной силой, так как ее работа не зависит от вида траектории точки.

При прямолинейном колебании точки сила упругости стремится вернуть точку в положение статического равновесия.

СИЛА УРАВНОВЕШИВАЮЩАЯ – сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей силой.*

СИЛА ЦЕНТРАЛЬНАЯ – это сила, линия действия которой проходит все время через данный центр C. При движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой, а ее скорость $\overline{V}$ изменяется так, что момент вектора $\overline{V}$ относительно центра остается постоянным $V \cdot h = const$.



Секторная скорость будет постоянной, т.е. радиус-вектор точки в любые равные промежутки времени ометает равные площади.

СИЛЫ ВНУТРЕННИЕ – это силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга. Например, сила притяжения Земли к Солнцу будет являться внутренней силой.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.

$$\overline{F}_K^i = 0.$$

2. Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю

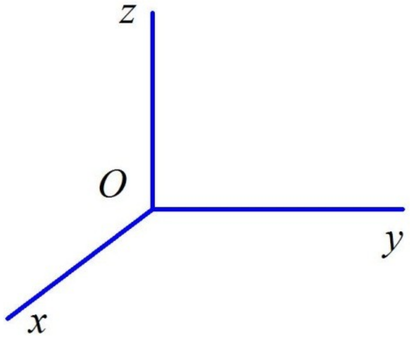
$$\overline{m}_o(\overline{F}_K^i) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{m}_x(\overline{F}_K^i) = 0.$$

Но это не следует, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к разным материальным точкам и могут вызвать взаимные перемещения этих точек. Уравновешенной вся совокупность внутренних сил будет у системы, представляющей собой абсолютно твердое тело.

СИ – СИСТЕМА ЕДИНИЦ МЕЖДУНАРОДНАЯ относится к первому типу систем единиц. В этой системе за основные принимается единицы длины, времени и массы: единицей измерения механических величин является *метр(м)*, *килограмм массы(кг)* и *секунда(с).*

Международная система единиц (СИ) введена в СССР как предпочтительная с 1961 года.

СИСТЕМА ЕДИНИЦ МКГСС относится ко второму типу систем единиц, где основными являются единицы длины, времени и силы. В системе единиц МКГСС основными единицами являются *метр* (м), *килограмм силы* (кГ) и *секунда* (с).



СИСТЕМА КООРДИНАТ ПРАВАЯ – такая система, в которой кратчайшее совмещение оси Oxс осью Oyпроисходит, если смотреть с положительного конца оси Oz, против хода часовой стрелки (см. рис.).

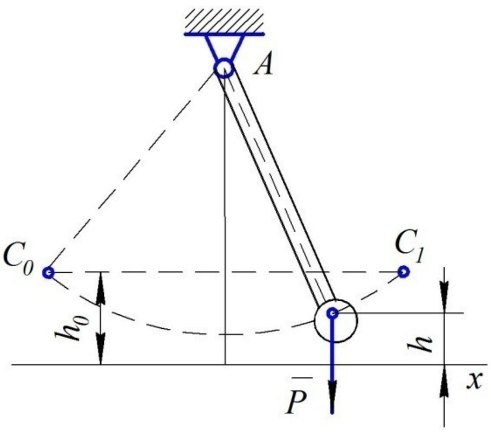
СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКАЯ – система материальных точек или тел, находящихся в равновесии или движении.

Если на механическую систему действуют силы, то положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения и движения всех остальных. Классическим примером такой системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения.

СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКАЯ ГОЛОНОМНАЯ. По виду связей механические системы разделяются на *голономные* (с голономными связями) и *неголономные* (содержащие неголономные связи).

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называют связями *голономными*, а неинтегрируемые дифференциальные связи - *неголономными.*

СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКАЯ ДИССИПАТИВНАЯ – это механическая система, в которой происходит диссипация механической энергии. У маятника (см. рис.) благодаря трению в оси и сопротивлению воздуха механическая энергия будет со временем убывать, а его колебания будут затухать. Это диссипативная система. Для диссипативной системы уравнением



теоремы об изменении кинетической энергии будет:

$$T - T_o = \Pi_o - \Pi + A^{Д},$$

где $A^{Д}$ – работа сил сопротивления и $A^{Д} < 0$, т.е. величина отрицательная. Или

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 + A^{Д}.$$

СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКАЯ КОНСЕРВАТИВНАЯ – это система, для которой выполняется закон $T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = const,$ где T- кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия.

При движении механической системы под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергии систем в каждом ее положении остается величиной постоянной.

Примером может служить маятник (см. предыдущий рис.), движение которого происходит без учета сил сопротивления. Тогда для любого положения маятника будет выполняться

$$\Pi + T = \Pi_o \quad \text{или}$$

$$Ph + \mathcal{I}_A \frac{\omega^2}{2} = Ph_0.$$

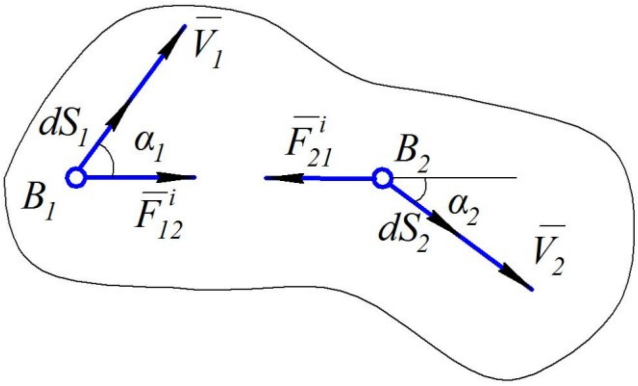
СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКАЯ НЕГОЛОНОМНАЯ – такая, которая содержит неголономные связи.

Неголономными связями называются неинтегрируемые дифференциальные связи.

СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКАЯ НЕИЗМЕНЯЕМАЯ – называется такая система, в которой расстояние между двумя взаимодействующими точками остается во все время движения постоянным, т.е. $B_1B_2=const.$

Пусть действующие силы $\overline{F}_{21}^{i} = -\overline{F}_{12}^{i}$ (см. рис.). Тогда должно выполняться

$$V_1 \cos\alpha_1 = V_2 \cos\alpha_2 \quad \text{и}$$



$$dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2,$$

где V_1, V_2, dS_1, dS_2 – соответствующие скорости и элементарные перемещения точек B_1 и B_2.

В результате для суммы элементарных работ получим

$$dA_1 + dA_2 = \overline{F}_{12}^i dS_1 \cos\alpha_1 - \overline{F}_{21}^i dS_2 \cos\alpha_2 = 0.$$

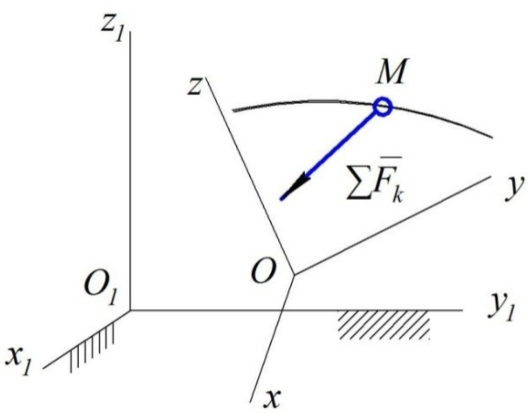
СИСТЕМА МЕХАНИЧЕСКАЯ С ИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ – это такая система, связи которой меняются со временем и наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы, выполняется условие

$$dA_K^r = 0,$$

т.е. сумма работы всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю.

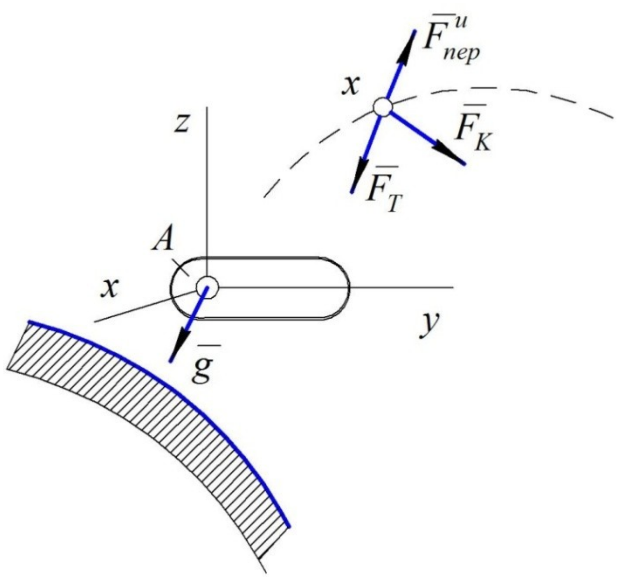
СИСТЕМА ОТСЧЕТА – реальное или условное твердое тело, по отношению к которому определяется положение других тел.

СИСТЕМА ОТСЧЕТА ИНЕРЦИАЛЬНАЯ – та система, в которой справедлив закон инерции. Если подвижные оси *Oxyz* перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то такая система отсчета *Oxyz* также будет инерционной (см. рис.). Инерциальной системой отсчета с большей степенью точности можно считать системы отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на неподвижные звезды. При решении механических задач инерционной системой отсче-



та, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

СИСТЕМА ОТСЧЕТА МЕСТНАЯ. Рассмотрим тело A, движущееся в поле тяготения Земли свободно и поступательно с ускорением $\overline{g}$ (ускорением поля тяготения), т.е. находящееся в состоянии невесомости. Свяжем с телом A систему отсчета $Oxyz$, движущуюся вместе с ним тоже поступательно (см. рис.) и рассмотрим движение точки M массой m по отношению к этой системе отсчета. Будем считать $\overline{g} = const$, т.е. область, где движется тело A, мала по сравнению с расстоянием до центра Земли. На точку M будут действовать сила тяготения $\overline{F_т} = m\overline{g}$ и другие силы. Уравнением относительного движения точки по отношению к осям $Oxyz$ будет



$$m\overline{a} = \overline{F_K} + \overline{F_т} + \overline{F}^{u}_{пер}.$$

Кориолисова сила инерции $\overline{F}^{u}_{кор} = 0$, так как система отсчета $Oxyz$ движется поступательно. $\overline{F_K}$ – сумма других действующих сил.

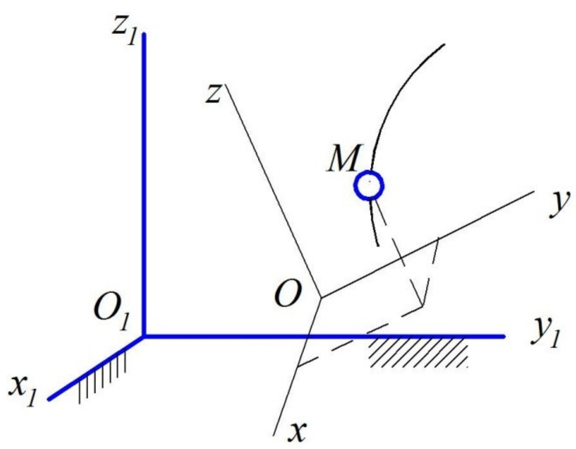
Так как оси $Oxyz$ вместе с телом A перемещаются поступательно с ускорением $\overline{g}$, то для движущейся точки $\overline{a}_{пер} = \overline{g}$ и $\overline{F}^{u}_{пер} = -m\overline{g}$.

Учитывая, что $\overline{F_т} = m\overline{g}$, получим

$$m\overline{a} = \overline{F_K}$$

Хотя система отсчета $Oxyz$ не является инерционной, так как движется с ускорением $\overline{g}$, но уравнение движения точки по отношению к этой системе отсчета составляется так, как если бы она была инерционной; но при этом в число действующих сил не должна включаться сила тяготения $\overline{F_{т}}$. Такая система называется *местной системой отсчета.*

СИСТЕМА ОТСЧЕТА НЕИНЕРЦИАЛЬНАЯ – такая система, которая движется произвольным образом по отношению к инерциальной системе отсчета (например, с ускорением). В неинерциальной системе отсчета точка получает ускорение еще и в результате ускоренного движения самой системы отсчета.



СИСТЕМА ОТСЧЕТА ОСНОВНАЯ (НЕПОДВИЖНАЯ). При решении задач механики часто вынуждены рассматривать движение точки (тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ (см. рис.), а другая $Oxyz$определенным образом движется по отношению к первой.

Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отсчета, называется составным или сложным.

СИСТЕМА ОТСЧЕТА ПОДВИЖНАЯ. Подвижная система отсчета $Oxyz$ (см. предыдущий рис.) позволяет разложить сложное движение точки или тела на более простые виды. Это широко используется при кинематических и динамических расчетах и определяет практическую ценность теории сложного движения.

СИСТЕМА СИЛ – это совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело или систему тел.

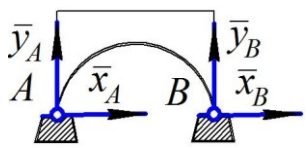
Если все линии действия сил лежат в одной плоскости, система сил называется *плоской,* а если эти линии действия не лежат в одной плоскости, - *пространственной.*

СИСТЕМА СИЛ УРАВНОВЕШЕННАЯ – это система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.

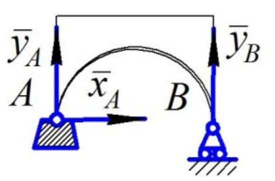
СИСТЕМА СИЛ ЭКВИВАЛЕНТНАЯ НУЛЮ – это система сил, под действием которой свободное твердое тело находится в покое.

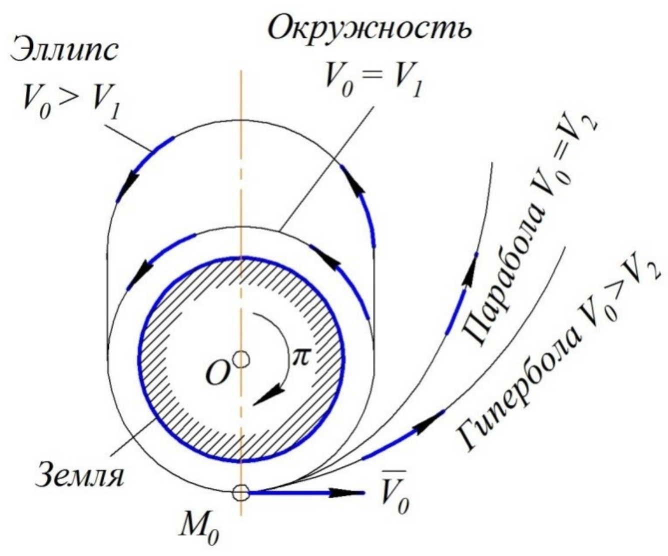
Система сил эквивалентная нулю – это система сил уравновешенная.

СИСТЕМА ТЕЛ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМАЯ. Если для данной конструкции число всех реакций связей будет больше числа уравнений, в которые эти реакции входят, то конструкция будет статически неопределимой. Статическая неопределенность объясняется наложением лишних связей. Арка, изображенная на рисунке, имеет четыре реакции x_A, x_B, y_A, y_B, а уравнений равновесия можно составить три.



СИСТЕМА СИЛ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМАЯ – считается таковой, когда число уравнений равновесия равнялось числу неизвестных реакций. На арку, изображенную на рис, где связями являются неподвижная шарнирная опора A и шарнирная опора на катках в точке B. Такая арка будет статически определимой, поскольку здесь три неизвестных реакции x_A, y_A, N_B войдут в три уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.





СКОРОСТЬ КОСМИЧЕСКАЯ ВТОРАЯ. Тело, брошенное со скоростью $V_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.2\frac{\text{км}}{\text{с}}$, навсегда покинет поле земного тяготения. Это вторая космическая скорость. Тело в этом случае будет двигаться по параболе или гиперболе. Радиус Земли R принимается равным R = 6378 км и g= 9,82 м/с^2.

При скорости, меньшей второй космической, тело или упадет обратно на Землю, или станет искусственным спутником Земли .

СКОРОСТЬ КОСМИЧЕСКАЯ ПЕРВАЯ – это наименьшая скорость

$$V_0 = \ \overline{g_0 R_0} = \frac{7914\text{м}}{\text{с}} \approx 7{,}9\,\frac{\text{км}}{\text{с}},$$

которую надо сообщить брошенному телу, чтобы оно не упало обратно на Землю.

СКОРОСТЬ КОСМИЧЕСКАЯ ТРЕТЬЯ – скорость, необходимая для освобождения межпланетного корабля от совместных притяжений Земли и Солнца, будет больше $\overline{g_0 R_0}$ $(g_0 = 9{,}82\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}, R_0 = 6378$ км) и при определенном направлении $\overline{V_0}$ равна около 16,7 км/с.

СКОРОСТЬ КРУГОВАЯ (см. первая космическая скорость).

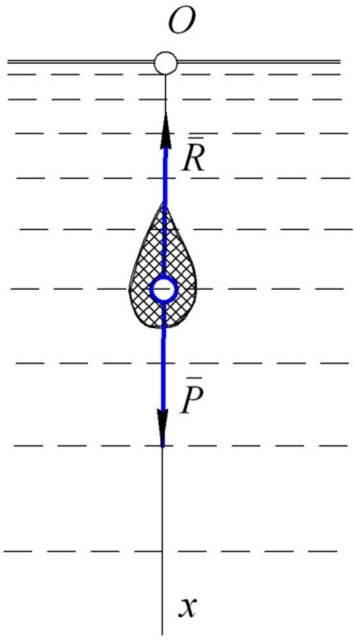
СКОРОСТЬ ОБОБЩЕННАЯ. При движении механической системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно меняться, и закон этого движения определится уравнениями:

$$q_1 = f_1\ \ t\ , \qquad q_2 = f_2\ \ t\ , \ldots,\ q_S = f_S\ \ t\ .$$

Производная от обобщенных координат по времени называется *обобщенной скоростью* системы. Обозначаются обобщенные скорости символами $q_1, q_2, \ldots, q_S$, где $q_1 = \frac{dq_1}{dt}, q_2 = \frac{dq_2}{dt}$ и т.д. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если q – линейная величина, то q – линейная скорость; если q – угол, то q – угловая скорость; если q – площадь, то q – секторная скорость и т.д. Понятие об обобщенной скорости есть раннее встречающиеся понятие в кинематике о скоростях.

СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ.

Рассмотрим задачу о падении тела в воздухе с малой по сравнению с радиусом Земли высоты. В этом случае силу тяжести $\overline{P}$и плотность воздуха ρ можно считать величинами постоянными. Действующая сила сопротивления воздуха на тело равна по модулю



$$R = 0.5c_x\rho SV^2,$$

где $c_x = const$ – это допускается, если скорость падения не превышает примерно 300 м/с; S– площадь сечения тела.

Направив ось Ox вертикально вниз (см. рис.) определили, как будет изменяться скорость падения в зависимости от пройденного пути. На падающее тело действует две силы $\overline{R}$ и $\overline{P}$; тогда

$$F_{Kx} = P - R = P - 0.5c_x\rho SV^2.$$

Составив дифференциальное уравнение, учитывая, что $V_x = V$, получим

$$\frac{P}{g}V\frac{dV}{dx} = P - \frac{1}{2}c_x\rho SV^2.$$

Введем обозначение $a^2 = \frac{2P}{c_x\rho S}$ и уравнение примет вид

$$V\frac{dV}{dx} = g\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \text{ или } -\frac{VdV}{a^2-V^2} = -\frac{g}{a^2}x.$$

Взяв интегралы от обеих частей, получим, учитывая начальные условия, *x=0, V=0*

$$V = a\sqrt{1 - e^{-2gx/a^2}}.$$

Эта формула дает закон изменения скорости падающего тела в воздухе в зависимости от пройденного пути. С возрастанием *x* величина $e^{-2x\frac{g}{a^2}}$ убывает, стремясь к нулю при $x \to \infty$.

Видно, что скорость падения *V* с возрастанием *x* возрастает, стремясь в пределе к постоянной величине *a.* Эта величина *a* называется *предельной скоростью падения* $V_{пр} = a$. Тогда

$$V_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2P}{c_x \rho S}}.$$

СКОРОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ (см. вторая космическая скорость) – это скорость, равная

$$V_2 = \sqrt{2gR}.$$

Если R= 6378 км и g= 9,82 м/с^2, то $V_2 \approx$ 11.2 км/с.

Тело, брошенное с поверхности Земли под любым углом α к горизонтальной плоскости с начальной скоростью $V_0 \geq$ 11.2 км/с, будет двигаться по параболе или гиперболе (при α = 90°- по прямой), неограниченно удаляясь от Земли.

СКОРОСТЬ, ПОТЕРЯННАЯ ПРИ УДАРЕ. Потеря кинетической энергии системы при абсолютно неупругом ударе получается равной:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 (V_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (V_{2x} - u_x)^2,$$

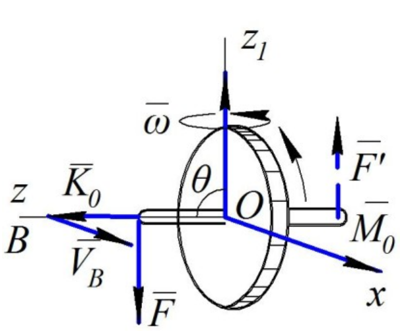
где M_1 и M_2 массы соударяющихся тел;

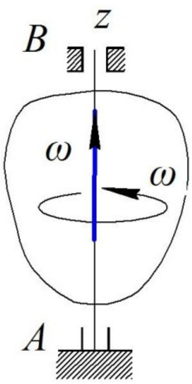
V_{1x} и V_{2x} – скорости тел до удара, причем $V_{1x} > V_{2x}$;

u_x – скорости тел после удара.

Тогда разности $(V_{1x} - u_x)^2$ и $(V_{2x} - u_x)^2$ показывают, насколько уменьшилась при ударе скорость каждого из соударяющихся тел. Это и есть *потерянные при ударе скорости*.

СКОРОСТЬ ПРЕЦЕССИИ УГЛОВАЯ. Если на гироскоп действует сила $\overline{F}$(или пара сил $\overline{F}$, $\overline{F'}$(см. рис.), – такой силой может быть сила тяжести, то ось Oz не отклоняется в сторону действия силы. Угол $\theta = \angle z_1 Oz$ остается все время постоянным, а скорость $\overline{V_B}$, будет перпендикулярной плоскости z_1Oz. В этом случае ось Oz гироскопа будет вращаться (прецессировать) вокруг оси Oz_1 с некоторой угловой скоростью $\overline{\omega}$, которая называется *угловой скоростью прецессии*.





СКОРОСТЬ ТЕЛА УГЛОВАЯ - числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \varphi.$$

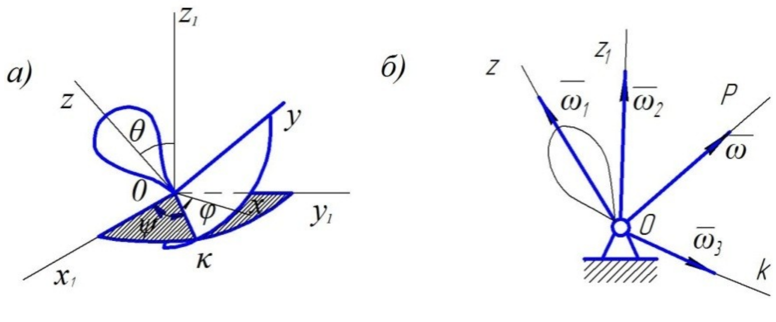
Знак ω определяет направление вращения тела.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\overline{\omega}$, модуль которого равен ω и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (см. рис.).

Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг оси.

Единицей измерения угловой скорости служит 1/T (т.е. 1/время; в качестве единицы измерения обычно применяют рад/с или, что тоже, 1/с ($с^{-1}$), так как радиан – величина безразмерная.

СКОРОСТЬ ТЕЛА УГЛОВАЯ МГНОВЕННАЯ. При изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси *Oz* (собственное вращение) с угловой скоростью $\omega_1 = \varphi$ (см. рис. *а*), при изменении угла ψ вращение вокруг оси *Oz*, (прецессиия) с угловой скоростью $\omega_2 = \psi$ и при изменении угла θ – вращение вокруг узлов *OK* (нутация) с угловой скоростью $\omega_3 = \theta$. Векторы $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$, этих угловых скоростей направлены (см. рис. *б*) соответственно по осям Oz, Oz_1, OK. При движении тела изменяются все три угла и его угловая скорость $\overline{\omega}$ равна геометрической сумме названных угловых скоростей, т.е. $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3$. Поскольку значения $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$ со временем меняются, значит будет изменяться численно



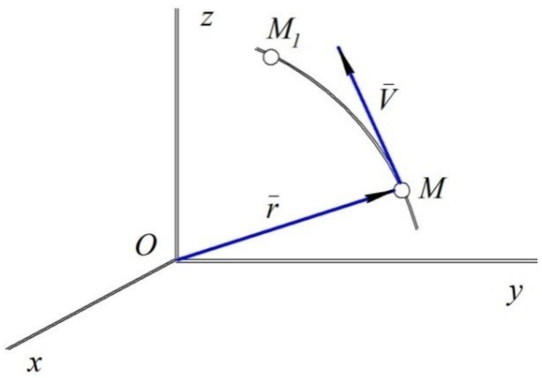
и по направлению вектор $\overline{\omega}$. Поэтому вектор $\overline{\omega}$ называют *мгновенной угловой скоростью тела.*

СКОРОСТЬ ТОЧКИ – вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени:

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}.$$

Вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

При прямолинейном движении вектор скорости $\overline{V}$ все время направлен вдоль прямой, по которой движется точка в сторону движения. Размерность скорости *L/T*, т.е. длина/время; обычно единицей измерения является м/с или км/ч.



Так как

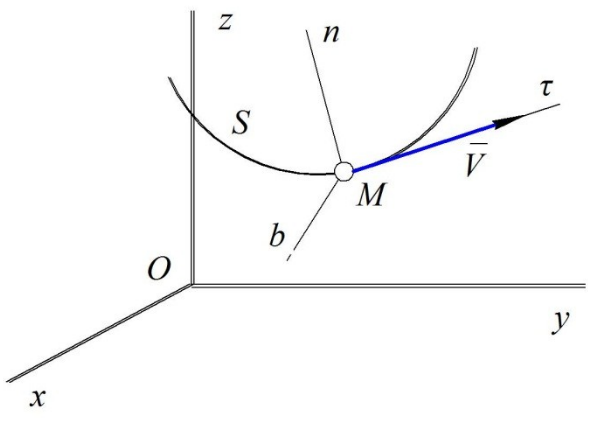
$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}, \quad r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z,$$

находим $$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt},$$

или $V_x = x, V_y = y, V_z = z,$

проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скоростей можно найти модуль и направление.



$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V}, \ \cos\beta = \frac{V_y}{V}; \quad \cos\gamma = \frac{V_z}{V},$$

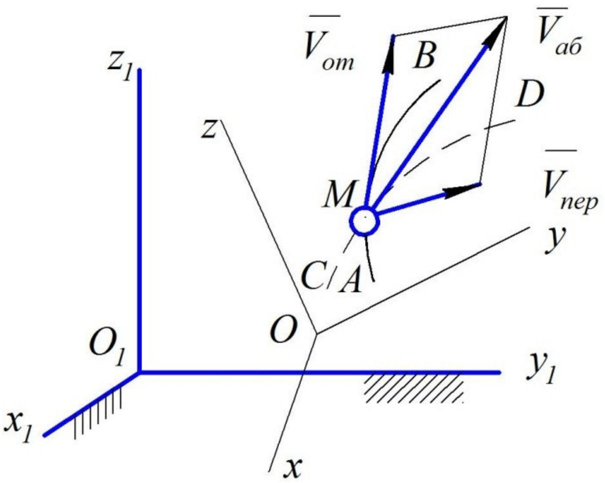
где *α, β, γ* – углы, которые вектор $\overline{V}$ образует с координатными осями *x,y,z*.

При естественном способе задания, когда известны траектория и закон движения точки вдоль этой траектории в виде $S = f(t)$ скорость точки направлена по касательной к траектории (см. рис.) и определяется в осях $M\tau nb$ только одной проекцией V_τ на ось $M\tau$. При этом $V_\tau = V$ или $V_\tau = -V$, а значение скорости

$$V = \frac{dS}{st} = S.$$

Числовое значение скорости точки в данный момент времени равно производной от расстояния (криволинейной координаты) S этой точки по времени.

СКОРОСТЬ ТОЧКИ АБСОЛЮТНАЯ. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1$, называется абсолютным или сложным. Траектория *СД* этого движения называется абсолютной траекторией, скорость $\overline{V}_{аб}$ – абсолютной скоростью.



В векторной форме

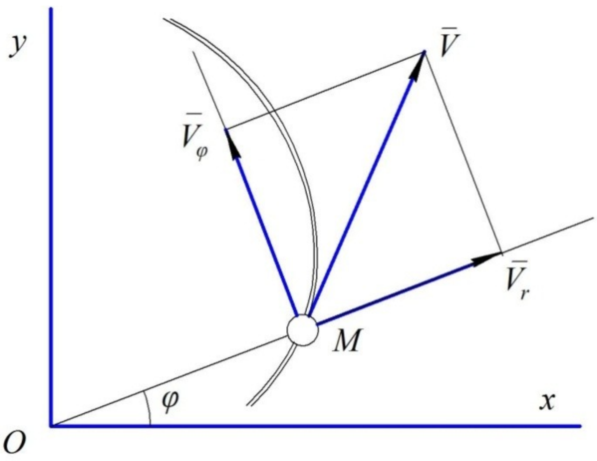
$$\overline{V}_{аб} = \overline{V}_{от} + \overline{V}_{пер},$$

где - $\overline{V}_{от}$ – относительная скорость; $\overline{V}_{пер}$ – переносная скорость (см. рис.). Направлен вектор $\overline{V}_{аб}$ по касательной к траектории *СД*.

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

СКОРОСТЬ ТОЧКИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

Когда точка движется все время в одной и той же плоскости, ее положение можно определить полярными координатами r и α (см. рис.). Скорость точки численно равна $\frac{dS}{dt}$ и геометрически будет слагаться из радиальной скорости V_r и поперечной скорости V_φ, т.е.



$$\overline{V} = \overline{V_r} + \overline{V_\varphi},$$

где численно $V_r = \frac{dr}{dt} = r, V_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = r\varphi.$

Так как $\overline{V_r}$ и $\overline{V_\varphi}$ взаимно перпендикулярны, то по модулю

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{r^2 + r^2\varphi^2}.$$

Эти формулы определяют скорость точки в полярных координатах при плоском движении.

СКОРОСТЬ ТОЧКИ И ЕЕ ЧИСЛОВОЕ (АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ) ЗНАЧЕНИЕ.

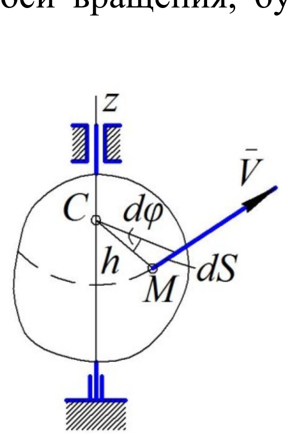
Числовое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от расстояния (криволинейной координаты) *S* этой точки по времени и обозначается символом *V* или V .

$$V = \frac{dS}{dt} \quad \text{или} \quad V = S.$$

Если *V*> *0*, то скорость направлена в сторону положительного отсчета расстояния *S*, а если *V*< *0,* - в противоположную сторону.

СКОРОСТЬ ТОЧКИ ЛИНЕЙНАЯ (ОКРУЖНАЯ).

При вращении твердого тела точка *M*, находящаяся на расстоянии *h* от оси вращения, будет описывать окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр *C* лежит на самой оси. За время *dt* происходит элементарный поворот тела на угол *dφ* и точка *M* совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение



$$dS = hd\varphi$$

Тогда числовое значение скорости точки будет равно отношению *dS к dt,* т.е.

$$V = \frac{dS}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt}$$

или

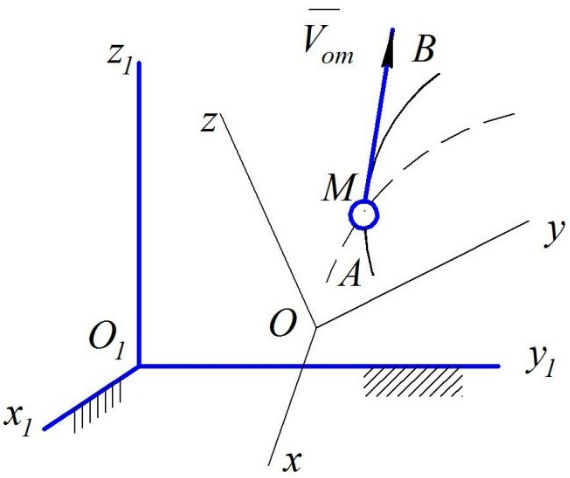
$$V = h\omega.$$

Скорость Vв отличие от угловой скорости тела называют иногда еще *линейной* или *окружной* скоростью точки *M*.

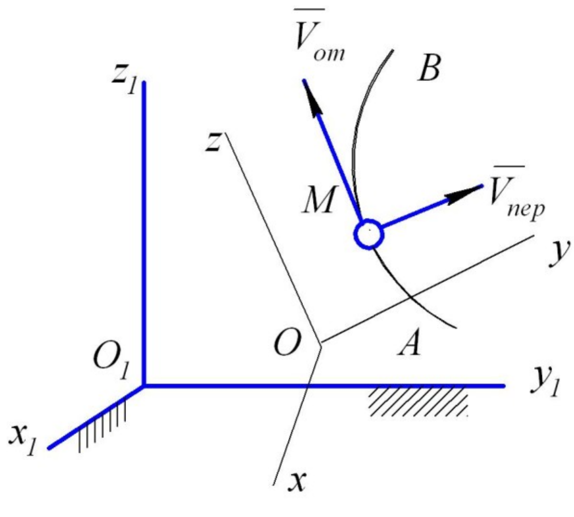
Числовое значение линейной скорости точи вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость по касательной к описываемой точкой окружности.

СКОРОСТЬ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ. Движение точки *M* по отношению к подвижной системе отсчета (к осям *Oxyz*) называется *относительным движением*. Траектория *AB*, описываемая точкой в относительном движении, называется *относительной траекторией*. Скорость точки *M* (см. рис.) по отношению к осям *Oxyz* называется *относительной скоростью* (обозначается $\overline{V}_{\text{от}}$). Из определения следует, что при вычислении $\overline{V}_{\text{от}}$ можно движение осей *Oxyz*во внимание не принимать (рассматривать их как неподвижные).

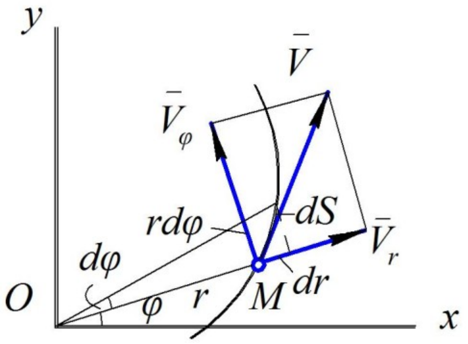


СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПЕРЕНОСНАЯ. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета *Oxyz*по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки *M**переносным* движением.



Скорость той, неизменно связанной с подвижными осями *Oxyz*точки m, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка *M*, называется *переносной скоростью* точки *M* в этот момент (обозначается$\overline{V}_{\text{пер}}$).

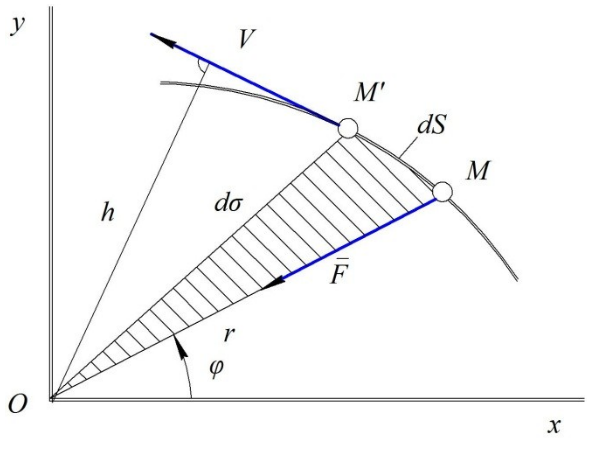
Т.е. $\overline{V}_{\text{пер}} = \overline{V}_m$.



СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПОПЕРЕЧНАЯ. Движение точки в одной плоскости можно определять полярными координатами *r*и *φ*. Скорость точки численно равна $\frac{dS}{dt}$, где перемещение *dS* геометрически слагается из радиального перемещения, численно равного *dr*, и поперечного перемещения, перпендикулярного радиусу *OM* и численно равного $r \cdot d\varphi$ (см. рис.). Скорость $\overline{V}$ геометрически будет слагаться $\overline{V} = \overline{V_r} + \overline{V_\varphi}$, где численно $V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\varphi$ – поперечная скорость. Поперечная скорость $\overline{V_\varphi}$ перпендикулярна радиальной скорости $\overline{V_r}$.

СКОРОСТЬ ТОЧКИ РАДИАЛЬНАЯ. Радиальная $\overline{V_r}$ скорость (см. рис. предыдущий) равна численно $V_r = \frac{dr}{dt} = r$ и направлена вдоль координаты *r*, причем $\overline{V_r} \perp \overline{V_\varphi}$.

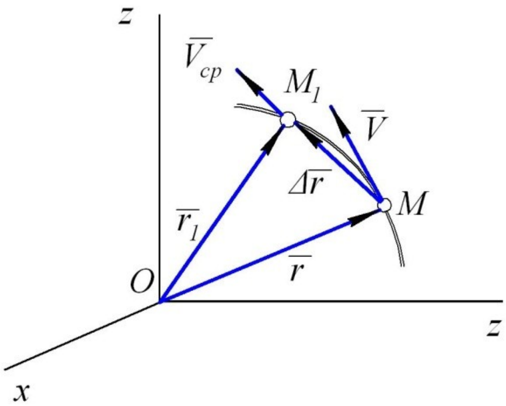
СКОРОСТЬ ТОЧКИ СЕКТОРНАЯ.При движении под действием центральной силы точка двигается по плоской кривой, а ее скорость $\overline{V}$ изменяется так, что момент вектора $\overline{V}$ относительно центра O остается постоянным $V \cdot h = const$. Это следует из того, что $Vh = h\frac{dS}{dt}$, а $h \cdot dS = 2d\sigma$,где $d\sigma$– площадь элементарного треугольника *OMM'*.



Следовательно, $Vh = 2\frac{d\sigma}{dt}$

Величина $\frac{d\sigma}{dt}$ определяет скорость, с которой растет площадь, ометаемая радиусом-вектором *OM* при движении точки *M*, и называется *секторной скоростью* точки. В рассматриваемом случае эта скорость постоянна:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}\ \overline{m}_0(m\overline{V})\ = const.$$

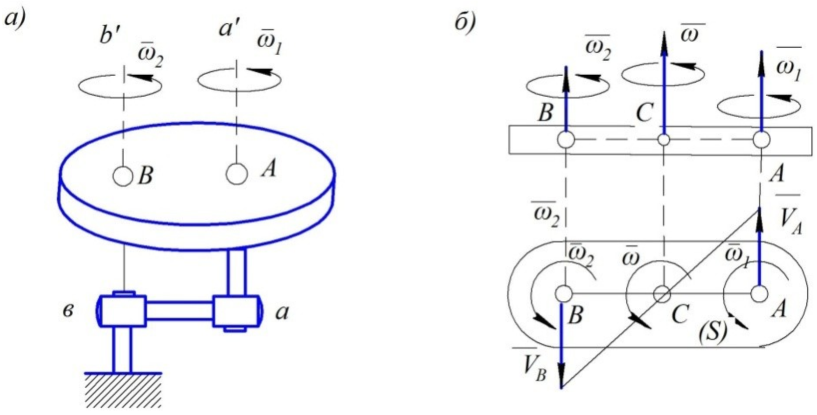


СКОРОСТЬ ТОЧКИ СРЕДНЯЯ. Пусть движущаяся точка находится в момент времени *t* в положении *M*, определяемом вектором $\overline{r}$, а в момент t_1приходит в положение M_1, определяемое вектором $\overline{r_1}$ (см. рис.). Тогда перемещениеточки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором$\overline{MM_1} = \overline{r_1} - \overline{r} = \Delta\overline{r}$. Отношение вектора перемещения точки к соответствующему элементу времени дает векторную величину, называемую *средней скоростью точки* за промежуток времени Δt:

$$\overline{V_{\text{ср}}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}\,.$$

Направлен вектор $\overline{V_{\text{ср}}}$ так же, как и вектор $\overline{MM_1}$, т.е. при криволинейном движении вдоль хорды MM_1, в сторону движения точки, а при прямолинейном движении – вдоль самой траектории.

СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ. Рассмотрим относительное движение тела с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси *аа'*, укрепленной на кривошипе *ва* (см. рис. *а*), где переносным вращением кривошипа *ва* является вращение вокруг оси *вв'*, параллельной *аа'* с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$. Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению



к плоскости, перпендикулярной осям. Здесь возможны три частных случая.

1. В р а щ е н и я н а п р а в л е н ы в о д н у с т о р о н у.

Изобразим сечение *S*тел плоскостью, перпендикулярной осям (рис.*б*). Очевидно, что точка *А,* лежащая на оси *Аа*, получает скорость $V_A = \omega_2 \cdot AB$, а точка *В* $V_A = \omega_1 \cdot AB$. Так, как векторы V_A и V_B параллельны и направлены в разные стороны, то точка С является мгновенным центром скоростей (V_c=0), а ось Сс' – мгновенной осью вращения тела. Тогда

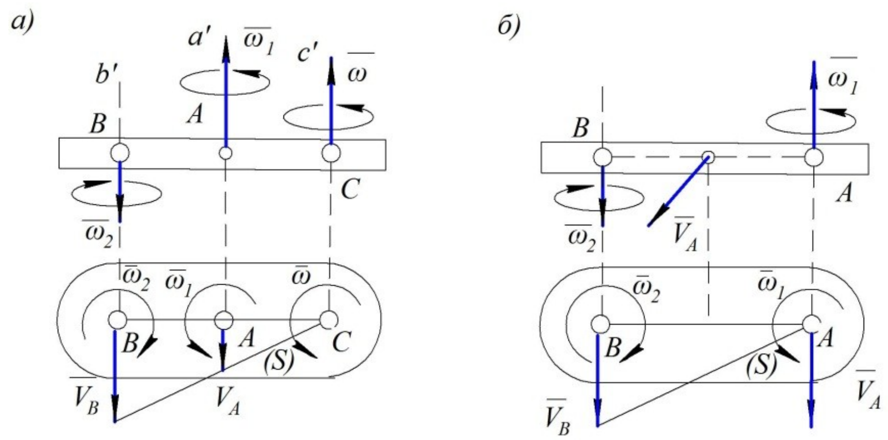
$$\omega = \frac{V_B}{BC} \text{ или } \omega = \frac{V_A}{AC}, \text{откуда } \omega = \frac{V_A + V_B}{AB}.$$

И, окончательно находим ω:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}.$$

Этот результат получается, если тело участвует одновременно в двух направленных в одну сторону вращениях.

2. В р а щ е н и я н а п р а в л е н ы в р а з н ы е с т о р о н ы. (см. рис.*а*). Допустим, что $\omega_1 > \omega_2$. Рассуждая, как в предыдущем случае, видно, мгновенная ось вращения проходит через точку *С*, и $\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC}$, и $\omega = \frac{V_B - V_A}{AB}$ и $\omega = \omega_1 - \omega_2$.

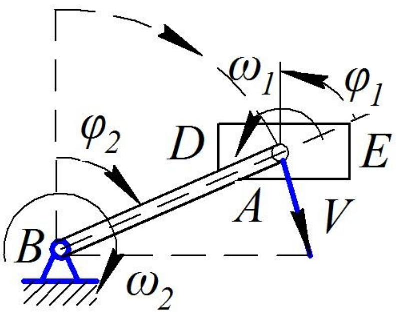


3. Пара вращений (см.рис. б). Это случай, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны, но по модулю $\omega_1 = \omega_2$. В этом случае $V_A = \omega_2 \cdot AB$, $V_B = \omega_1 \cdot AB$, т.е. $V_A = V_B$.

Тогда мгновенный центр скорости находится в бесконечности и все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости

$$V = \omega_1 \cdot AB.$$

Результирующее движение будет поступательным (или мгновенно поступательным) со скоростью $V = \omega_1 \cdot AB$ и вектор V направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы ω_1 и ω_2. Направление вектора V определяется так же, как в статике определялось направление момента m пары сил.

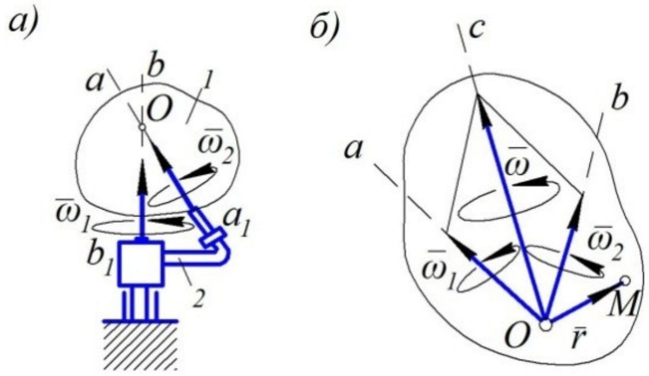


Примером такого движения является поступательное движение велосипедной педали $ДЕ$ относительно рамы велосипеда (см. рис.), являющееся результатом относительного вращения педали вокруг оси A, укрепленной на кривошипе BA, и переносного вращения кривошипа BA вокруг оси B. Угловые скорости ω_1и ω_2 этих вращений направлены в разные стороны, а по модулю равны друг другу, так как в любой момент времени угол поворота φ_1 педали относительно кривошипа BA равен углу поворота φ_2 кривошипа. Скорость поступательного движения педали $V = \omega_2 \cdot BA$.

Из того, что пара вращений эквивалентна поступательному движению, следует и обратный вывод: поступательное движение твердого тела эквивалентно паре вращений, у которой момент угловых скоростей этих вращений равен поступательной скорости тела.

СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ.

Пусть относительное движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\overline{\omega_1}$ вокруг оси a_1a, укрепленной на кривошипе 2 (см. рис. *а*), а переносным является вращение кривошипа с угловой скоростью $\overline{\omega_2}$ вокруг оси b_1b, которая с осью a_1aпересекается в точке O. Схематически этот случай изображен на рис. *б*.



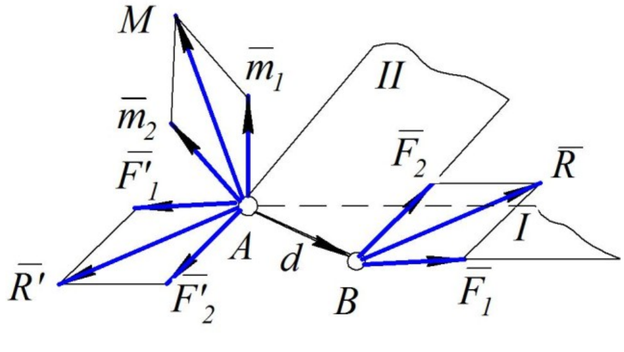
Очевидно, что в этом случае скорость точки O, как лежащей одновременно на обеих осях, будет равна нулю и результирующее движение тела является движением вокруг неподвижной точки O. В относительном движении вокруг оси Oa точка M получит скорость$\overline{V_{\text{от}}} = \overline{\omega_1} \times \overline{r},$ в переносном же движении вокруг оси Ob точка получит скорость $\overline{V_{\text{пер}}} = \overline{\omega_2} \times \overline{r}$. Тогда абсолютная скорость точки $M\overline{V_{\text{аб}}} = \overline{V_{\text{от}}} + \overline{V_{\text{пер}}} = (\overline{\omega_1}+\overline{\omega_2}) \times \overline{r}$ или

$$\overline{V_{\text{аб}}} = \overline{\omega} \times \overline{r}.$$

Поскольку точка M – любая точка тела, полученные равенства должны выполняться при любом $\overline{r}$, что возможно лишь тогда, когда $\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}$. При сложении вращений вокруг двух осей, пересекающихся в точке O, результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси Oc, проходящей через точку O. С течением времени ось Oc меняет свое положение, описывая коническую поверхность, вершина которой находится в точке O.

Если тело участвует в мгновенных вращениях вокруг нескольких осей, пересекающихся в точке O, то результирующим движением будет мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через точку O, с угловой скоростью

$$\overline{\omega} = \quad \overline{\omega}_K.$$



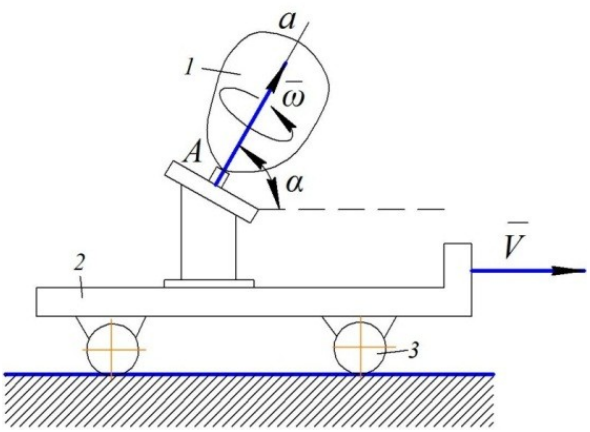
СЛОЖЕНИЕ ПАР СИЛ – система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.

Если рассмотреть две пары с моментами $\overline{m_1}$и $\overline{m_2}$, лежащие в плоскости *I*и *II*(см. рис.), где $\overline{m_1}$ момент пары $\overline{F_1}, \overline{F_1}'$, а $\overline{m_2}$ момент пары $\overline{F_2}, \overline{F_2}'$, то убеждаемся, что $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ и значит$\overline{AB} \times \overline{R} = \overline{AB} \times \overline{F_1} + \overline{AB} \times \overline{F_2}$. Отсюда следует, что $\overline{M} = \overline{m_1} + \overline{m_2}$.

Если на тело действует система *n* пар с моментами $\overline{m_1}, \overline{m_2}, \dots \overline{m_n}$, то применяя результат, полученный для двух пар, найдем, что

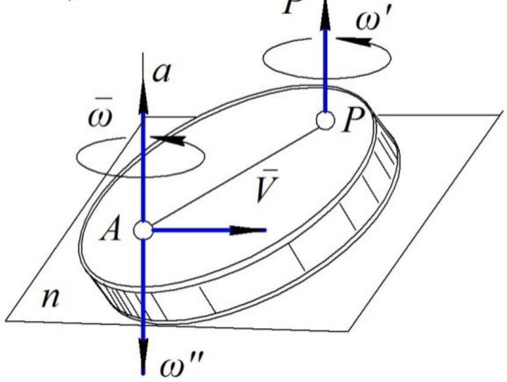
$$\overline{M} = \overline{m_1} + \overline{m_2} + \cdots \overline{m_n} = \quad \overline{m}_K \ .$$

СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. Рассмотрим движение агрегата, изображенного на рис.а. Здесь относительным движением тела 1 является вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси *Aa*, а переносным – поступательное движение платформы 2 со скоростью $\overline{V}$. В таком же движении участвует и колесо 3. В зависимости от значения угла α между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{V}$ (для колеса этот угол равен 90°).Здесь возможны три случая.



1. Скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращения ($\overline{V} \perp \overline{\omega}$) (см. рис.б).

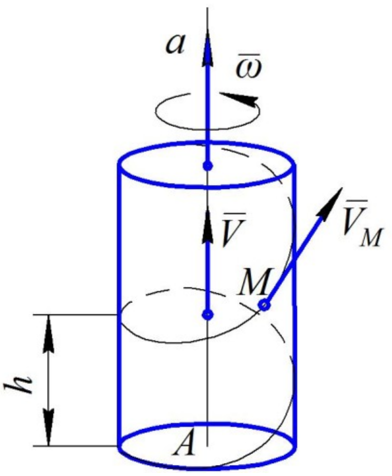
б)



Пусть сложное движение тела слагается из вращательного движения вокруг оси *Aa* с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и поступательного движения со скоростью $\overline{V}$, перпендикулярной $\overline{\omega}$. Очевидно, что это движение представляет собой (по отношению к плоскости *II,* перпендикулярной оси *Aa*) плоскопараллельное движение. Если *A* – полюс, то это движение слагается из поступательного со скоростью $\overline{V}_{\text{A}} = \overline{V}$ и из вращательного вокруг оси Aa, проходящей через полюс. Причем, вектор $\overline{V}$ можно заменить парой угловых скоростей $\overline{\omega}', \overline{\omega}''$, беря $\overline{\omega}' = \overline{\omega}$, а $\overline{\omega}'' = -\overline{\omega}$. Расстояние AP определяется из равенства $V = \omega' \cdot \mathrm{AP}$, откуда (учитывая, что $\overline{\omega}' = \omega$)

$$AP = \frac{V}{\omega}.$$

Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}''$ дают при сложении нуль, и мы получаем, что движение тела в этом случае можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг оси Pp с угловой скоростью $\overline{\omega}' = \omega$. Поворот тела вокруг осей Aa и Pp происходит с одной и той же угловой скоростью $\overline{\omega}$, т.е. вращательная часть движения не зависит от выбора полюса.

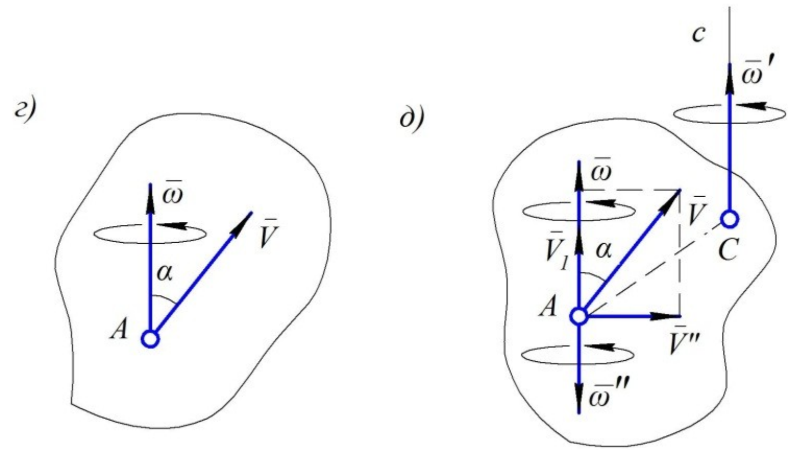


2 Винтовое движение ($\overline{\omega} \| \overline{V}$). Если сложное движение тела слагается из вращательного вокруг оси Aa с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и поступательного со скоростью $\overline{V}$, направленной параллельно оси Aa (см. рис. *в*), то такое движение тела называется *винтовым.* Если величины Vи ω постоянны, то шаг винта h будет постоянным. Точка M описывает *винтовую линию.* Скорость точки M, находящейся от оси винта на расстоянии r, слагается из поступательной скорости $\overline{V}$ и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном движении, которая численно равна ωr:

$$V_M = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2}.$$

Направлена скорость $\overline{V}_M$ по касательной к винтовой линии.

3 Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения (рис. *г*). Если при движении твердого тела величины $\overline{V}, \overline{\omega}$ и α будут все время меняться, то будет непрерывно меняться и положение оси Cc (см. рис. *д*). Т.е. движение свободного



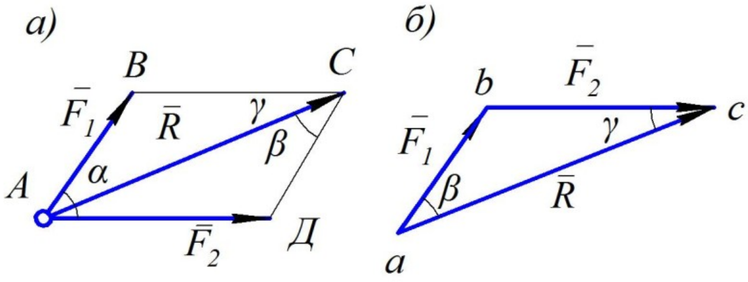
твердого тела можно рассматривать как слагающее из серии мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющихся винтовых осей/, где расстояние AC равно

$$AC = \frac{V''}{\omega} = \frac{V\sin\alpha}{\omega}.$$

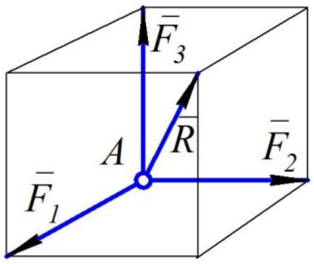
СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ. В случае сложного движения тела, когда его относительное движение является поступательным со скоростью $\overline{V}_1$ и переносное движение является также поступательным со скоростью $\overline{V}_2$, то все точки тела в относительном движении будут иметь скорость $\overline{V}_1$, а в переносном – скорость $\overline{V}_2$. Следовательно, по теореме сложения скоростей все точки тела в абсолютном движении имеют одну и ту же скорость $\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$, т.е. абсолютное движение будет тоже поступательным.

СЛОЖЕНИЕ СИЛ.

1. С л о ж е н и е д в у х с и л. Геометрическая сумма $\overline{R}$ двух сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ находится по правилу параллелограмма (см. рис. *а*) или построением силового треугольника (см. рис. б), изображающего одну из половин этого параллелограмма. Если угол между силами α, то модуль Rи углы β и γ определяются по формулам$R =$ лам$R =$ $\overline{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$,

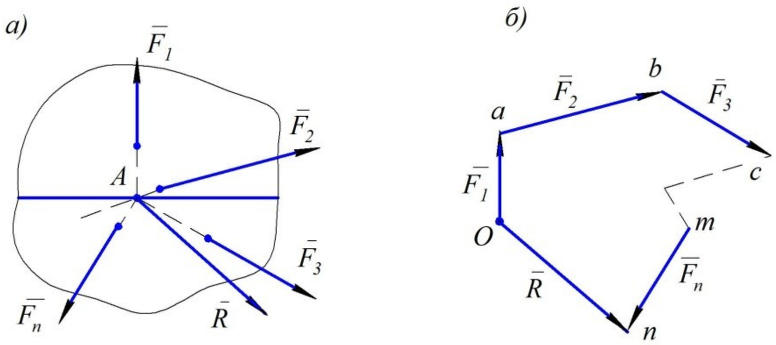


$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}.$$



2. С л о ж е н и е   т р е х   с и л ,   н е   л е ж а щ и х   в   о д н о й   п л о с к о с т и . Геометрическая сумма $\overline{R}$ трех сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$, не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (см. рис.).

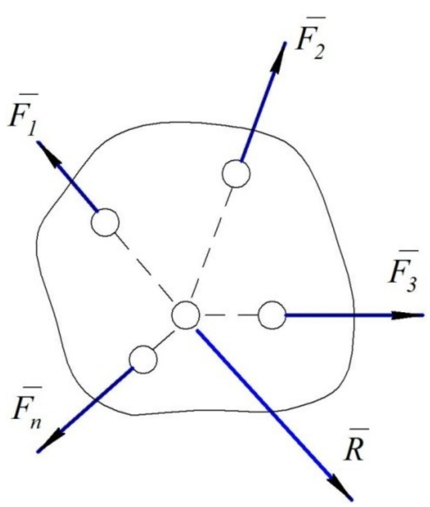
3. С л о ж е н и е   с и с т е м ы   с и л . Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы определяется или последовательным сложением по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $F_1, F_2, F_{3,\dots}F_n$(см. рис. *а*) откладываем от произвольной точки O



(см. рис. *б*) вектор $0a$, изображающий в выбранном масштабе силу F_1, от точки a – вектор ab, изображающий силу F_2, от точки b- вектор bc, изображающий силу F_3, и т.д. Соединяя начало первого вектора с концом последнего получаем вектор On=R, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots F_n \quad \text{или} \quad R = \quad F_K.$$

4. Р а в н о д е й с т в у ю щ а я   с х о д я щ и х с я   с и л . Рассмотрим систему сходящихся сил, т.е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (см. рис.). Так как сила, действующая на иабсолютно твердое тело, является вектором скользящим, то система сходящихся сил эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (в точке A).



Последовательно применяя правило параллелограмма сил, определяем, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия. Следовательно

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots F_n = \quad F_K.$$

5. А н а л и т и ч е с к и й с п о с о б с л о ж е н и я с и л. Так как проекция вектора суммы на какую – нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на эту же ось и $R = \quad F_K$, то

$$R_x = \quad F_{Kx}, \quad R_y = \quad F_{Ky}, \quad R_z = \quad F_{Kz},$$

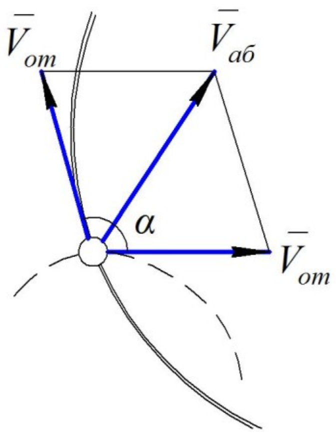
Зная $R_x,\ R_y,\ R_z$ находим:

$$R = \quad \overline{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Если силы заданы их модулями и углами с осями, то для применения аналитического метода сложения надо предварительно вычислить проекции этих сил на координатные оси.

СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧКИ – при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей, т.е. $\overline{V}_{\text{абс.}} = \overline{V}_{\text{от}} + \overline{V}_{\text{пер}}$. Построенная фигура (см. рис.) называется *параллелограммом скоростей.* Если угол между векторами $\overline{V}_{\text{от}}$ и $\overline{V}_{\text{пер}}$ равен *α,* то по модулю



$$V_{\text{аб}} = \quad \overline{V_{\text{от}}^2 + V_{\text{пер}}^2 + 2V_{\text{от}}V_{\text{пер}}\cos\alpha}.$$

СЛОЖЕНИЕ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ (смотрим разделы сложение движений).

СЛОЖЕНИЕ УГЛОВЫХ УСКОРЕНИЙ. Если вращение тела вокруг двух пересекающихся осей происходит с угловыми ускорениями: $\overline{\varepsilon_1}$ относительным и $\overline{\varepsilon_2}$ – переносным, то учитывая, что

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}_1}{dt} + \frac{d\overline{\omega}_2}{dt},$$

получим $$\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_2 + \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1 ,$$

где $\overline{\omega}_1$ – относительная, а $\overline{\omega}_2$ – переносная угловые скорости, $\overline{\varepsilon}$ - абсолютное угловое ускорение тела.

СЛОЖЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧКИ. При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного, или кориолисова:

$$\overline{a}_{\text{аб}} = \overline{a}_{\text{от}} + \overline{a}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{кор}}.$$

В случае поступательного переносного движения ($\omega = 0$ и, следовательно $\overline{a}_{\text{кор}} = 0$) имеем

$$\overline{a}_{\text{аб}} = \overline{a}_{\text{от}} + \overline{a}_{\text{пер}}.$$

СПУТНИКИ ЗЕМЛИ ИСКУСТВЕННЫЕ. Скорость $V_2 = \overline{2gR} \approx 11{,}2$ км/с называется *параболической* или *второй космической*. При начальной скорости $V_0 > 11{,}2$ км/с тело, брошенное с поверхности Земли под любым углом α к горизонтальной плоскости, будет двигаться по параболе или гиперболе

(при $\alpha = 90°$ - по прямой), неограниченно удаляясь от Земли. При скорости меньше второй космической, тело или упадет обратно на Землю, или станет искусственным спутником Земли. Чтобы тело, брошенное с земной поверхности превратилось в спутник Земли, необходимо выполнение двух условий:

$$\alpha = 0, \qquad \overline{2g_0R_0} > \overline{g_0R_0} ,$$

где g_0 = 9,82 м/с^2 - ускорение свободного падения; $R_0 = 6378$ км – радиус Земли.

СТАТИКА (от греч. statike–учение о весе, о равновесии) – это учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием приложенных сил. Статика является одним из разделов теоретической механики.

Т

ТЕЛО АБСОЛЮТНОЕ ТВЕРДОЕ – такое тело, расстояние между каждыми двумя точками которого всегда остается постоянным.

Абсолютно твердое тело – это понятие абстрактное, позволяющее разработать методы для изучения с пригодной для практики точностью равновесия и движение реальных объектов.

ТЕЛО НЕСВОБОДНОЕ – это такое тело, которому мешают свободно перемещаться в пространстве какие-нибудь другие скрепленные или соприкасающиеся с ним тела.

ТЕЛО ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ – это тело, масса *M* которого непрерывно меняется с течением времени вследствие присоединения к нему или отделения от него материальных частиц. Для тела переменной массы

$$M=F(t),$$

где *F(t)* – непрерывная функция времени.

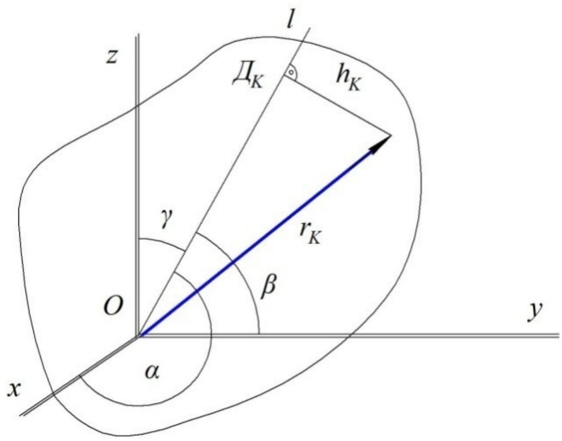
ТЕЛО СВОБОДНОЕ – тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве (например, воздушный шар в воздухе).

ТЕЛО ИНЕРЦИИ. Проведем ось *Ol*, образующую с осями *Oxyz*углы *α, β* и *γ* (см. рис.). По определению момент инерции $\mathcal{J}_l$равен

$$\mathcal{J}_l = \quad m_K h^2{}_K.$$

Сделав подстановку вместо h_K:

$$h_K^2 = r_K^2 - (\text{ОД}_\text{К})^2,$$



где $r_K^2 = x_K^2 + y_K^2 + z_K^2$,

получим

$$\mathcal{J}_l = \mathcal{J}_x cos^2\alpha + \mathcal{J}_y cos^2\beta + \mathcal{J}_z cos^2\gamma - 2\mathcal{J}_{xy}\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2\mathcal{J}_{yz}\cos\beta\cdot\cos\gamma - 2\mathcal{J}_{zx}\cos\gamma\cdot\cos\alpha.$$

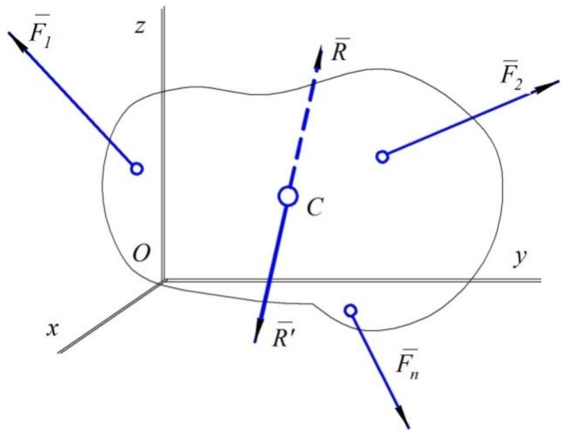
Если в качестве осей *Oxyz*выбрать главные оси инерции тела для точки *O*, то получим

$$\mathcal{J}_l = \mathcal{J}_x cos^2\alpha + \mathcal{J}_y cos^2\beta + \mathcal{J}_z cos^2\gamma.$$

Эта формула позволяет, зная входящие в их правые части моменты инерции относительно заданных осей *Oxyz,* определить момент инерции относительно любой оси, проходящей через точку *O*.

Шесть величин $\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y, \mathcal{J}_z, -\mathcal{J}_{xy}, -\mathcal{J}_{yz}, -\mathcal{J}_{zx}$определяют так называемый *тензор инерции* и являются его компонентами.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА – теорема о моменте равнодействующей: если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра *O* равен сумме моментов сил системы относительно того же центра. $\overline{m_0}\ \overline{R} = \overline{m}_0\,(\overline{F_K})$. Этой теоремой удобно пользоваться при вычислении моментов сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей справедлива и для моментов относительно любой оси:

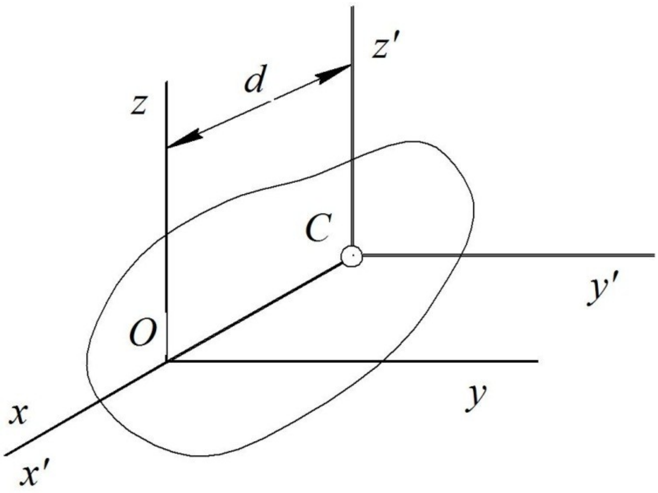


$$\overline{m_z}\ \overline{R} = \overline{m}_z\,(\overline{F_K}).$$

Теоремой особенно удобно пользоваться для нахождения моментов силы относительно координатных осей, разлагая силу на составляющие, параллельные осям или их пересекающие.

ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА: момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

$$\mathcal{J}_{oz} = \mathcal{J}_{cz'} + Md^2.$$



Из формулы видно, что $\mathcal{J}_{oz} > \mathcal{J}_{cz'}$.Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно той же оси, которая проходит через центр масс.

ТЕОРЕМА КАРНО – кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями.

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}M_1\ V_{1x} - u_x\ ^2 + \frac{1}{2}M_2\ V_{2x} - u_x\ ^2.$$

Если удар не является абсолютно неупругим $(k \neq 0)$, то кинетическая энергия, потерянная при ударе двух тел, определяется равенством

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\ \frac{1}{2}M_1\ V_{1x} - u_x\ ^2 + \frac{1}{2}M_2\ V_{2x} - u_x\ ^2\ ,$$

где V_{1x} и V_{2x} – скорости тел до удара;

u_x – скорости тел после удара.

ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА – теорема о сложении ускорений: при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова:

$$a_{аб} = a_{от} + a_{пер} + a_{кор} \ .$$

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА-ДИРИХЛЕ. Общий критерий, устанавливающий достаточное условие устойчивости равновесия сил консервативной системы дает теорема Лагранжа-Дирехле: если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым.

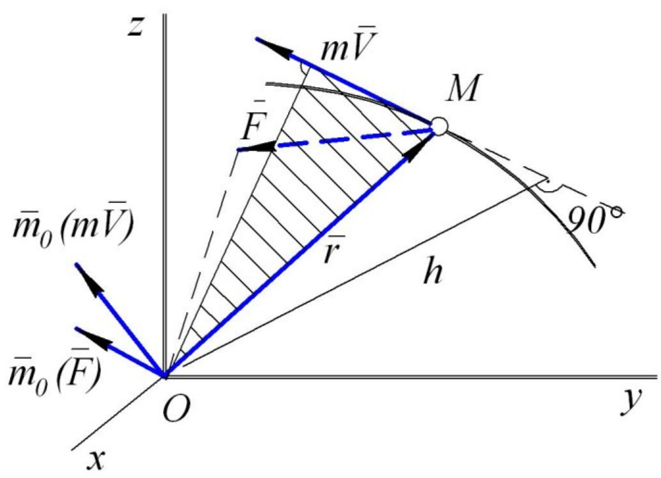
Достаточными, но необходимыми условиями будет:

$$(\frac{\partial П}{\partial q})_0 = 0, \qquad (\frac{\partial^2 П}{\partial q^2})_0 > 0 \ ,$$

где *q=0* – обобщенная координата;

П – потенциальная энергия.

ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ – это есть теорема об изменении момента количества движения точки: моментом количества движения точки относительно некоторого центра *O* называется векторная величина $\overline{m}_0 \ m\overline{V}$, определяемая равенством



$$\overline{m}_0 \ m\overline{V} \ = \overline{r} \times m\overline{V},$$

где $\overline{r}$ - радиус-вектор движущейся точки, проведенной из центра O.

При этом вектор $\overline{m}_0 \ m\overline{V}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $m\overline{V}$ и центр, а $m_0(mV) \ = mV \cdot h$ (см. рис.); для наглядности показан и вектор $m_0 \ F \ = r \times F$.

Сама теорема моментов относительно центра будет: производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку сил относительно того же центра:

$$\frac{d}{dt}\ r\ \times mV\ \ = r\ \times F \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\ m_0(m\overline{V})\ \ = m_0(F).$$

Если спроектировать обе части равенства на ось *Oz,*получим

$$\frac{d}{dt}\ m_z(m\overline{V})\ \ = m_z(F).$$

Это равенство выражает теорему моментов относительно оси.

Теорема моментов будет справедлива для каждой из точек системы

$$\frac{dK_0}{dt} = \quad m_0(F_K^e).$$

Производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части последнего равенства на неподвижные оси *Oxyz*, получим

$$\frac{dK_x}{dt} = \quad m_x(F_K^e), \qquad \frac{dK_y}{dt} = \quad m_y(F_K^e), \ \frac{dK_z}{dt} = \quad m_z(F_K^e).$$

Эти уравнения выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС применяется для изучения плоскопараллельного движения или движения свободного твердого тела и сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра:

$$\frac{dK_c}{dt} = \quad m_c(F_K^e),$$

если оси C, x', y', z' перемещается поступательно вместе с центром масс *С*этой системы.

Если для любой другой подвижной системы будет выполняться условие $r_c' \neq 0$, или не будут равны нулю кориолисовы силы инерции, то уравнение моментов не будет иметь вид последнего уравнения.

ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ ПРИ УДАРЕ – изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов:

$$K_1 - K_0 = \quad m_0(S_K^e)$$

В проекциях на любую ось (x) получим:

$$K_{1x} - K_{0x} = \quad m_x(S_K^e).$$

Внутренние ударные импульсы не могут изменить главный момент количеств движения системы.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ – производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{dK_0}{dt} = \quad m_0(F_K^e).$$

В проекциях на неподвижные оси *Oxyz*, получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \quad m_x(F_K^e)\,, \ \frac{dK_y}{dt} = \quad m_y(F_K^e)\,, \ \frac{dK_z}{dt} = \quad m_z(F_K^e).$$

Этой теоремой широко пользуются при изучении вращательного движения тела, а также в теории гироскопа и в теории удара.

Практическая ценность теоремы позволяет исключить внутренние силы при вращательном движении.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ УДАРЕ - изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов

$$K_1 - K_0 = \quad m_0(S_K^e).$$

В проекциях на любую (скажем на ось x) ось имеем:

$$K_{1x} - K_{0x} = \quad m_x(S_K^e).$$

Внутренние ударные импульсы не могут изменить главный момент количеств движения системы.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ – производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{dK_0}{dt} = \quad m_0(F_K^e).$$

Проектируя это уравнение на неподвижные оси *Oxyz*, получим

$$\frac{dK_x}{dt} = \quad m_x(F_K^e), \ \frac{dK_y}{dt} = \quad m_y(F_K^e), \ \frac{dK_z}{dt} = \quad m_z(F_K^e).$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ – изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил:

$$T_1 - T_0 = \quad A_k^e + \quad A_k^i.$$

Если механическая система неизменяема, то теорема принимает вид:

$$T_1 - T_0 = \quad A_k^e.$$

Если механическая система с идеальными связями, то

$$T_1 - T_0 = \quad A_k^a.$$

Изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями, при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении приложенных к системе внешних и внутренних активных сил.

Ценность теоремы – она позволяет при изменяющихся со временем идеальных связях исключить из уравнений движения все наперед неизвестные реакции связей.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ – изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \quad A_{(M_0 M_1)}.$$

В случае несвободного движения в правую часть этого уравнения войдет работа заданных (активных) сил F_k^a и работа реакции связи.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ. В дифференциальной форме будет:

$$\frac{dQ}{dt} = \quad F_K^e.$$

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

В проекциях на координатные оси будет:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \quad F_{Kx}^e, \qquad \frac{dQ_y}{dt} = \quad F_{Ky}^e, \qquad \frac{dQ_z}{dt} = \quad F_{Kz}^e.$$

В интегральной форме эта теорема будет:

$$Q_1 - Q_0 = \quad S_K^e.$$

Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

В проекциях на координатные оси будет:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \quad S_{Kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \quad S_{Ky}^e, \qquad Q_{1z} - Q_{0z} = \quad S_{Kz}^e,$$

Значимость теоремы состоит в том, что позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ УДАРЕ.

При ударе

$$Q_1 - Q_0 = \quad S_K^e,$$

т.е. изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.

В проекциях на любую координатную ось (например, на ось x) имеем

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \quad S_{Kx}^e.$$

Внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ (см. «ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ»)

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС – произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил:

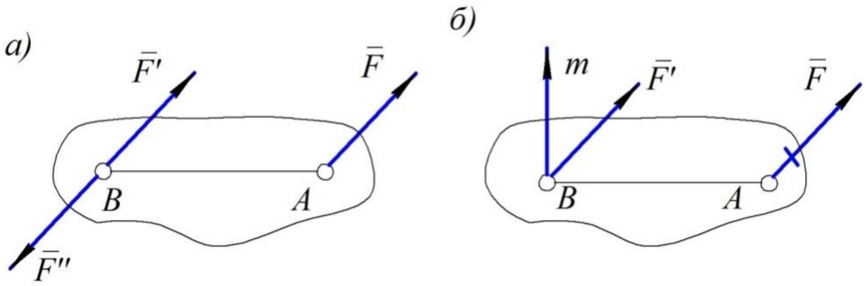
$$M\overline{a}_c = \quad F_K^e.$$

В проекциях на координатные оси будет

$$Mx_c = \quad F^e_{Kx}\,,\; My_c = \quad F^e_{Ky}\;,\; Mz_c = \quad F^e_{Kz}.$$

Практическая ценность теоремы позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

ТЕОРЕМА О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ СИЛЫ – силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

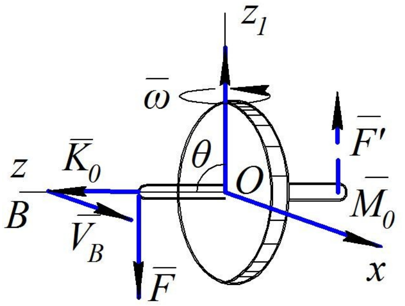


Пусть на твердое тело действует сила F, приложенная в точке A (см. рис. *а*). Действие этой силы не изменится, если в любой точке B тела приложить две уравновешенные силы F' и F'', такие, что $F' = F, F'' = -F$. Полученная система трех сил и представляет собой силу F', равную F, но приложенную в точке B, и пару $F,\overline{F}''$ с моментом (см. рис. *б*)

$$m = m_B(F).$$

ТЕОРЕМА О ТРЕХ СИЛАХ – если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

ТЕОРЕМА РЕЗАЛЯ – скорость конца вектора кинетического момента тела относительно центра O равняется по модулю и по направлению главному моменту внешних сил относительно того же центра



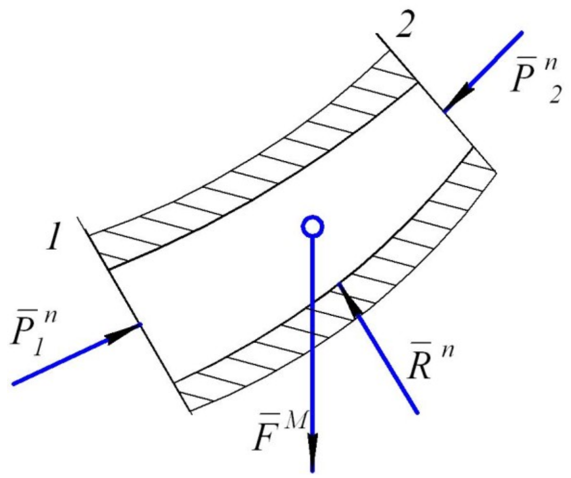
$$V_{\text{В}} = M_0 \quad \text{или} \quad V_{\text{В}} = \frac{dK_0}{dt},$$

так как по теореме моментов

$$\frac{dK_0}{dt} = M_0 \quad \text{или} \quad \frac{d(OB)}{dt} = M_0 \qquad \text{(см. рис.)}$$

Если на ось быстро вращающегося гироскопа подействует сила, то ось начнет отклоняться не в сторону действия силы, а по направлению вектора M_0 , т.е. перпендикулярно силе. То же самое наблюдается, если на ось гироскопа действует пара сил.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА. Если течение жидкости установившееся, то через любое поперечное сечение трубки с площадью S за 1 сек. будет протекать одно и то же количество массы жидкости.



$$G_c = \rho S V,$$

где V– средняя скорость движения жидкости в данном сечении;

ρ – плотность жидкости.

Разделим действующие внешние силы на главный вектор массовых сил (сил тяжести) $\overline{F}^{\text{м}}$, действующих на все частицы жидкости, и главные векторы поверхностных сил $\overline{R}^{\text{п}}$ – сил давления на жидкость со стороны стенок трубы (реакция трубы), $\overline{P_1}^{\text{п}}$и $\overline{P_2}^{\text{п}}$ – сил давления в сечениях 1 и 2 со стороны жидкости, находящейся вне объема 1-2 (см. рис.) численно

$$P_1^{\text{п}} = p_1 S_1, \quad P_2^{\text{п}} = p_2 S_2,$$

где p_1 и p_2- давления жидкости.

Тогда получим выражение

$$G_{\text{с}}\ \overline{V_2} - \overline{V_1} \ = \overline{F}^{\text{м}} + \overline{R}^{\text{п}} + \overline{P}_1^{\ \text{п}} + \overline{P}_2^{\ \text{п}},$$

которое называется теоремой Эйлера.

ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ОБЩИЕ устанавливают зависимости между соответствующими динамическими характеристиками движения материальных тел и позволяют избавиться от необходимости проделывать сложные операции интегрирования, что ведет к упрощению процесса решения задач.

К общим теоремам динамики относятся:

а) теорема об изменении количества движения точки и системы;

б) теорема об изменении момента количества движения точки и системы;

в) теорема об изменении кинетической энергии точки и механической системы;

г) теорема о движении центра масс системы;

д) теорема Эйлера (теорема об изменении количества движения для установившегося движения жидкости (или газа).

Кроме этого общие теоремы динамики имеют широкое приложение к динамике твердого тела.

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ УСТАНОВИВШЕЕСЯ. Установившемся называют течение, при котором в каждой точке области, занятой жидкостью, скорости $\overline{V}$ ее частиц, давление Pи плотность ρ не изменяются со временем. При таком течении траектории жидких частиц являются одновременно линиями тока, т.е. кривыми, в каждой точке которых касательные направлены так же, как скорости жидких частиц, находящихся в данный момент времени в этих точках.

ТОЧКА МАТЕРИАЛЬНАЯ – понятие абстрактное, которое вводят для того, чтобы отвлечься от учета формы тела (распределения масс).

Под материальной точкой понимают тело, размерами которого в данной конкретной задаче можно пренебречь, но имеющее определенную массу.

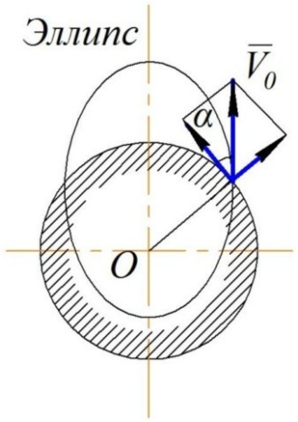
ТОЧКА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ. Тело, масса M которого непрерывно изменяется с течением времени вследствие присоединения к нему или отделения от него материальных частиц, называется *телом переменной массы*. Для тела переменной массы

$$M=F(t),$$

где $F(t)$ – непрерывная функция времени.

Когда такое тело движется поступательно (или когда вращательная часть не учитывается), это тело можно рассматривать как *точку переменной массы.*

ТРАЕКТОРИЯ ТОЧКИ – непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета. Траекторией точки может быть прямая линия или кривая.



ТРАЕКТОРИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ

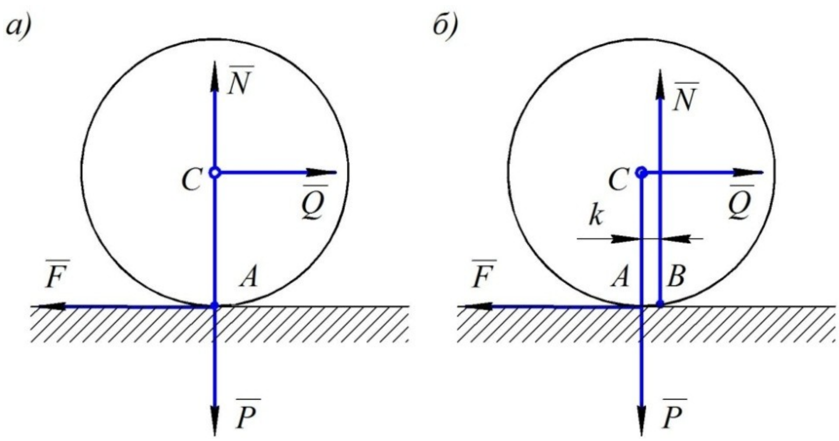
При $\alpha > 0$ и $V_0 < \sqrt{2gR}$ тело, брошенное с земной поверхности, описав дугу эллипса, упадет обратно на Землю. Такие эллиптические траектории описывают баллистические ракеты, в частности межконтинентальные.

R = 6378 км, g =9,82 м/с^2.

ТРЕНИЕ – сопротивление, возникающее при движении одного тела по поверхности другого. Трение появляется в местах контакта рассматриваемых тел.

По характеру взаимного перемещения тел различают трение скольжения, качения и верчения.

ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ – сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого. Пусть круглый цилиндрический каток радиуса Rи веса Pлежит на горизонтальной шероховатой плоскости. Если приложить к оси катка силу $\overline{Q}$, меньшую $\overline{F}_{пр}$ (см. рис. *а*), то в точке *А* возникнет сила



трения $\overline{F}$, численно равная $\overline{Q}$, которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Силы $\overline{Q}$ и $\overline{F}$ образуют пару, вызывающую качение цилиндра. Если считать реакцию $\overline{N}$, приложенную в точке *А* и уравновешенную силой тяжести $\overline{P}$, то качение должно начаться при сколь угодно малой $\overline{Q}$.

Но на самом деле все выглядит иначе. Учитывая деформацию тел, их касание происходит по некоторой площадке *AB* (см. рис. *б*). При действии силы $\overline{Q}$ интенсивность давления у края *A* убывает, а у края *B* возрастает. В результате реакция $\overline{N}$ оказывается смещенной в сторону действия силы $\overline{Q}$. Это смещение растет до некоторой предельной величины *k.* В предельном положении на каток будут действовать пара $Q_{\text{пр}}, F$ с моментом $Q_{\text{пр}} \cdot R$ и уравновешивающая ее пара N, P с моментом $N \cdot k$. Из равенства моментов находим $Q_{\text{пр}} \cdot R = N \cdot k$ или

$$Q_{\text{пр}} = \frac{k}{R}N.$$

При $Q < Q_{\text{пр}}$, каток находится в состоянии покоя; при $Q > Q_{\text{пр}}$начинается качение.

Отношение $\frac{k}{R}$ для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0. Этим объясняется то, что в технике, когда возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т.п.).

ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЕ – сопротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого.

Возникновение трения обусловлено шероховатостью поверхностей и наличие сил сцепления у прижатых друг к другу тел.

В инженерных расчетах пользуются закономерностями, которые установлены опытным путем: 1) при стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого *предельной силой трения*, и направлена в противоположную сторону той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть;

2) предельная сила трения $F_{пр}$ численно равна

$$F_{\text{пр}} = f_0 N,$$

где f_0 – статический коэффициент трения;

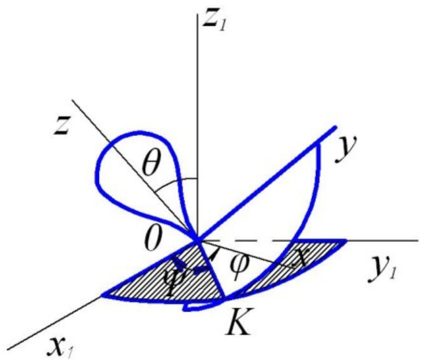
3) значение предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна

$$F = fN,$$

где f – динамический коэффициент трения.

УГЛЫ ЭЙЛЕРА. Параметрами, определяющими положение тела, имеющего неподвижную точку, являются углы Эйлера (см. рис.):



$\varphi = \angle KOx$ – угол собственного вращения;

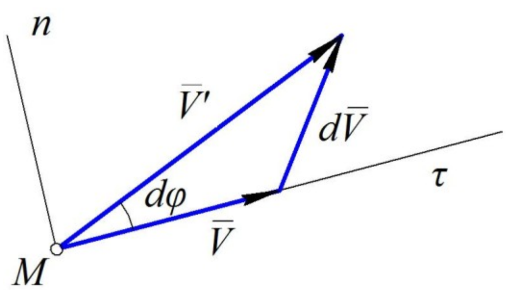
$\Psi = \angle x_1OK$ –угол прецессии;

$\theta == \angle z_1Oz$– угол нутации.

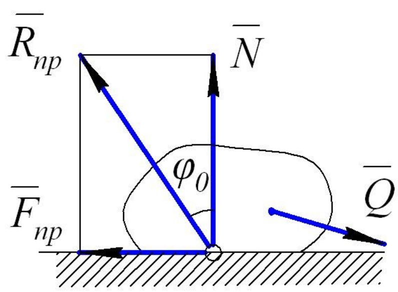
Наименование углов взяты из небесной механики. Положительные направления отсчета углов показаны стрелками на рисунке.

Чтобы знать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям Ox_1,y_1,z_1 в любой момент времени, т.е. знать зависимости:

$$\varphi = f_1\ t\ , \quad \Psi = f_2\ t\ , \qquad \theta = f_3\ t\ .$$



УГОЛ СМЕЖНОСТИ – угол между касательными к кривой в двух ее точках называется *углом смежности*. Угол $d\varphi$ – элементарный угол смежности (см. рис.)



УГОЛ ТРЕНИЯ – наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью поверхности.

Из рисунка видно, что

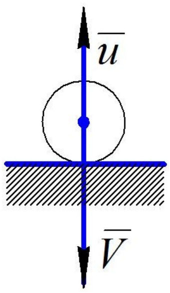
$$tg\,\varphi_0 = \frac{F_{\text{пр}}}{N},$$

где $F_{пр} = f_0 N$, то получаем:

$tg\,\varphi_0 = f_0$,где f_0 – коэффициент трения.

При равновесии полная реакция $\overline{R}$ в зависимости от сдвигающих сил может проходить где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол φ_0.

УДАР – явление, при котором скорости точек тела за очень малый (порядка 0,001÷0,1 с) промежуток времени τ изменяются на конечную величину.



УДАР АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ. Коэффициент восстановления при ударе равен

$$k = \frac{u}{V},$$

где V – скорость в момент начала удара;

u – скорость в конце удара.

Если $k = 0$, т.е. когда удар заканчивается в первой стадии и вся кинетическая энергия тела теряется на его деформацию и на-гревание, то получается *абсолютно неупругий удар*. При таком ударе двух тел они начинают двигаться с одинаковыми скоростями:

$$u_1 = u_2 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{M_1 + M_2},$$

где V_1 и V_2 – скорости тел до удара;

M_1 и M_2 – массы тел.

УДАР АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ. В этом случае $k = 1$ и получаем

$$u_1 = V_1 - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2),$$

$$u_2 = V_2 + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2).$$

Действующий на тела ударный импульс равен

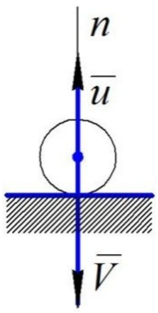
$$S_2 = -S_1 = \frac{2M_1M_2}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2),$$

где V_1 и V_2 – скорости тел до удара;

u_1 и u_2 – скорости тел после удара;

M_1 и M_2 – массы тел.

При абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом.



УДАР ПРЯМОЙ. Рассмотрим шар, падающий вертикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту (см. рис.). Такой случай можно рассматривать как прямой удар. В конце удара кинетическая энергия шара будет

$$T = \frac{mu^2}{2},$$

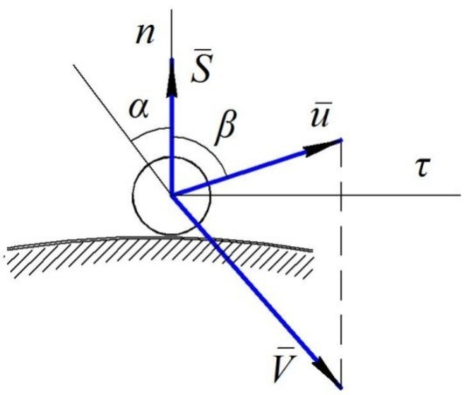
Полностью кинетическая энергия не восстанавливается, так как часть ее уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость *u* будет меньше *V*.

Величина *k*(коэффициент восстановления) при прямом ударе равна

$$k = \frac{u}{V},$$

где *k* можно найти экспериментально по высоте падения *H*и высоте отскока *h*

$$k = \frac{u}{V} = \frac{\bar{h}}{H}.$$



УДАР КОСОЙ. В этом случае скорость $\overline{V}$ центра масс тела в начале удара образует с нормалью к плите угол α, а скорость $\overline{u}$ в конце удара – угол β (см. рис.).

Коэффициент восстановления в данном случае равен

$$k = \frac{u_n}{V_n},$$

но с учетом знаков проекций имеем

$u_n = -kV_n.$

В результате имеем:

$$u_\tau = V_\tau,\ \ u_n = -kV_n,\ \ S = M\ V_n\ \ 1 + k\ \ ,$$

где S – ударный импульс.

Из этих уравнений определяем

$$V_\tau = \ V_n\ tg\alpha\ \text{ и }\ u_\tau = \ u_n\ tg\beta,\ \text{ и тогда}$$

$$u_n\ tg\beta = \ V_n\ tg\alpha,\ \text{ откуда}$$

$$k = \frac{u_n}{V_n} = \frac{tg\alpha}{tg\beta};$$

Так как *k<1,* то $\alpha < \beta$, т.е. угол падения всегда меньше угла отражения.

УДАР ЦЕНТРАЛЬНЫЙ. Рассмотрим тело (шар) массой *M*, ударяющееся о неподвижную плиту. Действующей на тело ударной силой будет при этом реакция плиты; импульс этой силы за время удара будет $\overline{S}$. Если нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела (для шара это будет всегда), то такой удар называется центральным.

УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ОБЩЕЕ. Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики, а принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Если применять два принципа одновременно, то можно получить общий метод решения задач динамики. Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи.

Если ко всем точкам системы, кроме действующих на них активных сил $\overline{F}_k^a$и реакций связей $\overline{N_k}$, прибавить соответствующие силы инерции $\overline{F}_k^{\text{и}} =$

$-m_k \overline{a}_k$, то согласно принципу Даламбера полученная система сил будет находиться в равновесии. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим

$$\delta A_k^a + \quad \delta A_k^{и} + \quad \delta A_k^r = 0,$$

где для идеальных связей $\quad \delta A_k^r = 0.$

Окончательно имеем:

$$\delta A_k^a + \quad \delta A_k^{и} = 0.$$

Из полученного результата вытекает принцип Даламбера-Лагранжа: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

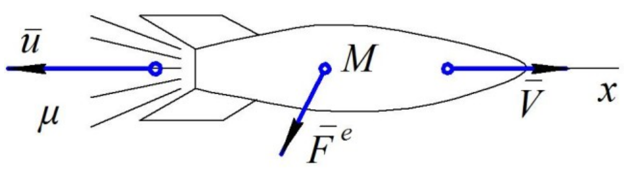
Это уравнение называют общим уравнением динамики. В аналитической форме последнее уравнение имеет вид

$$F_{kx}^a + F_{kx}^u \ \delta x_k + \ F_{ky}^a + F_{ky}^u \ \delta y_k + \ F_{kz}^a + F_{kz}^u \ \delta z_k \ = 0.$$

Эти уравнения позволяют составить дифференциальные уравнения движения механической системы.

УРАВНЕНИЕМЕЩЕРСКОГО. Рассмотрим движение тела переменной массы (движение ракеты). Применяя теорему об изменении количества движения в форме

$$\frac{dQ}{dt} = \quad \overline{F}_k^e,$$



получим

$$d\overline{Q} = \overline{F}^e dt,$$

где $\overline{F}^{e}$ – геометрическая сумма приложенных к ракете внешних сил. Если μ – масса частицы, отделяющаяся от ракеты, то

$$\mu = \ dM \ = -dM,$$

где M – масса ракеты – величина убывающая.

За время dt количество движения частицы изменится на величину

$$\overline{u}\mu = -\overline{u}dM,$$

а для всей системы имеем

$$dQ = MdV - udM.$$

Тогда окончательно имеем

$$M\frac{dV}{dt} = \overline{F}^{e} + u\frac{dM}{dt}$$

Это и есть *уравнение Мещерского* в дифференциальной форме. Обозначив

$$\Phi = u\frac{dM}{dt},$$

получим $M\frac{dV}{dt} = \overline{F}^{e} + \Phi$,

где Φ – реактивная сила.

Таким образом, реактивный эффект сводится к тому, что на ракету при ее движении дополнительно действует реактивная сила Φ.

УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ УДАРА ОСНОВНОЕ – изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов

$$m\ u - V\ = \quad S_k,$$

где V – скорость точки в начале удара;

u – скорость точки в конце удара.

Это есть основное уравнение теории удара, которое играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики $ma = F$ при изучении движений под действием неударных сил.

Из этого уравнения вытекает следующее:

1) действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь;

2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

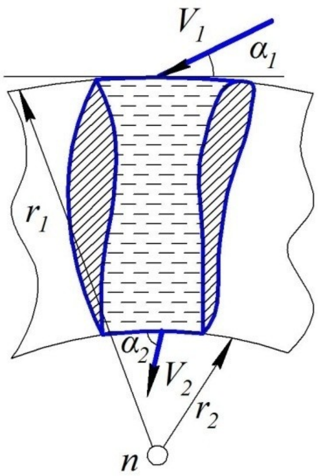
3) изменение скоростей точек за время удара определяются уравнением теории удара.

УРАВНЕНИЕ ЧАСТОТ –

$$C_{11} - a_{11}k^2 \quad C_{22} - a_{22}k^2 \; -(C_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0,$$

где a_{11}, a_{12},a_{22} – инерционные коэффициенты (величины постоянные); C_{11}, C_{12}, C_{22} – квазиупругие коэффициенты (величины постоянные).

УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА ТУРБИННОЕ



Это уравнение, устанавливающее зависимость между основными динамическими характеристиками турбины

$$N = G_c(u_1 V_1 \cos\alpha_1 - u_2 V_2 \cos\alpha_2),$$

где $u_1 = r_1\omega,\ u_2 = r_2\omega$ - окружные скорости на внешнем и внутреннем ободе колеса турбины соответственно;

G_c - полный расход воды;

N – мощность.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ

Для системы, состоящей из *n*материальных точек, выделим какую-нибудь точку массой $m_к$. Если эта точка имеет ускорение $\overline{a}_{к}$, то

$$m_k\overline{a}_k = \overline{F}_1^e + \overline{F}_k^i.$$

Для всей системы будет

$$m_1\overline{a}_1 = \overline{F_1^e} + \overline{F_1^i},$$

$$m_2\overline{a}_2 = \overline{F_2^e} + \overline{F_2^i},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$m_n\overline{a}_n = \overline{F_n^e} + \overline{F_n^i}.$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в векторной форме (где $\overline{a}_k = \overline{V}_k = \overline{r}_k$).

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ В ОБОЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial q_1}) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \frac{d}{dt}\ \frac{\partial T}{\partial q_2}\ \ - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}\ \frac{\partial T}{\partial q_S}\ \ - \frac{\partial T}{\partial q_S} = Q_S, \end{array}\right\}$$

\- дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа.

где T – кинетическая энергия системы;

q_1, q_2,….q_s – обобщенные координаты;

q_1,q_2, … q_s – обобщенные скорости;

Q_1, Q_2,…Qs – обобщенные силы.

Эти уравнения Лагранжа могут применяться для изучения движения любых механических систем с голономными связями.

В случаях потенциальных сил

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial q_2}\ - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial q_S}\ - \frac{\partial L}{\partial q_S} = 0, \end{aligned}\right\}$$

где $L = T - П$ – функция Лагранжа или кинетический потенциал;

$П$ - потенциальная энергия.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ – в прямоугольных декартовых координатах имеют вид

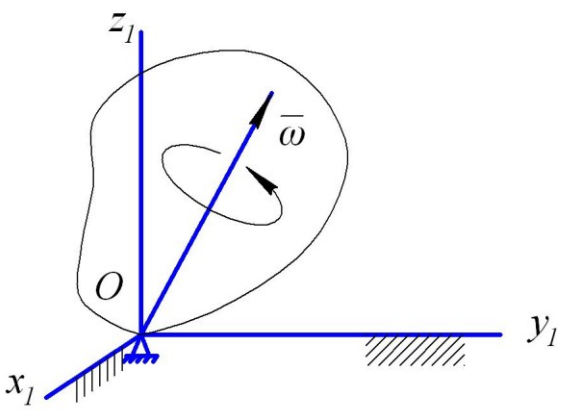
$$mx = \quad F_{kx}, \quad my = \quad F_{ky}, \quad mz = \quad F_{kz}.$$

В проекциях на оси естественного трехгранника имеем дифференциальные уравнения движения в виде

$$m\frac{dV}{dt} = \quad F_{k\tau}, m\frac{V^2}{\rho} = \quad F_{kn}, \ 0 = \quad F_{kb}.$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА (смотрим раздел «Уравнения движения системы дифференциальные в обобщенных координатах»).

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДИНАМИЧЕСКИЕ – это дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки в проекциях на главные оси инерции тела для этой точки



$$\mathcal{J}_x\frac{d\omega_x}{dt} + \ \mathcal{J}_z - \mathcal{J}_y\ \ \omega_y\omega_z = M_x,$$

$$\mathcal{J}_y\frac{d\omega_y}{dt} + \ \mathcal{J}_x - \mathcal{J}_y\ \ \omega_z\omega_x = M_y,$$

$$\mathcal{J}_z\frac{d\omega_z}{dt} + \ \mathcal{J}_y - \mathcal{J}_x\ \ \omega_x\omega_y = M_z.$$

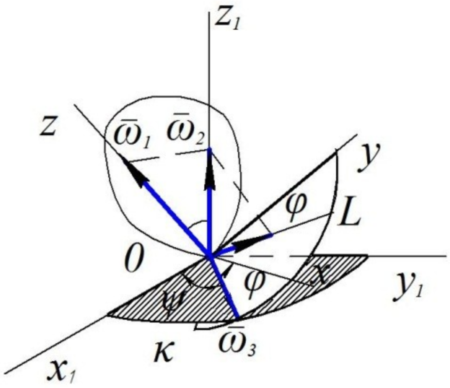
Если положение тела определяется углами Эйлера $\varphi, \psi, \theta,$ то основная задача динамики будет состоять в том, чтобы, зная M_x, M_y, M_z, найти закон движения тела, т.е найти φ, ψ, θ как функции времени. Для решения этой задачи надо к уравнениям Эйлера динамическим присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \psi \sin\theta \sin\varphi + \theta \cos\varphi, \\ \omega_y &= \psi \sin\theta \cos\varphi - \theta \sin\varphi, \\ \omega_z &= \varphi + \psi \cos\theta. \end{aligned}\right\}$$

Полученная система шести нелинейных дифференциальных уравнений 1 – го порядка представляет сложную математическую задачу, решение (интегрирование) которой осуществляется с помощью приближенных математических операций.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА КИНЕМАТИЧЕСКИЕ.

Они определяют проекции вектора угловой скорости тела $\overline{\omega}$ на подвижные оси *Oxyz*через углы Эйлера



$$\omega_x = \psi \sin\theta \sin\varphi + \theta \cos\varphi,$$

$$\omega_y = \psi \sin\theta \cos\varphi - \theta \sin\varphi,$$

$$\omega_z = \varphi + \psi \cos\theta.$$

По этим проекциям можно определить вектор $\overline{\omega}$. Аналогично можно найти проекции вектора $\overline{\omega}$ на неподвижные оси Ox_1, y_1, z_1:

$$\omega_{x_1} = \varphi \sin\theta \sin\psi + \theta \cos\varphi$$

$$\omega_{y_1} = -\varphi \sin\theta \cos\psi + \theta \sin\psi$$

$$\omega_{z_1} = \varphi \cos\theta + \psi.$$

Используя эти формулы можно определить проекции на неподвижные оси Ox_1, y_1, z_1вектора $\bar{\varepsilon}$,

где $\varepsilon_{x_1} = \omega_{x_1}$, $\varepsilon_{y_1} = \omega_{y_1}$, $\varepsilon_{z_1} = \omega_{z_1}$.

УСИЛИЯ ВНУТРЕНИЕ. Внутренними усилиями в каком-нибудь сечении тела или конструкции (балки, арки) называют силы, с которыми части тела, разделенные этим сечением, действуют друг на друга. Метод определения внутренних усилий аналогичен методу, применяемому при изучении равновесия системы тел. Сначала рассматривают равновесие всего тела (конструкции) в целом и определяют реакции внешних связей. Затем сечение, в котором требуется найти внутренние усилия, разделяют тело на две части и рассматривают равновесие одной из них. Если система действующих на тело внешних на тело внешних сил плоская, то действие отброшенной части заменится в общем случае двумя неизвестными составляющими $\bar{x}, \bar{y}$ и парой сил с неизвестным моментом m.

Внутренние усилия в теле различают на две категории: усилия, не связанные с внешними воздействиями на тело (молекулярные силы, температурные напряжения и др.) и усилия, вызванные внешним воздействием на тело, т.е. действием на тело внешних сил.

При действии внешних сил рассматривают массовые (или объемные) и поверхностные силы.

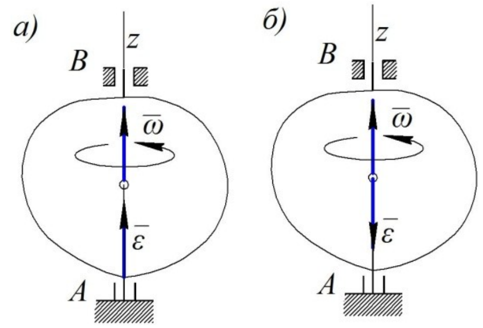
УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ. Под действием силы $\bar{P}$ любое тело при свободном падении на землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение $\bar{g}$, называемое *ускорением свободного падения*, или *ускорением силы тяжести*.

Значение g в разных местах земной поверхности различно; оно зависит от географической широты места и высоты его над уровнем моря. На широте Москвы (на уровне моря) $g = 9{,}8156$ м/с^2.

УСКОРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (см. предыдущий раздел).

УСКОРЕНИЕ ТЕЛА УГЛОВОЕ. Векторная величина

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt},$$



характеризующая изменение с течением времени угловой скорости и по модулю, и по направлению, называется *угловым ускорением тела* в данный момент времени или *мгновенным угловым ускорением*.

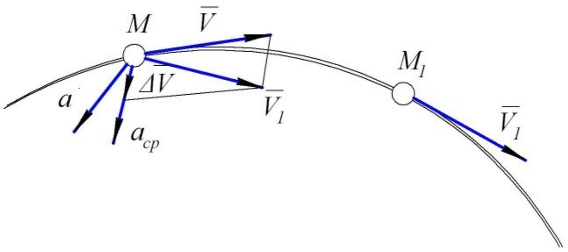
Числовое значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \omega = \varphi.$$

Размерность углового ускорения: $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ или $\frac{1}{\text{с}^2}$ или с^{-2}.

Угловое ускорение тела ε совпадает с направлением ω , когда тело вращается ускоренно (рис.*а*), и противоположно ω при замедлении вращении (рис. б).

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ. Отношение приращения вектора скорости $\Delta\bar{V}$ к промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:



$$\bar{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу, получим $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Размерность ускорения $\frac{L}{T^2}$. В системе СИ единицей измерения является $\text{м}/\text{с}^2$.

В общем случае вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

При координатном способе задания движения вектор ускорения точки $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}$, откуда:

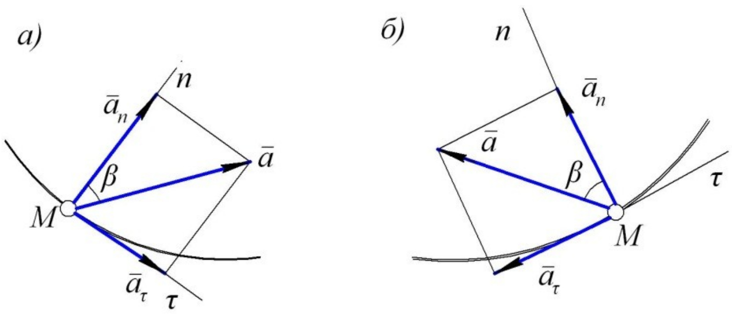
$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

или $a_x = V_x = x,\ a_y = V_y = y,\ a_z = V_z = z.$

Модуль и направление ускорения находятся по формулам

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

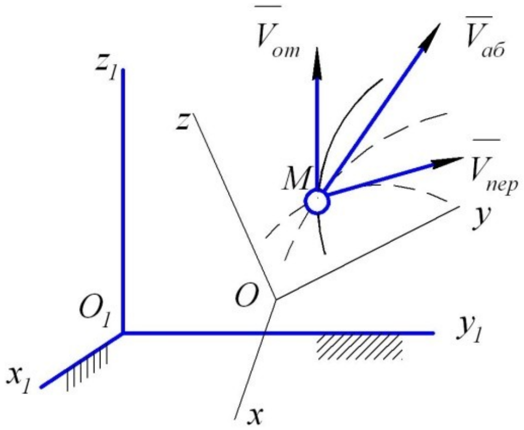


Известно, что ускорение $\bar{a}$ точки лежит в соприкасающейся плоскости $M\tau n$ (см. рис.). Вектор ускорения точки $\bar{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\overline{a_\tau}$ и $\overline{a_n}$. Так как эти составляющие взаимно перпендикулярны, то модуль вектора $\bar{a}$ и угол β его отклонения от нормали *Mn*определяется формулами:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\frac{dV}{dt})^2 + (\frac{V^2}{\rho})^2},$$

$$tg\beta = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

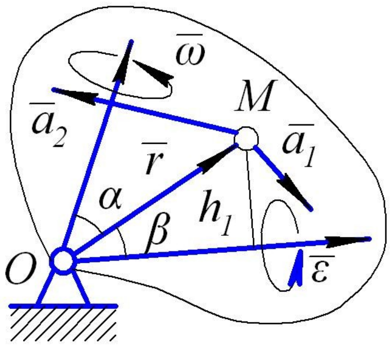
Если движение точки задано естественным способом, то, зная траекторию (и радиус кривизны ρ в любой точке) и закон движения, т.е. зависимость *S=f(t)*, можно определить модуль и направление векторов скорости и ускорения в любой момент времени.



УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ АБСОЛЮТНОЕ

Если движение точки происходит одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых неподвижная, а другая определенным образом движется по отношению к первой, то движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета O_1,x_1,y_1,z_1 называется *абсолютным* или *сложным*, а ускорение точки M по отношению к неподвижной системе отсчета *абсолютным ускорением* (обозначается $\overline{a}_{аб}$).

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ. При движении тела вокруг неподвижной точки Oускорение точки M определяется равенством:



$$\overline{a} = \overline{V} = \overline{a}_1 + \overline{a_2}, \quad \text{или}$$

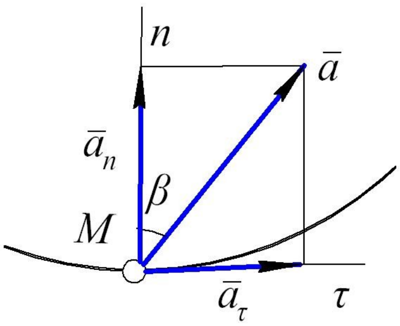
$$\overline{a} = \overline{\omega} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{r} .$$

Так как $\overline{\omega} = \overline{\varepsilon}$, а$\overline{r} = \overline{V}$, то имеем $\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V}$.

Ускорение $\overline{a}_1 = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ называется *вращательным.* Ускорение $\overline{a}_2 = \overline{\varepsilon} \times \overline{V}$ называется *осестремительным*.

Вектор $\overline{a}_1$ (см. рис.) направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку M и вектор $\overline{\varepsilon}$ и по модулю равен

$$a_1 = \varepsilon r \sin\beta = \varepsilon h_1,$$



где h_1 – расстояние от точки Mдо вектора $\overline{\varepsilon}$.

Вектор $\overline{a}_1 = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ в общем случае не является вектором касательного ускорения точки M.Место для формулы.

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ КАСАТЕЛЬНОЕ

Если движение точкизадано естественным способом, то

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

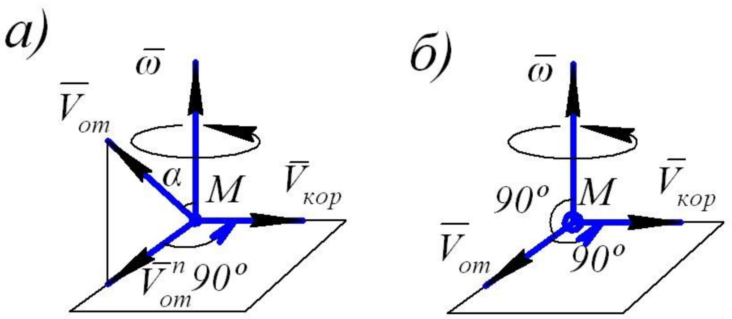
проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от расстояния S (криволинейной координаты) по времени.

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ КОРИОЛИСОВО. Гюстав Кориолис (1792-1843) – французский ученый, известный своими трудами по теоретической и прикладной механике. Кориолисово ускорение называют еще поворотным, так как оно появляется при наличии у подвижных осей вращения (поворота) и равно

$$a_{\text{кор}} = 2(\varpi \times V_{\text{от}}).$$

Модуль кориолисова ускорения равен

$$a_{\text{кор}} = 2\ \omega\ \cdot\ V_{\text{от}}\ \sin\alpha.$$



Направлен вектор $a_{\text{кор}}$ так же, как вектор $\varpi \times V_{\text{от}}$, т.е. перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы ϖ и $V_{\text{от}}$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение ϖ с $V_{\text{от}}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. *а*).

Из рис. *а* видно также, что направление вектора $a_{\text{кор}}$ можно определить, спроектировав вектор $V_{\text{от}}$ на плоскость *П,* перпендикулярную ϖ, и повернув эту проекцию $V_{\text{от}}^{\text{п}}$ на 90° в сторону переносного вращения.

Если относительная траектория плоская кривая и перемещается все время в своей плоскости, то угол $\alpha = 90°$ (рис.*б*) и в этом случае по модулю

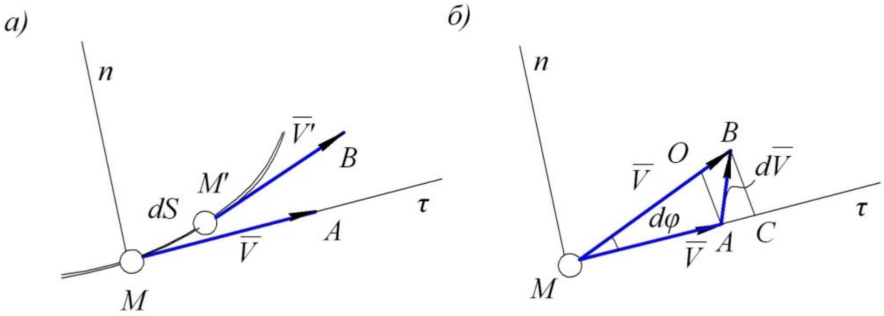
$$a_{\text{кор}} = 2\ \omega\ \cdot\ V_{\text{от}}\ .$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ НОРМАЛЬНОЕ

Если движение точки задано естественным способом, то нормальное ускорение равно

$$a_n = V\frac{d\varphi}{dS}\frac{dS}{dt} = V \cdot \frac{1}{\rho} \cdot V = \frac{V^2}{\rho}, \text{ т.е.}$$

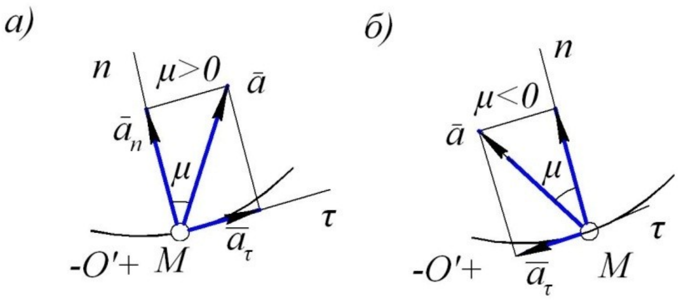
$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$



При движении точки Mв одной плоскости

$$a_n = V\omega,$$

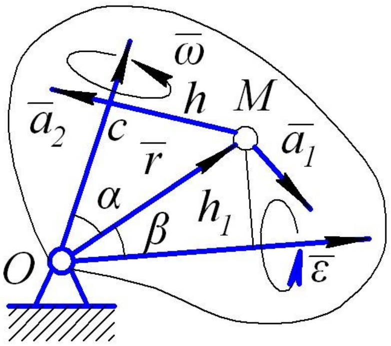
где$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$



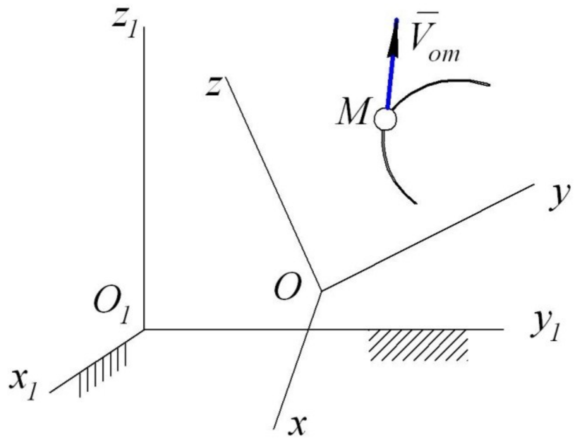
Составляющая $\overline{a_n}$ ускорения точки всегда направлена в сторону вогнутости кривой, т.е. всегда $a_n > 0$. (см. рис.).

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ОСЕСТРЕМИТЕЛЬНОЕ. При движении тела вокруг неподвижной точки *O* в каждый момент времени ускорение точки *M* равно

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V},$$



где $\overline{a}_2 = \overline{\omega} \times \overline{V}$ - осестремительное ускорение точки *M* . Вектор $\overline{a_2}$ одновременно перпендикулярен вектору $\overline{V}$ и $\overline{\omega}$ и направлен вдоль прямой *MC* (см. рис.). По модулю $a_2 = \omega V \sin 90° = \omega^2 h$, так как $V = \omega h$, и вектор $\overline{a}_2$ не будет являться вектором нормального ускорения точки *M*.

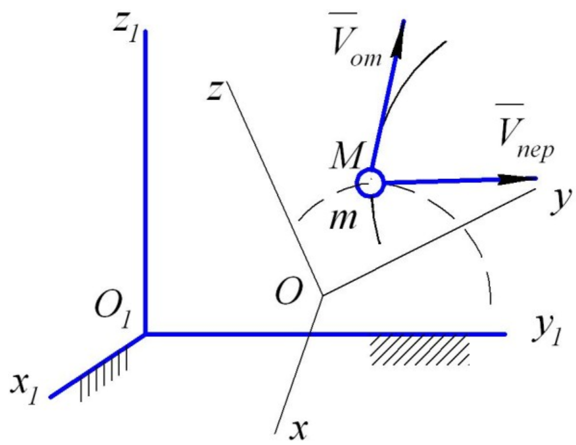


УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ. Ускорение точки *M* по отношению к осям *Oxyz* называется относительным ускорением (и обозначается $a_{\text{от}}$). Относительное ускорение, поскольку при его нахождении движение подвижных осей во внимания не принимается, вычисляется обычными методами кинематики точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕНОСНОЕ. Ускорение той неизменно связанной с подвижными осями *Oxyz*точки *m*с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка *M*, называется *переносным ускорением* точки *M* (и обозначается $a_{пер}$)

$$\overline{a_{\text{пер}}} = \overline{a_m}.$$



Переносным ускорением точки *M* в данный момент времени будет ускорение той точки *m*тела, с которой в этот момент совпадает точка *M*.

Переносное ускорение вычисляется как ускорение точки, неизменно связанной с подвижными осями, т.е. как ускорение точки некоторого твердого тела.

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПОВОРОТНОЕ. Поворотное ускорение (или кориолисово) появляется при наличии у подвижных осей вращения поворота. Для него справедливы все выводы кориолисова ускорения (см. раздел «ускорение точки кориолисово»).

УСЛОВИЯ КРАЕВЫЕ. Решение основной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных дифференциальных уравнений, зная силы, найти закон движения точки ,т.е. $x=f(t)$. Для этого надо проинтегрировать соответствующее дифференциальное уравнение. В полученное решение войдут две постоянные интегрирования C_1иC_2, если дифференциальное уравнение было 2-го порядка.

Тогда общим решением будет:

$$x=f(t, C_1, C_2).$$

Для того, чтобы решить конкретную задачу до конца, надо определить значения постоянных интегрирования C_1 иC_2 по начальным условиям задачи.

Но в механике встречаются задачи, в которых для определения постоянных интегрирования вместо начальных условия задаются *краевые условия*, например, могут быть заданы условия на «краях» интервала времени t_0, t_1 . В отличие от задач с начальными условиями, краевые задачи могут иметь неоднозначные решения или вовсе не иметь решения.

УСЛОВИЯ НАЧАЛЬНЫЕ.

При прямолинейном движении точки, когда ось Ox направлена вдоль траектории, дифференциальным уравнением движения будет

$$mx = \quad F_{kx}.$$

Чтобы найти закон движения точки, зная силы, надо дважды проинтегрировать это дифференциальное уравнение. В полученное решение войдут две постоянные интегрирования C_1 и C_2 . Если дифференциальное уравнение 2-го порядка имело вид $mx = F(t, x, x)$, то общим решением уравнения будет

$$x = f \quad t, C_1, C_2 \quad .$$

Чтобы довести до конца решение каждой конкретной задачи, надо определить значения постоянных C_1, C_2. Для этого надо знать *начальные условия*, т.е. положение и скорость точки в начальный момент времени.

В случае прямолинейного движения начальные условия задаются в виде

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0, \;\; V_x = V_0,$$

а значит найти *частное решение*, дающее закон движения точки в виде

$$x = f\ \ t, x_0, V_0\ \ .$$

В случае криволинейного движения точки основная задача динамики решается с помощью дифференциальных уравнений движения. В прямоугольных декартовых координатах, начальными условиями, определяющие положение и скорость точки в начальный момент времени *t = 0*, задаются в виде:

$$\text{при}\ \ t = 0 \quad x = x_0,\ y = y_{0\,,}\ \ z = z_0;$$

$$V_x = V_{x0,}\ \ V_y = V_{y0,}\ \ V_z = V_{z0,}\ \ .$$

Полученные решения дифференциальных уравнений будут содержать шесть постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, значения которых должны определяться по начальным условиям.

УСЛОВИЯ РАВЕНТСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ СТАТИЧЕСКИМ

Если рассмотреть равномерное вращение твердого тела с угловой скоростью *ω* вокруг вертикальной оси *z*, то можно получить уравнения (см. рис.), которые определяют *динамические реакции,* действующие на ось вращения

$$\left.\begin{aligned} x_A + x_B &= -R_x^e - m x_c \omega^2; \\ y_A + y_B &= -R_y^e - m y_c \omega^2; \\ z_A &= -R_z^e; \\ x_B b &= -M_y^e - \mathcal{J}_{xz}\omega^2; \\ y_B b &= -M_x^e - \mathcal{J}_{yz}\omega^2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

где $R_x^e,\ R_y^e, R_z^e,\ (R_x = \quad F_{kx}^e$ и т.д.) – проекции главного вектора на оси *A,xyz;*

$M_y^e,\ M_x^e, M_z^e$ – главные моменты относительно осей *A,xyz.*

$M_z^e = 0$, так как $\omega = const$;

$\mathcal{J}_{xz}, \mathcal{J}_{yz}$ – центробежные моменты инерции.

Из уравнений (I) видно, что наличие вращения не будет влиять на значения реакций подшипников A и $B,$ если

$$x_c = 0,\ \ y_c = 0,\quad \mathcal{J}_{xz} = 0,\quad \mathcal{J}_{yz} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Равенства (I) и (II) выражают условия того, что динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, равны статическим реакциям (условия динамической уравновешенности). Ось Azдолжна быть главной центральной осью инерции тела.

Таким образом, динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, будут равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела. Этот вывод остается справедлив и в случае, когда тело вращается неравномерно.

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ В ОБОЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

Согласно принципу возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы:

$$\delta A_k = 0.$$

В обобщенных координатах это условие будет

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \dots + Q_s\delta q_s = 0.$$

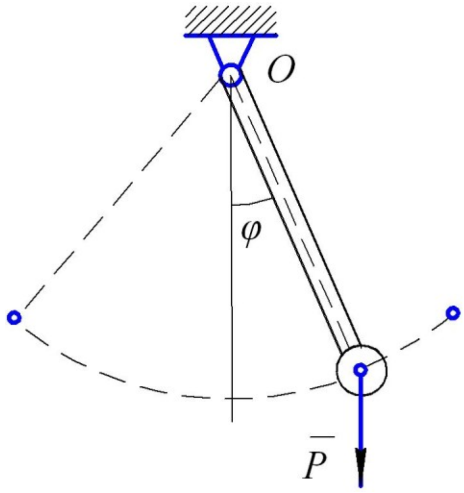
Так как величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_s$ между собой независимы, то равенства работ нулю может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_s$ в отдельности равен нулю, т.е.

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_s = 0.$$

Для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

Равновесие системы в данном положении называется устойчивым, если ее можно вывести из этого положения настолько малым возмущением (смещением, толчком), что во все последующее время отклонения системы от равновесного положения будут меньше любого, сколь угодно малого, заданного отклонения.



Такое отклонение соответствует понятию об устойчивости равновесия и движения по А.М. Ляпунову.

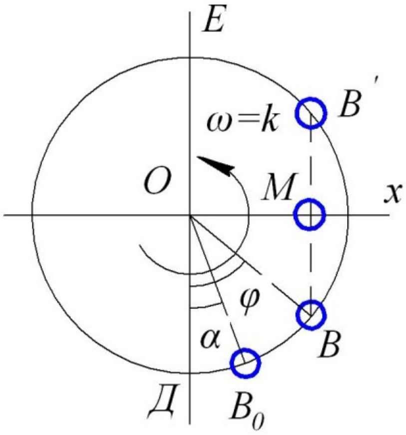
Исходя из него можно, например, сразу установить, что равновесие маятника, изображенного на рисунке, при *φ=0* будет устойчивым, а при

φ= 180° - неустойчивым.

Лишь только достаточное условие устойчивости равновесия консервативной системы дает теорема Лагранжа-Дирихле: *если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым.*

Ф

ФАЗА КОЛЕБАНИЙ (от греч. *phasis* – появление).



Дифференциальным уравнением свободных колебаний при отсутствии сопротивления является

$$x + k^2 x=0,$$

Общим решением этого уравнения является

$$x = A\sin(kt+\alpha),$$

где Aи α постоянные интегрирования.

Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется фазой колебания. Фаза φ определяет положение точки в данный момент времени и направление ее последующего движения. Фазы, отличающиеся на 2 π, считаются одинаковыми.

ФАЗА КОЛЕБАНИЙ НАЧАЛЬНАЯ. Величина α (см. предыдущий рисунок) определяет фазу начала колебаний (начальная фаза).

ФОРМУЛА ГАЛИЛЕЯ

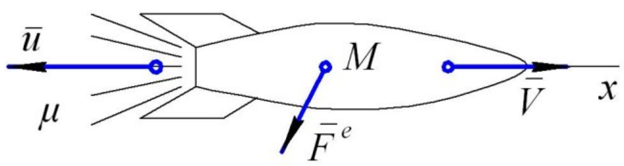
$$V = \sqrt{2gh},$$

где скорость Vзависит от высоты h падающего груза;

g-ускорение свободного падения.

ФОРМУЛА ЦИОЛКОВСКОГО

Рассмотрим движение ракеты под действием только одной реактивной силы, считая $F^e = 0$, а относительную скорость истечения $\overline{u}$ постоянной. Направим координатную ось в сторону движения (см. рис.). Тогда $V_x = V$, $u_x = -u$ и уравнение Мещерского$M = \frac{d\overline{V}}{dt} = F^e + \overline{u}\frac{dM}{dt}$в проекции на ось x, если в нем положить $F^e = 0$, примет вид $M = \frac{dV}{dt} = -u\frac{dM}{dt}$ или $dV = -u\frac{dM}{dt}$, где M – масса ракеты – величина убывающая.



Интегрируя это уравнение и считая, что в начальный момент масса M=M_0,а скорость $V = V_0$и направлена вдоль оси Ox, получим

$$V = V_0 + u \ln \frac{M_0}{M}.$$

Если обозначить массу корпуса ракеты со всем оборудованием через $M_к$, а всю массу топлива через M_τ, то имеем $M_0 = M_к + M_\tau$, а масса ракеты, когда все топливо израсходовано, будет равна $M_к$. Подставив эти значения в последнюю формулу, получим формулу Циолковского$V = V_0 + u \ln(1 + \frac{M_\tau}{M_к})$, определяющую скорость ракеты, когда все ее топливо будет израсходовано.

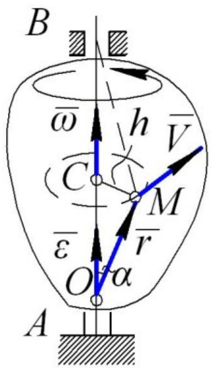
Важное практическое значение формулы Циолковского состоит в том, что она указывает получение больших скоростей, необходимых для космических полетов. Этими путями являются увеличение $\frac{M_\tau}{M_к}$,*uиV_0*, причем путь увеличения *uиV_0*более эффективен.

ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Найдем выражение вектора скорости $\overline{V}$ при вращательном движении твердого тела (см. рис.). Так как $V = h\omega$, где $h = r\sin\alpha$, получим

$$V = \omega h = \omega r \sin\alpha \text{ или } V = \overline{\omega} \times r. \quad (1)$$

Следовательно $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$- эта формула Эйлера.



По известной формуле векторной алгебры

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Разлагая определитель по элементам первой строки учитывая, что

$\overline{V} = V_x\bar{i} + V_y\overline{g} + V_z\overline{k}$и что, следовательно, коэффициенты при $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$в этом разложении должны равняться V_x, V_y, V_z соответственно, получим

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) тоже называются *формуламиЭйлера.*

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА

Функция L, равная *L=T-П* , от обобщенных координат и обобщенных скоростей, равная разности между кинетической и потенциальной энергиями системы называется *функцией Лагранжа*или кинетическим потенциалом.

В случае только одних потенциальных сил уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0.$$

Тогда очевидно, что состояние механической системы, на которою действуют потенциальные силы, определяется заданием одной только функции Лагранжа, так как, зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения системы.

Уравнения Лагранжа играют важную роль в ряде областей физики, так как могути описывать состояние других физических систем (непрерывной среды гравитационного или электромагнитного поля и др.)

ФУНКЦИЯ СИЛОВАЯ. Работа сил, образующих силовое поле, в общем случае, зависит от вида траектории точки.

Однако если окажется, что в выражении работы на перемещение M_1, M_2

$$A_{M_1,M_2} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dA = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_x dx + F_y dy + F_z dz\ ,$$

под знаком интеграла окажется полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, т.е.

$$dA = dU\ x, y, z \quad \text{или} \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU\ x, y, z\ ,$$

то работу A_{M_1,M_2} можно вычислить, не зная заранее траекторию очки *M*.

Функция *U*от координат *x,y,z*дифференциал которой равен элементарной работе, называется *силовой функцией*.

Учитывая последние соотношения, можно найти силовую функцию

$$U = \int dA + C \quad \text{или} \quad U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C.$$

Известными нами примерами потенциальных сил являются силы тяжести, упругости и тяготения. Для полей этих сил существуют силовые функции:

1) для поля силы тяжести

$$U = -Pz,$$

где ось zнаправлена вверх;

2) для поля силы упругости

$$U = -\frac{cx^2}{2},$$

3) для поля силы тяготения

$$U = \frac{mgR^2}{r},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

При переходе к обобщенным координатам $q_1, q_2, \dots q_s$ все x_k, y_k, z_k могут быть выражены через эти координаты и тогда

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_s),$$

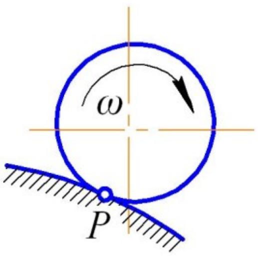
$$\delta A_k = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s,$$

где$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}.$

Так как потенциальная энергия *П*= – *U,* то

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s},$$

т.е. обобщенные силы равны частным производным от силовой функции по соответствующим обобщенным координатам.



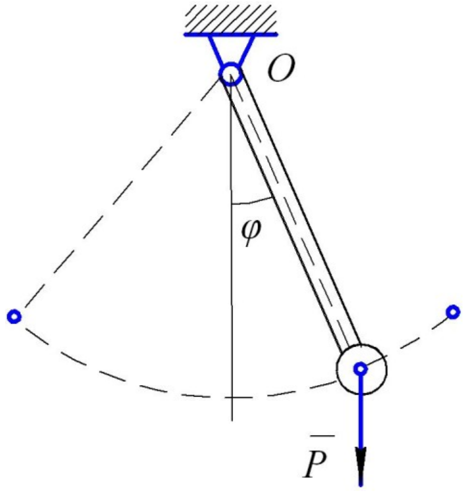
ЦЕНТР ВРАЩЕНИЯ МГНОВЕННЫЙ. Точку неподвижной плоскости, совпадающую с мгновенным центром скоростей называют *мгновенным центром вращения* и обозначают точкой *P*.

ЦЕНТР ИНЕРЦИИ. Геометрическая точка С (x_c, y_c, z_c), координаты которой определяются формулами

$$x_c = \frac{1}{M} \quad m_k x_{k,} \quad y_c = \frac{1}{M} \quad m_k y_{k,} \quad z_c = \frac{1}{M} \quad m_k z_{k,}$$

называется *центром инерции* или центром масс механической системы.

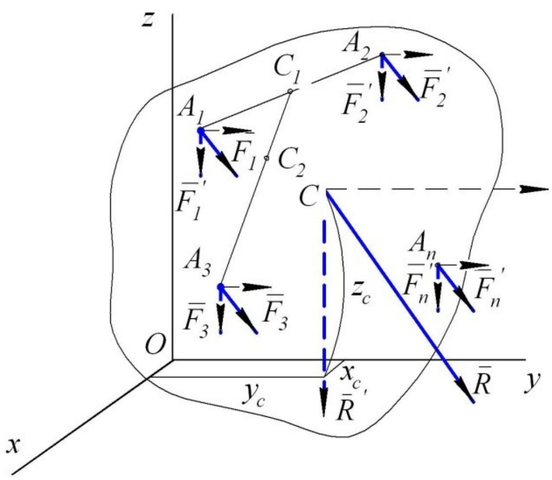
ЦЕНТР КАЧАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА. Длина $l_1 = \frac{J_0}{Ma}$,



где *a*=*OC*(см. рис.), такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника,называется *приведенной длиной физического маятника*.

Точка К, отстоящая от оси подвеса на расстоянии *ОК*= *l,* называется *центром качаний* физического маятника. Расстояние ОК всегда больше, чем *ОС*=*а, т*.е. центр качаний маятника всегда расположен ниже его центра масс.

ЦЕНТР МАСС (смотреть «центр инерции»).



ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ Точка *С*, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется *центром параллельных сил*.

ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ МГНОВЕННЫЙ. Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Мгновенным центром скоростей будет точка *P*, которая

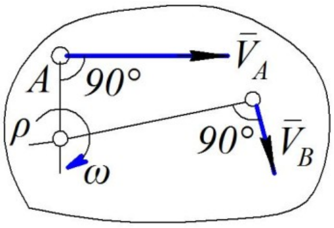


Рис.1

лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B кскоростям этих точек (см. рис.1).

Скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей:

$$V_A = \omega \cdot PA \qquad (\overline{V}_A \perp PA);$$

$$V_B = \omega \cdot PB \qquad (\overline{V}_B \perp PB);$$

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB},$$

т.е. скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки.

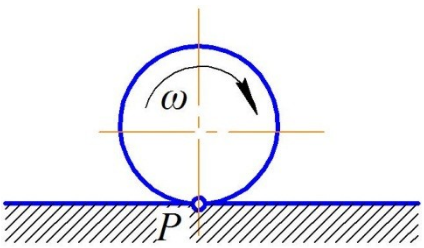


Рис.2

Угловая скорость ω плоской фигуры в каждый момент времени равна отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скорости P.

$$\omega = \frac{V_\text{В}}{\text{РВ}}.$$

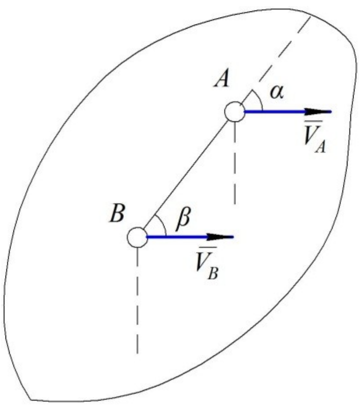


Рис. 3

Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого подвижного, то точка Pкатящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис. 2), имеет в данный момент времени скорость, равную нулю $(V_p = 0)$, и,следовательно, является мгновенным центром скоростей.

Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия ABне перпендикулярна V_A(рис. 3), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны V_A. По теореме о проекциях скоростей имеем

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta, \qquad \text{т.е.} \quad V_B = V_A;$$

аналогичный результат получится для всех других точек. Следовательно, скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю и по направлению, т.е. фигура движется мгновенно поступательно. Угловая скорость ω тела в этот момент времени равна нулю.

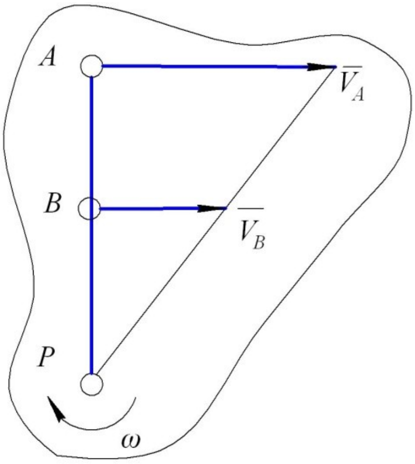
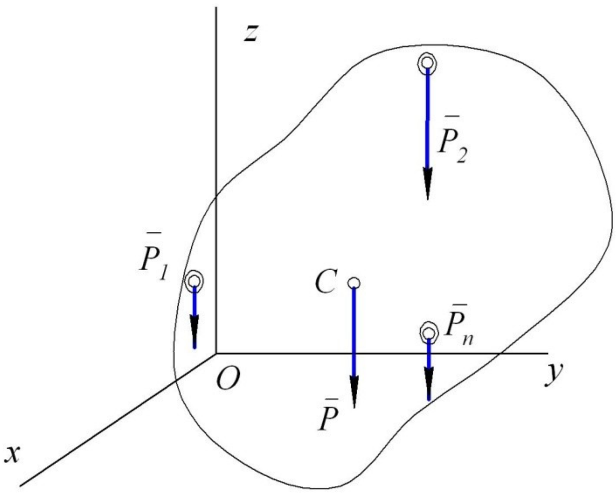


Рис. 4

Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна V_A, то мгновенный центр скоростей P определяется построением (рис.4) из справедливости соотношения

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}.$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ. Центр тяжести однородных тел (прямоугольный брус, цилиндр, шар и т.п.), имеющих центр симметрии, находится в этом центре симметрии.



Сила тяжести, действующая на твердое тело, представляет собой равнодействующую сил тяжести, действующих на его частицы. Линия действия этих равнодействующих проходит через точку, называемую *центром тяжести тела.* Равнодействующая $\overline{P}$ сил $\overline{p}_k$будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C, являющуюся центром параллельных сил тяжести $\overline{p}_k$(центр тяжести) (см. рис.). Координаты центра тяжести, как и центра параллельных сил определяются формулами

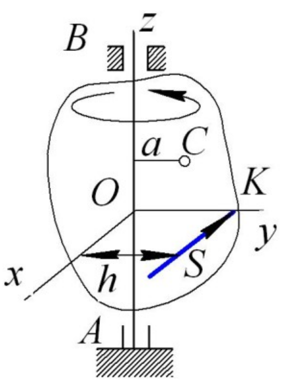
$$x_c = \frac{1}{R} \quad F_k x_k \, , y_c = \frac{1}{R} \quad F_k y_{k,} \;\; z_c = \frac{1}{R} \quad F_k z_k .$$

Следовательно,$x_c = \frac{1}{P} \quad P_k x_k , \quad y_c = \frac{1}{P} \quad P_k y_{k,} \;\; z_c = \frac{1}{P} \quad P_k z_k .$

центр тяжести C – точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

ЦЕНТР УДАРА

При ударе могут появляться импульсивные реакции, которые приводят к нежелательным явлениям: ускоренному износу, разрушению конструкции, подшипников, валов и т.п. Для того чтобы при ударе не появлялись импульсивные реакции надо: (см. рис.)



1) чтобы ударный импульс был расположен в плоскости *Oxy*перпендикулярной оси *z*проходящей через такую точку *O* тела, для которой ось *z*является главной осью инерции;

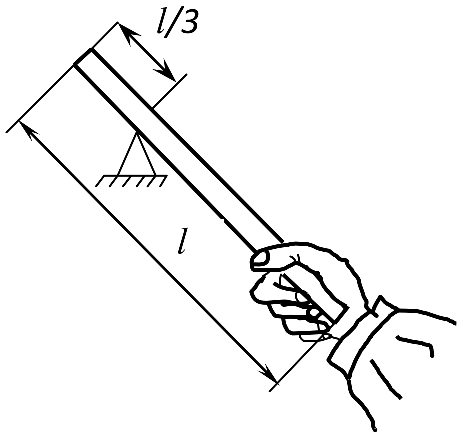
2) чтобы удар был направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения *z* и центр масс *C*тела;

3) Чтобы ударный импульс был приложен на расстоянии $h = \frac{J_z}{Ma}$ от оси (по ту сторону от осей, где находится центр масс).

Точка *K*, через которую будет проходить ударный импульс не вызывающий ударных реакций в точках закрепления оси, называется *центром удара*.

Центр удара совпадает с центром качаний физического маятника. Значит должно выполняться $h>a$, т.е. расстояние от оси до центра удара больше, чем до центра масс. Если ось вращения проходит через центр масс тела, то $a=0$, и мы получаем $h=\infty$. В этом случае центра удара на конечном расстоянии не существует и любой удар по телу будет передаваться на ось.

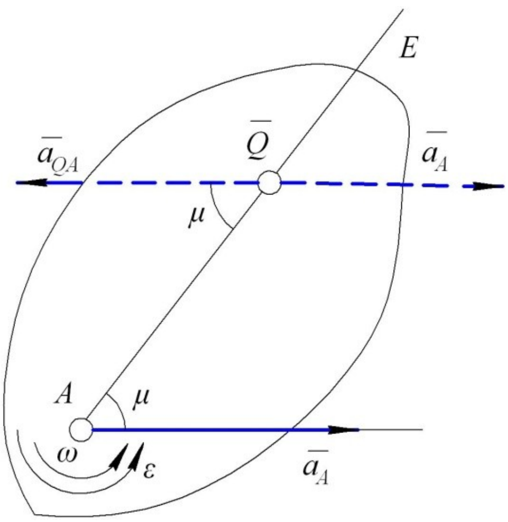
Например, при ударе палкой, чтобы не «обжечь» руку, надо ударять тем местом, которое по отношению к руке будет центром удара (см. рис.).



При работе молотком его надо брать за рукоятку в таком месте, чтобы точка, которой производится удар, был относительно руки центром удара. В противном случае рука будет ощущать импульсивную реакцию.

ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ МГНОВЕННЫЙ

При непоступательном движении плоской фигуры у нее в каждый момент времени имеется точка Q, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений.* Определяется положение центраQ, если известны ускорение a_Aкакой-нибудь точки A фигуры и величины



ω и ε, следующим способом:

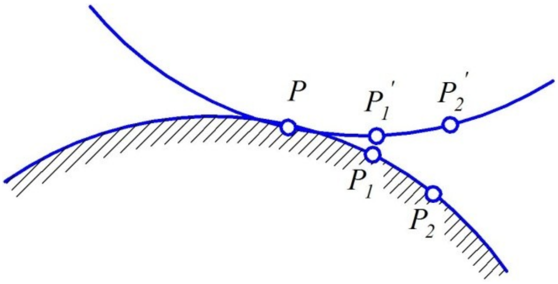
1) находим значение угла μ из формулы $tg\,\mu = \varepsilon/\omega^2$;
2) от точки A под углом μ к вектору a_A проводим прямую AE (см. рис.);
3) откладываем вдоль линии AEотрезок AQ, равный

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Построенная таким способом точка Q и будет мгновенным центром ускорений.

Следует иметь ввиду, что положение мгновенного центра скоростей Pи мгновенного центра ускорений Qв данный момент времени не совпадают.

ЦЕНТРОИДА НЕПОДВИЖНАЯ. При движении плоской фигуры мгновенный центр скоростей Р непрерывно изменяет свое положение как на неподвижной плоскости, так и на плоскости, связанной с движущейся фигурой (см. рис.).



Геометрическое место мгновенных центров вращения, т.е. положений точки P на неподвижной плоскости, называют *неподвижной центроидой.*

ЦЕНТРОИДА ПОДВИЖНАЯ (см. предыдущий рисунок).

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, т.е. положений точки P в плоскости, связанной с фигурой и движущейся вместе с ней, называется *подвижной центроидой* .

В данный момент времени обе центроиды касаются друг друга в точке P,являющейся для этого момента мгновенным центром вращения (или скоростей); пересекаться центроиды не могут. В следующий момент времени будут соприкасаться точки P_1' подвижной и P_1неподвижной центроид, и эта точка будет для следующего момента мгновенным центром вращения и т.д. В каждый данный момент времени $V_p = 0$, значит, при плоскопараллельном движении происходит качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

Ч

ЧАСТОТА ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

Если на твердое тело (точку) кроме восстанавливающей силы $\overline{F}$действует еще периодически переменяющаяся со временем сила Q, проекция которой на осьO_xравна

$$O_x = O_0 \sin pt,$$

то величина p, входящая в это равенство, называется *частотойвозмущающей силы.*

Измеряется частота p , в 1/время. В системе СИ частота p измеряется в рад/с, т.е. показывает число колебаний в единицу времени.

ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ – величина ν, обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за 1 с, называется частотой колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi},$$

где k- круговая частота колебаний.

Величина k отличается отν только постоянным множителем 2π.

Дифференциальным уравнением малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы является

$$q + k^2 q = 0, \text{ где } k^2 = \frac{c}{a} \text{ или } k = \sqrt{\frac{c}{a}},$$

где q - обобщенная координата;

с – коэффициент жесткости.

a – постоянный коэффициент,*a>0* (инерционный коэффициент. Размерность *a* зависит от размерностиq; в частности, *a*может иметь размерность массы или момента инерции.

ЧАСТОТА СОБСТВЕННАЯ.Колебания, определяемые уравнениями

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \qquad q_2^{(1)} = n_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1);$$

$$q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \qquad q_2^{(2)} = n_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2),$$

называются главными колебаниями, а их частоты k_1 и k_2*собственными частотами системы.*

Колебания с частотой k_1 (всегда меньшей) называют первым главным колебанием, а с частотой k_2 – вторым главным колебанием.

Величина $n = B/A$ – постоянна, т.е. числа n_1 и n_2 определяют отношения амплитуд (или самих координат, т.е. $q_2(q_1)$ в каждом из этих колебаний. Собственные частоты k_1 ,k_2 и коэффициенты формы n_1 и n_2 не зависят от начальных условий и являются основными характеристиками малых колебаний системы. Решение конкретных задач обычно сводится к определению этих характеристик.

ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ. В общем случае механическая система может иметь множество возможных перемещений. Для любой из механических систем можно указать число независимых между собой перемещений. Например, для точки, находящейся на какой-нибудь плоскости (поверхности) любое возможное перемещение $\delta\overline{r}$вдоль этой плоскости можно выразить через два взаимноперпендикулярных перемещения$\delta\overline{r_1}$ и $\delta\overline{r_2}$ в виде

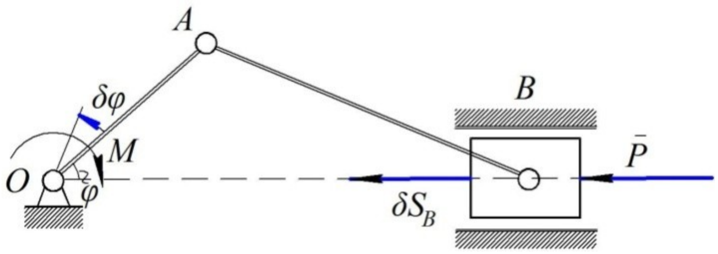
$$\delta\overline{r} = a\delta\overline{r_1} + b\delta\overline{r_2},$$

где aи b– любые положительные или отрицательные числа.

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называют числом степеней свободы этой системы.

Следовательно, точка, находящаяся на плоскости, имеет две степени свободы и определяется двумя координатами xи y. Свободная материальная точка имеет три степени свободы и определяется тремя координатами.
x,y,zи т.д.

У механической системы с геометрическими связями число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом ее степеней свободы.



Поэтому у такой системы число степеней свободы можно определять как по числу независимых возможных перемещений, так и по числу независимых координат. Так, у кривошипно-ползунного механизма (см. рис) одна степень свободы (у него одно независимое возможное перемещение, например, поворот кривошипа *OA* и одна независимая координата, например, угол *φ)*. У свободного твердого тела шесть степеней свободы (независимых перемещений – три поступательных вдоль координатных осей и три поворота вокруг этих осей, а независимых координат – три координаты полюса и три угла Эйлера).

ЧИСЛО ЦИОЛКОВСКОГО. В формуле Циолковского, определяющей скорость ракеты

$$V = V_0 + u\ln(1 + \frac{M_\tau}{M_к}),$$

относительный запас топлива $\frac{M_\tau}{M_к}$ называется *числом Циолковского*. Увеличение числа Циолковского $\frac{M_\tau}{M_к}$ приводит к увеличению скорости ракеты. Увеличение $\frac{M_\tau}{M_к}$ связано с видом топлива и конструкцией ракеты.

ЭНЕРГИЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ. Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $\frac{mV^2}{2}$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Единица измерения кинетической энергии та же, что и работа (в СИ – 1 Дж).

Кинетической энергией системы называется скалярная величина *T*, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия является характеристикой поступательного и вращательного движений системы, величина скалярная и положительная. Изменение величины кинетической энергии зависит от действия внешних и внутренних сил системы.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий этих тел.

Определены формулы для подсчета кинетической энергии твердого тела в разных случаях движения.

1. Поступательное движение

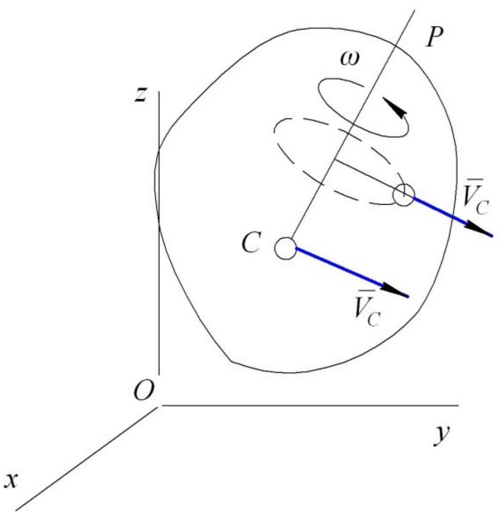
$T_{\text{пост}} = \frac{MV_C^2}{2}$ – кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.

2. Вращательное движение

$T_{\text{вр}} = \frac{\mathcal{J}_z\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

3. Плоскопараллельное движение

$T_{\text{плоск}} = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{\mathcal{J}_z\omega^2}{2}$ – при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.



4. Общий случай движения

$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{\mathcal{J}_{\text{ср}}\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия тела в общем случае движения (в частности, и при плоскопараллельном движении) равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ПОЛНАЯ. Для любого положения системы

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi \quad \text{или}$$

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = const$$

– это закон сохранения механической энергии, являющийся частным случаем общего физического закона сохранения энергии.

Величина Т + П называется *полной механической энергией системы*, а сама механическая система, для которой выполняется закон

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = const,$$ *- консервативной системой.*

ЭНЕРГИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ. Для потенциального силового поля вводится понятие о потенциальной энергии как о величине, характеризующей «запас работы», которым обладает материальная точка в данном месте силового поля: потенциальной энергией материальной точки в данном положении *M* называется скалярная величина *П*, равная работе, которые произведут силы поля при перемещении точки из положения *M* в нулевое.

$$\Pi = A_{(MO)}.$$

Потенциальная энергия П зависит от координат *x,y,z*точки *M*, т.е.

$$\Pi = \Pi(x,y,z).$$

Поэтому, согласно равенству $A_{MO} = U_0 - U = -U,$
где U - значение силовой функции в точке М поля. И тогда

$$\Pi(x,y,z) = -U(x,y,z),$$

т.е. потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.

Выражения потенциальных силовых полей учитывая, что $\Pi = -U$, будет;

1) *для поля силы тяжести (ось z вертикально вверх)*

$$\Pi = Pz;$$

2) *для поля силы упругости (линейного)*

$$\Pi = \frac{cx^2}{2};$$

3) *для силы тяготения*

$$\Pi = -\frac{mgR^2}{r}.$$

Потенциальная энергия системы определяется так же, как и для одной точки: $\Pi = \quad A_{(M_к,O_к)}$ - потенциальная энергия *П* механической системы в данном ее положении равна работе, которую произведут силы поля при перемещении системы из данного положения в нулевое.

Зависимость между потенциальной энергией и силовой функцией будет такой же, как и для точки, т.е.

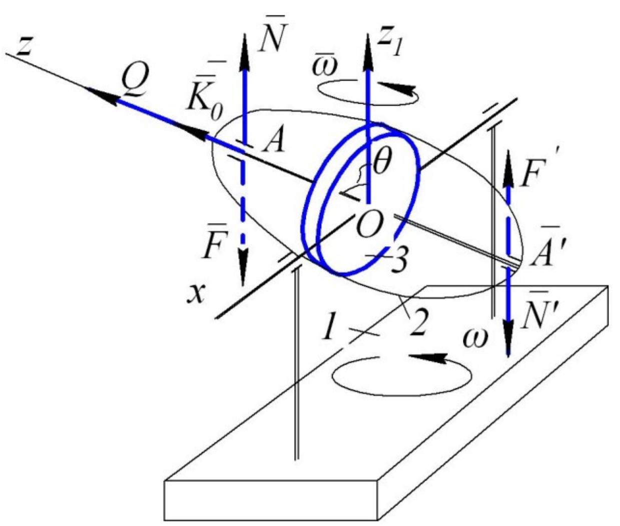
$$\Pi \;\; x_1, y_{1,} z_1, \dots, x_n, y_{n,} z_n \;\; = -U \;\; x_1, y_{1,} z_1, \dots, x_n, y_{n,} z_n \;\; .$$

Если все действующие на систему силы являются потенциальными и, как известно, $\Pi = -U$, то

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \qquad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \qquad \dots, \qquad Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s},$$

то обобщенные силы равны частным производным, взятым со знаком минус, от потенциальной энергии.

ЭФФЕКТ ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ. Если рассмотреть гироскоп с двумя степенями свободы (поворот вокруг оси *Oz*и вместе с концом *2* – вокруг оси *Ox),* то будет наблюдаться (см. рис.), что подшипники действуют на ось ротора с силами $\overline{F}, \overline{F'}$, то по третьему закону Ньютона и ось будет одновременно действовать на подшипники *A,A′* с такими же по модулю и противоположными по направлению силами $\overline{N}$,$\overline{N'}$. Па-



ра сил $\overline{N}$,$\overline{N'}$ называется гироскопической парой, а ее момент $\overline{\text{M}}_{\text{гир}}$ гироскопическим моментом, где

$$\overline{\text{M}}_{\text{гир}} = \overline{K_0} \times \overline{\omega} \ \text{ и } \ M_{\text{гир}} = K_0 \omega \sin\theta = \mathcal{J}_z \Omega \omega \sin\theta.$$

Отсюда вытекает правило Жуковского Н.Е.: *если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то на подшипники, в которых закреплена ось ротора гироскопа, начнет действовать гироскопическая пара с моментом* $M_{\text{гир}}$, *стремящимся кратчайшим путем установить ось ротора параллельно оси прецессии, чтобы направления векторов* $\overline{\Omega}$ *и* $\overline{\omega}$ *совпали.*

Это и есть гироскопический эффект, когда ось давит на подшипники с силами $\overline{N}$,$\overline{N'}$, значения которых, зная расстояние *AA'*, можно найти по формуле.

$$M_{\text{гир}} = K_0 \omega \sin\theta = \mathcal{J}_z \Omega \omega \sin\theta.$$

Величины этих сил (например, для морских судов) могут достигать десятков килоньютонов и должны учитываться при расчетах подшипников. Через подшипники гироскопические давления передаются корпусу судна и у очень легкого судна могли бы вызвать при повороте опускание киля или носа. Подобный эффект можно наблюдать и у винтовых самолетов при виражах.

Литература

1. Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. Курс теоретической механики. Том I,II – М: Наука, 1985 – 800 с.

2. С.М. Тарг. Краткий курс теоретической механики - М. : Высшая школа, 2002 - 415 с.

3. Ю.Ф. Лачуга, В.А. Ксендзов. Теоретическая механика – 2-е изд. перераб. и доп -М. : Колос, 2009 -576 с.

4. Справочник для студентов технических вузов - М. : АСТ Астрель, 2002-735 с.

5. А.Ф. Крайнев. Словарь-справочник по механизмам - М.: Машиностроение, 1981- 438 с.

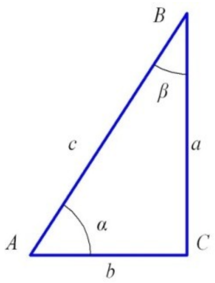
6. Словарь иностранных слов – М: Рус.яз., 1985 – 608 с.

7. А.А. Рывкин, А.З. Рывкин, Л.С. Хренов. Справочник по математике. М.: Высшая школа, 1964 – 520 с.

Приложение 1

ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Определения и свойства.



Синус: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Противолежащий катет}}{\text{Гипотенуза}}$;

Косинус: $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Прилежащий}}{\text{Гипотенуза}}$;

Тангенс: $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Противолежащий катет}}{\text{Прилежащий катет}}$;

Котангенс: $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Прилежащий катет}}{\text{Противолежащий катет}}$;

Секанс: $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{Гипотенуза}}{\text{Прилежащий катет}}$;

Косеканс: $\csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Гипотенуза}}{\text{Противолежащий катет}}$.

Знаки тригонометрических функций в четырех квадрантах

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

2. Основные соотношения.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1;$$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$; $\quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$;

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha};\ \ 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \csc^2\alpha;$$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$; $\quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$;

Выражение одних тригонометрических функций через другие*

Функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$\sin\alpha$	-	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	-	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	-	$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
$\cot\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	-	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot^2\alpha}$	-	$\frac{\csc\alpha}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	-

* - Знак перед корнем определяется из таблиц знаков тригонометрических функций по квадрантам.

Формулы приведения.

$\sin\ -\alpha\ \ = -\sin\alpha;$

$\tan\ -\alpha\ \ = -\tan\alpha;$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha;$

$\csc\ -\alpha\ \ = -\csc\alpha.$

$\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ и $\csc\alpha$ - функции нечетные

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$

$\sec(-\alpha) = \sec\alpha.$

$\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ - функции четные.

Функция / Аргумент	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\frac{x}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$x\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$
$\frac{3x}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$2x-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$

Периодичность:

Функцииsin α, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ и $\csc\alpha$ имеют период 2π, а функции $\tan\alpha$ и $\cot\alpha$ - период π;

$\sin\ \alpha + 2n\ \ = \sin\alpha; \csc(\alpha + 2\pi n) = \csc\alpha;$

$\cos\ \alpha + 2\pi n\ \ = \cos\alpha; \tan(\alpha + 2\pi n) = \tan\alpha;$

$\sec\ \alpha + 2\pi n\ \ = \sec\alpha;\qquad \cot(\alpha + 2\pi n) = \cot\alpha.$

3.Теоремы сложения.

Функция суммы и разности двух углов.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} - \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha\cot\beta-1};$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} - \frac{\cot\beta-\cot\alpha}{\cot\beta\cot\alpha+1};$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta} = \frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta};$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha} = \frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta};$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\, sin\beta\sin\gamma;$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\, sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\, sin\beta\sin\gamma;$$

Функции кратных углов.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\sin 4\alpha = \cos\alpha\,(4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha);$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha};$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cot\alpha}{\cot^2\alpha - 1} = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha};$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha};$$

$$\tan 4\alpha = \frac{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}{1 - 6\tan^2\alpha + \tan^4\alpha};$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2};$$

$$\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1};$$

$$\cot 4\alpha = \frac{\cot^4\alpha - 6\cot^2\alpha + 1}{4\cot^3\alpha - 4\cot\alpha};$$

Функция половинного угла.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Знак перед корнем выбирается в зависимости от того, в каком квадранте оказывается угол $\frac{\alpha}{2}$. Например, для $\alpha = 240°$ нужно выбрать знак «+» перед $\sin\frac{\alpha}{2}$ и знак «–» перед $\cot\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$ и $\cot\frac{\alpha}{2}$,так как$\frac{\alpha}{2} = 120°$лежит во втором квадранте.

Произведения тригонометрических функций.

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin\ \alpha-\beta\ ;$

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos\ \alpha-\beta\ ;$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos\ \alpha-\beta\ - \cos\ \alpha+\beta\ ;$

$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin\qquad + \sin\ \gamma+\alpha-\beta\ -$
$\sin\ \alpha+\beta+\gamma\ ;$

$4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin\ \alpha+\beta-\gamma\ - \sin\ \beta+\gamma-\alpha\ + \sin\ \gamma+\alpha-\beta\ +$
$\sin\ \alpha+\beta+\gamma\ ;$

$4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-$
$\beta) - \cos\ \alpha+\beta+\gamma\ ;$

$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\ \alpha+\beta-\gamma\ + \cos\ \beta+\gamma-\alpha\ + \cos\ \gamma+\alpha-\beta\ +$
$\cos(\alpha+\beta+\gamma);$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(-\sin 3\alpha + 3\sin\alpha);$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3);$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha);$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3);$$

$$\sin\ \alpha+\beta\ \ \sin\ \alpha-\beta\ \ = \sin^2\alpha - \ \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha;$$

$$\cos\ \alpha+\beta\ \ \cos\ \alpha-\beta\ \ = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\beta;$$

$$\sin\ \alpha+\beta\ \ \cos\ \alpha-\beta\ \ = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta;$$

$$\sec^2\alpha\ \ \cos^2\alpha = \sec^2\alpha + \ \ \cos^2\alpha;$$

$$\tan\alpha\ \ \tan\beta = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = -\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\alpha - \cot\beta};$$

$$\cot\alpha\ \ \cot\beta = \frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = -\frac{\cot\alpha - \cot\beta}{\tan\alpha - \tan\beta};$$

$$\tan\alpha\cot\beta = \frac{\tan\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha + \tan\beta} = -\frac{\tan\alpha - \cot\beta}{\cot\alpha - \tan\beta};$$

Суммы и разности тригонометрических функций.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right);$$

Функция	Производная
1. $y = C$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = u + V - \omega$	$y' = u' + V' - \omega'$
4. $y = uV$	$y' = u'V + uV'$
5.$y = \frac{u}{V}$	$y' = \frac{u'V + uV'}{V^2}$
6. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
7. $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
8. $y = e^x$	$y' = e^x$
9. $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x\ln a}$
10.$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
11.$y = \sin x$	$y' = \cos x$
12. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
13. $y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
14. $y = \cot x$	$y' = \frac{1}{\sin^2 x}$
15. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
16.$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
17.$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
18.$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

$\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha = \sec^2 \alpha \csc^2 \alpha$;

$p \cos \alpha + q \sin \alpha = r \sin \ \alpha + \theta \ $;

где$r = \ \overline{p^2 + q^2}$, $\sin \theta = \frac{p}{r}$, $\cos \theta = \frac{q}{r}$;

$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

$\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$;

$\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$;

$\tan \alpha + \cot \beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$;

$\cot \alpha - \tan \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$;

Приложение 2

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(таблицы простейших интегралов)

1. $x^{m}dx = \frac{x^{m=1}}{m+1} + C \;\; m \neq -1$;

2. $\frac{dx}{x} = \ln \; x \;\; + C;$

3. $a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C;$

4. $e^{x}dx = e^{x} + C;$

5. $\sin x dx = -\cos x + C$;

6. $\cos x dx = \sin x + C;$

7. $\tan x dx = -\ln \; \cos x \;\; + C;$

8. $\cot x dx = \ln \; \sin x \;\; + C;$

9. $\frac{dx}{\sin x} = \ln \;\; \tan \frac{x}{2} \;\; + C;$

10. $\frac{dx}{\cos x} = \ln \;\; \tan \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \;\; + C;$

11. $\frac{dx}{\cos^{2} x} = \tan x + C$;

12. $\frac{dx}{\sin^{2} x} = -\cot x + C$;

13. $\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C_1;$

В частности

$$\frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C = -\cot^{-1} x + C_1;$$

14. $\frac{dx}{x^2-a^3} = \frac{1}{2a}\ln \ \frac{x-1}{x+1} \ + C;$

15. $\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln \ \frac{a+x}{a-x} \ + C;$

16. $\frac{dx}{\overline{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C = -\cos^{-1}\frac{x}{a} + C_1;$

В частности,

$$\frac{dx}{\overline{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + C_1;$$

17. $\frac{dx}{\overline{x^2 \pm a^2}} = \ln \ x + \ \overline{x^2 \pm a^2} \ + C;$

В частности,

$$\frac{dx}{\overline{x^2 \pm 1}} = \ln \ x + \ \overline{x^2 \pm 1} \ + C_1;$$

Приложение 3

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(здесь m и n положительные числа)

$$\sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C;$$

$$\sin^2 axdx = -\frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{2}x + C;$$

$$\sin^n axdx = -\frac{\sin^{\mathrm{n}-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \quad \sin^{\mathrm{n}-2} axdx;$$

$$\frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln \qquad \tan\frac{ax}{2} \; + C;$$

$$\frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax + C;$$

$$\frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{\mathrm{n}-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \quad \frac{dx}{\sin^{\mathrm{n}-2} ax} \quad (n > 1);$$

$$\cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + C;$$

$$\cos^2 axdx = \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{2}x + C;$$

$$\cos^{\mathrm{n}} axdx = \frac{\cos^{\mathrm{n}-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \quad \cos^{\mathrm{n}-2} axdx;$$

$$\frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln \; \tan \quad \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \quad + C;$$

$$\frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\tan ax + C;$$

$$\frac{dx}{\cos^{\mathrm{n}} ax} = \frac{1}{a(n-1)}\frac{\sin ax}{\cos^{\mathrm{n}-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \quad \frac{dx}{\cos^{\mathrm{n}-2} ax} \quad (n > 1);$$

$$\frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\ \frac{n}{4} - \frac{ax}{2}\ \ + C;$$

$$\frac{dx}{1-\sin ax} = -\frac{1}{a}\cot\ \frac{n}{4} - \frac{ax}{2}\ \ + \mathrm{C};$$

$$\frac{dx}{b + c\sin ax} = \begin{cases} -\frac{2}{a\ \sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\ \ \sqrt{\frac{b-c}{b^2+c}}\tan\ \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\ \ + C\ \ b^2 > c^2\ \ ; \\ -\frac{1}{a\ \sqrt{c^2-b^2}}\ln\ \frac{c+b\sin ax+\ \sqrt{c^2-b^2}\cos ax}{b+c\sin ax}\ + C_1\ \ \ (b^2 < c^2)\ ; \end{cases}$$

$$\frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C;$$

$$\frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C;$$

$$\frac{dx}{b + c\cos ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\ \sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\ \ \sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\frac{ax}{2}\ \ + C\ \ b^2 > c^2\ \ ; \\ \frac{2}{a\ \sqrt{b^2-c^2}}\ln\ \frac{c + b\cos ax +\ \ \sqrt{c^2-b^2}\,\mathrm{sin}ax}{b + c\cos ax}\ \ + C_1\ \ b^2 < c^2\ \ ; \end{cases}$$

$$\sin mx\sin nxdx = \frac{\sin\ m-n\ x}{2(m-n)} = \frac{\sin\ m+n\ x}{2(m+n)} + C$$

$m \neq n$;   при $m = n$;

$$\cos mx\cos nxdx = \frac{\sin\ m-n\ x}{2\ m-n} + \frac{\sin\ m+n\ x}{2\ m+n} + C$$

$m \neq n$;   при $m = n$;

$$\sin mx \cos nxdx = \begin{cases} -\frac{\cos\ m+n\ x}{2(m+n)} = \frac{\cos\ m-n\ x}{2\ m-n} + C\ ,\ (m \neq n); \\ \\ \frac{1}{2m}\sin^2 mx + C_2\ \ m = n\ \ ; \end{cases}$$

$$\tan axdx = -\frac{1}{a}\ln\ \cos ax\ \ + C;$$

$$\tan^2 axdx = \frac{\tan ax}{a} - x + C;$$

$$\tan^{\mathrm{n}} axdx = \frac{\tan^{x-1`} ax}{a(n-1)} - \quad \tan^{\mathrm{n}-2} axdx\ (n > 1);$$

$$\cot axdx = \frac{1}{a}\ln\ \sin ax\ \ + C;$$

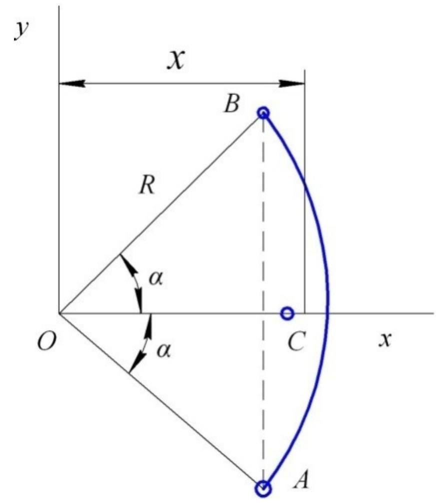
$$\cot^2 axdx = -\frac{\cot ax}{a} - x + C;$$

$$\cot^2 axdx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \quad \cot^{\mathrm{n}-2} axdx \qquad (n > 1);$$

Приложение 4

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

1. Цетр тяжести дуги окружности



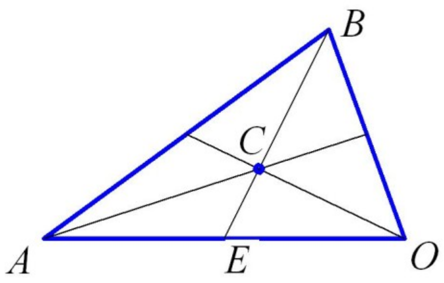
$x_c = (R \sin \propto)/\propto$,

где α *– угол (измеряется в рад);*

R – радиус окружности.

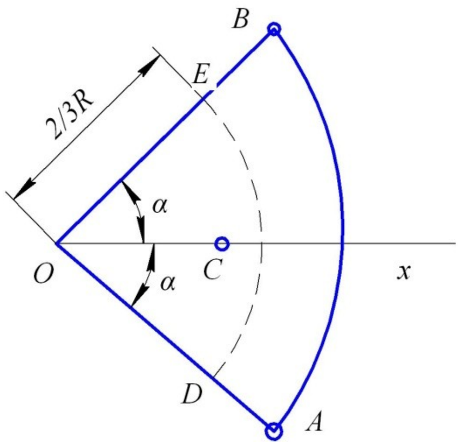
2. Центр тяжести площади треугольника

(находится на пересечении медиан)



CE=BE/3

3. Центр тяжести площади кругового сектора



$$x_c = \frac{2}{3}\frac{R \sin \alpha}{\alpha} ,$$

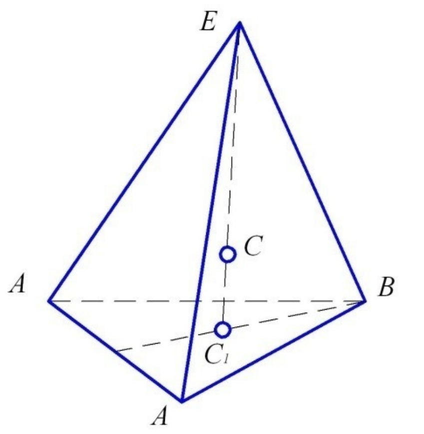
где α *– угол (измеряется в рад);*

R – радиус окружности.

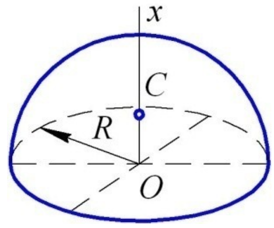
4. Центр тяжести объема призмы

(находится на высоте EC_1)

$CC_1 = E\ C_1/4$



5. Цент тяжести объема полушара



$$x_c = OC = 3R/8\ ,$$

где *R – радиус шара*

Приложения 5

ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

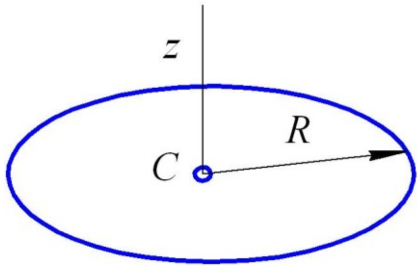
1. Тонкий однородный стержень *длиной* l

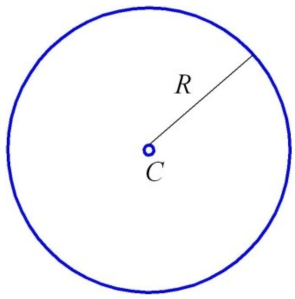
$$\mathcal{J}_A = \frac{Ml^2}{3}, \qquad \mathcal{J}_C = \frac{Ml^2}{12}.$$

Место для формулы.

2. Тонкое круглое однородное кольцо

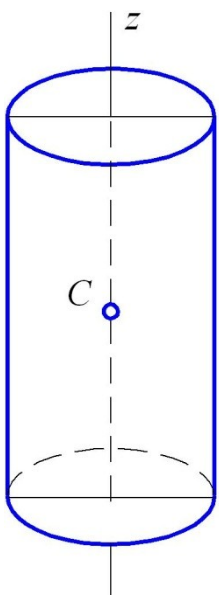
$$\mathcal{J}_C = MR^2$$





3. Круглая однородная пластина радиусом R и массой M

$$\mathcal{J}_C = \frac{MR^2}{2}$$

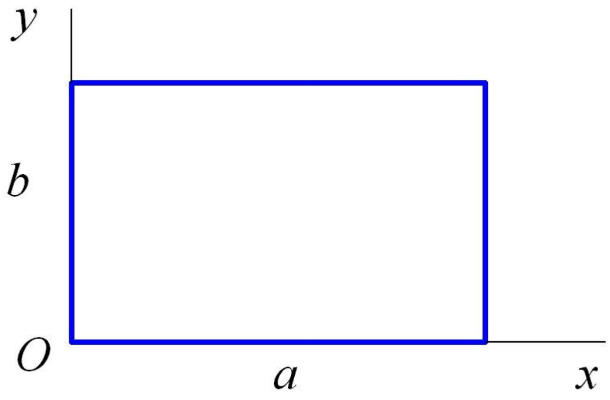


4. Круглый однородный цилиндр *радиусом* R *и массой* M

$$\mathcal{J}_C = \frac{MR^2}{2}, \qquad \mathcal{J}_z = \frac{MR^2}{2}.$$

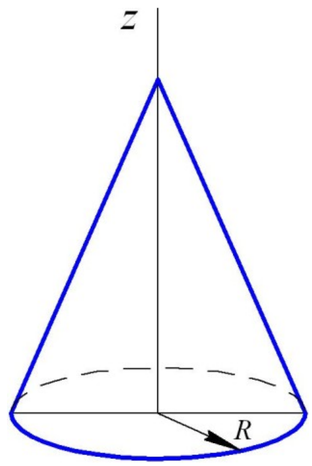
5. Сплошная прямоугольная пластина массой *M* со сторонами *a* и *b*

$\mathcal{J}_x = \frac{Mb^2}{3}, \qquad \mathcal{J}_y = \frac{Ma^2}{3}.$



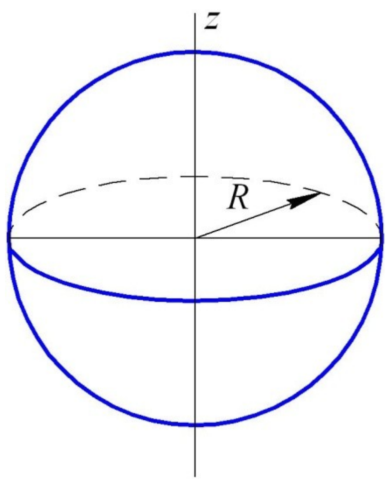
6. Прямой сплошной круглый конус массой *M* с радиусом основания *R* (ось *z* направлена вдоль оси конуса)

$\mathcal{J}_z = 0.3MR^2$



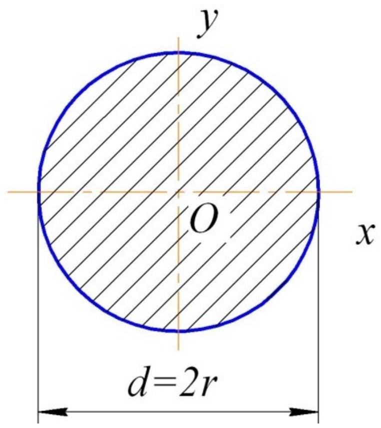
7. Сплошной шар массой *M* и радиусом *R* (ось направлена вдоль диаметра)

$\mathcal{J}_z = 0.4MR^2$



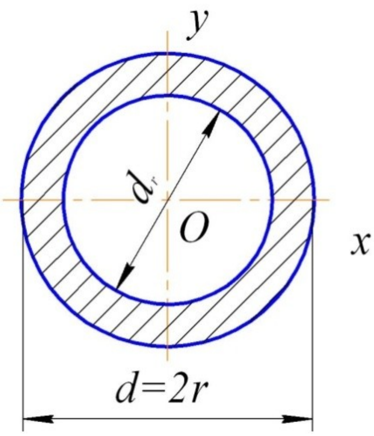
8. Круг

$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64}$



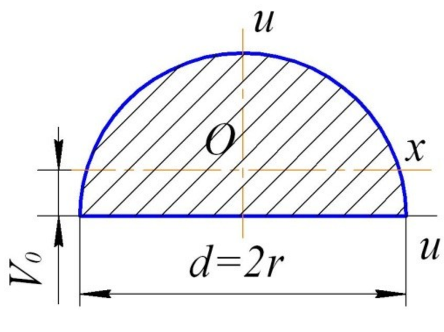
9. Тонкостенное кольцо

$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^3 S}{8}$



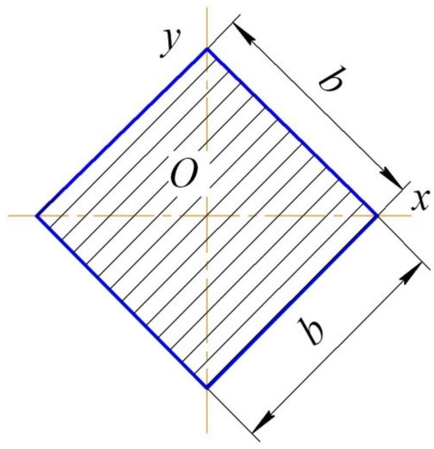
10. Полукруг

$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^3 S}{8}$, $\qquad V_0 = \frac{2d}{3\pi} = 0.2122d$



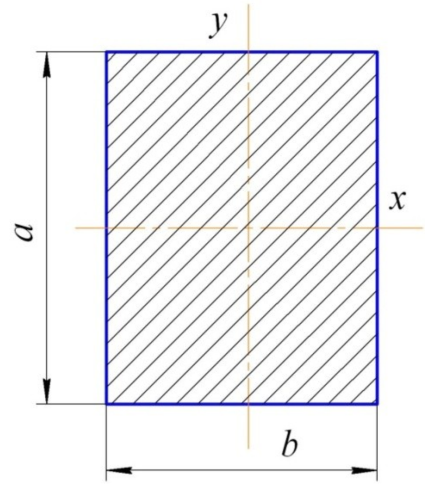
11. Квадрат, поставленный на ребро

$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{b^4}{12}$



12. Прямоугольник

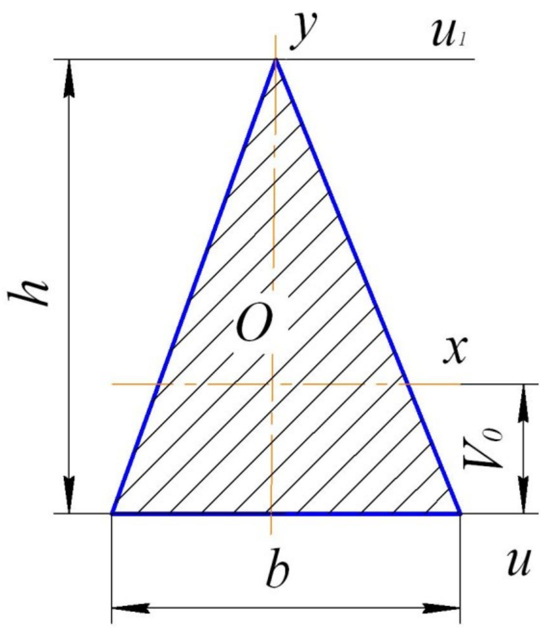
$\mathcal{J}_x = \frac{ba^3}{12}, \quad \mathcal{J}_y = \frac{ab^3}{12}$



13. Треугольник

$$\mathcal{J}_x = \frac{bh^3}{36}, \qquad \mathcal{J}_u = \frac{bh^3}{12}, \quad \mathcal{J}_{u1} = \frac{bh^3}{4}$$

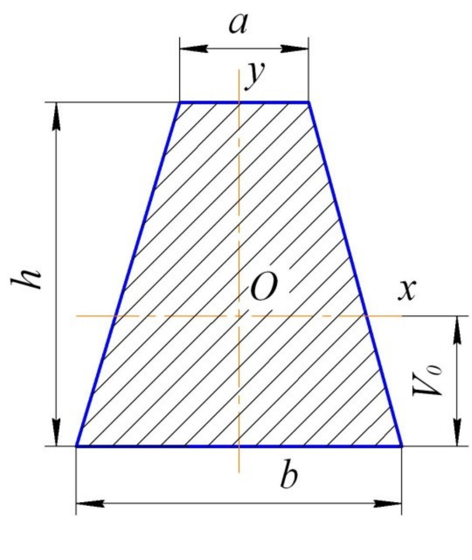
$$V_0 = \frac{h}{3}$$



11. Трапеция

$$\mathcal{J}_x = \frac{rb^3(b^2 + 4ba + a^2)}{36(b + a)}$$

$$V_0 = \frac{hb + 2a}{3b + a}$$



Содержание

Предисловие ……………………………………………………………………...…3

Основные обозначения…………………………………………………………...4

Терминологический минимум……………………………………………………6

Литература ……………………………………………………………………...209

Приложение 1 Тригонометрия…………..…...……….………………….…….....210

Приложение 2 Производная и дифференциал. Основные формулы интегрирования (таблицы простейших интегралов) …..……………………………….....219

Приложение 3 Интегралы от тригонометрических функций
(здесь *m* и *n*положительные числа)……………………………………….....221

Приложение 4 Центр тяжести простейших фигур…………………………...224

Приложение 5 Осевые моменты инерции ………………………………………226

Учебное издание

Валерий Николаевич Блохин

Александр Михайлович Случевский

Пособие

по теоретической механике

Редактор Павлютина И.П.

ISBN 978-5-88517-235-6

Подписано к печати 28.02.2014. Формат $60\times84^{1/16}$

Бумага писчая. Усл. п.л.13,42. Тираж 550 экз. Изд. №2616.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365, Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА