Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Брасовский промышленно экономический техникум

Г.А. Самохова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Брянская область 2015

УДК 373.167.1:51
ББК 74.57
С 17

Самохова, Г.А. **Математика:** учебное пособие / Г.А. Самохова. – Брянск: ФГБОУ ВО Брянский ГАУ, 2015. – 80 с.

В методическом пособии в доступной форме излагаются важнейшие идеи математического анализа, рассматриваются основные разделы дифференциального и интегрального исчисления: пределы, производные, исследование функций одной переменной, неопределённые и определённые интегралы, приложение интегрального исчисления. Кроме того, пособие содержит примеры решения задач и разноуровневые практические задания к каждой теме. Большинство задач сопровождаются ответами, что делает пособие удобным для самостоятельного изучения.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Рецензенты
Токарева А.В. – заведующая РМК отдела образования Брасовского района
Другова Г.Е., методист (Брасовский филиал ФГБОУ ВО Брянский ГАУ)

Рекомендовано к изданию решением учебно-методическим советом филиала ФГБОУ ВО «Брянский аграрный университет» - Брасовский промышленно-экономический техникум от 25.05.2015 года, протокол № 5.

Пояснительная записка

Данное учебно-методическое пособие разработано в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» и предназначено для реализации требований федерального государственного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

В настоящее время не существует аналогов данного учебного пособия, которое включало бы в себя подбор теоретического и практического материала отвечающего рабочей программе учебной дисциплины «Математика» для студентов экономического профиля СПО. В этом заключалась главная необходимость разработки такого пособия.

В методическом пособии в доступной форме излагаются важнейшие идеи математического анализа, рассматриваются основные разделы дифференциального и интегрального исчисления: пределы, производные, исследование функций одной переменной, неопределённые и определённые интегралы, приложение интегрального исчисления. Кроме того, пособие содержит примеры решения задач и разноуровневые практические задания к каждой теме. Большинство задач сопровождаются ответами, что делает пособие удобным для самостоятельного изучения.

При подборе материала соблюдается преемственность в обучении единство терминологии и обозначений в соответствии с действующими государственными стандартами.

При подборе практических заданий использованы различные сборники задач по высшей математике, в частности, «Задачник по высшей математике В.С. Шипачёва.

Пособие может быть использовано как под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения материала студентами.

Пособие специально приспособлено к курсу высшей математики, читаемому студентам нематематических специальностей.

Оглавление

Раздел II. Интегральное исчисление

ВВЕДЕНИЕ

Математика в современном мире

За время своего существования человечество прошло огромный путь от незнания к знанию и от неполного знания к более полному и совершенному. Потребовалось колоссальная работа мысли в самых разнообразных направлениях, и в том числе в области математики, чтобы сделать реальностью полеты в космос, овладение энергией атома и многие тысячи других идей. Математика превратилась в абсолютно необходимого помощника крупнейших исследований нашего времени, наряду с экспериментом, стала мощнейшим орудием познания. Она на определенных этапах развития знаний является единственным средством познания, позволяющим, подобно скальпелю хирурга, проникать во внутренние свойства вещей. А эксперимент, опыт сам потребовал участия математической мысли, чтобы сделать его целесообразным.

Необходимо отметить, что положение математики в современном мире далеко не то, каким оно было сто или даже сорок лет назад. Математика превратилась в повседневное орудие исследования в физике, астрономии, биологии, инженерном деле, организации производства и многих других областях теоретической и прикладной деятельности. Многие крупные врачи, экономисты и специалисты в области социальных исследований считают, что дальнейший прогресс их дисциплин тесно связан с более широким и полнокровным использованием математических методов, чем это было до настоящего времени. И чем грандиознее замыслы познания, тем более значительной становится роль математики.

В наше время математизация знаний совершает своеобразный победный марш. Многие области науки и практической деятельности, до самого последнего времени находившиеся вдали от использования математических средств исследования, теперь стремятся наверстать упущенное. Причина этого заключается не в быстро переходящей моде, а в том, что чисто качественные изучения явлений природы, экономики, организации производства, врачебного дела зачастую оказывается недостаточным. Как можно, для примера автоматизировать выплавку стали или крекинг нефти без знания точных количественных закономерностей, свойственных этим процессам? Как можно заставить рационально работать систему телефонной связи, если предварительно не изучить ни количественных закономерностей поступления требований от абонентов, ни распределения длительностей обслуживания этих требований линиями связи? Вот почему автоматизация технологических процессов неизбежно приводит к использованию математики и заставляет в свою очередь математику обращать внимание на решения новых вопросов и на разработку новых методов исследования.

Хорошо известно, что наши знания не только становятся обширнее, но и глубже, точнее. Многое из того, что было исследовано раньше и для своего времени казалось исчерпывающе познанным, в наши дни требует новых усилий с целью приведения принятых представлений в соответствие с требованиями практики и нашего стремления к познанию тех закономерностей, которыми управляются интересующие нас явления. Особенно повысились требования к поиску закономерностей, которые получили бы точное количественное выражение. К этому принуждается сама жизнь, вечно развивающаяся практическая деятельность.

С все большей остротой возникает необходимость передачи управления скоростными производственными процессами автоматам. Но автоматическое устройство само по себе не в состоянии решать логические задачи и на основе сведений о состоянии технологического процесса делать заключение о том, как его продолжать, какие изменения необходимо вносить в управляющие параметры – температуру, химический состав, скорость и пр. Автомат не понимает указаний качественного характера – делай лучше, обрабатывай точнее. Ему требуются строгие количественные приказы типа: если температура процесса такова, химический состав сырья такой-то, то скорость процесса должна иметь определенное значение; а если температура превзошла некоторый предел t_0, то требуется немедленно уменьшить нагрев смеси. Но для этого необходимо предварительно разработать количественную теорию процесса, которым управляют и затем на основе этой теории разработать программу действия управляющего автомата. Так неизбежно прогресс в области техники вызывает необходимость привлечения математики для решения насущных производственных задач. А таких задач возникает множество.

Построение теорий управления каждым отдельным процессом не может продолжаться слишком долго, поскольку такой подход не слишком рационален и заставляет много раз возвращаться к поиску ответов на примерно один и тот же вопрос. Появилась естественная необходимость построения общей теории управления процессами, и притом не какого-нибудь управления, а самого лучшего в том или другом смысле, т. е. оптимального управления. Такая математическая задача со всей остротой возникла в середине XX столетия и привлекла внимание многих выдающихся математиков во всех развитых в научном отношении странах.

Роль математики для развития других наук и практики невозможно установить сразу на все времена. Изменяются вопросы, которые требуют разрешения, характер решаемых задач, а также форма необходимого ответа. Математическое изучение явления неизбежно упрощает его. По мере уточнения наших знаний и выяснения роли ранее неучтенных факторов удается математическое описание процесса сделать более полным и точным. Процесс такого рода уточнений нельзя прервать, как нельзя ограничить развитие самого знания.

Смысл математизации знаний состоит не в том, чтобы все познание свести к чисто вычислительным или логическим операциям и не оставить места ни эксперименту, ни наблюдению. Такая программа завела бы познание в тупик. Цели математизации более реальны и плодотворны. Их смысл можно высказать, пожалуй, таким образом: из точно сформулированных предпосылок выводить логические следствия, в том числе и такие, которые могут быть непосредственно наблюдаемы; сделать доступными логическому и количественному анализу сложные и запутанные процессы, на которые наслаивается, как правило, множество второстепенных влияний; посредством математического анализа не только описывать уже установленные факты, но и предсказывать новые закономерности; получить реальную возможность прогнозировать течение явлений, добиваясь не только качественного, но и количественного согласия с реальным их протеканием.

Если эти предсказания оправдываются, то теория укрепляет свое положение и накапливает дополнительные выводы. Однако рано или поздно, поскольку математическая теория реальных явлений всегда приближенна, обязательно наступит момент, когда какое-то следствие теории не подтвердится практикой или экспериментом, или какой-то опытный факт останется необъяснимой теорией. Это будет означать, что теория пришла в противоречие с действительностью, что она уже оказывается недостаточной. Необходим в этом случае пересмотр исходных предпосылок теории, изменение тех фундаментальных положений, которые ранее казались не вызывающими сомнений, незыблемыми. Основанная на таком пересмотре новая теория должна быть способна проникать в суть изучаемых явлений глубже, чем предшествующая и, возможно, объяснить попутно и ряд других явлений, которые ранее лежали вне компетенции старой теории.

Математизация наших знаний состоит не только и не сколько в том, чтобы использовать готовые математические методы и результаты, а в том, чтобы создавать тот специфический математический подход, а вместе с ним и формальный аппарат, который позволил бы наиболее полно и точно описывать интересующий нас круг явлений, выводить следствия и использовать полученные результаты для практической деятельности.

Большой и сложный путь пройден математикой – от правил примитивного счета до предвычисления траекторий небесных тел и выбора оптимальной траектории космической станции; от непосредственного измерения расстояний на местности до прогнозирования существования элементов материи, которые ни разу в истории никем не наблюдались. Во многих областях науки созревает мысль о том, что математика является тем решающим методом, который позволит сдвинуть с места решение фундаментальных проблем, играющих исключительное значение для будущего человечества. Среди этих проблем хотелось бы назвать лишь две – изучение высшей нервной деятельности и разработку более рациональных методов обучения. Для решения обеих этих проблем в связи с усложнением условий жизни общества, с колоссальным, все ускоряющемся ростом поступающей в наше сознание информации, быстрым ростом объема накопленных знаний прежние, отработанные методы получения знаний оказываются недостаточными. Возникла необходимость разработки вопросов быстрой и плотной укладки новой научной информации в длительной памяти человеческого мозга и развитие творческих способностей человека. Математика в решении этих задач еще скажет свое весомое слово.

Раздел I. Дифференциальное исчисление

§ 1. Числовая последовательность

Определение. Под числовой последовательностью $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, понимается функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве N натуральных чисел. Обозначается $\{x_n\}$ или x_n, $n \in N$.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена $x_n = f(n)$, которая позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n.

Так равенства $v_n = n^2 + 1$; $z_n = (-1)^n \cdot n$; $y_n = \dfrac{1}{n}$; $u_n = \dfrac{n-1}{n}$, $n \in N$

задают соответственно последовательности

$v_n = \{2; 5; 10; \ldots; n^2+1; \ldots\}$;

$y_n = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\}$

$z_n = \{-1; 2; -3; 4; \ldots; (-1)^n \cdot n; \ldots\}$;

$u_n = \{0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots; \frac{n-1}{n}; \ldots\}$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > o$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$.

В противном случае последовательность называется неограниченной.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей (неубывающей)***, если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \ge a_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются ***монотонными***. Последовательности v_n , y_n , u_n монотонные, а z_n – не монотонная.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то ее называют ***постоянной***.

Другой способ задания числовых последовательностей –рекуррентный способ. В нем задается начальный элемент x_1 и правило определения $n-го$ элемента по $(n-1)-му$:

$x_n = f(\mathrm{x_n} - 1)$.

1.1. Предел числовой последовательности

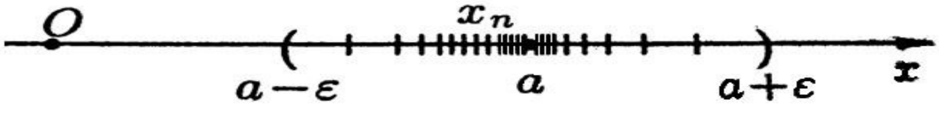
Можно заменить, что все члены последовательности u_n неограниченно приближаются к числу 1. в этом случае говорят, что последовательность u_n, $n \in N$ стремиться к пределу 1.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного ε числа, начиная с некоторого номера N, при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$

Пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Графически это выглядит так:

$|x_{\mathrm{n}} - a| < \varepsilon, \quad a - \varepsilon < Xn < a + \varepsilon$



Т.е. элемент x_n находится в ε - окрестности точки а. При этом последовательности $\{x_n\}$ называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

1.2. Основные свойства сходящихся последовательностей:

1) Сходящаяся последовательность ограничена.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a + b$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \times y_n) = a \times b$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a/b (b \neq 0)$.

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \le y_n \le Z_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и последовательность $\{y_n\}$ - ограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n^2+1}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+4}{n^2+5}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1})$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{5n+11}+\dfrac{\cos n}{10n})$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n^2+1}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n+1}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3}{n^2+1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\times 3^n}{3^n-2}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\times\sin n!}{n^2+1}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$
16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{5n}{n+1}+\dfrac{\sin n}{n})$
17. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$
19. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^n-n+1})$
20. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(n-\sqrt{n^2+1})$
21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+.....+n}{n^2}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^n})$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{3^n}}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+9+....+n^2}{n^3+3n+2}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+....+\frac{1}{n(n+1)}]$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+.....+n}{\sqrt{9n^4+1}}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+.....+(2n-1)}{1+2+3+.....+n}$

1.3. Число e (Теорема Вейерштрасса)

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем без доказательства признак существования предела последовательности.

Теорема (Вейерштрасса). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

В качестве примера на применении этого признака рассмотрим последовательность

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ , \ n\in N$$

Используя, бином Ньютона, приходим к следующему виду

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

т.е. последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in N$ ограничена

Убедимся теперь, что данная последовательность монотонна:

x_1 =2; x_2 =2,25; x_3 =2,37; x_4 =2,44; x_5 =2,49;…; x_{10} =2,59;…; x_{1000} =2,717.

Отсюда видно, что последовательность монотонно возрастающая.

Следовательно, по т. Вейерштрасса данная последовательность имеет предел.

Л.Эйлер, предложил этот предел обозначить буквой е.

Итак, $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2{,}718$

Справочный материал.

Бином Ньютона, название формулы, выражающей любую целую положительную степень суммы двух слагаемых (бинома, двучлена) через степени этих слагаемых, а именно:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n+k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n \qquad (1)$$

где n — целое положительное число, a и b — какие угодно числа.

Частными случаями бинома Ньютона при $n = 2$ и $n = 3$ являются известные формулы для квадрата и куба суммы а и b:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

при $n = 4$ получают $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ и т.д.

Коэффициенты формулы (или разложения) б. Н. называют биномиальными коэффициентами; коэффициент при $a^{n-k}b^k$ обозначается так: $\binom{k}{n}$ или C_n^k. Последнее обозначение связано с комбинаторикой: есть число сочетаний из n различных между собой элементов, взятых по k.

Найти пределы:

28. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

29. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 - \frac{5}{n})^{n}$

30. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{3n})^{n}$

31. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{4}{n})^{n+3}$

32. $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{n}{n+1})^{n}$

33. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+4}$

34. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+3)-\ln n]$

35. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln n-\ln(n+2)]$

36. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^{3n}$

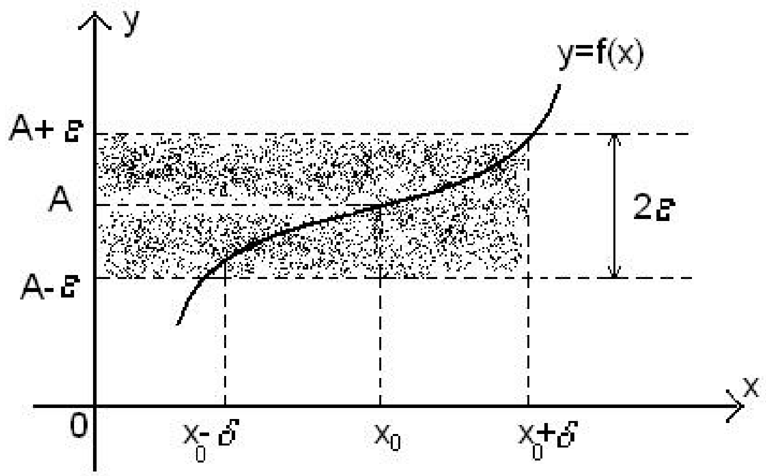
37. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-3}{n})^{\frac{n}{2}}$

§ 2. Предел функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение (по Коши) Число A называется пределом функции в точке x_0 (или при $x\to x_0$) если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ (дельта), что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ (рис 1)



(рис. 1)

Пример 1. Используя определение, доказать, что функция $f(x) = C$ (C – некоторое число) в точке $x = x_0$ (x_0 – любое число) имеет предел, равный C, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. тогда для любого числа $\delta > 0$ выполняется требуемое неравенство $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$; следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Пример 2. Используя определение, доказать, что функция $f(x) = x$ в точке $x = x_0$ имеет предел, равный x_0 т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда если взять $\delta = \varepsilon$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Используя определение, доказать, что:

38. $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 5) = 1$

39. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

40. $\lim\limits_{x \to 6} (2x - 5) = 7$

41. $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

42. $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 5) = 11$

43. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

44. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$

45. $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

46. $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$

47. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

2.1. Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0, любым способом оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0) или колеблясь около точки x_0

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$

Справа — $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$

Очевидно:

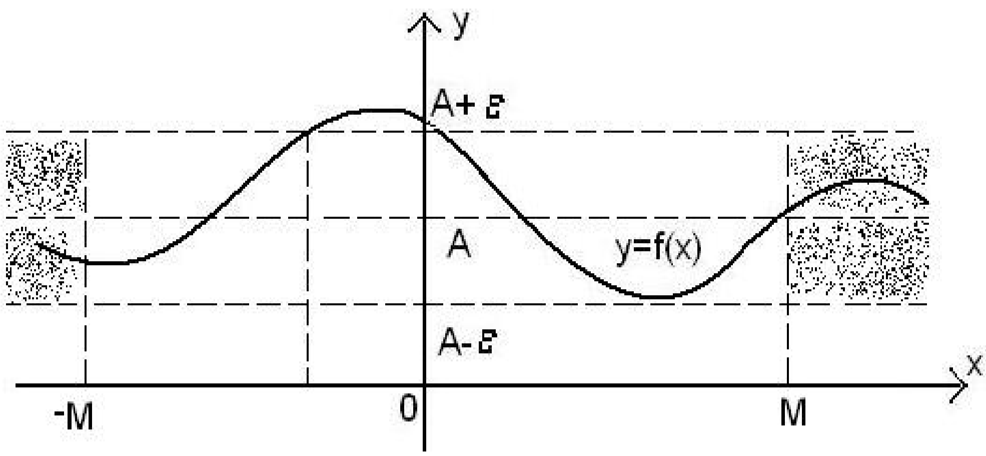
1. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют оба предела причем $A = A_1 = A_2$.

2. Если существуют оба односторонних предела, то существует предел $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

3. Если $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

2.2. Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция определена в промежутке $(-\infty;+\infty)$. Число **А** называется пределом функции $y = f(x)$ и $x \to \infty$, если для любого положительного ε существует такое число $M=M(\varepsilon)>0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис.2).

(рис.2) 

§ 3. Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Например: 1) $y = x - 2$ при $x \to 2$ б. м. ф. т.к. $\lim\limits_{x \to 2}(x-2) = 0$ 2) $y = \sin x$ при $x \to -\pi$ б. м. ф. т. к $\lim\limits_{x \to -\pi} \sin x = 0$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Например, $y = 2^x$ есть б. б. ф. при $x \to \infty$; $y = \dfrac{1}{x-4}$ б. б. ф. при $x \to 4$ действительно $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x = \infty$ и $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x-4} = \infty$

Теорема (*о связи между функций, ее приделом и бесконечно малой функцией*). Если функция $y = f(x)$ имеет придел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ то\ f(x) = A + \alpha(x).$

Доказательство:

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + d(x)$.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Следовательно,

$(\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$,

т.е. $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$. Это означает, что функция $f(x) - A$ имеет предел, равный нулю, т.е. является б.м.ф., которую обозначим через $\alpha(x)$: $f(x) - A = \alpha(x)$. Отсюда $f(x) = A + \alpha(x)$ **ч.т.д.**

Теорема (обратная). Если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде суммы числа А и б.м.ф. α (x), то число А является пределом функции $y = f(x)$, т.е если $f(x) = A + d(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Доказательство:

Пусть $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Тогда

$$\left(\forall\varepsilon>0;\exists\delta>0;\forall x:0<|x-x_0|<\delta\right)\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon.$$

А так как по условию $f(x)=A+\alpha(x)$, то $\alpha(x)=f(x)-A$. Получаем

$$\left(\forall\varepsilon>0;\exists\delta>0;\forall x:0<|x-x_0|<\delta\right)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ **ч.т.д.**

Например, требуется вычислить $\lim\limits_{ч\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$. Представим числитель и знаменатель в виде суммы числа и б.м.ф. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$

Функции $y=\dfrac{3}{x},y=\dfrac{1}{x^2},y=\dfrac{2}{x},y=\dfrac{5}{x^2}$ при $x\to\infty$ есть б.м.ф. таким образом

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

3.1. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x^0}\varphi(x)$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$. Тогда по теореме о связи функции, её предела и б.м.ф. можно записать $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$. Следовательно, $f(x)+\varphi(x)=A+B+(\alpha(x)+\beta(x))$. Здесь $\alpha(x)+\beta(x)$ - как б.м.ф. как сумма б.м.ф. По теореме о связи функции, её предела и б.м.ф. можно записать $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+\varphi(x))=A+B$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$ **ч.т.д.**

В случае разности функций доказательство аналогично.

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 2. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$. По теореме о пределе суммы (разности) двух функций имеем:

0=$\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$=A-B.

Отсюда A-B=0, т.е. A=B **ч.т.д.**

Теорема 3. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \times g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \times \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Доказательство:

Доказательство аналогично предыдущему, проведём его без особых пояснений. Так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, то

$f(x) = A + \alpha(x)$, $\varphi(x) = B + \beta(x)$,

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б.м.ф. Следовательно,

$f(x)\varphi(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x))$, т.е.

$f(x)\varphi(x) = AB + (A + \beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x))$

Выражение в скобках есть б.м.ф. Поэтому

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = AB$, т.е.

$\lim\limits_{x \to x_0}(f(x)\varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ **ч.т.д.**

Теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$.

Теорема 4. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} \quad (\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0)$$

Доказательство:

Из равенств $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B\neq 0$

Следуют соотношения $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}\right)=\frac{A}{B}+\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B^2+B\beta(x)}$$

Второе слагаемое есть б.м.ф. как частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел.

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$ **ч.т.д.**

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+4}{x^2-2x+4}=$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)}=\dfrac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\dfrac{1}{6}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{x-2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=$

$=\dfrac{3-0}{1-0}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-7x-8)=\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}7x-\lim\limits_{x\to 1}8=\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-7\lim\limits_{x\to 1}x-8=$

$=1-7-8=-14.$

3.2. Признаки существования пределов

1. Признак. Теорема. Если функция $y = f(x)$ заключена между двумя функциями $y = g(x)$ и $y = \varphi(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$ $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

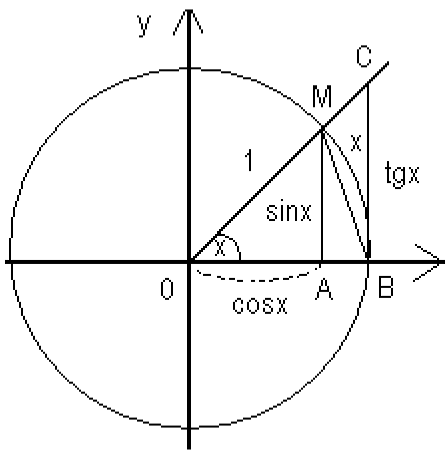
2. Признак. Теорема. Если функция $y = f(x)$ монотонна и ограничена при $x > x_0$ или $x < x_0$, то существует ее соответственно левый предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый придел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

3.3. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.

Докажем это равенство



Возьмём круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM| = \sin x$, дуга MB численно равна центральному углу x, $|BC| = tgx$. Очевидно, имеем $S_{\Delta MOB} < S_{сектораMOB} < S_{\Delta COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{x}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\sin x}{x}=1$$

Пусть теперь x<0. Имеем $\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x>0$.

Поэтому: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\sin x}{x}=1$ **ч.т.д.**

3.4. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \quad \text{или} \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

Вывод основывается на формулу Бинома Ньютона для числовой последовательности $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\in N$

Примеры:

Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\times\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{sim3x}{3x}=3\times 1=3$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{8x^3}=(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x})^3=1^3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x})^{x+1}=\begin{vmatrix}x=4t\\x\to\infty\\t\to\infty\end{vmatrix}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{4}{4t})^{4t+1}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{1}=$

$=(\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t})^4\times\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})=e^4\times 1=e^4$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{5x}\right)^{2x}=\begin{vmatrix}5x=-t\\x=\frac{-t}{5}\\x\to\infty\\t\to\infty\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{-2t}{5}}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-\frac{2}{5}}=e^{-\frac{2}{5}}$

Найти пределы:

48. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$

52. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

53. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

54. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3+4}$

55. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$

56. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$

57. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

58. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$

59. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}$

60. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

61. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

62. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$

63. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$

64. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg\,2x}{\sin 4x}$

65. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x}$

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

67. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

68. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

69. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

§ 4. Эквивалентные бесконечно малые функции

Две б.м.ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ есть б.м.ф. при $x\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0\ (A\in R)$, то α *и* β называются *бесконечно малыми одного порядка.*

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=0$, то α называется *бесконечно малой более высокого порядка чем* β.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, то α называется *бесконечно малой более низкого порядка, чем* β.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α *и* β называются *несравнимыми бесконечно малыми.*

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1$, то α *и* β называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x\to x_0$; это обозначается $\alpha\sim\beta$.

Теорема: Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Доказательство:

Пусть $\alpha\sim\alpha'$ и $\beta\sim\beta'$ при $x\to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta'}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\beta}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}=1\cdot1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'},$$

т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Очевидно также, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta'}$ **ч.т.д.**

Теорема: Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Доказательство:

Пусть $\alpha\sim\beta$ при $x\to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0,$$

аналогично $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0$.

Справедливо и обратное утверждение: если разность б.м.ф. α и β есть бесконечно малая высшего порядка, чем α или β то α и β- эквивалентные бесконечно малые.

Действительно, так как $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=0$, т.е. $1-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, т.е. $\alpha\sim\beta$. Аналогично, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}=0$, то $\alpha\sim\beta$. **ч.т.д.**

Теорема: Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Доказательство:

Докажем теорему для двух функций. Пусть $\alpha\to 0, \beta\to 0$ при $x\to x_0$, причем α – б.м.ф. высшего порядка, чем β, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}+1=0+1=1.$$

Следовательно, $\alpha+\beta\sim\beta$ при $x\to x_0$. **ч.т.д.**

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется ***главной частью этой суммы***.

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется ***отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.***

Пример:

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$, поскольку $3x+7x^2\sim 3x$ и $\sin 2x\sim 2x$ при $x\to 0$.

4.1. Применение эквивалентных бесконечно малых функций

Для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ часто бывает полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

Ниже приведены **важнейшие эквивалентности,** которые используются при вычислении пределов:

Важнейшие эквивалентности:

$1. \sin x \sim x (x \to 0);$	$7. a^x - 1 \sim x \ln a (x \to 0);$
$2. tgx \sim x (x \to 0);$	$8. \ln(1+x) \sim x (x \to 0);$
$3. \arcsin x \sim x (x \to 0);$	$9. \log_a (1+x) \sim x \times \log_a e (x \to 0);$
$4. arctgx \sim x (x \to 0);$	$10. (1+x)^k - 1 \sim k \times x$
$5. 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} (x \to 0);$	$R > 0 (x \to 0)$
$6. e^x - 1 \sim x (x \to 0);$	

Примеры:

С помощью замены на эквивалентные найти пределы:

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x} = \left|\ln(1+3x) \sim 3;\ \ \sin 5x \sim 5x\right| = \lim_{x\to 0} \frac{3\mathrm{x}}{5\mathrm{x}} = \frac{3}{5}.$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1+x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(\cos x - 1)]}{\frac{x^2}{4}} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -4 \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$= -4 \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -2.$$

3) $$\lim_{x\to 3} \frac{\log_3 x - 1}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\log_3 x - \log_3 3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\log_3 \frac{x}{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{\ln \frac{x}{3}}{\ln 3}}{x-3}$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \lim_{x\to 3} \frac{\ln\left[1 + \left(\frac{x}{3} - 1\right)\right]}{x-3} == \frac{1}{\ln 3} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{3} - 1}{x-3} = \frac{1}{3\ln 3}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x+x^2}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}.$

Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентами, найти пределы:

70. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}$

71. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$

72. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1-1}}$

73. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}$

74. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$

75. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$

76. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$

77. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt[5]{x}-1)(2^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}$

78. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{4}{5}}-1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$

79. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{3x}$

80. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$

81. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$

82. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\cos 2x}$

83. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$

84. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(\log_2 x)}{x-2}$

85. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\lg x)}{1-ctgx}$

86. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4^x-64}{x-3}$

87. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$

88. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$

89. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1}$

90. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{tgx}-3^{\sin x}}{(tg(x/2))^3}$

91. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4^{x-2}-1}{3^{x-2}-1}$

92. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5^x-5^5}{arctg(x-5)}$

93. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1}$

94. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$

95. $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{3x-1}{3x-6}$

96. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x+1}{x^2})^x$

97. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$

98. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

99 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

100. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg\,2x}$

101. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sin x}{\sin 2x}\right)^{\frac{1}{x}-2}$

102. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}+x)^{\frac{1}{x}}$

103. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$

104. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$

105. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-1}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}$

§ 5. Непрерывность функций

5.1. Непрерывность функции в точке

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x)$.

Пример. Докажите с помощью определения непрерывности функции в точке что функция y=3x^2+2x-1 непрерывна в точке x_0=1.

Доказательство:

У(1)=3*1^2+2*1-1=3+2-1=4

$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x-1)=4$

Данная функция непрерывна в точке x_0=1.

5.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в интервале (a;b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке [a; b], если она непрерывна в каждой точке интервала (a;b), при x=a непрерывна справа, (т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$), а в точке, x=b непрерывна слева (т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.

5.3. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа.

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции, если, по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

Примеры:

1) $y = \dfrac{1}{x-2}; x_0 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{1x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 = 2 \text{ точка разрыва второго рода.}$$

2) $y = \dfrac{|x-3|}{x-3}; x_0 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{|x-3|}{x-3} \lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{x-3}{x-3} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{-(x-3)}{x-3} = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 = 3 \text{ точка разрыва первого рода.}$$

Найти точки разрыва функции и указать их род:

1) $y = \dfrac{|x-5|}{x-5}$; 2) $y = \dfrac{2+7x}{(2x-3)(x+9)}$ 3) $y = \dfrac{3x^2-9x}{(x+3)(x-8)}$

4) $y = \dfrac{x^2-36}{x-6}$; 5) $y = \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; 6) $y = x^3+2x^2-3x+1$

5.4. Основные теоремы о непрерывных функциях

Непрерывность элементарных функций

Теорема: Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций, есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

Доказательство: Пусть функция $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на некотором множестве $\boldsymbol{X}$ и x_0 - любое значение из этого множества. Докажем, например, непрерывность произведения F(x)=$f(x)\cdot\varphi(x)$. Применяя теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = f(x_0)\cdot\varphi(x_0) = F(x_0).$$

Итак, $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $f(x)\cdot\varphi(x)$ в точке x_0. **ч.т.д.**

Теорема: Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u₀=$\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция f(φ(x)), состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

Доказательство: В силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т.е. при $x \to x_0$ имеем $u \to u_0$. Поэтому вследствие непрерывности функции $y = f(u)$ имеем:

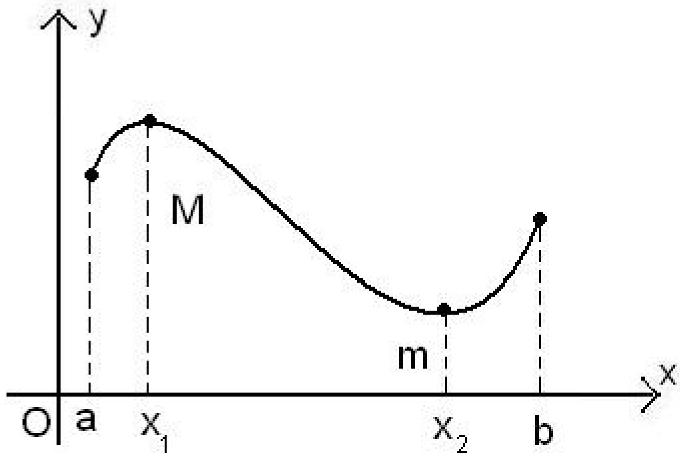
$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Это и доказывает, что сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0. **ч.т.д.**

Как известно, *элементарной* называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из приведённых выше теорем вытекает: **всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.**

5.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

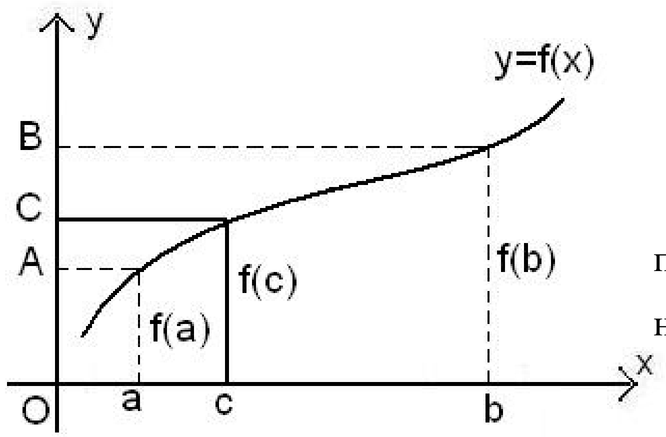
Теорема (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.



Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, принимает своё наибольшее значение M в точке x_1, а наименьшее m – в точке x_2. Для любого $x \in [a;b]$ имеет место неравенство $m \le f(x) \le M$

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

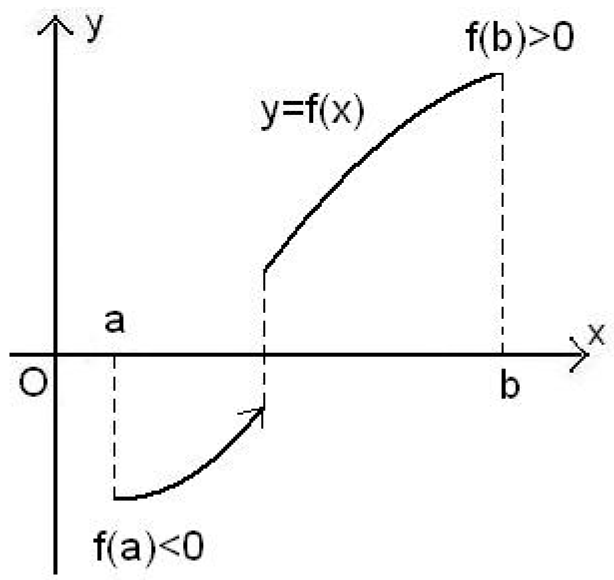
Теорема (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.



Для любого числа C, заключённого между A и B, найдётся точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c) = C$. Прямая $y = C$ пересекает график функции, по крайней мере в одной точке.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ найдётся хотя бы одна точка c, в которой данная функция $y = f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Следствие лежит в основе так называемого *«метода половинного деления»*, который используется для нахождения корня уравнения $f(c) = 0$.



Если хотя бы одно из приведённых условий теорем Вейерштрасса или Больцано-Коши не выполняется, то и сами заключения теорем не выполняются. *Например:* Если не выполняется условие непрерывности функции вследствие теоремы Больцано-Коши, то нельзя утверждать о существовании корня функции.

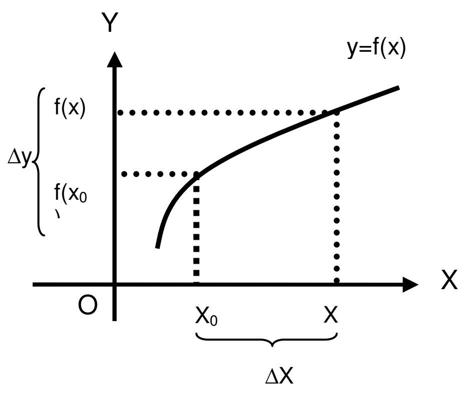
§ 6. Определение производной

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Запись $y = f(x)$ означает, что задана некоторая функция от переменной x.

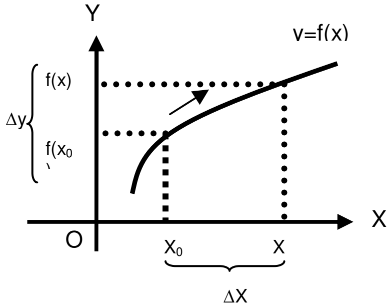
$(x - x_0)$- называется приращением аргумента; обозначается Δx: $\Delta x = x - x_0$

$[f(x) - f(x_0)]$ называется приращением функции; обозначается Δy: $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

Таким образом, определение производной можно записать в виде $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

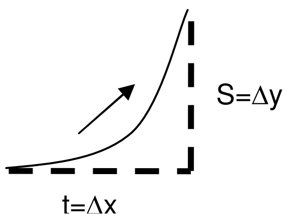
Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала (a;b), называется дифференцируемой в этом интервале; операция нахождения производной называется дифференцированием.

6.1. Механический и физический смысл производной



$$\Delta y = y(x) - y(x_0)$$
$$\Delta x = x - x_0$$

Пусть данная функция описывает движение материальной точки.



Тогда $t = \Delta x$ временной интервал

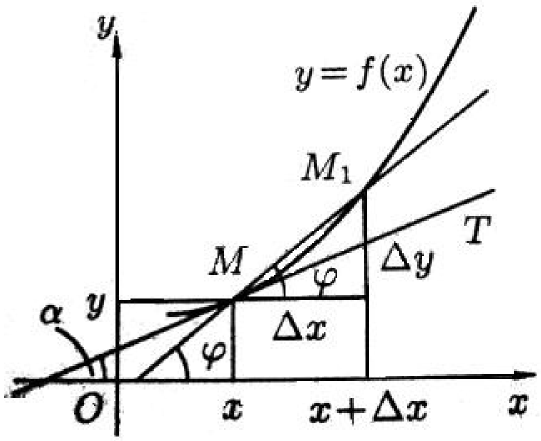
$S = \Delta y$ путь, пройденный точкой за данный промежуток времени (Δx).

Определение. Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная пути S по времени t. В этом состоит ***механический смысл производной.***

Т.е $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Обобщая можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой - либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит ***физический смысл производной.***

6.2.Геометрический смысл производной.



$R_{сек} = tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

($R_{сек}$ - угловой коэффициент секущей MM_1; прямая MM_1 пересекает график функции $y = f(x)$ в точках M и M_1 и расположена под углом φ по отклонению к оси абсцисс ОХ).

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремиться к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке М, а секущая MM_1 поворачиваясь около точки М, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т. е $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен $R = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Это равенство перепишем в виде $f'(x) = tg\alpha = R$, т.е. производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.

В этом заключается ***геометрический смысл производной***.

6.3. Правила дифференцирования

1) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$;
2) $(u \times \upsilon)' = u' \times \upsilon + \upsilon' \times u$, в частности $(cu)' = cu'$;
3) $(\dfrac{u}{\upsilon})' = \dfrac{u' \times \upsilon - \upsilon' \times u}{\upsilon^2}$;
4) $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$, если $y = f(u), u = \varphi(x)$;
5) $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

6.4. Формулы дифференцирования

1.$(C)' = 0$ 2.$(u^{\alpha})' = \alpha \times u^{\alpha-1} \times u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$; 3.$(a^{u})' = a^{u} \times \ln a \times u'$, в частности, $(e^{u})' = e^{u} \times u'$; 4.$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \times u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \times u'$; 5.$(\sin u)' = \cos u \times u'$; 6.$(\cos u)' = -\sin u \times u'$; 7.$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \times u'$; 8.$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \times u'$; 9.$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times u'$; 10.$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times u'$; 11.$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \times u'$; 12.$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \times u'$;

6.5. Приложение производной

Экономическим приложением производной, например, может быть нахождение производности труда в момент t_0 по функции количества произведенной продукции $u = u(t)$

С ее помощью находится такие показатели, как предельные затраты, предельная выручка, предельный спрос, предельная производительность и др. Внешним признаком наличия связи с производной в экономических приложениях является присутствие термина “предельный”.

Предельные затраты - это производная от затрат по выпуску продукции.

Предельная производительность- это производная от выпуска продукции по затратам данного ресурса.

Предельный спрос- это производная от спроса по цене.

6.6. Производная сложной и обратной функций

Определение. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом x и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке, x которая находится по формуле $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$.

6.7. Правило нахождения производной сложной функции:

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Пример. Вычислить производную сложной функции $y = \ln\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)$.

Решение:

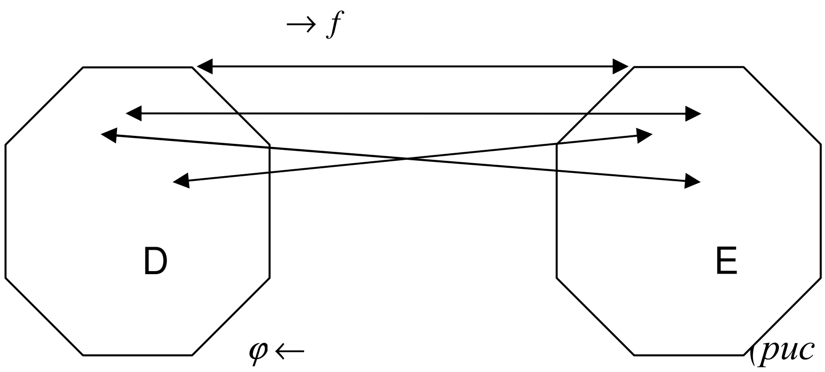
$$y = \ln\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right) = \left|(\ln u)' = \frac{1}{u}(u)'\right| = \frac{1}{\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)}\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)' =$$

$$= \left|(u+v)' = u' + v';\ \left(e^{kx}\right)' = k\,e^{x};\ \left(\sqrt[n]{u^{m}}\right)' = \left(u^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{n}{m}u^{\frac{n}{m}-1}u'\right| =$$

$$= \frac{4e^{4x} + \frac{4e^{4x}}{3}\left(e^{4x}+1\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)}$$

6.8. Обратная функция

Определение. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (рис1). Такая функция $x = \varphi(y)$ называется обратной к функции $y = f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $x = \varphi(y)$ и $y = f(x)$ говорят, что они являются взаимно обратными.



(рис 1)

Примеры:

1) $y = \frac{3}{x}$ и $x = \frac{3}{y}$

2) $y = x + 1$ и $x = y - 1$

3) $y = 2x - 3$ и $x = \frac{y+3}{2}$

(Для того чтобы для функции $y = f(x)$ найти обратную функцию надо переменную x выразить через переменную у).

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a;b) и имеет не равную нулю производную $f'(x)$ в производной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Примеры:

1. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение: Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

2. Найти производные заданных функций:

$$y = \left(x^3 + 3x^2 - 5\right) \times e^{x^2};$$

1) $y' = \left(3x^2 + 6x\right) \times e^{x^2} + \left(x^3 + 3x^2 - 5\right) \times e^{x^2} \times 2x =$
$\left(2x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 4x\right) \times e^{x^2}.$

$$y = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right);$$

2) $y' = (x)' arctgx + x(arctgx)' - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2}\left(1 + x^2\right)' =$

$$= 1 \times arctgx + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{2(1+x^2)} = arctgx.$$

3) $y=\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$;

$$y'=\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Найти производные функций:

106. $y=x^4+3x^2-2x+1$

107. $y=7x^7+3x^2-4x-1$

108. $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+4$

109. $y=\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}+2$

110. $y=4x^5-3\sin x+5ctgx$

111. $y=3\sqrt{x}+4\cos x-2tgx+3$

112. $y=3+4x^2+\sqrt[5]{x^3}+\frac{1}{x^2}+\sin x+\cos x+\ln x$

113. $y=\sqrt[8]{x^3}-4x^6+5\ln x-7\cos x+tgx+ctgx$

114. $y=\log_2 x+3\log_3 x$

115. $y=4e^x+arctgx+\arcsin x$

116. $y=e^x-\frac{tgx}{2}+\frac{x^4}{4}$

117. $y=5^x+6^x+(\frac{1}{7})^x$

118. $y=\arcsin x+3\sqrt[3]{x}+5\arccos x$

119. $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

120. $y=x\times\cos x$

121. $y=x^2tgx$

122. $y=\sqrt[7]{x}\ln x$

123. $y=x\arccos x$

124. $y=\sqrt[3]{x}arcctgx$

125. $y=x^2\log_3 x$

126. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

127. $y=\frac{\ln x}{\sin x}+xctgx$

128. $y=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$

129. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

135. $f(x)=\frac{x}{2x-1}$, *найти* $f'(0), f'(x), f'(-2)$

136. $f(x)=\frac{1-10^x}{1+10^x}$, *найти* $f'(0)$

137. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, *найти* $f'(e), f'(1/e), f'(e^2)$

138. $f(x)=x\ln x$, *найти* $f'(1), f'(e), f(1/e), f'(1/e^2)$

139. $y=\sin(x^2+5x+2)$

140. $y=\frac{1}{b}\cos(a-bx)$

141. $y=\sqrt{1-x^2}$

142. $y=\sqrt{1+5\cos x}$

143. $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$

144. $y=\sin^2 x$

145. $y=\sin^3 x$

146. $y=\cos^{100} x$

147. $y=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})$

148. $y=tg(x^2+3)$

149. $y=\ln\sin x$

150. $y=\ln\cos x$

151. $y=\ln tg5x$

152. $y=\ln(11+\cos x)$

153. $y=e^{tgx}$

154. $y=\ln(x^2-3x+7)$

155. $y=\ln(x^2+2x)$

130. $y=\frac{ctgx}{\sqrt{x}}$

131. $y=\frac{xtgx}{1+x^2}$

132. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$

133. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+x,$ *найти* $f'(0), f'(1), f'(-1)$

134. $f(x)=x^2-\frac{1}{2x^2},$ *найти* $f'(2)-f'(-2)$

163. $y=\sin^2 x^3$

164. $y=ctg^3\frac{x}{3}$

165. $y=\frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$

166. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

167. $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

168. $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln(\lg\frac{x}{2})$

169. $y=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}+\frac{1}{x}$

170. $y=a^{\sin x}, 0<a\neq 1$

171. $y=\sqrt{x}\times e^{\sqrt{x}}$

172. $y=x^2\times e^{-x}$

173. $y=(x+2)e^{-x^2}$

174. $y=e^{\frac{x}{3}}\cos(\frac{x}{3})$

175. $y=e^{\frac{1}{\cos x}}$

176. $y=e^{1/\ln x}$

177. $y=10^{3-\sin^3 2x}$

178. $y=\sin(2^x)$

179. $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$

156. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+5})$

157. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$

158. $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

159. $y=x\ln x+\arcsin\sqrt{x}$

160. $y=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$

161. $y=xarctg\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}$

162. $y=tg^3 x-3tgx+3x$

180. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

181. $y=\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$

182. $y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$

183. $y=\frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$

184. $y=\log_5\cos 7x$

185. $y=\log_7\cos\sqrt{1+x}$

186. $y=e\sqrt[7]{x^2}$

187. $y=\ln(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$

188. $y=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

189. $y=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$

190. $y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

191. $y=\arccos(1-2x)$

192. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$

193. $y=\arcsin(e^{4x})$

194. $y=\arcsin\sqrt{x}$

195. $y=arctg\sqrt{6x-1}$

§ 7. Дифференциал функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение Δy можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\times\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается dy:

$dy = f'(x)\times\Delta x$. $\quad (dy = f'(x)dx)$

При достаточно малых Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е. $\Delta y \approx dy$.

Найти дифференциалы функций

196. $y = \sin^3 2x$
197. $y = \ln(\sin\sqrt{x})$
198. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$
199. $y = 2^{-x^2}$
200. $y = x\ln x$
201. $y = \arcsin\sqrt{x}$
202. $y = x^3 + x\sqrt{x}$
203. $y = arctg\sqrt{x^2+1}$
204. $y = x^2\sin\sqrt{x}$
205. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}$
206. $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$
207. $y = xarctgx$
208. $y = \dfrac{x^2}{\arcsin x}$
209. $y = \sqrt{x}arctg\sqrt{x}$
210. Найти приближенно приращение Δy функции $y = x^2$, если x=2 и $\Delta x = 0{,}01$.

§ 8. Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка. Производная от $f'(x)$ называется производной второго порядка (или второй производной) от функции $y = f(x)$, и обозначается y'' или $f''(x)$. Производная от $f''(x)$ называется производной третьего порядка (или третьей производной) от функции $y = f(x)$ и обозначается y''' или $f'''(x)$ и т.д.

Производная n-го порядка есть производная от производной (n-1)-го порядка, т.е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Производные, начиная со второй, называются производными высшего порядка.

§ 9. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал $dy = f'(x)dy$ называется дифференциалом первого порядка.

Дифференциал d(dy) от дифференциала dy называется дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ и обозначается d^2y, т.е. $d^2y = f''(x)(dx)^2$.

Дифференциал $d(d^2y)$ от дифференциала d^2y называется дифференциалом третьего порядка функции $y = f(x)$ и обозначается d^3y и т.д.

Дифференциал $d(d^{n-1}y)$ от дифференциала d^{n-1} называется дифференциалом n – го порядка функции $y = f(x)$ и обозначается d^ny.

Найти производные второго порядка от функций:

211. $y = e^{-x^2}$
212. $y = tgx$
213. $y = ctgx$
214. $y = \arcsin\frac{x}{2}$
215. $y = \sin^2 x$
216. $y = \cos^2 x$
217. $y = \sqrt{1+x^2}$
218. $y = arctg\frac{1}{x}$
219. $y = \ln(2x-3)$
220. $y = x\sin x$
221. $y = x\arcsin x$
222. $y = \frac{x+1}{x-1}$

Найти производные третьего порядка от функций:

223. $y = arctg\frac{x}{2}$
224. $y = xe^{-x}$
225. $y = e^x\cos x$
226. $y = x^2\sin x$
227. $y = x^3 2^x$
228. $y = x\ln x$

Найти производные n-го порядка от функций:

229. $y = \ln x$
230. $y = \sin 3x$
231. $y = e^{x/2}$
232. $y = 2^{3x}$
233. $y = \cos^2 x$
234. $y = \ln(1+x)$
235. $y = 3^x$
236. $y = x^2 \ln x$

Найти дифференциалы второго порядка от функций:

237. $y = 4x^5 - 7x^2 + 3$
238. $y = \cos 2x$
239. $y = 4^{-x^2}$
240. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$

Найти дифференциалы, указанных порядков от функций:

241. $y = \sin^2 x,$ *найти* $d^3;$
242. $y = \sqrt{x-1},$ *найти* $d^4 y;$
243. $y = x \ln x,$ *найти* $d^5 y;$
244. $y = x \sin x,$ *найти* $d^{10} y.$

§ 10. Правила Лопиталя

I. Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(x) = 0,$ *то* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, когда последний предел существует (конечный или бесконечный).

II. Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(x) = \infty,$ *то* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, когда последний предел существует (конечный или бесконечный).

10.1. Раскрытие неопределенностей различных видов

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые называют основными. Неопределенности вида $0 \times \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

Найти пределы, используя правила Лапиталя:

245. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

246. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$

247. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\left(e^x+e^{-x}\right)\cos x}{x^4}$

248. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

249. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$

250. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

251. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\pi-2arctgx}$

252. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

253. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

254. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

§ 11. Исследование функции при помощи производных

11.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in$ (a;b), в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$.

Теорема Коши. Если функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале (a;b), причем $\varphi'(x)\neq 0$ для $x\in$ (a;b), то найдется хотя бы одна точка $c\in$ (a;b) такая, что выполняется равенство $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c\in$ (a;b) такая, что выполняется равенство $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Следствие 1. Если производная некоторой функции на промежутке равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

11.2. Возрастание и убывание функций

Теорема 1. (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (a;b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для любого $x \in (a;b)$.

Теорема 2. (достаточные условия). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

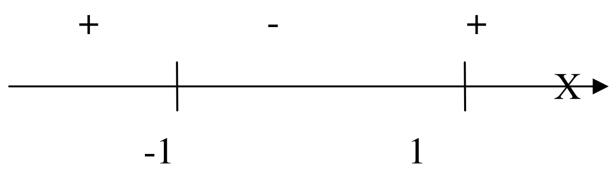
Теоремы 1 и 2 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность (функция, убывающая или возрастающая, называется монотонной).

Пример. Исследовать функцию $f(x)$ =x^3-3x-4 на монотонность.

Решение:

$x \in R = (-\infty;+\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1) \times (x+1)$



$f'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$f'(x) \leq 0$ при $x \in [-1;1]$

Ответ: данная функция возрастает при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ и убывает $x \in [-1;1]$

11.3. Максимум и минимум функций

Теорема (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f(x)$ =0.

Теорема (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ- окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева на право) производная $f^{'}(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума основанный на определении знака второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю $(f'(x) = 0)$, а вторая производная в точке x_0 существует и отличная от нуля $(f''(x) \neq 0)$, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум - при $f''(x_0) > 0$.

11.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a;b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх.

Если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$ - график выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку, x_0 в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

11.5. Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Если существует наклонная асимптота y=Rx+b, то R и b находится по формуле: $R = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - Rx)$.

Если R=0, то y=b- уравнение горизонтальной асимптоты.

11.6. Общая схема исследования функции и построения графика функции

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.

2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f'(x)$ >0 или $f'(x)$ <0).

4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

5. Найти асимптоты графика функции.

6. Найти интервалы монотонности функции.

7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x}{1 - x^2}$ и построить ее график.

1. $x \in (-\infty; -1), (-1; 1), (1 + \infty)$

2. $x = 0, y(0) = 0$

Точка (0;0)- точка пересечения графика с осями ОХ и ОУ.

3. Функция знакоположительна (y>0) в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, знакоотрицательна – в $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$

4. Функция $y = \frac{x}{1-x^2}$ является нечетной т.к. $y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x)$. Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geq 0$.

5. Прямые x = 1 и x = -1 являются ее вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (\frac{x}{1-x^2} - 0 \times x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение y=0. Наклонных асимптот нет.

Прямая y=0 является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

6. $y' = (\frac{x}{1-x^2})' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$.

Так как y’>0 в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

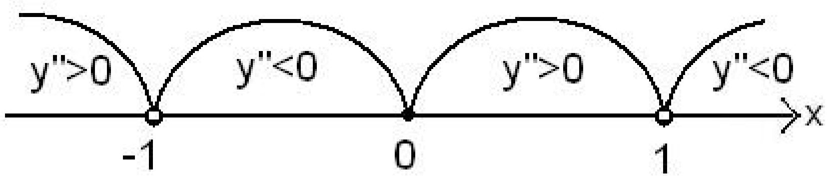
7. Т.к. $y' = \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}$, то критическими точками является точки

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

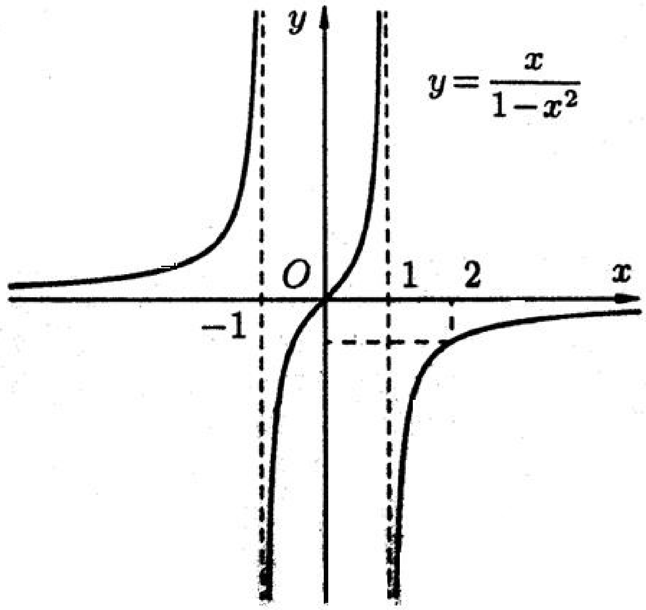
8. Найдем y”

$$y'' = (\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2})' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка (0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$



Построить график функции:

1). $y = x^3 - 3x$

2). $y = \frac{x^3}{3} + x^2$

3). $y = x + 2\sqrt{-x}$

4). $y = \frac{6\sqrt{x}}{x+2}$

5). $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$

6). $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

7). $y = 12x - x^3$

8). $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$

9). $y = 3x - x^2$

10). $y = x\sqrt{-x+1}$

11). $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$

12). $y = -\sqrt{2x-1}$

13). $y = \sqrt[3]{8x-1} + 1$

14). $y = 2 - \frac{3}{x+1}$

15). $y = \frac{x+5}{x+3}$

16). $y = x(x-1)^{\frac{2}{3}}$

17). $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

18). $y = \frac{(x-2)^3}{(x-2)^2 - 4}$

19). $y = \frac{(x+3)^3}{(x+3)^2 - 9}$

20). $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

23). $y = \frac{1}{x^3}$

24). $y = x^2 + \frac{1}{x}$

Раздел II. Интегральное исчисление

§ 12. Неопределенный интеграл

Основные сведения. Функция y = F(x) называется первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке $\boldsymbol{X}$, если для любого $x \in \boldsymbol{X}$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Функция F(x)=sinx является первообразной для функции y(x)=cosx на $\boldsymbol{X} = (-\infty; +\infty)$, так как при любом x $(\sin x)' = \cos x$.

Если F(x) – первообразная для $f(x)$, то функция F(x)+c, где C – некоторая постоянная, также является первообразная для $f(x)$. Например, для y(x)=cosx первообразной является не только F(x)=sinx, но и функция F(x)=sinx+c, так как (sinx+c)'=cosx.

Определение. Если функция y = F(x) – первообразная для функции $y = f(x)$, то множество функций F(x)+c, где c –постоянное число, называется неопределенным интегралом от функции $y = f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + c$.

При этом функция $f(x)$, называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, переменная x – переменной интегрирования, $\int$ – знаком интегрирования.

Восстановление функции по ее производной, или, что – то же, отыскание неопределенного интеграла, называется интегрированием.

Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.

12.1. Основные свойства неопределенного интеграла

$1^0 \; (\int f(x)dx)' = f(x)$; $2^0 \; d\int f(x)dx = f(x)dx$;

$3^0 \; \int dF(x) = F(x) + c$; $4^0 \; \int kf(x)dx = k\int (x)dx$;

$5^0 \; \int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

12.2. Таблица основных интегралов.

$$1.\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,(\alpha\neq-1),\text{в частности, }\int du=u+c;$$

$$2.\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c;\ 3.\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+c;\ 4.\int e^{u}du=e^{u}+c;\ 5.\int\sin u\,du=-\cos u+c;$$

$$6.\int\cos u\,du=\sin u+c;\ 7.\int tgu\,du=-\ln|\cos u|+c;\ \ 8.\int ctgu\,du=\ln|\sin u|+c;$$

$$9.\int\frac{du}{\cos^{2}u}=tgu+c;\ \ 10.\int\frac{du}{\sin^{2}u}=-ctgu+c;\qquad 11.\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|tg\frac{u}{2}\right|+c;$$

$$12.\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|tg(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4})\right|+c;\qquad 13.\int\frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=\arcsin\frac{u}{a}+c;$$

$$14.\int\frac{du}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}=\ln\left|u+\sqrt{u^{2}+a^{2}}\right|+c;\qquad 15.\int\frac{du}{a^{2}+u^{2}}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+c;$$

$$16.\int\frac{du}{a^{2}-u^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c;\qquad 17\int\sqrt{a^{2}-u^{2}}du=\frac{u}{2}\sqrt{a^{2}-u^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\arcsin\frac{u}{a}+c;$$

$$18.\int\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}du=\frac{u}{2}\times\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\pm\frac{a^{2}}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right|+c.$$

§ 13. Основные методы интегрирования

13.1. Метод непосредственного интегрирования

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралом, называется непосредственном интегрированием.

Примеры:

1) $\int\frac{d(x)}{x+3}=\int\frac{d(x+3)}{x+3}=\ln|x+3|+c$

2) $\int\left(4x^{3}-\frac{5}{\cos^{2}2x}+3^{1-x}\right)d(x)=4\int x^{3}dx-\frac{5}{2}\int\frac{d(2x)}{\cos^{2}2x}-\int 3^{1-x}d(1-x)=$

$x^{4}-\frac{5}{2}tgx-\frac{3^{1-x}}{\ln 3}+c$

13.2. Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)$ и получают $\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Примеры:

1) $\int \cos 3x dx = \left| \begin{matrix} 3x = t & 3dx = dt \\ (3x)'dx = dt & ; dx = \frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \int \cos t \times \frac{1}{3} \sin t + c = \frac{1}{3} \sin 3x + c$

2) $\int \sin(7x+8)dx = \left| \begin{matrix} 7x+8 = t & dx = \frac{1}{7}dt \\ 7dx = dt & ; \end{matrix} \right| = \int \sin t \times \frac{1}{7} dt \Big| = -\frac{1}{7}\cos t + c = -\frac{1}{7}\cos(7x+8) + c$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} 1-x^2 = t & dx = -\frac{dt}{2x}dt \\ -2xdx = dt & ; \end{matrix} \right| = -\int \frac{\cancel{x}dt}{\sqrt{t} \times 2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \times \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c =$

$= -\frac{1}{2} \times 2 \times t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

4) $\int (15-3x)^7 dx = \left| \begin{matrix} 15-3x = t & dx = -\frac{1}{3}dt \\ -3dx = dt & ; \end{matrix} \right| = \int t^7 \times (-\frac{1}{3})dt = -\frac{1}{3} \times \frac{t^8}{8} + c = -\frac{(15-3x)^8}{24} + c$

13.3. Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int u d\upsilon = u \times \upsilon - \int \upsilon du}$$

Вид интеграла	Подстановка
$\int P(x) arctgx dx; \int P(x) arcctgx dx; \int P(x) \ln x dx;$ $\int P(x) \arcsin x dx; \int P(x) \arccos x dx; P(x)$ - многочлен.	$u = arctgx$ $u = arcctgx$ $u = \ln x$ $u = \arcsin x$ $u = \arccos x$ $d\upsilon = P(x)dx$ $\upsilon = [первообразная P(x)]$

$\int P(x)e^{kx};\int P(x)\sin kxdx;\int P(x)\cos kxdx,$ $k-$ *некоторое число* *P(x) – многочлен.*	$u=P(x)$ $d\upsilon=e^{kx}dx$ $\upsilon=[первообразная E^{kx}]$ $d\upsilon=\sin kxdx$ $\upsilon=[первообразная \cos kx]$
$\int e^{ax}\cos bxdx;\int e^{ax}\sin bxdx$ *a и b некоторые числа.*	*Двукратное интегрирование* *Например:* $\int e^{x}\cos xdx=\begin{vmatrix} u=e^{x} & dx=\cos xdx \\ du=e^{x}dx & ;\upsilon=\sin x\end{vmatrix}=$ $=e^{x}\sin x-\int e^{x}\sin xdx=\begin{vmatrix} u=e^{x} & d\upsilon=\sin xdx \\ du=e^{x}dx & ;\upsilon=-\cos x\end{vmatrix}=$ $=e^{x}\sin x-(-e^{x}\cos+\int e^{x}\cos xdx)$. $\int e^{x}\cos xdx=\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)+c$.

Примеры:

1) $\int \ln xdx=\begin{vmatrix} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{vmatrix}=x\times\ln x-\int x\times\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+c$

2) $\int(2x+1)e^{3x}d(x)=\begin{vmatrix} u=2x+1\Rightarrow du=2dx \\ dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\end{vmatrix}=$

$=(2x+1)\times\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}2xdx=\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+c$

Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

256. $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$

257. $\int (x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})dx$

258. $\int (\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$

259. $\int (2^x + 3^x)dx$

260. $\int e^x(2 - \frac{e^{-x}}{x^3})dx$

261. $\int (\sin x + 5\cos x)dx$

262. $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$

263. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \times \sin^2 x} dx$

264. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

265. $\int \frac{3 - 2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$

266. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

267. $\int ctg^2 x dx$

268. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

269. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$

270. $\int (\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x^2+3})dx$

271. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx$

272. $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})dx$

273. $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$

274. $\int 4x(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}})dx$

275. $\int e^x(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$

276. $\int \frac{5x^8 + 1}{x^4} dx$

277. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx$

278. $\int \frac{3tg^2 x + 4}{\sin^2 x} dx$

279. $\int (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 dx$

280. $\int 2^x e^x dx$

281. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

282. $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$

283. $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^2 + 1} dx$

284. $\int \frac{-2x^4 + 4x^2 - 1}{1 - x^2} dx$

285. $\int \frac{-3x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

286. $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx$

287. $\int \frac{dx}{16 - x^2}$

Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы:

288. $\int \cos 5x dx$

289. $\int \sin 7x dx$

290. $\int \sin(3x+5) dx$

291. $\int e^{2x} dx$

292. $\int tgx dx$

293. $\int e^{-x^2} x dx$

294. $\int \frac{e^{4x}}{e^x - 1} dx$

295. $\int \frac{x^4}{x^5 + 7} dx$

296. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$

297. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$

298. $\int (2+5x)^9 dx$

299. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$

300. $\int \sqrt{2x-5} dx$

301. $\int \sqrt[3]{3-7x} dx$

302. $\int \frac{dx}{5x+2}$

303. $\int \frac{dx}{2-3x}$

304. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

305. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$

306. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}} dx$

307. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$

308. $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$

309. $\int \frac{\cos 3x}{3+\sin 3x} dx$

310. $\int \cos^3 x \sin x dx$

311. $\int \sin^2 x \cos x dx$

312. $\int e^{\cos x} \sin x dx$

313. $\int e^{-x^3} x^2 dx; \left(t = e^{-x^3}\right)$

314. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

315. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

316. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2} dx$

317. $\int e^{-tgx} \sec^2 x dx$

325. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

326. $\int \frac{dx}{(\arccos x)\sqrt[5]{1-x^2}}$

327. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

328. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx$

329. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} dx$

330. $\int \sqrt{3+\cos 5x} \sin 5x dx$

331. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[7]{3+5\sin 3x}} dx$

332. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx$

333. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

334. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

335. $\int 4^{1-3x} dx$

318. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

319. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

320. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}; (t = 1 + \ln x)$

321. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

322. $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \left(t = \frac{1}{x}\right)$

323 $\int \frac{(arctgx)^{100}}{1+x^2} dx; (t = arctgx)$

324. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^{2x}}}$

336. $\int \frac{dx}{4x^2 + 5}$

337. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 4x^2}}$

338. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x^2}}$

339. $\int \frac{dx}{9x^2 - 1}$

340. $\int \frac{dx}{3 - 5x^2}$

341. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 5}}$

342. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2 - x^4}}; (t = x^2)$

343. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8 - 3}}; (t = x^4)$

344. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

345. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

346. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

347. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

348. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$

349. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$

С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

350. $\int xarctgxdx$

351. $\int \arcsin xdx$

352. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$

353. $\int arctg\sqrt{7x-1}dx$

354. $\int \frac{arctgx}{x^2}dx$

355. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

356. $\int \ln xdx$

357. $\int x\ln xdx$

358. $\int x\ln(3x+2)dx$

359. $\int (x^2+3x+2)\ln xdx$

360. $\int (4x^3+6x-7)\ln xdx$

361. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

362. $\int xe^{-x}dx$

363. $\int xe^{5x}dx$

364. $\int x^3e^{-x}dx$

365. $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$

366. $\int x\cos xdx$

367. $\int x\sin xdx$

368. $\int (x+1)\cos 3xdx$

369. $\int x^2\cos xdx$

370. $\int x^2\sin xdx$

371. $\int x^2e^x dx$

372. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

373. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

374. $\int e^x\sin\frac{x}{2}dx$

375. $\int (x^3+1)\cos xdx$

376. $\int \ln^2 xdx$

377. $\int \ln(x^2+2)dx$

378. $\int \cos(\ln x)dx$

379. $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

380. $\int e^{\sqrt{x}}dx; (t=\sqrt{x})$

381. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

§ 14. Определенный интеграл

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке [a;b], $a<b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a=x_0<x_1<x_2<x_3<...........<x_{i-1}<........<x_n=b$

В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1},x_i]$ выберем произвольную точку Ci $(x_{i-1}\le Ci\le x_i)$ и составим сумму

$$S_n=f(C_1)\times\Delta x_1+f(C_2)\times\Delta x_2+f(C_3)\times\Delta x_3+.......+f(C_n)\times\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(Ci)\times\Delta x_i \qquad (*)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида (*) называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке [a;b].

Обозначим через α длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\alpha = \max\{\Delta x_i\}$
$1 \le i \le n$

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, когда $n \to \infty$ так, что $\alpha \to 0$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке [a;b] и обозначают следующим образом: $\int_a^b f(x)dx$ или $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$. В этом случае функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке [a;b] . Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

14.1. Основные свойства определенного интеграла

$1^0 \int_a^a f(x)dx = 0$; $2^0 \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

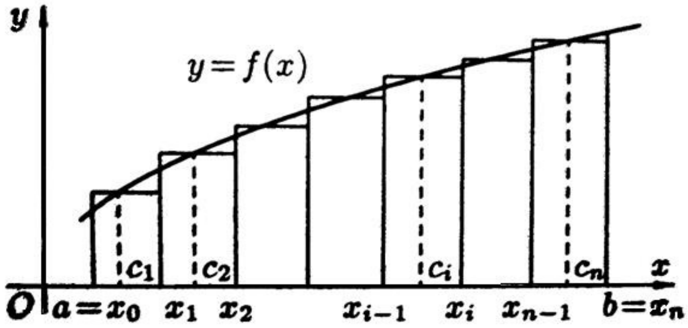
$3^0 \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; где *a, b, c* любые числа.

$4^0 \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; $5^0 \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

14.2. Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и функция y = *F(x)* является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

14.3. Геометрический смысл



Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью *Ox*, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется криволинейной трапецией.

Сумма, вида $f(C_1)\times\Delta x_1 + f(C_2)\times\Delta x_2 + ... + f(C_n)\times\Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(Ci)\times\Delta x_i = S_n$

равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади *S* криволинейной трапеции: $S \approx S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(Ci)\Delta x_i$

Когда *n* неограниченно возрастает так, что $\alpha = \max\Delta x_i \to 0$ за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n

$$S = \lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\alpha\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(Ci)\times\Delta x_i \,, \qquad \text{т.е.} \quad S = \int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Таким образом, определенный интеграл от неопределенной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

§ 15. Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

15.1. Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(\mathrm{t})$

Теорема. Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [d;\beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ **то** $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt}$ (*)

Действительно:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$ **ч. т. д.**

Данная формула (*) называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

15.2. Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Пример.

Вычислить $\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx$.

Решение:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & dx = \sin\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx & x = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| = -2\cos\frac{x}{2}e^x \Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^x \cos\frac{x}{2}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^x & dx = \cos\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx & x = 2\sin\frac{x}{2} \end{matrix} \right| = -2\cos\frac{\pi}{2}e^{\pi} + 2\cos\frac{0}{2}e^0 + 2\left(2e^x \sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx\right) =$$

$$= 2 + 4e^{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - 4e^0 \sin\frac{0}{2} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 2 + 4e^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 1 + 2e^{\pi}$$

Ответ: $\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 1 + 2e^{\pi}$

Вычислить интегралы:

382. $\int_a^b x^n dx (n \neq 1)$

383. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

384. $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$

385. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

399. $\int_0^2 \left(3x^2 - 1\right)dx$

400. $\int_1^2 e^x dx$

401. $\int_0^{\pi} \sin x dx$

402. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

386. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

403. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$

387. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx$

404. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$

388. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

405. $\int_0^2 x(3-x)dx$

389. $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$

406. $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x dx$

390. $\int_1^e \ln x dx$

407. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

391. $\int_1^e \ln^2 x dx$

408. $\int_0^{\sqrt{3}} arctgx dx$

392. $\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}dx$

409. $\int_{-1}^{1} x^2e^{-x}dx$

393. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

410. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$

394. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

411. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

395. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

412. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

396. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x dx$

413. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^2 x dx$

397. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

414. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

398. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

415. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

416. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$

417. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$

§ 16. Приложения определенного интеграла

Вычисление площади плоской фигуры

Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью O_x и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a\le x\le b$, $f(x)\ge 0$ (рис. 1)

Так дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, т. е. $dS=f(x)dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b, получим

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси O_y так, что $c\le y\le d$, $x=\varphi(y)\ge 0$ (рис. 2), то дифференциал переменной площади S равен $dS=f(y)dy$, откуда

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy. \qquad (2)$$

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$, осью O_x и прямыми x=a и x=b, лежит под осью O_x (рис. 3), площадь находится по формуле

$$S=\int_a^b |\,f(x)|\,dx. \qquad (3)$$

Если фигура, ограниченная кривой $f(y)$, осью O_x и прямыми x=a и x=b, расположена по обе стороны от оси O_x (рис. 4), то

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_a^b |\,f(x)|dx. \qquad (4)$$

Пусть, наконец, фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и прямыми x=a и x=b, где $a\le x\le b$ и $f_1(x)\le f_2(x)$ (рис. 5). Тогда ее площадь находится по формуле

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx. \qquad (5)$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x+2y-4=0$, $y=0$, $x=-3$ и $x=2$.

<u>Решение</u>. Выполним построение фигуры. Строим прямую $x+2y-4=0$ по двум точкам A(4;0) и B(0;2) (рис.6). Выразив y через x, получим $y=-0{,}5x+2$. По формуле (1), где $f(x)=-0{,}5x+2$, $a=-3$ и $b=2$, находим

$$S=\int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)dx=\left[-0{,}25x^2+2x\right]_{-3}^{2}=11{,}25 \text{ (кв. ед.)}$$

В качестве проверки вычислим площадь трапеции M_1MNN_1 обычным путем. Находим: $M_1M=f(-3)=-0{,}5(-3)+2=3{,}5$, $N_1N=f(2)=-0{,}5\cdot 2+2=1$, $M_1N_1=5$. Следовательно, $S=0{,}5(3{,}5+1)\cdot 5=11{,}25$ (кв. ед.).

Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v=f(t)\geq 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (6)$$

<u>Пример</u>. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(3t^2+2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

<u>Решение</u>. Согласно условию, $f(t)=3t^2+2t+1$, $t_1=0$, $t_2=10$. По формуле (6) находим

$$S=\int_{0}^{10}(3t^2+2t+1)dt=\left[t^3+t^2+t\right]_0^{10}=10^3+10^2+10=1110 \text{ (м)}.$$

Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси O_x материальной точки от $x=a$ до $x=b$, находится по формуле

$$A=\int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F=kx, \qquad (8)$$

где F - сила, Н; x - абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F, а k - коэффициент пропорциональности, Н/м.

Пример. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение. Так как, $x = 0{,}01$ м при $F = 10$Н, то, подставляя эти значения в равенство (8), получим, $10 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 1000$ Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение k, находим $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x.$ Искомую работу найдем по формуле (7), полагая $a = 0$, $b = 0{,}04$:

$$A = \int_0^{0{,}04} 1000x dx = 500x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

Вычисление работы, производимой при поднятии груза

Пример. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

Решение. Выделим на глубине *x* горизонтальный слой высотой *dx* (рис. 7).

Работа *A*, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом *P* на высоту *x*, равна P_x.

Изменение глубины *x* на малую величину *dx* вызовет изменение объема *V* на величину $dV = \pi r^2 dx$ и изменение веса *P* на величину $dP = 9807\pi r^2 dx;$ при этом совершаемая работа *A* изменится на величину $dA = 9807\pi r^2 x dx.$

Проинтегрировав это равенство при изменении *x* от 0 до *H*, получим

$$A = \int_0^H 9807\pi r^2 x dx = 4903\pi r^2 H^2 = 4903\pi \cdot 0{,}25 \cdot 2^2 = 4903\pi \text{ (Дж)}.$$

Вычисление силы давления жидкости

Значение силы *P* давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения *x* этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (Н) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = 9807\delta S x,$$

где δ - плотность жидкости, $кг/м^3$; *S* площадь площадки, $м^2$; *x* - глубина погружения площадки, м.

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения *P(x)*.

Пример. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20 м и высотой 5 м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).

Решение. На глубине x выделим горизонтальную полоску шириной dx (рис 8). Сила давления P на стенку шлюза есть функция от x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давления P на малую величину ΔP.

Продифференцировав переменную P, получим приближенное значение (главную часть) dP приращения ΔP.

Находим приближенное значение силы давления воды на эту полоску: $\Delta P = 9{,}807\delta x\Delta S = 9807x \cdot 20\Delta x.$ Но, $dP \approx \Delta P.$ Интегрируя dP при изменении x от 0 до 5, получим

$P = 9807 \cdot 20\int\limits_0^5 xdx = 9807 \cdot 10x^2 \mid_0^5 = 2{,}45$ (МН).

Длина дуги плоской кривой

Пусть плоская кривая AB (рис. 9) задана уравнением $y = f(x)(a \le x \le b)$, причем $f(x)$ и $f'(x)$ - непрерывные функции в промежутке $a \le x \le b.$ Тогда дифференциал dl длины дуги AB выражается формулой

$dl = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ или $dl = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx,$

а длина дуги AB вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_a^b dl = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx, \qquad (9)$$

где a и b - значения независимой переменной x в точках A и B.
Если кривая задана уравнением, $x = \varphi(y)(c \le y \le d)$, то длина дуги AB вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_c^d \sqrt{1 + \left[\varphi'(y)\right]^2}\,dy, \qquad (10)$$

где c и d – значения независимой переменной y в точках A и B.

Пример. Найти длину окружности $x^2 + y^2 = r^2.$

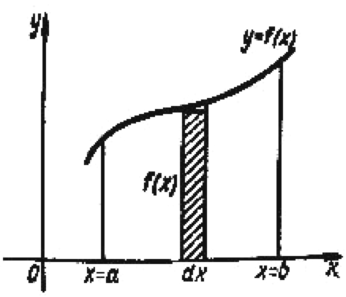
Решение. Дифференцируя уравнение окружности, имеем

$2x + 2y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0;\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}.$

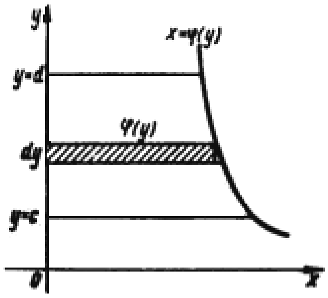
По формуле (9) вычислим длину дуги четверти окружности, взяв пределы интегрирования от 0 до r:

$L/4 = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \left(-\dfrac{x}{y}\right)^2}\,dx = \int\limits_0^r \sqrt{\dfrac{y^2 + x^2}{y^2}}dx = \int\limits_o^r \sqrt{\dfrac{r^2}{y^2}}dx = r\int\limits_0^r \dfrac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\arcsin\dfrac{x}{r}\mid_0^r = \dfrac{\pi r}{2}.$

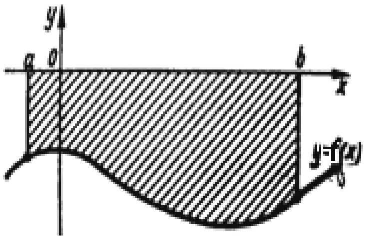
Длина окружности равна $C = 4L = 4(\pi r/2) = 2\pi r.$



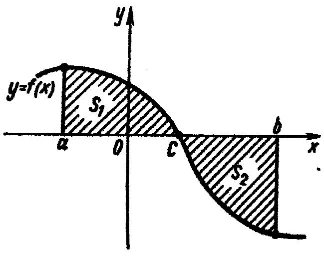
(рис. 1)



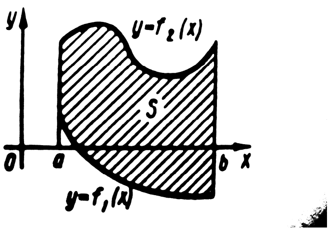
(рис. 2)



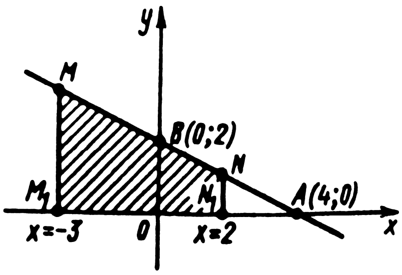
(рис. 3)



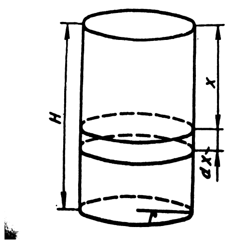
(рис. 4)



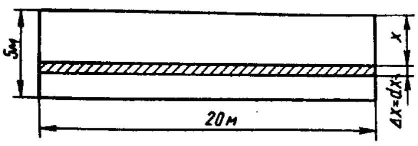
(рис. 5)



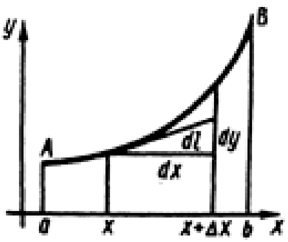
(рис. 6)



(рис. 7)



(рис. 8)



(рис. 9)

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА»

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$, $y=0$.
2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функцией $x^2+y^2=r^2$.
3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $7x^2-9y+9=0$, $5x^2-9y+27=0$.
4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $x-y+2=0$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.
5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $2x-3y+6=0$, $y=0$, $x=3$.
6. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $y=2x^2+1$, $y=x^2+10$.
7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $y=-1.5x^2+9x-7.5$, $y=-x^2+6x-5$.
8. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(6t^2+2t)$ м/с, второе – со скоростью $v=(4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5с?
9. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(3t^2-6t)$ м/с, второе – со скоростью $v=(10t+20)$ м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?
10. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=3t^2$ м/с, второе – со скоростью $v=(6t^2+10)$ м/с. На каком, расстоянии друг от друга они окажутся через 10с?
11. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(3t^2+4t)$ м/с, второе – со скоростью $v=(6t+12)$ м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?.
12. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?

13. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?
14. Цилиндр с подвижным поршнем, площадь поперечного сечения которого S кв.ед., заполнен газом. Считая, что при увеличении объема газа в цилиндре соблюдается закон Бойля-Мариотта pV=k=const, вычислить работу, произведенную силой давления газа при увеличении его объема от V_0 до V_1 (температура газа поддерживается постоянной).
15. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы 60Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12 м?
16. В цилиндрическом сосуде объема V_0=0,2 м^3 заключен атмосферный воздух при нормальном давлении P_0=1014325Н/м^2. Воздух сжимается поршнем до объема 0,05 м^3. Какая работа производится при этом, если температура воздуха поддерживается постоянной?
17. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20Н растягивает её на 0,01м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,12 до 0,14 м?
18. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.
19. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать из резервуара конической формы с вершиной, обращенной книзу. Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса R=1м, высота конуса 2м.
20. Прямоугольный резервуар, основанием которого служит квадрат со стороной 3м, а высота равна 2м, заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.
21. Цилиндрический резервуар с радиусом основания 2 м и высотой 3м заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.

22. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20м и высотой 5м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).
23. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями a и b $(a > b)$ и высотой h.
24. Треугольная пластина с основанием 0,2 м и высотой 0,4 м погружена вертикально в воду так, что вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислите силу давления воды на пластину.
25. Найти длину дуги параболы $y=\frac{x^2}{2}$ между точками O (0;0) и A($\sqrt{3}$;3/2).
26. Найти длину дуги параболы $y=4-x^2$ между точками её пересечения с осью Ox.
27. Найти длину дуги параболы $y^2=x$ между точками O (0;0) и A($\frac{3}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$).
28. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y^2 = 8x$.
29. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$, $y=x^2$.
30. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=8x$, $y=x^2$.
31. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого, a=25 м, а радиус R=20 м.
32. Вычислите работу, необходимую для выкачивания воды из полусферического сосуда, диаметр которого 20 м.

Ответы

1. $\frac{2}{3}$. **2.** 0. **3.** ∞. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{1}{5}$. **6.** 0. **7.** 10. **8.** ∞. **9.** ∞. **10.** 5. **11.** 0. **12.** 0. **13.** 1. **14.** 1. **15.** 1. **16.** 5. **17.** 0. **18.** $+\infty$. **19.** 1. **20.** 40. **21.** $\frac{1}{2}$. **22.** 1. **23.** $\frac{4}{3}$. **24.** $\frac{1}{3}$. **25.** 1. **26.** $\frac{1}{6}$. **27.** 2. **28.** e. **29.** $\frac{1}{e^5}$. **30.** $e^{-\frac{1}{3}}$. **31.** e^4. **32.** e^{-1}. **33.** e. **34.** 3. **35.** -2. **36.** e^6. **37.** $\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$. **48** 10. **49.** 3. **50.** $\frac{4}{5}$. **51.** 4. **52.** 1. **53.** -1.

54 $\frac{1}{2}$. **55.** 0. **56.** ∞. **57.** $-\frac{5}{2}$. **58.** 0. **59.** ∞. **60.** -12. **61.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.**62.** $-\sqrt{2}$. **63.** 1. **64.** $\frac{1}{2}$. **65.** $-\frac{10}{9}$. **66.** 2. **67.** 1. **68.** -1. **69.** не существует.

70. $\frac{1}{2}$. **71.** -$\frac{1}{2}$. **72.** $\frac{2}{9}$. **73.** $\frac{5}{8}$. **74.** $\frac{8}{7}$. **75.** -6. **76.** $\frac{5}{12}$. **77.** $-\frac{2\ln 2}{5}$. **78.** $\frac{8}{15}$. **79.** $\frac{1}{6}$. **80.** $-\frac{1}{54}$. **81.** $\frac{1}{e}$. **82.** -1. **83.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. **84.** $\frac{1}{2\ln 2}$. **85.** 1. **86.** $64\ln 4$.

87. -2. **88.** $\frac{3}{5}$. **89.** $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. **90.** $4\ln 3$. **91.** $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. **92.** $5^5\ln 5$. **93.** $\frac{1}{5}$. **94.** $\frac{1}{3\ln 2}$. **95.** $\frac{5}{3}$. **96.** e^2. **97.** e. **98.** e^{-2}. **99.** e^4. **100.** e^{-1}. **101.** $e^{ctg 2}$. **102.** e^4. **103.** e^{-2}. **104.** 3. **105.** $-\frac{49}{2}$. **106.** $2(2x^3+3x-1)$. **107.** $49x^6+6x-4$.

108. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}$. **109.** $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{10}{x^3}+\frac{9}{x^4}$. **110.** $20x^4-3\cos x-\frac{5}{\sin^2 x}$.

111. $\frac{3}{2\sqrt{x}}-4\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}$. **112.** $8x+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+\cos x-\sin x+\frac{1}{x}$.

113. $\frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}-24x^5+\frac{5}{x}+7\sin x-4ctg 2x$. **114.** $\frac{\ln 24}{x\ln 2\cdot\ln 3}$. **115.** $4e^x+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **116.** $e^x-\frac{1}{2}\sec^2 x+x^3$. **117.** $5^x\ln 5+6^x\ln 6-7^{-x}\ln 7$. **118.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$.

119. $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$. **120.** $\cos x-x\sin x$. **121.** $x(\sin 2x+x)\sec^2 x$. **122.** $\frac{\ln x+7}{7\sqrt[7]{x^6}}$.

123. $\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **124.** $\frac{arctgx}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$. **125.** $x\frac{2\ln x+1}{\ln 3}$. **126.** $-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$.

127. $\frac{\sin x-x^{2+x\cos x(\sin x-\ln x)}}{x\sin^2 x}$. **128.** $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$. **129.** $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$.

130. $-\frac{4x+\sin 2x}{4x\sqrt{x}\sin^2 x}$. **131.** $\frac{(1+x^2)(\sin x\cos x+x)-x^2\sin 2x}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$. **132.** $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. **133.** 1,0,4. **134.** $\frac{33}{4}$. **135.** $-1,-\frac{1}{9},-\frac{1}{25}$. **136.** $-\frac{\ln 10}{2}$. **137.** $0{,}2e^2,-e^{-4}$. **138.** 1,2,0,-1.

139. $(2x+5)\cos(x^2+5x+2)$. **140.** $\sin(a-bx)$. **141.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **142.** $-\frac{5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}$.

143. $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$. **144.** sin2x. **145.** $3\sin^2 x\cos x$. **146.** $-100\sin x\cos^{99} x$.

147. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **148.** $\frac{2x}{\cos^2(x^2+3)}$. **149.** ctgx. **150.** –tgx. **151.** $\frac{10}{\sin 10x}$. **152.** $-tg\frac{x}{2}$.

153. $e^{tgx}\sec^2 x$. **154.** $\frac{2x-3}{x^2-3x+7}$. **155.** $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$. **156.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$. **157.** $\frac{2}{x(1-x^2)}$. **158.** $\frac{2}{1-4x^2}$. **159.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **160.** $e^x\cos x$. **161.** $arctg\sqrt{2x-1}$. **162.** $3tg^4 x$. **163.** $3x^2\sin 2x^3$.

164. $-ctg^2\frac{x}{3}\cos ec^2\frac{x}{3}$. **165.** $\frac{5}{8}tg2x\sec^{10}2x$. **166.** –sin4x. **167.** $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$.

168. $-\frac{2\cos^2 x}{\sin 3x}$. **169.** $3\cdot 2^{3x}\ln 2+5x^4-2xe^{-x^2}-\frac{1}{x^2}$. **170.** $a^{\sin x}\ln a\cos x$. **171.** $\frac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

172. $xe^{-x}(2-x)$. **173.** $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$. **174.** $\frac{e^{\frac{x}{3}}}{3}\left(\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}\right)$. **175.** $e^{\frac{1}{\cos}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

176. $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$. **177.** $10^{3-\sin^3 2x}\ln 10(-3\sin 2x\sin 4x)$. **178.** $2^x(\ln 2)\cos 2^x$. **179.** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}}\right)$.

180. $-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$. **181.** $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **182.** $\frac{2}{e^{4x}+1}$. **183.** $\frac{ctgx\ln\cos x+tgx\ln\sin x}{(\ln\cos x)^2}$.

184. $\frac{7tg7x}{\ln 5}$. **185.** $-\frac{tg\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\ln 7}$. **186.** $\frac{2e^{\sqrt[7]{x^2}}}{7\sqrt[7]{x^5}}$. **187.** -$\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$. **188.** $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.

189. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. **190.** $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$. **191.** $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **192.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$. **193.** $\frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}$. **194.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **195.** $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. **196.** 3sin2xsin4xdx. **197.** $\frac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$.

198. $-\frac{tgxe^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}dx$. **199.** $-2x2^{-x^2}\ln dx$. **200.** (lnx+1)dx. **201.** $\frac{dx}{\sqrt[2]{x(1-x)}}$.

202. $\left(3x^2+\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)dx$. **203.** $\frac{2xdx}{2+x^2}$. **204.** $\frac{1}{\sqrt[2]{x}}(2x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+x^2\cos\sqrt{x})xdx$.

205. $\frac{(x-3)dx}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$. **206.** $\frac{dx}{1-\sin x}$. **207.** $\frac{1}{1+x^2}[(1+x^2)arctgx+x]dx$.

208. $\frac{x\left[2(\arcsin x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]}{(\arcsin x)^2}$. **209.** $\frac{1}{\sqrt[2]{x}}\left(arctg\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)dx$. **210.** 0,04.

211. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **212.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **213.** $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$. **214.** $\frac{x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **215.** $2\cos 2x$.

216. $-2\cos 2x.$ **217.** $\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$ **218.** $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}.$ **219.** $-\dfrac{4}{(2x-3)^2}.$ **220.** $2\cos x - x\sin x.$ **221.** $\dfrac{2-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$ **222.** $-\dfrac{4}{(x-1)^3}.$ **223.** $\dfrac{4(3x-4)}{(4+x^2)^3}.$ **224.** $e^{-x}(3-x).$

225. $-2e^x(\cos x+\sin x).$ **226.** $-2e^x(\cos x+\sin x).$ **227.** $2^x(x^3\ln^3 2)+9x^2\ln^2 2+18x\ln 2+6.$

228. $-\dfrac{1}{x^2}.$ **229.** $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)}{x^2}.$ **230.** $3^n\sin\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right).$ **231.** $e^{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$ **232.** $2^{3x}(3\ln 2)^n.$ **233.** $2^{n-1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right).$ **234.** $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^2}.$ **235.** $3^x(\ln 3)^n.$ **236.** $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)}{x^{n-2}}.$

237. $(80x^3-14)(dx)^2.$ **238.** $-4\cos 2x(dx)^2.$ **239.** $4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4-1)(dx)^2.$

240. $\dfrac{4\ln x-4-\ln^3 x}{x\sqrt[2]{(\ln^2 x-4)^3}}(dx)^2.$ **241.** $-4\sin 2x(dx)^3.$ **242.** $-\dfrac{15}{16(x-1)^{\frac{1}{2}}}(dx)^4, (x>1).$

243. $-\dfrac{6}{x^4}(dx)^5, (x>0).$ **244.** $(10\cos x - x\sin x)(dx)^{10}.$ **256.** $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+x+c.$

257. $\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{5}{6}x\sqrt[5]{x}+2x\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\ln|x|+c.$

258. $2arctgx-3\arcsin x+c.$ **259.** $\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{3^x}{\ln 3}+c.$ **260.** $2e^x+\dfrac{1}{2x^2}+c.$

261. $-\cos x+5\sin x+c.$ **262.** $x-\cos x+c.$ **263.** $-(tgx+ctgx)+c.$ **264.** $\dfrac{x^3}{3}-x+arctgx+c.$

265. $3tgx+2ctgx+c.$ **266.** $\cos x-ctgx+c.$ **267.** $-(ctgx+x)+c.$ **268.** $\dfrac{1}{2}(x-\sin x)+c.$

269. $\arcsin x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c.$ **270.** $\arcsin\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}}+c.$ **271.** $x+\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+c.$ **272.** $\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+c.$ **273.** $\sqrt[2]{x}-4\sqrt[4]{x}+c.$ **274.** $\dfrac{3\cdot 4^x}{\ln 4}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+c.$ **275.** $e^x+tgx+c.$

276. $x^5-\dfrac{1}{3x^3}+c.$ **277.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|+c.$ **278.** $3tgx-4ctgx+c.$

279. $x+\cos x+c.$ **280.** $\dfrac{(2e)^x}{\ln 2+1}+c.$ **281.** $\dfrac{1}{2}(x+\sin x)+c.$ **282.** $x^3+arctgx+c.$

283. $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+arctgx+c.$ **284.** $\dfrac{2}{3}x^3-2x-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+c.$ **285.** $-x^3-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+c.$ **286.** $-\dfrac{1}{5^x\ln 5}-\dfrac{1}{2^x\ln 2}+c.$ **287.** $\dfrac{1}{32}\left[2arctg\dfrac{x}{2}-\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\right]+c.$ **288.** $\dfrac{\sin 5x}{5}+c.$

289. $-\dfrac{\cos 7x}{7}+c.$ **290.** $-\dfrac{1}{3}\cos(3x+5)+c.$ **291.** $\dfrac{1}{2}e^{2x}+c.$ **292.** $-\ln|\cos x|+c.$

293. $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+c.$ **294.** $\dfrac{1}{3}e^{3x}+\dfrac{1}{2}e^{2x}+\ln|e\ \ -1|+c.$ **295.** $\dfrac{1}{5}\ln|x^5+7|+c.$ **296.** $\dfrac{tg3x}{3}+c.$

297. $-3ctg\dfrac{x}{3}+c.$ **298.** $\dfrac{(2+5x)^{10}}{50}+c.$ **299.** $-\dfrac{2}{3}\sqrt{2-3x}+c.$ **300.** $\dfrac{1}{3}(2x-5)^{\frac{3}{2}}+c.$

301. $-\dfrac{3}{28}(3-7x)^{\frac{4}{3}}+c.$ **302.** $\dfrac{1}{5}\ln|5x+2|+c.$ **303.** $-\dfrac{1}{3}\ln|2-3x|+c.$

304. $6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}+arctg\sqrt[6]{x}\right)+c.$ **305.** $x-\sqrt[2]{x}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)^2+c.$

306. $\frac{2(44-15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}+c.$ **307.** $x+\sqrt[4]{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+c.$ **308.** $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+c.$

309. $\frac{1}{3}\ln|3+\sin 3x|+c.$ **310.** $-\frac{\cos^4 x}{4}+c.$ **311.** $\frac{\sin^3 x}{3}+c.$ **312.** $-e^{\cos x}+c.$

313. $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c.$ **314.** $e^{\sin x}+c.$ **315.** $2e^{\sqrt{x}}+c.$ **316.** $e^{arctgx}+c.$ **317.** $-e^{-tgx}+c.$ **318.** $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x+c.$ **319.** $\frac{1}{4\cos^4 x}+c.$ **320.** $\ln|1+\ln x|+c.$ **321.** $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+c.$

322. $-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3}+c.$ **323.** $\frac{(arctgx)^{101}}{101}+c.$ **324.** $\arcsin\frac{e^x}{2}+c.$ **325.** $2\sin\sqrt{x}+c.$

326. $\frac{1}{4\arccos 4x}+c.$ **327.** $\frac{\arcsin^2 x}{2}-\sqrt{1-x^2}+c.$ **328.** $\frac{\sin x-2}{\cos x}+c.$

329. $2\ln|\sin x|-ctgx+c.$ **330.** $-\frac{2}{15}(3+\cos 5x)^{\frac{3}{2}}+c.$ **331.** $\frac{7}{90}(3+5\sin 3x)^{\frac{6}{7}}+c.$

332. $\frac{arctg^3 x}{3}+c.$ **333.** $\frac{3}{4}(\arcsin x)^{\frac{4}{3}}+c.$ **334.** $\frac{2^{\sqrt{x}}+1}{\ln 2}+c.$ **335.** $-\frac{4^{1-3x}}{3\ln 4}+c.$

336. $\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{2x}{\sqrt{5}}+c.$ **337.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{5}+c.$ **338.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2x}+\sqrt{2x^2+3}\right|+c.$

339. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+c.$ **340.** $\frac{1}{\sqrt[2]{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}x}{\sqrt{3}-\sqrt{5}x}\right|+c.$ **341.** $\frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-5}\right|+c.$

342. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{2}}+c.$ **343.** $\frac{1}{4}\ln\left|x^4+\sqrt{x^8-3}\right|+c.$ **344.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\sqrt{x^2+1}+c.$

345. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+c.$ **349.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\right|+c.$

350. $\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+c.$ **351.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c.$ **352.** $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+c.$

353. $xarctg\sqrt{7x-1}-\frac{1}{7}\sqrt{7x-1}+c.$ **354.** $-\frac{arctgx}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+c.$

355. $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+c.$ **356.** $x(\ln x-1)+c.$ **357.** $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c.$

358. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\right)\ln(3x+2)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}+c.$ **359.** $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}-2x+c.$

360. $\left(x^4+3x^2-7x\right)\ln x-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-7x\right)+c.$ **361.** $x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+c.$

Список рекомендуемой литературы

1. Афанасьева О.Н., Бродский Я.С., Павлова А.Л. Математика для техникумов. – М., Наука, 2010
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.; Высшая школа, 2012
3. Богомолов Н.В. «Практические занятия по математике», М: Высшая школа, 2012
4. Валуцэ И.И. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1990
5. Выгодский М.Я. «Справочник по высшей математике», Росткнига, 2010
6. Звавич Л.И. «Алгебра в таблицах 7-11 классы», М: Дрофа, 2012
7. Дадаян А.А. «Математика», М: Форум: Инфра – М, 2010
8. Натансон И.П. «Краткий курс высшей математике (для техникумов)», М: Лань, 2013
9. Подольский В.А. Сборник задач по математике. Учебное пособие для ССУЗ. – М.: Высшая школа, 2010
10. Письменный Д. «Конспект лекций по высшей математике», ч.1., Москва, Айрис-Пресс, 2012
11. Шипачев В.С. «Задачник по высшей математике», М: Высшая школа, 2012

Перечень теоретических вопросов
по дисциплине «Математика» для подготовке к экзамену
(для специальностей 08.02.01, 38.02.01, 21.02.04)

Перечень теоретических вопросов

1. Числовые промежутки. Окрестность точки.
2. Понятие функции. График функции. Способы задания функций.
3. Последовательности (ограниченные и неограниченные последовательности).
4. Основные характеристики функции.
5. Обратная функция. Сложная функция.
6. Основные элементарные функции и их графики.
7. Предел числовой последовательности.
8. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число Е. Натуральный логарифм (связь между натуральным и десятичным логарифмом).
9. Предел функции в точке.
10. Односторонние пределы.
11. Предел функции при $x \to \infty$.
12. Основные теоремы о пределах.
13. Признаки существования пределов.
14. Первый и второй замечательные пределы.
15. Определение бесконечно большой и бесконечно малой функции.
16. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них.
17. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции в интервале и на отрезке.
18. Точки разрыва функции и их классификация.
19. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций.

20. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
21. Производная функции (определение, механический и геометрический смысл).
22. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
23. Производная суммы, разности, произведения и частного функций.
24. Производная сложной и обратной функций.
25. Производные основных элементарных функций.
26. Таблица производных.
27. Логарифмическое дифференцирование.
28. Производные высших порядков. Механический смысл производной второго порядка.
29. Понятие дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала функции.
30. Основные теоремы о дифференциалах. Таблица дифференциалов.
31. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
32. Дифференциалы высших порядков.
33. Исследование функций при помощи производных (Теорема Ролль, Коши, Лагранжа).
34. Правила Лапиталя.
35. Возрастание и убывание функций.
36. Максимум и минимум функций.
37. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
38. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
39. Асимптоты графика функции.
40. Общая схема исследования функции и построение графика.
41. Неопределенный интеграл.
42. Свойства неопределенного интеграла.
43. Основные методы интегрирования. Метод непосредственного интегрирования. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной). Метод интегрирования по частям.

44. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Теорема Коши.
45. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
46. Формула Ньютона-Лейбница.
47. Основные свойства определенного интеграла.
48. Вычисления определенного интеграла.
49. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Учебное издание

Самохова Г.А.

Математика

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 09.07.2015 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 4,65. Тираж 100 экз. Изд. № 3087.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ