

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования  
«Брянский государственный аграрный университет»  
кафедра высшей математики и физики

**Комогорцев В.Ф.**

**МАТЕМАТИКА**  
**И**  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**  
**СТАТИСТИКА**

**Учебное пособие**  
для бакалавров по направлениям  
подготовки 35.03.03, 35.03.04, 35.03.07

Брянская область – 2019

УДК 51:519.2 (07)  
ББК 22.172:22.1  
К 63

Комогорцев, В. Ф. **Математика и математическая статистика**: учебное пособие для бакалавров по направлениям подготовки 35.03.03, 35.03.04, 35.03.07 / В. Ф. Комогорцев. - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2019. – 164 с.

Данное учебное пособие по дисциплине «Математика и математическая статистика» предназначено для бакалавров аграрного вуза, обучающихся по направлениям подготовки

- 35.03.03 – агрохимия и почвоведение;
- 35.03.04 – агрономия;
- 35.03.07 – технология производства и переработки с/х продукции.

Пособие разбито на 6 глав:

1. аналитическая геометрия на плоскости;
2. линейная алгебра;
3. пределы;
4. дифференциальное исчисление;
5. интегральное исчисление;
6. основы математической статистики.

Оно содержит теоретический материал, упражнения для практических занятий и задания для домашней работы.

Рецензент: кан. тех. наук Панкова Е.А.

*Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 14 мая 2019 года протокол №9.*

© Брянский ГАУ, 2019  
© Комогорцев В.Ф., 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
---------------	---

### ГЛАВА 1

#### Аналитическая геометрия на плоскости

§1. Метод координат. Декартовы координаты .....	6
§2. Простейшие задачи на декартовы координаты на плоскости .....	8
2.1. <i>Нахождение расстояния между точками плоскости</i> .....	8
2.2. <i>Деление отрезка в заданном отношении</i> .....	9
§3. Линии на плоскости и их уравнения .....	11
§4. Первая основная задача аналитической геометрии на плоскости .....	15
§5. Вторая основная задача аналитической геометрии на плоскости .....	21
§6. Обзор основных линий и их уравнений (обзор основных функций и их графиков) .....	25
6.1. <i>Прямые на плоскости и их уравнения</i> .....	25
6.2. <i>Некоторые важнейшие кривые на плоскости</i> .....	31
§7. Геометрическое представление решений неравенств и систем неравенств .....	33

### ГЛАВА 2

#### Линейная алгебра

§1. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса .....	36
1.1. <i>Общие понятия и определения</i> .....	36
1.2. <i>Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными</i> .....	38
1.3. <i>Квадратные системы линейных уравнений произвольного порядка</i> .....	40
1.4. <i>Переопределенные системы</i> .....	45
1.5. <i>Недоопределенные системы</i> .....	46
§2. Понятие о других методах решения систем линейных уравнений.....	48
2.1. <i>Метод определителей</i> .....	48
2.2. <i>Матричный метод</i> .....	53

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

### ГЛАВА 3

#### Пределы

§1. Предел переменной .....	59
§2. Предел функции. Непрерывность и разрывы функций .....	66

## ГЛАВА 4

### Дифференциальное исчисление

§3. Производная функции: определение и смысл .....	77
§2. Производные основных элементарных функций. Таблица производных. Правила дифференцирования .....	84
§3. Исследование функций с помощью производных.....	94
§4. Некоторые другие приложения производных.....	102
4.1. Приближенное решение уравнений методом половинного деления .....	102
4.2. Правило Лопиталя вычисления пределов.....	104
§5. Дифференциал функции .....	106

## ГЛАВА 5

### Интегральное исчисление

§1. Первообразная для функции и неопределенный интеграл от неё ....	113
§2. Основные методы интегрирования .....	120
2.1. Непосредственное интегрирование .....	120
2.2. Интегрирование с помощью подстановки (с помощью замены переменной интегрирования) .....	121
2.3. Интегрирование по частям .....	123
§3. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла .....	126
3.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции .....	126
3.2. Задача о вычислении пути при переменной скорости движения .....	128
3.3. Задача о вычислении работы переменной силы .....	129
3.4. Задача о нахождении объема производства при заданной производительности труда .....	130
§4. Свойства и вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница .....	131
§5. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям. Использование четности-нечетности подынтегральной функции.....	142

## ГЛАВА 6

### Основы математической статистики

§1. Генеральная совокупность и выборка. Числовые характеристики выборки .....	146
§2. Точечные и интервальные оценки числовых характеристик генеральной совокупности.....	151
<b>Приложение</b> (таблицы).....	161
<b>Литература</b> .....	163

## Введение

В наше время нет необходимости убеждать кого бы то ни было в том, что математика – это очень важная наука. Не владеющий основами математики человек не сможет стать квалифицированным специалистом, какую бы специальность он ни осваивал. Более того, у него будут проблемы даже в повседневном быту.

Математику, изучаемую в школе, называют элементарной, а в вузе – высшей. Элементарная математика берет свое начало с незапамятных времен – с простейших задач арифметики и геометрии, а высшая - с XVII века, когда Рене Декарт создал аналитическую геометрию, а Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц заложили основы математического анализа (анализа бесконечно малых). Эти их открытия революционным образом ускорили как развитие самой математики, так и всего естествознания в целом.

Особенно широкие возможности перед математическим исследованием различных природных и общественных процессов открылись в последние десятилетия в связи с появлением электронных вычислительных машин. Для типичных математических задач, возникающих в различных отраслях науки и техники, созданы и готовые пакеты компьютерных программ их решения. Достаточно много таких программ содержится, например, в общедоступной виндоузской программе Excel. Есть и более сложные, но и более богатые по содержанию, пакеты математических программ, к числу которых принадлежат Mathcad, MatLab, Mathematica, и др. Но чтобы пользоваться этими программами, нужно, естественно, владеть основными понятиями и фактами соответствующих разделов математики. Краткому обзору тех понятий и фактов, о которых должен иметь представление любой человек с высшим образованием, в том числе и будущий агроном, и посвящен данный курс. Есть в этом курсе и материал для практических (семинарских) занятий.

В силу крайней ограниченности аудиторного времени, отводимого учебным планом на изучение математики будущими агрономами, студентам очень важно научиться добывать недостающие знания самостоятельно, читая учебную, научную и другую литературу. Рекомендуемые учебники и учебные пособия, дополняющие и расширяющие излагаемый в этом пособии математический материал, приведены в конце в списке литературы.

И, наконец, последнее. Освоение математических методов позволяет приобрести не только расчетный аппарат для профессиональной деятельности специалиста любого профиля. Математика играет большую роль и в формировании общей культуры человека: как никакая другая наука, она учит логически мыслить, анализировать, обобщать, вырабатывает объективность, точность и сжатость мысли, воображение и фантазию. Ее значение, таким образом, выходит далеко за рамки прикладной науки. Однако ее изучение требует и немалого труда. Но, как говорил выдающийся экономист XIX века Карл Маркс, «в науке нет широкой столбовой дороги, и только тот достигнет ее сияющих вершин, кто, не страшась усталости, карабкается по ее каменистым тропам».

# ГЛАВА I

## Аналитическая геометрия на плоскости

Аналитическая геометрия – это область математики, в которой геометрические задачи решаются не средствами геометрии (построением чертежей и их анализом), а средствами алгебры и математического анализа, в основе использования которых лежит *метод координат*. Или, если коротко, аналитическая геометрия – это геометрия в системе координат.

Различают *аналитическую геометрию на плоскости* (аналитическую планиметрию) и *аналитическую геометрию в пространстве* (аналитическую стереометрию). Мы ограничимся рассмотрением лишь основных понятий и фактов аналитической планиметрии.

### § 1. Метод координат. Декартовы координаты

Метод координат основан на всем известном из курса элементарной математики свойстве числовой оси: *каждой точке  $M$  этой оси соответствует некоторое действительное число  $x$ , и наоборот* (рис. 1.1).

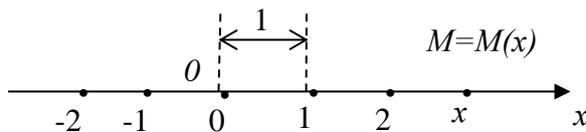


Рис. 1.1

Число  $x$  называется *координатой точки  $M$* , и обозначается это так:  $M = M(x)$  (читается: точка  $M$  – точка с координатой  $x$ ). Координата  $x$  точки  $M$ , по определению, есть расстояние от начальной точки  $O$  (координата которой равна 0) до

точки  $M$ , взятое со знаком плюс, если точка  $M$  находится справа от точки  $O$ , и со знаком минус, если она находится слева от нее.

В числовую ось, при желании, можно превратить любую прямую. Для этого следует:

- выбрать положительное направление этой прямой (поставить стрелку, указывающую это направление);
- выбрать одну из точек прямой в качестве начальной точки  $O$  (с ней связывается число 0);
- установить на прямой масштаб измерения, то есть определиться, отрезок какой длины будет считаться единичным.

Преобразование обычной прямой в числовую ось, когда каждой точке прямой можно поставить в соответствие некоторое действительное число (координату этой точки), представляет собой введение *системы координат на прямой* (рис. 1.1). После введения на прямой системы координат можно уже, очевидно, говорить не о точках этой прямой (точках  $M$ ), а о соответствующих им числах  $x$  – координатах этих точек.

Далее, с помощью взаимно перпендикулярных числовых осей естественным образом устанавливается система координат на плоскости (рис. 1.2) и система координат в пространстве (рис. 1.3). Рисунок 1.2 демонстрирует, что у

каждой точки  $M = M(x; y)$  плоскости имеются две координаты: абсцисса  $x$  (проекция точки  $M$  на числовую ось  $ox$ ) и ордината  $y$  (проекция точки  $M$  на числовую ось  $oy$ ). Аналогично рис. 1.3 демонстрирует три координаты точки  $M = M(x; y; z)$  в пространстве: абсциссу  $x$ , ординату  $y$  и аппликату  $z$ , являющиеся проекциями этой точки на числовые оси  $ox$ ,  $oy$  и  $oz$  соответственно.

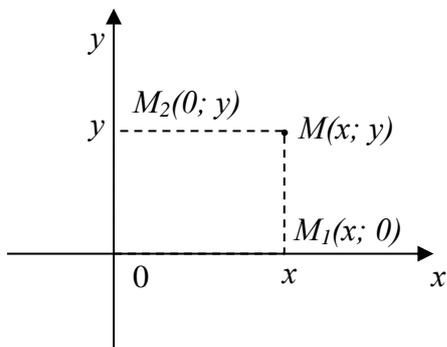


Рис. 1.2

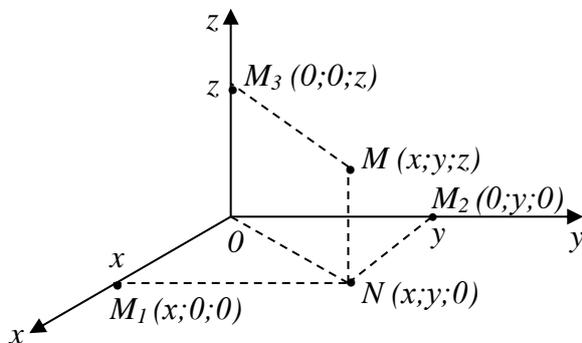


Рис. 1.3

Указанные координаты точек на плоскости и в пространстве называются *прямоугольными* или *декартовыми* – в честь великого французского математика и философа Рене Декарта, который в 17 веке ввел в обиход математики эти координаты.

Опираясь на приведенное выше понятие координат точек прямой, плоскости и пространства (рис. 1.1 – 1.3), можно *любое действительное число  $x$  считать точкой числовой оси  $ox$  (точкой одномерного пространства); любую пару чисел  $(x; y)$  – точкой плоскости  $хоу$  (точкой двумерного пространства); любую тройку чисел  $(x; y; z)$  – точкой обычного пространства (трехмерного)*. И вообще, любую упорядоченную совокупность  $n$  действительных чисел  $(x_1; x_2; \dots x_n)$  можно считать *точкой некоего  $n$ -мерного пространства*. Для  $n > 3$  такое пространство является математической абстракцией (физически непредставимо). И тем не менее введение в математику таких пространств оказалось очень плодотворным и для дальнейшего развития самой математики, и для ее приложений в других науках.

Обратно, после введения системы координат на прямой, плоскости и в пространстве *каждую точку прямой можно считать просто числом; каждую точку плоскости – парой чисел; каждую точку пространства – тройкой чисел*. Эти числа – координаты соответствующих точек. Таким образом, появляется возможность взамен *точек* (геометрических объектов) рассматривать *числа* (алгебраические объекты). А вместо линий, поверхностей, плоских фигур и пространственных тел, то есть вместо *геометрических объектов* рассматривать некие функции, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, то есть *алгебраические объекты*. Таким образом, появляется замечательная возможность преобразовывать геометрические задачи в задачи алгебры и математического анализа, которые обычно решаются проще. В этом, в принципе, и состоит идея метода координат.

## § 2. Простейшие задачи на декартовы координаты на плоскости

### 2.1. Нахождение расстояния между точками плоскости

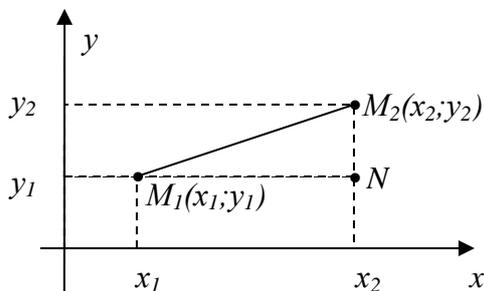


Рис. 1.4

Пусть  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  – некоторые две точки плоскости в декартовой системе координат (рис. 1.4). Требуется найти формулу, по которой можно было бы находить расстояние  $|M_1M_2|$  между этими точками.

Формула эта очевидным образом вытекает из теоремы Пифагора, примененной к треугольнику

$M_1M_2N$ . Действительно, по этой теореме (квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов) получаем:

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

откуда  $|M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2}$ . Но, согласно рис. 1.4,  $|M_1N| = x_2 - x_1$ , а  $|NM_2| = y_2 - y_1$ . Поэтому получаем окончательно:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.1)$$

Это и есть та формула, по которой находят расстояние между точками плоскости в декартовой системе координат.

**Примечание 1.** Формула (2.1) выведена нами для того расположения точек  $M_1$  и  $M_2$ , которое указано на рис. 1.4 (то есть когда  $x_2 > x_1$  и  $y_2 > y_1$ ). Но она будет верна и при любом другом расположении этих точек (убедитесь в этом самостоятельно).

**Пример 1.** Найти расстояние между точками  $A(0; 2)$  и  $B(4; -1)$ .

**Решение.** Принимая точку  $A$  за  $M_1$ , а точку  $B$  за  $M_2$  и используя формулу (2.1), получим:

$$|AB| = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Естественно, тот же результат мы получим, если за точку  $M_1$  примем точку  $B$ , а за точку  $M_2$  – точку  $A$ :

$$|BA| = \sqrt{(0-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

**Примечание 2.** Если  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  – некоторые две *пространственные* точки в декартовой системе координат, то расстояние между ними находится по формуле (2.1\*), аналогичной формуле (2.1):

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.1^*)$$

(попробуйте вывести эту формулу самостоятельно).

## 2.2. Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим еще одну простую, но важную задачу. Требуется найти точку  $M$ , делящую заданный отрезок  $M_1M_2$  в заданном отношении  $\lambda$ . Это значит, что искомая точка  $M$  должна занимать на отрезке  $M_1M_2$  такое положение, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda \quad (0 < \lambda < \infty - \text{заданное число}) \quad (2.2)$$

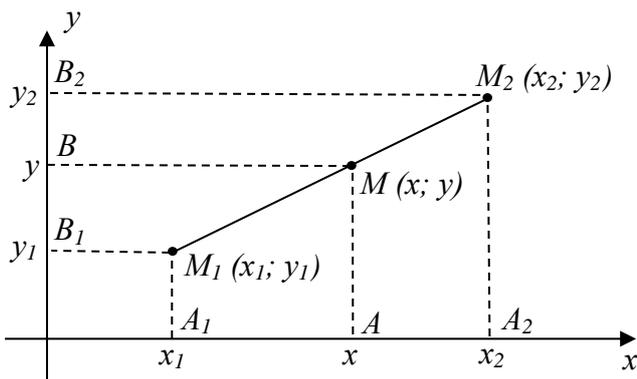


Рис. 1.5

Для решения поставленной задачи рассмотрим рис. 1.5.

На основании известной теоремы Фалеса о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|A_1A|}{|AA_2|} = \lambda$$

Но, согласно рис. 1.5,  $|A_1A| = x - x_1$ , а  $|AA_2| = x_2 - x$ . Поэтому получаем:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

Выражая отсюда  $x$ , находим:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad (2.3)$$

Это – абсцисса искомой точки  $M$ . Совершенно аналогично находим ее ординату  $y$ :

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (2.4)$$

Формулы (2.3) и (2.4) и решают поставленную задачу о делении заданного отрезка  $M_1 M_2$  в заданном отношении  $\lambda$ .

В частности, если  $M$  – середина отрезка  $M_1 M_2$ , то  $\lambda = 1$ . Следовательно, координаты  $(x; y)$  середины отрезка  $M_1 M_2$  таковы:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (2.5)$$

Примечание. Легко показать, что формулы (2.3), (2.4) и (2.5) верны не только для того расположения точек  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ , которое указано на рис. 1.5, но и для любого другого (убедитесь в этом самостоятельно).

Пример 2. Даны точки  $M_1(-1; 3)$  и  $M_2(3; -2)$ . На отрезке  $M_1 M_2$  найти точку  $M(x; y)$ , которая в два раза ближе к  $M_1$ , чем к  $M_2$ .

Решение. По условию задачи, искомая точка  $M$  такова, что

$$\frac{|M_1 M|}{|M M_2|} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, в данном случае рассматривается задача о делении отрезка  $M_1 M_2$  в отношении  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Применяя формулы (2.3) и (2.4) при  $\lambda = \frac{1}{2}$ , находим координаты точки  $M$ :

$$x = \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Таким образом,  $M = M\left(\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$ .

### Упражнения

1. Доказать, что треугольник с вершинами  $A(-3; -2)$ ,  $B(0; -1)$  и  $C(-2; 5)$  прямоугольный.
2. Найти а) центр; б) радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами  $A(4; 3)$ ,  $B(-3; 2)$ ,  $C(1; -6)$ .

Ответ:  $D(1; -1)$  – центр;  $R=5$  – радиус.

3. Точка  $M$  делит отрезок  $M_1 M_2$  пополам. При этом  $M_1 = M_1(-1; -1)$  и  $M_2 = M_2(0; 1)$ . Найти координаты точки  $M_2$ .

Ответ:  $M_2 = M_2(1; 3)$ .

4. Даны две точки  $M_1(1; 2)$  и  $M_2(4; -1)$ . Найти отношение  $\lambda$ , в котором делится отрезок  $M_1M_2$  точкой  $M$  своего пресечения с осью  $ox$ , а также найти эту точку.

Ответ:  $\lambda = 2$ ;  $M(3; 0)$ .

5. Два пешехода  $X$  и  $Y$  отправились из одной точки  $A$  в точки  $B$  и  $C$  противоположно друг другу. Пешеход  $X$ , дойдя до точки  $B$ , повернул направо и дошел до точки  $B'$ , расположенной так, что  $BB' = AB$ . Пешеход  $Y$ , дойдя до точки  $C$ , повернул налево и дошел до точки  $C'$ , расположенной так, что  $CC' = AC$  (все повороты на  $90^\circ$ ). После этого пешеходы пошли навстречу друг другу и встретились в середине отрезка  $B'C'$  - в точке  $D$ . Если известно, что  $BC = 20\sqrt{2}$ , то чему равна сумма расстояний  $BD + CD$ ?

Ответ: 40.

### § 3. Линии на плоскости и их уравнения

Пусть на плоскости с декартовой системой координат изображена некоторая линия  $L$  (рис. 1.6). И пусть эта линия является графиком некоторой функции  $y = f(x)$ . Тогда функция  $y$  и ее аргумент  $x$  являются координатами точек линии  $L$  (точек  $M(x; y)$ ).

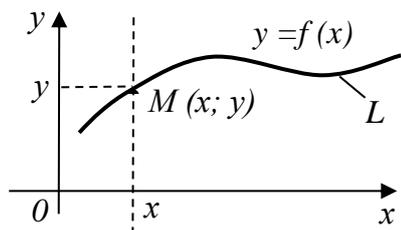


Рис. 1.6

Функция  $y = f(x)$  является уравнением, которому удовлетворяют координаты  $(x; y)$  любой точки линии  $L$ , и только они.

Определение. Уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки линии, и только они, называется **уравнением линии**.

Таким образом, уравнением линии  $L$ , изображенной на рисунке 1.6, будет уравнение

$$y = f(x) \quad (3.1)$$

Оно представляет собой функцию, графиком которой эта линия является.

Для линий типа той, что изображена на рис. 1.6, термины «линия и ее уравнение» и «функция и ее график» - это, по существу, одно и то же. Уравнениями таких линий являются функции, графиками которых эти линии являются.

Естественно, что у разных линий будут и разные уравнения. Уравнение линии указывается рядом с линией (см. рис. 1.6).

В уравнении (3.1) ордината  $y$  точек линии выражена через их абсциссу  $x$ . Но такое условие не обязательно - в уравнении линии, наоборот, абсцисса  $x$  точек линии может быть выражена через их ординату  $y$ . То есть уравнение линии может иметь и такой вид:

$$x = g(y) \quad (3.2)$$

(здесь использована другая буква для обозначения зависимости  $x$  от  $y$ , ибо функции (3.1) и (3.2) - разные даже для одной и той же линии).

Наконец, уравнение линии может иметь и самый общий вид

$$f_1(x; y) = f_2(x; y) \quad (3.3)$$

Если перенести правую часть этого уравнения налево и ввести обозначение  $f_1(x; y) - f_2(x; y) = F(x; y)$ , то это уравнение преобразуется к форме

$$F(x; y) = 0 \quad (3.4)$$

Такое уравнение называется  *неявным уравнением линии* , ибо в нем ни одна из координат точек линии не выражена через другую – в отличие от  *явного уравнения*  (3.1) и  *явного уравнения*  (3.2).

Из различных форм уравнения линии наиболее удобной является форма (3.1), потому что в этом случае уравнение линии представляет собой хорошо известное математическое понятие – функцию, причем в привычных обозначениях. А исследовать такое уравнение – это значит исследовать эту функцию, что является классической и хорошо разработанной математической процедурой. В принципе так же удобно иметь дело и с уравнением линии в форме (3.2). А вот неявное уравнение линии в форме (3.3) и (3.4) гораздо менее удобно для исследования. Поэтому такое уравнение стараются перевести (преобразовать) в явную форму (3.1) или (3.2), выражая из него  $y$  через  $x$  или  $x$  через  $y$  (если это возможно). Если это не удастся, приходится иметь дело с неявным уравнением, которое труднее, но тоже поддается математическому исследованию.

Пример 1. Пусть  $2y - 4x^2 = 0$  – неявное уравнение некоторой линии. Выразив из него  $y$ , получим  $y = 2x^2$ . Это уже явное уравнение той же линии, и теперь даже ясно, какой – параболы.

Примечание. Перенеся в уравнениях (3.1) и (3.2) правую часть налево, мы приведем их к виду (3.4), то есть сделаем эти явные уравнения неявными. Поэтому неявное уравнение линии в форме (3.4) является наиболее общим – в таком виде можно записать уравнение любой линии на плоскости с декартовой системой координат. Но не всякое такое уравнение является уравнением какой-то линии на плоскости. Например, уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  удовлетворяется, очевидно, лишь при  $x = 0$  и  $y = 0$  одновременно и, следовательно, определяет лишь одну точку плоскости – точку  $O(0;0)$ . А уравнение  $x^2 + y^2 = -1$  не может быть удовлетворено ни при каких  $x$  и  $y$ , а значит, вообще никаких геометрических объектов на плоскости не определяет. Но такие вырожденные случаи малосодержательны, являются исключениями, поэтому мы их во внимание принимать не будем.

Уравнение линии на плоскости может быть записано и в так называемой  *параметрической форме* .

Пусть, например, по плоскости с введенной на ней декартовой системой координат движется точка  $M$ , положение которой в каждый момент времени  $t$  известно. Это значит, что координаты  $(x; y)$  движущейся точки заданы как

некие функции времени:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Система (3.5) определяет движение указанной точки  $M(x; y)$  по плоскости, а значит, определяет и траекторию  $L$  движущейся точки. Эта система называется *параметрическим уравнением линии  $L$  на плоскости*. В нем координаты  $(x; y)$  точек линии связаны не непосредственно друг с другом (как в формах (3.1) – (3.4)), а через посредника – через параметр  $t$ . Исключив из системы (3.5) этот параметр, мы можем связать  $x$  и  $y$  и непосредственно друг с другом. Кстати, параметр  $t$  в системе (3.5) может иметь и какой-то другой смысл, не обязательно представлять собой время.

Пример 2. Материальная точка поднята над поверхностью земли на высоту  $h$  и брошена горизонтально со скоростью  $v$ . Найти уравнение траектории  $L$  брошенной точки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

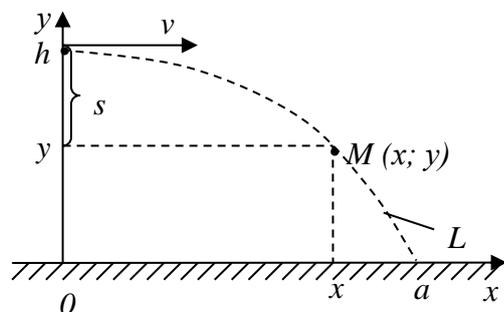


Рис. 1.7

Решение. Рассмотрим рис. 1.7. Так как брошенная точка участвует одновременно в двух независимых движениях – равномерном горизонтально со скоростью  $v$  и равноускоренном вертикально с ускорением свободного падения  $g$ , то в любой момент времени  $t \geq 0$  координаты  $(x; y)$  движущейся точки  $M$  найдутся по хорошо известным из школьной физики формулам:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = h - s = h - \frac{gt^2}{2} \quad (t \geq 0) \end{cases} \quad (3.6)$$

Это и есть уравнение траектории  $L$  брошенной точки (параметрическое). Его, при желании, можно привести и к явному виду (3.1). Для этого из первого уравнения системы (3.6) выразим параметр  $t = \frac{x}{v}$  и подставим его во второе уравнение. В итоге получим явное уравнение траектории  $L$  (параболы):

$$y = h - \frac{gx^2}{2v^2}. \quad (3.7)$$

Кстати, положив в (3.7)  $y = 0$  и  $x = a$ , найдем дальность полета  $a$ :

$$a = v \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (3.8)$$

Пример 3. Рассмотрим окружность радиуса  $R$  с центром в начале декартовой системы координат (рис. 1.8). Из рисунка очевидно, что для каждой точки  $M(x; y)$  указанной окружности  $L$  выполняются равенства:

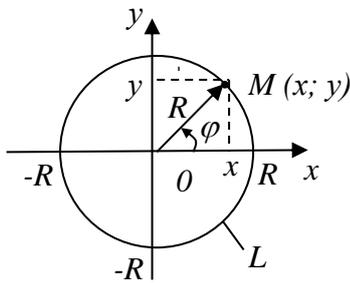


Рис. 1.8

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \quad (-\pi < \varphi \leq \pi], \quad (3.9)$$

где  $\varphi$  – полярный угол точки  $M$ . Система (3.9) имеет вид (3.5) при  $t = \varphi$  и, следовательно, представляет собой *параметрическое* уравнение окружности  $L$  (параметром здесь является угол  $\varphi$ ).

Можно связать  $x$  и  $y$  и напрямую друг с другом, без посредника  $\varphi$ . Для этого возведем каждое уравнение (3.9) в квадрат и сложим их. В итоге получим:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3.10)$$

Это – уравнение окружности  $L$  в декартовых координатах в неявной форме (в форме (3.3)). Выражая из этого уравнения  $y$ , можем привести его и к явной форме (форме (3.1)):

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2} \quad (3.11)$$

Равенство (3.11) содержит два уравнения. Уравнение  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  – это явное уравнение верхней полуокружности, а  $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$  – нижней.

В заключение параграфа обратим внимание на исключительную важность введенного в нем понятия «уравнение линии». Уравнение линии содержит в себе информацию сразу о всех точках этой линии. То есть один алгебраический объект (уравнение) описывает бесконечное количество геометрических объектов (точек), из которых состоит линия. Исследование всех этих геометрических объектов (то есть всей линии) сводится лишь к исследованию её уравнения, что кардинально упрощает проблему.

### Упражнения

1. Решить задачу, рассмотренную в примере 2, когда точка брошена не горизонтально, а под некоторым углом  $\alpha$  к поверхности земли.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = (v \cos \alpha) \cdot t \\ y = h + (v \sin \alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (t \geq 0 - \text{ время}).$$

2. Под каким углом с поверхности земли нужно бросить материальное тело, чтобы дальность его полета была максимальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ:  $45^{\circ}$

## § 4. Первая основная задача аналитической геометрии на плоскости

Основных задач аналитической геометрии на плоскости две. Первая из них: для заданной линии найти ее уравнение. Вторая задача – обратная: по заданному уравнению линии построить линию.

Начнем с рассмотрения первой, более трудной, задачи. Трудность решения этой задачи очевидна: ведь нужно найти математическое уравнение, которому будут удовлетворять координаты любой точки данной линии, и только они. Для достаточно сложных линий (например, для линии, образованной свободным движением руки) точное решение этой задачи вообще оказывается невозможным – только приближенное. Однако для не слишком сложных линий их уравнения, причем точные, найти можно. Мы, например, без труда сделали это в предыдущем параграфе для линий, изображенных на рис. 1.7 и 1.8. Рассмотрим еще несколько примеров.

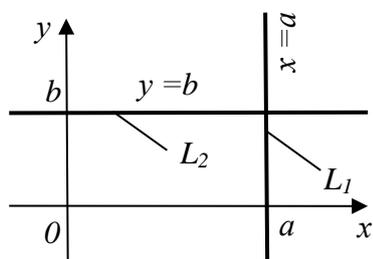


Рис. 1.9

будут удовлетворять координаты любой точки данной линии, и только они. Для достаточно сложных линий (например, для линии, образованной свободным движением руки) точное решение этой задачи вообще оказывается невозможным – только приближенное. Однако для не слишком сложных линий их уравнения, причем точные, найти можно. Мы, например, без труда сделали это в предыдущем параграфе для линий, изображенных на рис. 1.7 и 1.8. Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 1. Найти уравнения вертикальной прямой  $L_1$  и горизонтальной прямой  $L_2$ , изображенных на рис. 1.9.

Решение. Уравнения этих прямых очевидны:  $x = a$  – уравнение прямой  $L_1$ ,  $y = b$  – уравнение прямой  $L_2$ . Действительно, этим уравнениям удовлетворяют координаты любой точки соответствующих прямых, и только они. В частности,  $y = 0$  – это уравнение оси  $ox$ , а  $x = 0$  – уравнение оси  $oy$ .

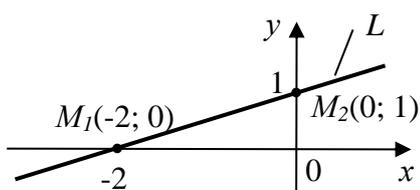


Рис. 1.10

Пример 2. Найти уравнение прямой  $L$ , изображенной на рис. 1.10.

Решение. Как известно из школьного курса математики, наклонная прямая – это график линейной функции вида  $y = kx + b$ . Значит, уравнение данной прямой  $L$  имеет вид  $y = kx + b$ . Нам только нужно найти параметры  $k$  и  $b$  этого уравнения.

Используем рис. 1.10. Так как точки  $M_1(-2; 0)$  и  $M_2(0; 1)$  лежат на прямой  $L$ , то их координаты  $(x; y)$  должны удовлетворять уравнению прямой. Подставляя эти координаты в уравнение прямой  $y = kx + b$ , получим систему из двух равенств:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot (-2) + b \\ 1 = k \cdot 0 + b \end{cases}$$

Решая ее, находим:  $k = \frac{1}{2}$ ;  $b = 1$ . Следовательно, уравнение данной прямой  $L$  таково:  $y = \frac{1}{2}x + 1$ . Или, в неявной форме,  $x - 2y + 2 = 0$ .

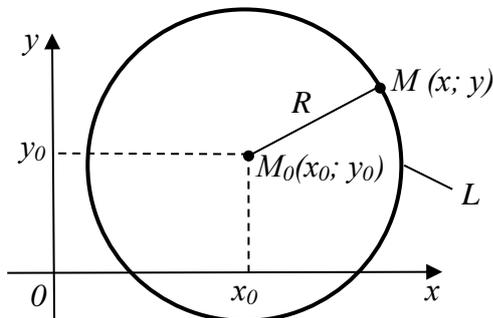


Рис. 1.11

Пример 3. Найти уравнение окружности  $L$  с центром в заданной точке  $M_0(x_0; y_0)$  и заданным радиусом  $R$  (рис. 1.11).

Решение. Для любой точки  $M(x; y)$  окружности  $L$ , и только для точек этой окружности, имеет место равенство:

$$|M_0M| = R$$

Реализуя это равенство с помощью формулы (2.1) расстояния между двумя точками, получим:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим равносильное равенство:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (4.1)$$

Это и есть искомое уравнение указанной окружности  $L$ .

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат ( $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$ ), то ее уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (4.2)$$

Это уравнение, кстати, совпадает с уравнением (3.10), полученным ранее другим путем.

Пример 4. Найти уравнение линии, состоящей из точек, равноудаленных от оси  $ox$  и от точки  $F(0; \frac{1}{2})$ .

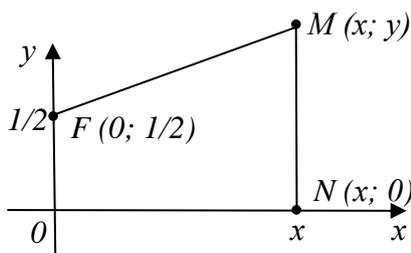


Рис. 1.12

Решение. Пусть  $M(x; y)$  – произвольная точка указанной линии, а  $N(x; 0)$  – проекция точки  $M(x; y)$  на ось  $ox$  (рис. 1.12). По условию задачи  $|FM| = |NM|$  для любой точки  $M(x; y)$  линии и только для точек этой линии. Если использовать формулу (3.1) расстояния между двумя точками, то это равенство примет вид:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2}$$

После возведения в квадрат обеих частей и очевидных упрощений оно примет вид:

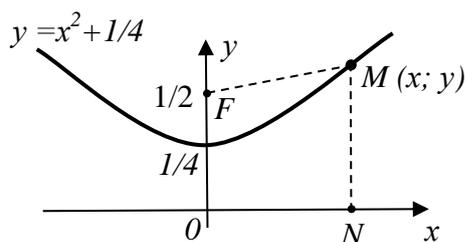


Рис. 1.13

$y = x^2 + \frac{1}{4}$ . Это и есть уравнение рассматриваемой линии. Судя по полученному уравнению, данная линия является параболой  $y = x^2$ , поднятой на  $\frac{1}{4}$  вдоль оси  $oy$  (рис. 1.13).

### Приближенные уравнения линий

А теперь рассмотрим вопрос о *приближенных уравнениях линий*. Чаще всего этот вопрос возникает, когда речь идет о линиях, полученных в результате экспериментов.

А именно, пусть экспериментальным путем изучается зависимость  $y = f(x)$  между двумя величинами. Например, зависимость урожайности культуры  $y$  от количества внесенных под нее удобрений  $x$ ; пройденного пути  $y$  от времени движения  $x$ ; прибыли предприятия  $y$  от величины затрат  $x$ , и т.д. В ходе эксперимента для ряда значений  $x$  определяются соответствующие значения  $y$ , что приводит к экспериментальной таблице вида

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Данные этой таблицы можно изобразить и графически в виде системы экспериментальных точек  $M_1(x_1; y_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2)$ , ...,  $M_n(x_n; y_n)$  (рис. 1.14). По этим экспериментальным данным нужно получить искомое уравнение  $y = f(x)$ , связывающее  $y$  с  $x$ . Такое уравнение называется *эмпирической формулой*, а сама задача получения такой формулы называется *задачей построения эмпирической формулы*.

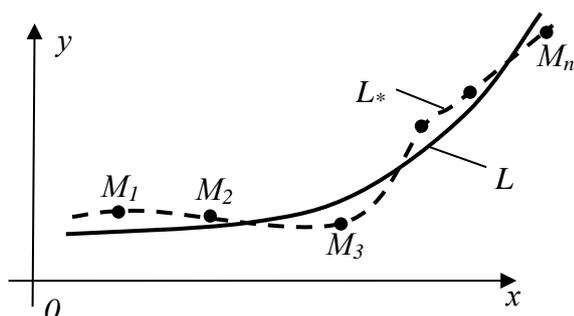


Рис. 1.14

В этой задаче фактически идет речь о нахождении уравнения  $y = f(x)$  линии  $L$  по точкам  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , которые, вообще говоря, на этой линии не лежат, так как они содержат в себе неизбежные погрешности эксперимента и, кроме того, содержат результат влияния других факторов (помех). Поэтому эмпирическая линия  $L$  может отличаться от линии  $L_*$ , непосредственно соединяющей экспериментальные точки. В частности, линия  $L_*$  может иметь весьма причудливую форму, в то время как линия  $L$  будет простой и гладкой (например, прямой). Эмпирическая линия  $L$  должна как бы сглаживать (усреднять) линию  $L_*$ , устраняя ее незначительные перепады, связанные с неточным положением экспериментальных точек.

В этой задаче фактически идет речь о нахождении уравнения  $y = f(x)$  линии  $L$  по точкам  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , которые, вообще говоря, на этой линии не лежат, так как они содержат в себе неизбежные погрешности эксперимента и, кроме того, содержат результат влияния других факторов (помех). Поэтому эмпирическая линия  $L$  может отличаться от линии  $L_*$ , непосредственно соединяющей экспериментальные точки. В частности, линия  $L_*$  может иметь весьма причудливую форму, в то время как линия  $L$  будет простой и гладкой (например, прямой). Эмпирическая линия  $L$  должна как бы сглаживать (усреднять) линию  $L_*$ , устраняя ее незначительные перепады, связанные с неточным положением экспериментальных точек.

При нахождении эмпирической формулы  $y = f(x)$ , а значит, и соответствующей ей линии  $L$ , приходится решать две частные задачи.

Первая из них – выбор *типа эмпирической формулы*. То есть выбор того класса функций, к которому принадлежит искомая функция  $y = f(x)$ . Во многих случаях класс функций, из которого подбирается эмпирическая формула, подсказывается теоретическими представлениями о характере изучаемой зависимости (зависимость линейная вида  $y = kx$  или  $y = kx + b$ , квадратичная вида  $y = ax^2 + bx + c$ , обратно-пропорциональная вида  $y = \frac{k}{x}$ , показательная вида  $y = ke^{ax}$  и т.д.). Или, если указанные теоретические представления отсутствуют, то класс функций для эмпирической формулы подбирают по характеру расположения экспериментальных точек.

После того, как вид эмпирической формулы выбран, то есть первая частная задача решена, остается определить *наилучшие значения входящих в эту формулу числовых коэффициентов*. Эта задача (вторая частная задача) уже более легкая, ибо решается стандартным методом – *методом наименьших квадратов*. В соответствии с этим методом наилучшими значениями параметров эмпирической формулы считаются те, при которых сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от эмпирической линии  $L$  была бы минимальной.

Эмпирическая линия  $L$ , построенная на основе метода наименьших квадратов, называется *линией регрессии*. А её уравнение  $y = f(x)$  – *уравнением регрессии*. Уравнения и линии регрессии строятся с помощью компьютерных программ.

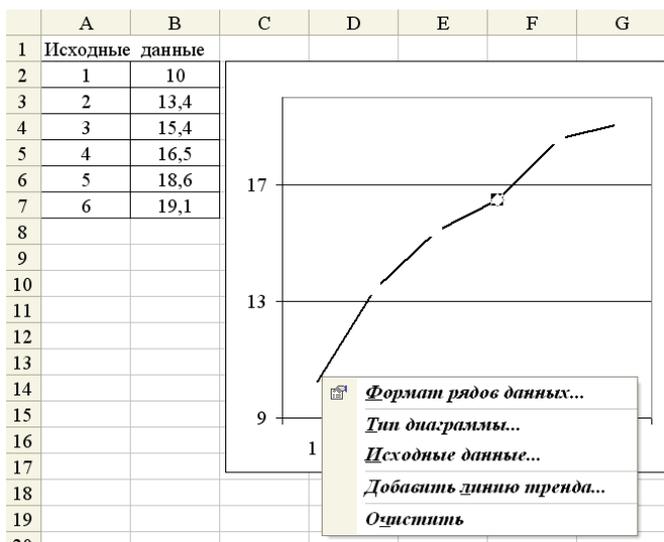
Например, команда «Добавить линию тренда» в Excel позволяет построить уравнения регрессии в следующих формах:

- линейное  $y^* = b_0 + b_1x$ ;
- полиномиальное  $y^* = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k \quad (k \leq 6)$ ;
- логарифмическое  $y^* = b_0 + b_1 \ln x$ ;
- степенное  $y^* = b_0x^{b_1}$ ;
- экспоненциальное  $y^* = b_0e^{b_1x}$ .

Построение любого из этих уравнений регрессии с помощью электронных таблиц Excel осуществляется с помощью следующих шагов:

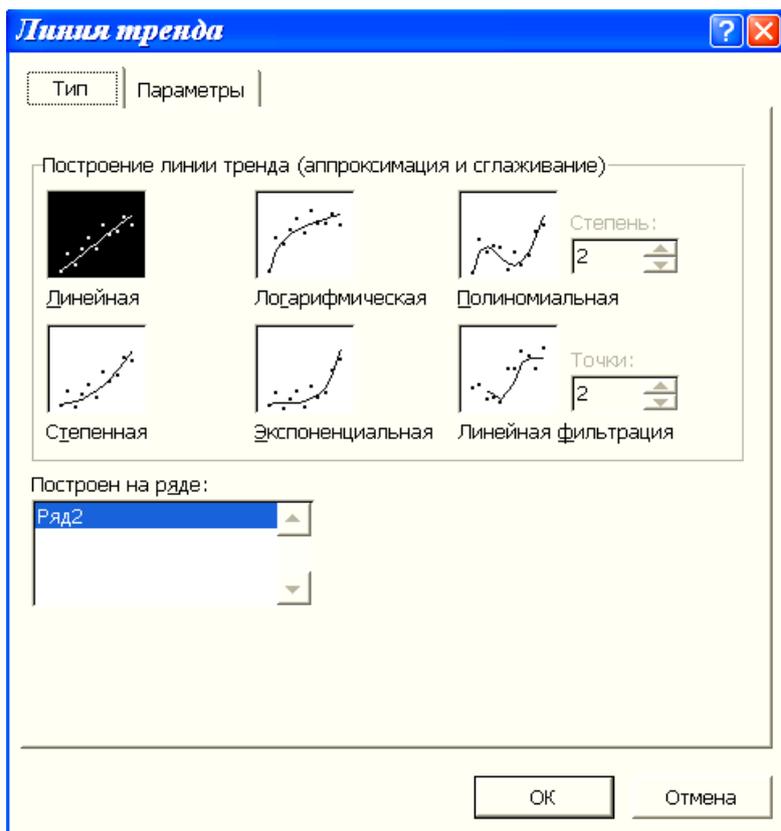
**Шаг 1.** На лист Excel вводим в виде двух столбцов исходные данные  $(x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) экспериментальной таблицы.

**Шаг 2.** По этим данным строим в декартовой системе координат точечную диаграмму ломаной регрессии (как на рис. ниже).



**Шаг 3.** Устанавливаем курсор на построенном графике, делаем щелчок правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выполняем команду «Добавить линию тренда».

**Шаг 4.** В появившемся диалоговом окне активизируем закладку «Тип» и выбираем нужное уравнение регрессии.

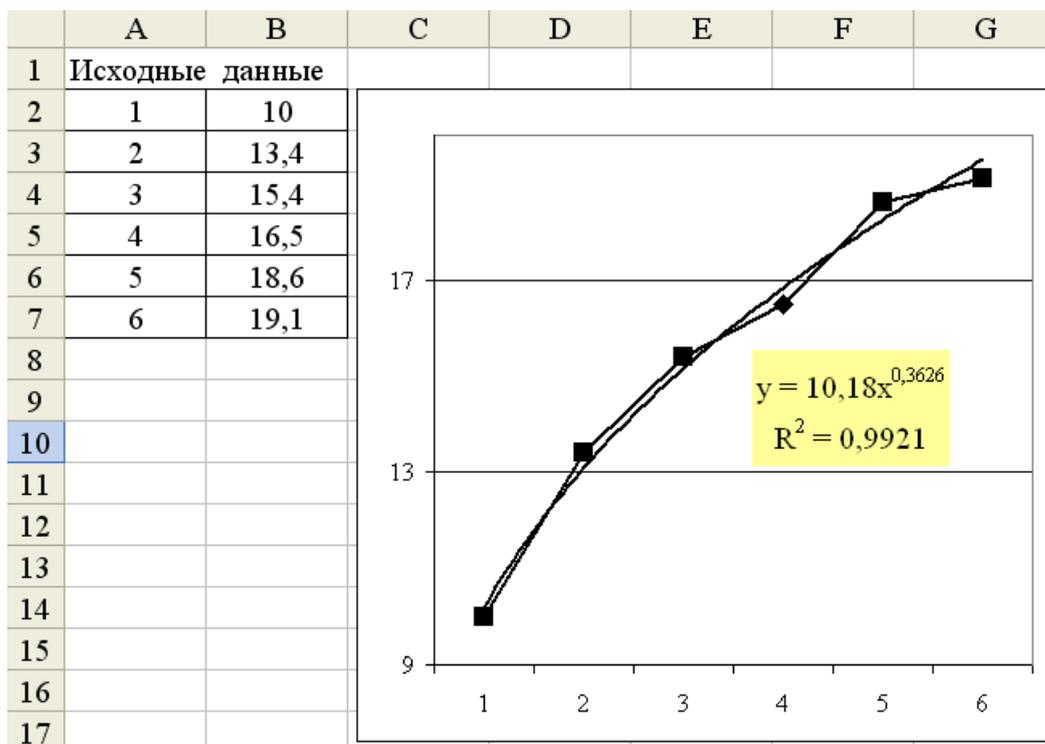


**Шаг 5.** Активизируем закладку «Параметры» и включаем необходимые для нас опции:

- «Показать уравнение на диаграмме» - на диаграмме будет показано выбранное уравнение регрессии с вычисленными коэффициентами.
- «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации

$(R^2)$ » - на диаграмме будет показано значение *коэффициента детерминации*  $R^2$ , который характеризует близость построенной линии регрессии к исходным экспериментальным точкам. Максимально возможное значение  $R^2$  равно единице. При таком  $R^2$  эта близость стопроцентная. То есть линия регрессии  $L$ , изображенная на рис. 1.14, проходит через все экспериментальные точки  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). При меньшем  $R^2$  и указанная близость соответственно меньше.

**Шаг 6.** После задания всех перечисленных опций щелкаем по кнопке «ОК», и на диаграмме появится формула построенного уравнения регрессии и значение коэффициента детерминации  $R^2$  (на рисунке ниже в качестве примера построено степенное уравнение регрессии).



### Упражнения

1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку  $A(-2;3)$ .

Ответ:  $y = -1,5x$

2. Написать уравнение линии, по которой движется точка  $M(x; y)$ , постоянно равноудаленная от начала координат и от точки  $A(-4; 2)$ . Лежат ли на этой линии точки  $B(-2;1)$ ,  $C(2;3)$ ,  $D(1;7)$ ?

Ответ:  $y = 2x + 5$ . Точки  $B$  и  $D$  лежат на линии,  $C$  – не лежит.

3. Найти уравнение линии, по которой движется точка, оставаясь постоянно вдвое ближе к оси  $ox$ , чем к оси  $oy$ . Построить линию по ее уравнению.

Ответ:  $y = \pm \frac{1}{2}x$  – крест из прямых  $y = \frac{1}{2}x$  и  $y = -\frac{1}{2}x$ .

4. Найти уравнение линии, состоящей из таких точек, что разность расстояний от каждой из них до точек  $F_1(-2;-2)$  и  $F_2(2;2)$  равна 4. Построить линию по ее уравнению.

Ответ:  $y = \frac{2}{x}$  – гипербола.

5. Парк развлечений освещают две осветительные установки высотой 12 и 15 метров, расположенные на расстоянии 96 метров друг от друга. Устройство этих установок таково, что наилучшая освещенность достигается в точках, отстоящих в два раза дальше от источника света, установленного на более низкой установке, чем на высокой. Пусть  $L$  - длина дорожки в парке в метрах, которую проложили через все такие точки (поверхность парка горизонтальна). Тогда значение  $\frac{1}{\pi}L$  равно (...).

Ответ: 124 м.

6. По экспериментальным данным, представленным ниже, с помощью Excel построить линейную эмпирическую формулу (линейное уравнение регрессии) вида  $y = kx + b$ .

$x$	-0,20	0,20	0,40	0,60	0,70	0,80
$y$	0,96	1,40	1,56	1,74	1,92	2,04

Ответ:  $y = 1,05x + 1,17$ ;  $R^2=0,99$ .

## § 5. Вторая основная задача аналитической геометрии на плоскости

Эта задача - обратная первой. То есть уравнение линии  $L$  дано, а по нему эту линию нужно построить. Указанная задача существенно проще первой основной задачи, и решается она стандартными методами.

Пусть, например, уравнение некоторой линии  $L$  задано в декартовых координатах в виде функции  $y = f(x)$  (в явном виде). Требуется по данному уравнению линии  $L$  построить саму линию  $L$ . В данном случае линия  $L$  – это просто график функции  $y = f(x)$ , который и нужно построить.

В принципе, построить линию – это значит нанести на плоскость все точки линии, совокупность которых и образует линию. Точками, лежащими на линии, будут те и только те точки  $M(x; y)$ , координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют уравнению линии  $y = f(x)$ . Так как на любой линии лежит бесчисленное множество точек, то определить координаты каждой из них и нанести все их на плоскость невозможно. Поэтому на практике при построении линии по ее уравнению  $y = f(x)$  поступают так. Из области определения функции  $y = f(x)$  (то есть из множества всех тех значений  $x$ , для которых можно найти  $y$ ) на выбранном участке оси  $ox$  выбирают ряд значений  $(x_1; x_2; \dots x_n)$  аргумента  $x$ , и по уравне-

нию линии  $y = f(x)$  вычисляют соответствующий им набор значений  $(y_1; y_2; \dots y_n)$  функции  $y$ . В итоге получают таблицу вида

$x$	$x$	$x$	$\dots$	$x$
	$1$	$2$		$n$
$y$	$y$	$y$	$\dots$	$y$
	$1$	$2$		$n$

(5.1)

содержащую координаты  $n$  точек  $(M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2); \dots M_n(x_n; y_n))$  искомой линии. Нанося эти точки на плоскости  $xOy$  и соединяя их плавной кривой, строят искомую линию  $L$  (рис. 1.15). Этот хорошо известный способ называется *построением линии по точкам*.

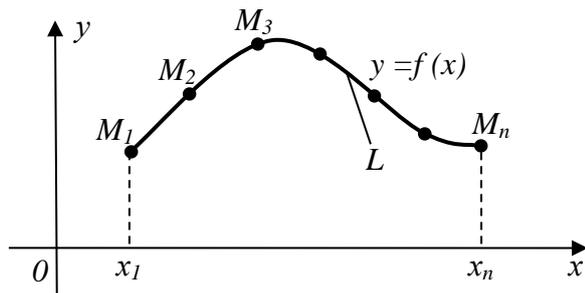


Рис. 1.15

По точкам можно построить и линию, заданную уравнением в параметрической форме, то есть заданную системой уравнений вида (3.5). Для этого для ряда выбранных значений  $(t_1; t_2; \dots t_n)$  параметра  $t$  вычисляют соответствующие значения  $x$  и  $y$ , что приводит к таблице вида:

$t$	$t_1$	$t_2$	$\dots$	$t_n$
$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

(5.2)

В итоге находятся точки  $(M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2); \dots M_n(x_n; y_n))$ , по которым строят и саму линию.

Отметим, что качество построенной по точкам линии будет выше, если в состав точек, по которым строится линия, будут включены наиболее интересные и важные точки этой линии – ее вершины, впадины, точки пересечения линии с осями координат, точки разрыва линии, и т.д., а также будет учтена возможная симметрия линии, ее повторяемость (периодичность) и другие ее особенности. Получение всей этой важной информации о линии связано с математическим исследованием уравнения линии. Это исследование, главным образом, опирается на использование *производных функций*, о чем, надеемся, читатель имеет некоторое представление из школьного курса математики. Впрочем, ниже, в главе «дифференциальное исчисление» мы это вспомним еще раз.

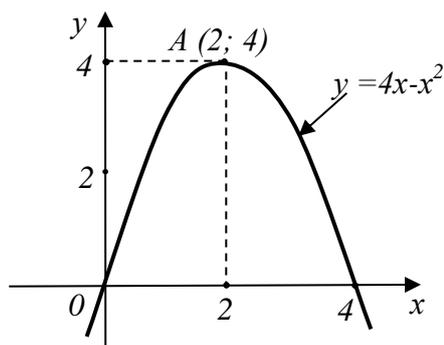
**Примечание.** Если уравнение линии задано в неявной форме (например, в виде  $F(x;y)=0$ ), то и математическое исследование такого уравнения, и нахождение точек такой линии существенно усложняется. Например, задав в уравнении  $F(x;y)=0$  значение  $x$ , нам придется для нахождения соответствующего значения ( $a$ , возможно, и значений)  $y$  решать это уравнение относительно  $y$ . А это может оказаться сделать и непросто. Возможно, даже придется решать это уравнение машинным путем – с помощью компьютера.

Отметим еще следующее. Построение линии по ее уравнению значительно упрощается, если это уравнение принадлежит к известному типу. Например, если уравнение линии представляет собой линейную функцию вида  $y = kx + b$ , квадратичную функцию вида  $y = ax^2 + bx + c$ , показательную функцию вида  $y = a^x$ , логарифмическую функцию вида  $y = \log_a x$  и т.д. Тогда сразу становится известен тип самой линии (прямая, парабола, показательная кривая, логарифмическая кривая и т.д.). Остается лишь установить детали этой линии. Скажем, для параболы – это направление ее ветвей, координаты вершины, точки пересечения с осями координат. После получения этой информации легко строится и сама парабола.

**Пример 1.** Построить линию, имеющую уравнение  $y = 4x - x^2$ .

**Решение.** Уравнение линии представляет собой квадратичную функцию вида  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a = -1$ ;  $b = 4$ ;  $c = 0$ , поэтому данная линия – парабола. Ветви этой параболы направлены вниз, т.к.  $a = -1 < 0$ . Найдем вершину параболы. Абсциссу  $x_0$  вершины найдем по известной школьной формуле:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$$



А ординату вершины  $y_0$  найдем по уравнению параболы:  $y_0 = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$ . Итак, точка  $A(2;4)$  – вершина параболы.

Теперь найдем точки пересечения параболы с осью  $ox$ . На этой оси  $y=0$ , поэтому получаем:

$$y = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 4.$$

Итак, парабола пересекает ось  $ox$  в двух точках:  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 4$ . А теперь строим параболу (данных для ее построения достаточно).

### Определение точек пересечения линий

При построении на одном чертеже нескольких линий может возникнуть вопрос об определении точек пересечения этих линий.

Пусть, например,  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  – уравнения некоторых двух линий, и требуется найти точки их пересечения. Так как искомые точки должны одновременно принадлежать обеим линиям, то и их координаты  $(x; y)$  должны одновременно удовлетворять уравнениям обеих линий. То есть они должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases} \quad (5.3)$$

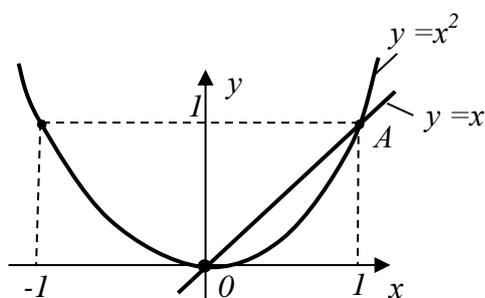
из уравнений этих линий. Обратное, решив систему (5.3), мы найдем такую пару (или такие пары) значений  $(x; y)$ , которые будут одновременно удовлетворять обоим уравнениям этой системы. А это значит, что точки с найденными координатами  $(x; y)$  лежат на обеих линиях, то есть являются точками пересечения этих линий.

Таким образом, *найти точки пересечения линий – это значит решить систему из уравнений этих линий.*

Пример 2. Найти точки пересечения прямой  $y = x$  и параболы  $y = x^2$ . Сделать иллюстрирующий чертеж.

Решение. Составим и решим систему из уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases} -$$



- два решения системы. Таким образом, имеются две точки пересечения данных прямой и параболы: точка  $O(0;0)$  и точка  $A(1;1)$ . Иллюстрация этого представлена на рисунке.

### Упражнения

1. Построить линию, имеющую уравнение  $xy = 0$ .

Ответ: крест из координатных осей  $ox$  и  $oy$ .

2. Построить линию, имеющую уравнение  $2x - 3y = 6$ .

Ответ: прямая, пересекающая ось  $ox$  в точке  $x = 3$  и ось  $oy$  в точке  $y = -2$ .

3. Найти точки пересечения прямой  $y = x$  и кубической параболы  $y = x^3$ .

Ответ:  $O(0; 0)$ ;  $M_1(1; 1)$ ;  $M_2(-1; -1)$ .

4. Построить линию, имеющую следующее уравнение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases} \quad \text{Ответ: правая ветвь параболы } y = x^2.$$

## § 6. Обзор основных линий и их уравнений (обзор основных функций и их графиков)

### 6.1. Прямые на плоскости и их уравнения

Как мы уже отмечали в §4, уравнения горизонтальных, вертикальных и наклонных прямых имеют соответственно вид:

$$y = b; \quad x = a; \quad y = kx + b \quad (6.1)$$

Все эти уравнения – частные случаи уравнения вида

$$ax + by + c = 0, \quad (6.2)$$

которое называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Общим оно называется потому, что в этом виде можно записать уравнение любой прямой на плоскости. Впрочем, для горизонтальных, вертикальных и наклонных прямых удобнее записывать их конкретные уравнения (6.1).

Остановимся подробнее на уравнениях наклонных прямых  $y = kx + b$ , хорошо известных еще из школьного курса математики. Прямая  $L$  с уравнением  $y = kx + b$  изображена на рис. 1.17:

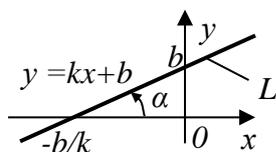


Рис. 1.17

$k = \operatorname{tg} \alpha$  – см. рис.

$b$  – см. рис.

Величина  $k = \operatorname{tg} \alpha$  называется *угловым коэффициентом прямой  $L$*  (прямой  $y = kx + b$ ), а величина  $b$  определяет точку пересечения этой прямой с осью  $oy$ . Само уравнение  $y = kx + b$  называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Для построения прямой по ее уравнению  $y = kx + b$  достаточно найти и нанести на плоскость  $хоу$  любые две ее точки. Удобнее всего в качестве этих точек взять точки пересечения прямой с осями координат.

Пример 1. Построить линию  $L$ , имеющую уравнение  $y = 2x - 7$  (или, что то же самое, построить график функции  $y = 2x - 7$ ).

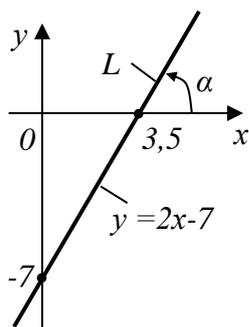


Рис. 1.18

Решение. Данное уравнение  $y = 2x - 7$  – это уравнение вида  $y = kx + b$  при  $k = 2$  и  $b = -7$ . Но уравнение вида  $y = kx + b$  – уравнение наклонной прямой. Значит, наша линия  $L$  – наклонная прямая. Найдем точки ее пересечения с осями координат.

а) *С осью  $ox$ :* на оси  $ox$   $y = 0$ , поэтому из уравнения прямой получаем:  $y = 0 \Rightarrow 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = 3,5$  – точка пересечения прямой с осью  $ox$ .

б) С осью  $oy$ : на оси  $oy$   $x = 0$ , поэтому из уравнения прямой получаем:  $x = 0 \Rightarrow y = -7$  - точка пересечения прямой с осью  $oy$ .

А теперь строим прямую  $L$  (рис. 1.18).

Пример 2. Найти угол  $\alpha$ , под которым прямая  $y = 2x - 7$  наклонена к оси  $ox$  (см. рис. 1.18).

Решение. Из уравнения прямой  $y = 2x - 7$  определяем ее угловой коэффициент  $k$ :  $k = 2$ . Но  $k = \operatorname{tg} \alpha$ . Значит,  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Но  $\operatorname{arctg} 2 = 63^\circ 26'$  (это можно определить, например, с помощью инженерного калькулятора). Значит,

$$\alpha = 63^\circ 26' + 180^\circ \cdot n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Так как  $k = \operatorname{tg} \alpha = 2 > 0$ , то угол  $\alpha$  острый ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Это подтверждает и рис. 1.18. Чтобы из предыдущей формулы получить такой угол  $\alpha$ , нужно в ней положить  $n = 0$ . В итоге получим окончательно:  $\alpha = 63^\circ 26'$ .

### Стандартные задачи на прямые на плоскости

Задача 1. Пусть на прямой  $L$  известна только одна ее точка  $M_0(x_0; y_0)$ . Каким будет уравнение этой прямой?

Решение. Если эта прямая вертикальная, то ее уравнением будет, очевидно, уравнение  $x = x_0$ , а если горизонтальная – то уравнение  $y = y_0$ . Если же прямая  $L$  наклонная, то знания только одной точки  $M_0(x_0; y_0)$ , через которую проходит прямая, очевидно, недостаточно. Нужно задать еще и угол  $\alpha$  – угол наклона прямой к оси  $ox$ . Или, что более удобно, нужно задать угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg} \alpha$  этой прямой (см. рис. 1.19).

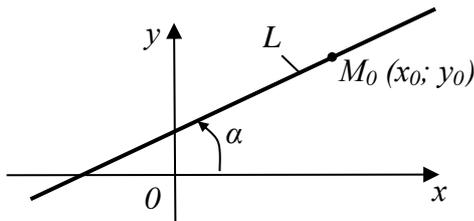


Рис. 1.19

$$\begin{cases} M_0(x_0; y_0) - \text{задана;} \\ k = \operatorname{tg} \alpha - \text{задан} \end{cases}$$

Уравнение изображенной на рис. 1.19 прямой  $L$  будем искать в виде  $y = kx + b$ . Величина  $k$  уже известна. А для определения величины  $b$  подставим в это уравнение координаты  $(x_0; y_0)$  точки  $M_0$ , лежащей на прямой. В результате найдем  $b$ :

$$y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - kx_0$$

Подставляя найденное значение  $b$  в уравнение  $y = kx + b$ , получим:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (6.3)$$

Это и есть искомое уравнение прямой  $L$ , изображенной на рис. 1.19. То есть уравнение прямой, проходящей через заданную точку  $M_0(x_0; y_0)$  и имеющей заданный угловой коэффициент  $k$ .

**Пример 3.** Найти уравнение прямой  $L$ , изображенной на рис. 1.20.

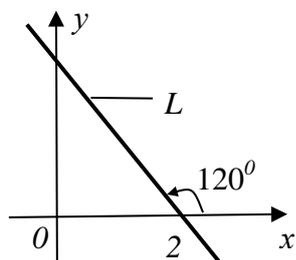


Рис. 1.20

**Решение.** Данная прямая  $L$  проходит через точку  $M_0(2; 0)$  и имеет угловой коэффициент

$k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = \operatorname{tg}(-60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$   
Поэтому, согласно (6.3), получаем следующее уравнение прямой  $L$ :

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

**Задача 2.** Пусть теперь на наклонной прямой  $L$  заданы две какие-либо ее точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ . Нужно найти уравнение этой прямой (рис. 1.21).

**Решение.** Уравнение данной наклонной прямой  $L$  будем искать в виде

$y = kx + b$ . Здесь ни  $k$ , ни  $b$  не известны. Но зато на прямой  $L$  известны две ее точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ . Подставляя координаты каждой из них в уравнение прямой  $y = kx + b$ , получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $k$  и  $b$ . Решая ее, получим:

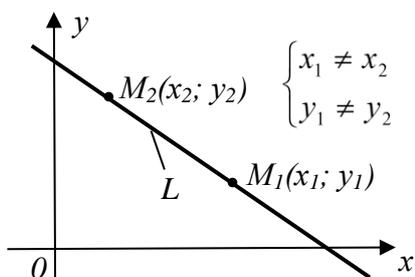


Рис. 1.21

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \end{cases} \quad (6.4)$$

Подставляя найденные значения  $k$  и  $b$  в уравнение  $y = kx + b$ , после упрощений получим легко запоминаемое уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (6.5)$$

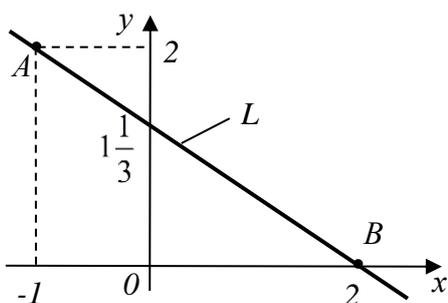


Рис. 1.22

Это и есть уравнение наклонной прямой, проходящей через две заданные точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ .

**Пример 4.** Найти уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-1; 2)$  и  $B(2; 0)$ , и найти точку пересечения этой прямой с осью  $oy$ .

**Решение.** Приняв точку  $A(-1; 2)$  за точку  $M_1(x_1; y_1)$ , точку  $B(2; 0)$  за точку  $M_2(x_2; y_2)$  (а можно и наоборот!) и воспользовавшись уравнением (6.5), получим:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} \Leftrightarrow 2x+3y-4=0$$

Это и есть искомое уравнение прямой (в форме общего уравнения (5.2)). Выразив из него  $y$ , можем записать это уравнение и в явном виде  $y = kx + b$ :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Величина  $b = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$  и определяет точку пересечения данной прямой с осью  $oy$ .

Эта прямая  $L$  изображена на рис. 1.22.

**Задача 3.** Пусть  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  – уравнения некоторых двух данных наклонных прямых. Требуется установить:

а) параллельны они или нет?

б) перпендикулярны или нет?

в) если не параллельны и не перпендикулярны, то каков угол  $\alpha$  между ними?

Решение. а) Пусть прямые  $L_1$  и  $L_2$  параллельны (рис. 1.23 (а)).

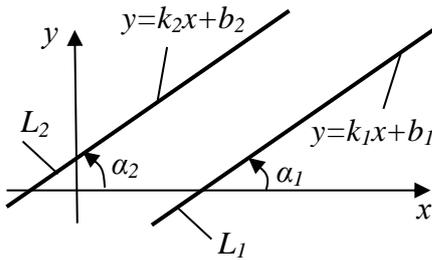


Рис. 1.23 (а)

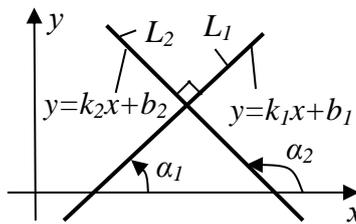


Рис. 1.23 (б)

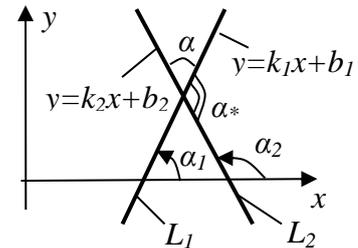


Рис. 1.23 (в)

Тогда  $\alpha_1 = \alpha_2$ , а значит,  $k_1 = k_2$ , ибо  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ , а  $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ . Обратно, если  $k_1 = k_2$ , то  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ , откуда следует, что  $\alpha_1 = \alpha_2$ , или  $\alpha_1$  отличается от  $\alpha_2$  на угол, кратный  $180^\circ$ . В любом из этих двух случаев прямые  $L_1$  и  $L_2$  одинаково наклонены к оси  $ox$ , а значит между собой параллельны.

Таким образом, *прямые  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты:*

$$k_1 = k_2 \quad (6.6)$$

Условие (6.6) называется *условием параллельности прямых*.

Пример 5. Показать, что прямые  $y = \frac{1}{2}x$  и  $x - 2y + 4 = 0$  параллельны.

Решение. Из уравнения первой прямой  $y = \frac{1}{2}x$  следует, что ее угловой ко-

эффицент  $k_1 = \frac{1}{2}$ . Чтобы получить угловой коэффициент  $k_2$  другой прямой  $x - 2y + 4 = 0$ , нужно привести её уравнение к виду  $y = kx + b$  - к виду с угловым коэффициентом. Делая это, получаем  $y = \frac{1}{2}x + 2$ , откуда следует:  $k_2 = \frac{1}{2}$ . Так как  $k_1 = k_2$ , то указанные прямые действительно параллельны.

б) Пусть прямые  $L_1$  и  $L_2$  перпендикулярны (рис. 1.23 (б)). Тогда углы их наклона к оси  $ox$  отличаются один от другого на прямой угол. То есть  $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$  или  $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ . А значит, в любом случае имеет место равенство:

$\alpha_2 = \alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}$ . Но тогда

$$k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{Ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = -\frac{1}{k_1}$$

То есть получаем:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (6.7)$$

Условие (6.7) и является *условием перпендикулярности прямых*.

Пример 6. Подтвердить перпендикулярность прямых  $x - 3y = 4$  и  $3x + y - 1 = 0$ .

Решение. Преобразуя уравнения этих прямых к виду  $y = kx + b$  (к виду с угловым коэффициентом), находим:

$$\begin{aligned} x - 3y = 4 &\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}; & k_1 &= \frac{1}{3} \\ 3x + y - 1 = 0 &\Leftrightarrow y = -3x + 1; & k_2 &= -3. \end{aligned}$$

Так как условие (6.7) выполняется, то указанные прямые перпендикулярны.

в) Пусть теперь прямые  $L_1$  и  $L_2$  составляют между собой угол  $\alpha$  (рис. 1.23 (в)), отличный от прямого. Впрочем, углом между прямыми можно, при желании, считать и угол  $\alpha_*$ . Но так как в сумме  $\alpha$  и  $\alpha_*$  составляют, очевидно,  $180^\circ$ , то зная  $\alpha$ , можно найти и  $\alpha_*$ :  $\alpha_* = 180^\circ - \alpha$ .

Угол  $\alpha$ , согласно рис. 1.23 (в), представляет собой разность углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . То есть или  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ , или  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ . Найдя  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (по схеме примера 2), найдем и  $\alpha$ .

**Задача 4.** Пусть  $ax + by + c = 0$  – уравнение некоторой прямой  $L$  на плоскости, заданное в общем виде. И пусть  $M_0(x_0; y_0)$  – некоторая точка плоскости,

не лежащая на этой прямой. Требуется найти расстояние  $d$  от указанной точки до указанной прямой.

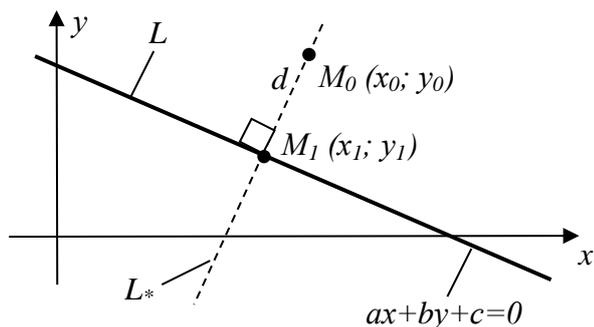


Рис. 1.24

Решение. Рассмотрим рис. 1.24. Если данная прямая  $L$  горизонтальна или вертикальна, то решение поставленной задачи труда, естественно, не представляет. Поэтому будем считать, что  $L$  – наклонная прямая. В этом случае задачу можно решить по следующей схеме:

1. Из заданного уравнения  $ax + by + c = 0$  прямой  $L$  находим ее уг-

ловой коэффициент  $k$ .

2. Находим  $k_* = -\frac{1}{k}$  – угловой коэффициент прямой  $L_*$ , проходящей через

точку  $M_0(x_0; y_0)$  перпендикулярно прямой  $L$ .

3. Используя равенство (6.3), записываем уравнение прямой  $L_*$ :

$$y - y_0 = k_*(x - x_0)$$

4. Решаем систему

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y - y_0 = k_*(x - x_0) \end{cases}$$

из уравнений прямых  $L$  и  $L_*$  и находим точку  $M_1(x_1; y_1)$  – точку их пересечения.

5. Наконец, используя формулу (2.1) для нахождения расстояния между двумя точками плоскости, находим искомое расстояние  $d = |M_0M_1|$ .

Если осуществить приведенную выше схему, то в итоге получается следующая простая формула:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (6.8)$$

Это и есть формула расстояния от заданной точки  $M_0(x_0; y_0)$  до заданной прямой  $ax + by + c = 0$  (рис.1.24). Кстати, эта формула оказывается справедливой не только для наклонной, но и для горизонтальной и для вертикальной прямой (убедитесь в этом самостоятельно).

Пример 7. В треугольнике  $ABC$  с вершинами  $A(-3;0)$ ,  $B(2;5)$ ,  $C(3;2)$  найти длину  $h$  высоты  $BD$ .

Решение. Искомая высота  $h$  есть расстояние от точки  $B$  до прямой  $L$ , проходящей через точки  $A$  и  $C$ . Чтобы найти это расстояние, нужно сначала найти уравнение этой прямой  $L$ . Его найдем, используя уравнение (6.5) прямой, про-

ходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad \frac{x + 3}{3 + 3} = \frac{y - 0}{2 - 0} \Rightarrow \frac{x + 3}{6} = \frac{y}{2} \Rightarrow x - 3y + 3 = 0.$$

Итак,  $x - 3y + 3 = 0$  – уравнение прямой  $AC$  (в общем виде). А теперь по формуле (6.8) найдем расстояние  $h$  от точки  $B$  до этой прямой:

$$h = \frac{|2 - 3 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \approx 3,16.$$

## 6.2. Некоторые важнейшие кривые на плоскости

К числу важнейших и наиболее простых кривых линий на плоскости относятся линии со следующими уравнениями:

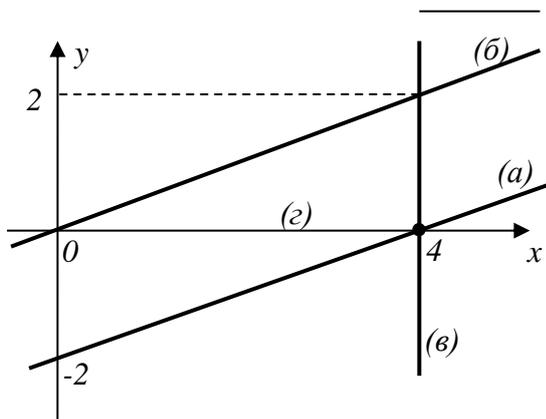
1. Парабола  $y = ax^2 + bx + c$ .
2. Гипербола  $y = \frac{k}{x}$ .
3. Окружность  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ .
4. Показательная кривая  $y = a^x$ . Важнейшая из них – экспонента  $y = e^x$ .
5. Логарифмическая кривая  $y = \log_a x$ . Важнейшая из таких кривых – кривая натурального логарифма  $y = \ln x$ .
6. Тригонометрические кривые: синусоида  $y = \sin x$ ; косинусоида  $y = \cos x$ ; тангенсоида  $y = \operatorname{tg} x$ ; котангенсоида  $y = \operatorname{ctg} x$ .
7. Обратные тригонометрические кривые:  $y = \arcsin x$ ;  $y = \arccos x$ ;  $y = \operatorname{arctg} x$ ;  $y = \operatorname{arcctg} x$  (кривые без специальных названий).

Вид всех этих кривых известен из школьного курса математики, поэтому останавливаться на них не будем.

## Упражнения

1. Построить прямые: а)  $x - 2y = 4$ ; б)  $x - 2y = 0$ ; в)  $x - 4 = 0$ ; г)  $2y = 0$ .

Ответ: - см. рис. ниже.



2. Написать уравнение прямой, пересекающей ось  $ox$  в точке  $x = 3$  и составляющей с этой осью угол  $120^\circ$ . Найти точку  $A$  пересечения этой прямой с осью  $oy$ .

Ответ:  $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ ;  $A(0; 3\sqrt{3})$ .

3. Написать уравнение прямой, пересекающей оси координат в точках  $x = 4$

и  $y = 2$ . Найти угол  $\alpha$  между прямой и осью  $ox$ .

Ответ:  $x + 2y - 4 = 0$ ;  $\alpha = 153^\circ 26'$ .

4. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат: а) параллельно прямой  $2x + y = 2$ ; б) перпендикулярно этой прямой.

Ответ: а)  $y = -2x$ ; б)  $y = \frac{1}{2}x$ .

5. Показать, что прямые  $2x - 3y = 6$  и  $4x - 6y = 25$  параллельны, и найти расстояние  $h$  между ними.

Ответ:  $h = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,803$ .

6. Даны прямая  $x + 2y - 4 = 0$  и точка  $A(5; 7)$ . Найти проекцию  $B$  точки  $A$  на данную прямую.

Ответ:  $B(2; 1)$ .

7. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку  $A(1; 2)$ .

Ответ:  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  и  $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ .

8. Показать, что уравнение  $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 28 = 0$  является уравнением окружности. Найти её центр и радиус.

Ответ: центр  $M_0(2; 7)$ , радиус  $R=5$ .

9. Найти расстояние между центрами окружностей  $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$  и  $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ .

Ответ:  $\sqrt{53}$ .

10. Найти а) центр; б) радиус; в) уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами  $A(4; 3)$ ,  $B(-3; 2)$ ,  $C(1; -6)$ .

Ответ: а) центр  $M_0(1; -1)$ ; б) радиус  $R=5$ ; в) уравнение  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ .

11. Определить тип кривых а)  $x = -\sqrt{-y}$ ; б)  $y = -\sqrt{-x}$  и построить эти кривые.

Ответ: а) левая половина параболы  $y = -x^2$ ; б) нижняя половина параболы  $x = -y^2$ .

## §7. Геометрическое представление решений неравенств и систем неравенств

Как мы уже знаем из §3, уравнение  $F(x; y) = 0$  в обычных случаях (кроме особых) определяет на плоскости  $xOy$  некоторую линию  $L$ , координаты  $(x; y)$  точек которой этому уравнению удовлетворяют. Для координат  $(x; y)$  всех других точек плоскости  $xOy$ , не лежащих на линии  $L$ , будет выполняться либо неравенство  $F(x; y) > 0$ , либо неравенство  $F(x; y) < 0$ , либо выражение  $F(x; y)$  не будет существовать.

Возникает естественный вопрос: как рассортировать эти точки? То есть где именно на плоскости  $xOy$  будут находиться точки, координаты которых удовлетворяют, например, неравенству  $F(x; y) > 0$ ? Или неравенству  $F(x; y) < 0$ ?

Начнем с рассмотрения этих вопросов для простейших, очевидных случаев.

1) Неравенствам  $x > 0$  и  $x < 0$  удовлетворяют, очевидно, координаты  $(x; y)$  точек правой и левой полуплоскости соответственно. Для точек оси  $Oy$ , разделяющей правую и левую полуплоскости, имеет место уравнение  $x = 0$ , которое является уравнением этой оси.

2) Неравенствам  $y > 0$  и  $y < 0$  удовлетворяют, очевидно, координаты  $(x; y)$  точек верхней и нижней полуплоскости соответственно. Для точек оси  $Ox$ , разделяющей верхнюю и нижнюю полуплоскости, имеет место уравнение  $y = 0$ , которое является уравнением этой оси.

3) Неравенствам  $x > a$  и  $x < a$  соответственно удовлетворяют, очевидно, координаты  $(x; y)$  точек, находящихся правее вертикальной прямой, имеющей уравнение  $x = a$ , и точек, находящихся левее этой прямой.

4) Неравенствам  $y > b$  и  $y < b$  соответственно удовлетворяют, очевидно, координаты  $(x; y)$  точек, находящихся выше горизонтальной прямой, имеющей уравнение  $y = b$ , и точек, находящихся ниже этой прямой.

5) Теперь рассмотрим линейные неравенства вида  $y > kx + b$  и  $y < kx + b$ . Вспоминая, что  $y = kx + b$  - уравнение наклонной прямой  $L$ , делящей плоскость  $xOy$  на две полуплоскости - верхнюю и нижнюю (рис. 1.25), приходим к очевидному выводу: неравенству  $y > kx + b$  удовлетворяют точки верхней полуплоскости, а неравенству  $y < kx + b$  - нижней.

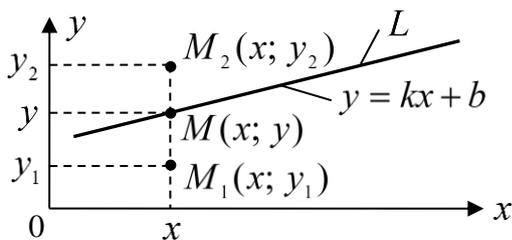


Рис. 1.25

$$\begin{aligned}
 y &= kx + b \\
 y_1 &< kx + b \\
 y_2 &> kx + b
 \end{aligned}$$

Таким образом, из рассмотренных выше случаев (1) - (5) получаем следующий вывод. Если в уравнении любой прямой (вертикальной  $x = a$ , горизонтальной  $y = b$ , наклонной  $y = kx + b$ ) заменить знак равенства на знак неравенства, то получающемуся неравенству будут удовлетво-

венства на знак неравенства, то получающемуся неравенству будут удовлетво-

рять координаты  $(x; y)$  всех точек одной из тех двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит плоскость. Какой именно из полуплоскостей = это зависит от знака неравенства.

б) Наконец, рассмотрим линейные неравенства с двумя переменными  $x$  и  $y$  общего вида:

$$a) ax + by + c > 0 \text{ и } б) ax + by + c < 0. \quad (7.1)$$

Так как равенство  $ax + by + c = 0$  - это уравнение прямой на плоскости при любых значениях числовых параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то переход от этого уравнения к неравенствам (7.1) означает переход с прямой на одну из тех полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю плоскость  $xOy$ . Чтобы выяснить, на какую именно, есть два способа.

Способ первый. Он состоит в преобразовании неравенства (7.1) к одной из тех форм (1) – (5), которые были рассмотрены выше. После этого искомая полуплоскость становится очевидной.

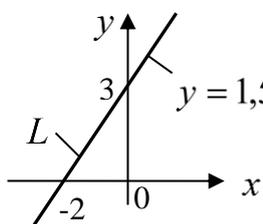


Рис. 1.26

Способ второй. Следует построить прямую  $ax + by + c = 0$ . Затем взять пробную точку  $M(x; y)$  в одной из полуплоскостей, на которые эта прямая разобьет плоскость  $xOy$ , и подставить координаты  $(x; y)$

этой точки в данное неравенство. Если неравенство удовлетворится, то оно будет удовлетворяться и для всех точек выбранной полуплоскости. А если не удовлетворится, то оно будет удовлетворяться в другой полуплоскости.

Примечание. Нестрогие неравенства вида

$$a) ax + by + c \geq 0 \text{ и } б) ax + by + c \leq 0. \quad (7.2)$$

будут выполняться в одной из полуплоскостей, включая саму прямую.

Пример 1. Выяснить, для каких  $(x; y)$  будет выполняться неравенство  $3x - 2y + 6 > 0$ .

Решение.

Первый способ. Преобразуем данное неравенство:

$$3x - 2y + 6 > 0; \Leftrightarrow 2y < 3x + 6; \Leftrightarrow y < 1,5x + 3.$$

Построим прямую  $L$ , имеющую уравнение  $y = 1,5x + 3$  (построим по точкам ее пересечения с осями координат) – рис. 1.26. Неравенство  $y < 1,5x + 3$ , а значит, и исходное неравенство  $3x - 2y + 6 > 0$ , выполняется в полуплоскости ниже прямой  $L$ .

Второй способ. Построим прямую  $3x - 2y + 6 = 0$  (это та же прямая  $L$ ), и возьмем в качестве пробной точки какую-либо точку, не лежащую на этой прямой. Например, точку  $O(0; 0)$ , лежащую ниже прямой  $L$ . Координаты точки

$O(0; 0)$  удовлетворяют данному неравенству  $3x - 2y + 6 > 0$ . Значит, это неравенство выполняется в полуплоскости ниже прямой  $L$ .

Пример 2. Выяснить, для каких  $(x; y)$  будет выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 > 0 \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Решение. Используя результат, полученный в предыдущем примере, приходим к очевидному выводу: данная система выполняется внутри треугольника, ограниченного прямой  $L$  и осями координат (рис. 1.26).

Пример 3. Выяснить, для каких  $(x; y)$  будет выполняться неравенство  $x^2 + y^2 - 9 \leq 0$ .

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду:  $x^2 + y^2 \leq 3^2$ . А теперь рассмотрим уравнение  $x^2 + y^2 = 3^2$ . Это – уравнение

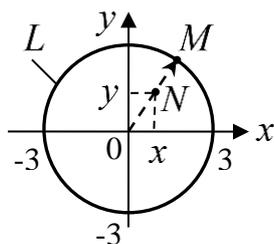


Рис. 1.27

окружности с центром в начале координат и с радиусом  $R = 3$  (см. формулу 3.10 или формулу 4.2). Для координат  $(x; y)$  любой точки  $M$ , лежащей на этой окружности, выполняется равенство:  $x^2 + y^2 = 3^2$ . А для координат  $(x; y)$  любой точки  $N$ , лежащей внутри окружности, то есть ближе к ее центру (см. рис.1.27), будет, очевидно, выполняться строгое неравенство  $x^2 + y^2 < 3^2$ . То есть

неравенство  $x^2 + y^2 \leq 3^2$ , а, значит, и исходное неравенство  $x^2 + y^2 - 9 \leq 0$ , будет выполняться для всех точек круга, ограниченных окружностью  $L$ , включая и саму эту окружность.

### Упражнения

1. Найти и изобразить на плоскости  $xOy$  множество всех решений следующих неравенств:

- а)  $x + 1 < 0$ ; б)  $y - 2 \geq 0$ ; в)  $y - x > -1$ ; г)  $y + x \leq 3$ .  
 д)  $x - 2y + 4 > 0$ ; е)  $x - 2y \leq -4$ .

2. Найти и изобразить на плоскости  $xOy$  множество всех решений следующих систем неравенств:

$$а) \begin{cases} x - y > 0 \\ y + x > 0; \\ x \geq -1 \end{cases} \quad б) \begin{cases} x + y \leq 3 \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad ; \quad в) \begin{cases} x < y^2 \\ x > 0 \\ y < 2 \end{cases} \quad ; \quad г) \begin{cases} x^2 + y^2 < 2 \\ y < x^2 \\ x > 0 \end{cases} .$$

## ГЛАВА II

# Линейная алгебра

Слово «алгебра» всем известно из школы. Это раздел математики, изучающий функции, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств.

Функции, уравнения и неравенства разделяют на: а) линейные; б) нелинейные. В линейную функцию  $y = kx + b$  переменные  $x$  и  $y$  входят *линейно* (в первой степени). Аналогично и в линейные уравнения и неравенства все неизвестные входят исключительно в *первой степени*. А нелинейные функции, уравнения и неравенства – это все остальные.

Например:

а)  $2x + 1 = 0$  - линейное уравнение с одной неизвестной  $x$ .

б)  $2x + 1 > 0$  - линейное неравенство с одной неизвестной  $x$ .

в)  $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$  - система линейных уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ .

г)  $\begin{cases} x + 3y < -1 \\ 2x - y > 5 \end{cases}$  - система линейных неравенств с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ .

д)  $x^2 - 3x - 4 = 0$  - нелинейное (квадратное) уравнение с неизвестной  $x$ .

е)  $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x^2 + 5y - 1 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$  - система трех уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ ,

в которой первое и третье уравнения линейные, а второе уравнение нелинейное.

Из всех функций, уравнений, неравенств и их систем линейные являются наиболее простыми и в то же время наиболее востребованными, в том числе и в агрономии. Вслед за древнегреческим философом Эпикуром «поблагодарим мудрую природу за то, что она сделала всё ненужное сложным и всё сложное ненужным».

Раздел математики, в котором изучаются линейные функции, уравнения, неравенства и их системы, называется «**линейная алгебра**».

Развитие методов решения систем линейных уравнений привело к таким еще понятиям, как *матрицы* и *определители*. Поэтому они тоже являются объектами изучения в линейной алгебре. Обо всем этом и будет идти речь в этой главе.

### § 1. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса.

#### 1.1. Общие понятия и определения

Наряду с решением отдельных уравнений решение различного рода систем уравнений – классическая математическая проблема. В данном параграфе мы

остановимся на простейших из систем – на *системах линейных уравнений*. Именно они чаще других находят применение в агрономии (да и не только в ней).

Системой линейных уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

В этой системе  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными ( $x_1; x_2; \dots x_n$ ). А линейными уравнения, входящие в систему (1.1), называются потому, что неизвестные ( $x_1; x_2; \dots x_n$ ) этих уравнений входят в них в первой степени (линейно). То есть входят аналогично тому, как входят в линейную функцию  $y = kx + b$  величины  $x$  и  $y$ .

Систему (1.1) можно записать и в сжатой (сокращенной) форме, используя знак суммирования  $\Sigma$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.2)$$

Числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) – заданные коэффициенты при неизвестных  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ); числа  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – так называемые свободные члены системы, которые тоже заданы.

Определение. Любой набор значений неизвестных ( $x_1; x_2; \dots x_n$ ), удовлетворяющих всем уравнениям системы, называется ее частным решением. Система считается решенной, если найдены все ее частные решения (или доказано, что никаких решений у нее нет).

В частности, если все свободные члены системы  $\{b_1; b_2; \dots b_m\}$  равны нулю, то система (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

и называется *линейной однородной* системой (а все прочие системы (1.1) являются *линейными неоднородными*).

Любая линейная однородная система по крайней мере одно частное решение заведомо имеет. И это решение очевидно:  $\{x_1=0; x_2=0; \dots x_n=0\}$ . Это так называемое нулевое (*тривиальное*) частное решение. Тривиальное решение у однородной системы (1.3) может оказаться единственным. Но не исключено, что у неё есть и другие (нетривиальные) частные решения. Сколько всего решений у различных систем линейных уравнений может быть и как их найти – об этом ниже.

## 1.2. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Детальное рассмотрение систем линейных уравнений начнем с наиболее простой из них – с системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. То есть с системы вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

Сколько частных решений  $(x; y)$  у этой системы может в принципе быть, и как их найти? Ответ на этот вопрос получим, рассмотрев процесс решения системы.

Решать и анализировать систему (1.4) наиболее удобно самым очевидным и хорошо известным всем школьникам путем – последовательным исключением неизвестных (методом Гаусса). Этот метод состоит в следующем. Выразив из первого уравнения системы (3.7) одну неизвестную через другую (например,  $y$  через  $x$ ) и подставив ее во второе уравнение, после приведения подобных получим линейное уравнение вида  $ax = b$  с одной неизвестной  $x$ . При этом возможны три варианта:

1)  $a \neq 0$ . Тогда из уравнения  $ax = b$  однозначно находится неизвестная  $x$ :  $x = \frac{b}{a}$ , а затем по этой  $x$  из первого уравнения системы однозначно находится и неизвестная  $y$ . В итоге получим единственное решение  $(x; y)$  системы (1.4).

2)  $a = 0, b \neq 0$ . Тогда уравнение  $ax = b$  оказывается противоречивым (не имеет решений). А вместе с ним не имеет решений и система (1.4).

3)  $a = 0, b = 0$ . Тогда уравнение  $ax = b$  принимает вид  $0 \cdot x = 0$  и удовлетворяется при любых  $x$ . При этом для каждого конкретного значения  $x$  из первого уравнения системы найдется и соответствующее ему конкретное значение  $y$ . В итоге будем иметь бесчисленное множество  $(x; y)$  системы (1.4).

Итак, система (1.4) в принципе может:

- а) иметь одно решение;
- б) не иметь решений;
- в) иметь бесчисленное множество решений.

Первый из этих случаев (единственное решение) осуществляется как правило. А второй и третий – как исключения.

Действительно, лишь когда в уравнении  $ax = b$  величина  $a$  окажется равной нулю, будет иметь место либо второй, либо третий случай. Во всех остальных вариантах, когда  $a \neq 0$ , будет иметь место первый случай.

Полученные выше выводы имеют и ясную геометрическую интерпретацию. Действительно, каждое из двух уравнений системы (1.4) представляет собой уравнение вида  $ax + by + c = 0$ . То есть каждое из них представляет собой уравнение некоторой прямой на плоскости, где  $(x; y)$  – координаты точек этой прямой. Значит, решая систему (1.4), мы определяем координаты  $(x; y)$  общих точек этих двух прямых, то есть точек их пересечения. Но таких точек у двух прямых, очевидно, может быть:

- а) одна (когда прямые пересекаются);
- б) ни одной (когда прямые параллельны);

в) бесчисленное множество (когда прямые совпадают).

Соответственно этим случаям система (1.4) будет иметь или одно решение, или ни одного, или бесчисленное множество. При этом для произвольно взятых прямых случаи (а) будет, очевидно, осуществляться как правило, а случаи (б) и, особенно, (в) – как исключение.

Пример 1. Найти точки пересечения прямых  $x - y = 2$  и  $x - 5y + 6 = 0$ .

Решение. Для нахождения этих точек составим и решим систему из уравнений указанных прямых.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 5y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y + 2 - 5y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ -4y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Как выяснилось, данная система имеет единственное частное решение ( $x = 4$ ;  $y = 2$ ). Значит, указанные выше прямые пересекаются в единственной точке – точке  $A(4;2)$ .

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1,5x - y = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

и дать полученному результату геометрическую интерпретацию.

Решение.

$$\begin{cases} 1,5x - y = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5x - 2 \\ 3x - 2(1,5x - 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5x - 2 \\ 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

– нет решений, ибо последнее уравнение остается неверным независимо от значений неизвестных  $x$  и  $y$ . Геометрически полученный результат означает, что прямые с уравнениями  $1,5x - y = 2$  и  $3x - 2y = 2$  параллельны. И это действительно так, так как их угловые коэффициенты одинаковы:  $k_1 = k_2 = 1,5$ .

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1,5x - y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

и дать полученному результату геометрическую интерпретацию.

Решение.

$$\begin{cases} 1,5x - y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5x - 1 \\ 3x - 2(1,5x - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5x - 1 \\ 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5x - 1 \\ x - \text{любое} \end{cases}$$

– бесчисленное множество частных решений. Действительно, второе уравнение системы, из которого должно было быть определено значение  $x$ , привело к числовому равенству  $2=2$ , верному независимо от  $x$  ( $x$  сократилось и исчезло из уравнения). Следовательно, величина  $x$  может быть любой. А другая неизвестная  $y$ , если выбрано значение  $x$ , найдется по первому уравнению  $y = 1,5x - 1$ . В итоге получаем бесчисленное множество частных решений системы. Например, таких:

$$1) \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x = 1 \\ y = 0,5 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \dots$$

Все эти решения являются координатами точек пересечения тех двух прямых, уравнения которых входят в исходную систему. В силу бесчисленного количества таких точек указанные прямые совпадают.

Да, но тогда должны совпадать и их уравнения! И это действительно так: умножая на 2 обе части уравнения  $1,5x - y = 1$  первой прямой, получим равносильное уравнение  $3x - 2y = 2$ , полностью совпадающее с уравнением второй прямой.

### 1.3. Квадратные системы линейных уравнений произвольного порядка

Вопрос о решении системы (1.4), являющейся простейшей из систем линейных уравнений, мы исчерпали. Перейдем теперь к общему случаю (1.1), но пока только при условии, что  $m = n$ , то есть при условии, что количество уравнений системы равно количеству ее неизвестных. Иначе говоря, перейдем к квадратным системам произвольного размера  $n \times n$  ( $n = 3, 4, \dots$ ), то есть к *системам  $n$ -го порядка* вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.5)$$

Заметим, что при небольших  $n$  (при небольших значениях порядка системы (1.5)) неизвестные системы можно обозначать не  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ , а, например,  $(x; y; z; \dots)$ . Но это, естественно, не принципиально.

Систему (1.5) произвольного порядка  $n$ , как и простейшую систему (1.4) второго порядка, наиболее естественно и просто решать методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). А именно, из первого уравнения системы выражаем какую-либо неизвестную, например  $x_1$ , через остальные неизвестные  $(x_2; x_2; \dots; x_n)$

$$x_1 = a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n + b'_1$$

и подставляем ее во все остальные уравнения системы (второе, третье, ...  $n$ -е). В итоге во всех уравнениях системы, начиная со второго, будет уже на одну неизвестную (неизвестную  $x_1$ ) меньше. Далее, из второго уравнения выражаем следующую неизвестную, например  $x_2$ , через оставшиеся неизвестные ( $x_3; x_4; \dots x_n$ )

$$x_2 = a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \dots + a'_{2n}x_n + b'_2$$

и подставляем ее во все ниже лежащие уравнения (третье, четвертое, ...  $n$ -е). Ну и так далее до конца. В итоге, если не возникнет сбоев в этой схеме (каких – скажем ниже) мы преобразуем систему (1.5) к следующему равносильному треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n + b'_1 \\ x_2 = a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \dots + a'_{2n}x_n + b'_2 \\ \hline x_{n-1} = a'_{n-1,n}x_n + b'_{n-1} \\ x_n = b'_n \end{cases} \quad (1.6)$$

Преобразование квадратной системы (1.5) к равносильной ей треугольной системе (1.6) называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Примечание. Мы указали лишь идею прямого хода метода Гаусса, целью которого является последовательное исключение неизвестных из уравнений системы. На практике же этой цели можно добиться и несколько иначе, причем значительно проще.

Например, чтобы исключить неизвестную  $x_1$ , содержащуюся в первом уравнении системы (1.5), из второго уравнения, можно обе части первого уравнения разделить на  $a_{11}$ , затем обе его части умножить на  $-a_{21}$ , и после этого первое уравнение сложить со вторым. В итоге неизвестная  $x_1$  во втором уравнении исчезнет (исключится). Аналогично с помощью первого уравнения можно исключить неизвестную  $x_1$  и из остальных уравнений системы (третьего, четвертого, ..., последнего). Далее, по аналогичной схеме, с помощью второго уравнения можно исключить из всех нижележащих уравнений неизвестную  $x_2$ . И так далее до конца. В итоге мы опять придем к треугольной системе типа (1.6), но только существенно быстрее.

Кстати, неизвестную, исключаемую из других уравнений системы, часто называют *опорной неизвестной*, а уравнение, содержащее эту опорную неизвестную и с помощью которого исключается эта опорная неизвестная из других уравнений системы, называется *опорным уравнением*. При осуществлении прямого хода метода Гаусса и опорное уравнение, и опорную неизвестную удобно, для наглядности, подчеркивать.

И еще одно существенное замечание: для облегчения работы в качестве опорной неизвестной, выбираемой на каждом этапе прямого хода метода Гаусса, удобно выбирать ту, перед которой нет числового коэффициента – только знак (+) или (-) (если, конечно, такая неизвестная есть). В этом случае треугольная система типа (1.6) будет иметь другой порядок расположения неиз-

вестных, что, конечно, не принципиально.

А вообще-то лучше всего в качестве опорной неизвестной выбирать ту, коэффициент при которой максимален по модулю - в этом случае погрешности от округлений при текущих вычислениях будут меньше влиять на итоговые погрешности в найденных значениях неизвестных. Особенно важным является это замечание, если коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы получены опытным путем и, следовательно, имеют свои погрешности.

Пойдем далее. Будем считать, что мы (в той или иной форме) реализовали прямой ход метода Гаусса, сбоев в этой работе не было (осуществился так называемый *стандартный вариант*), и нам удалось привести исходную систему (1.5) к равносильной системе типа (1.6) (или такой же, как (1.6), системе, только с другим порядком расположения неизвестных). После этого система (1.6) решается уже просто с помощью *обратного хода метода Гаусса*.

Суть его в следующем. Последнее уравнение  $x_n = b'_n$  сразу дает значение неизвестной  $x_n$ . Далее, из предпоследнего уравнения, используя найденное значение  $x_n$ , вычисляем значение  $x_{n-1}$ . Потом из третьего снизу уравнения, используя найденные  $x_n$  и  $x_{n-1}$ , находим  $x_{n-2}$ . Двигаясь таким образом снизу вверх и дойдя до первого уравнения, последовательно определим все неизвестные системы (1.6), а значит, и неизвестные равносильной ей системы (1.5). Набор найденных значений всех неизвестных оказывается единственным, а значит, единственным окажется и полученное в итоге решение  $\{x_1; x_2; \dots x_n\}$  системы (1.5).

Все это будет в стандартном варианте. Но возможны и два варианта нестандартных, когда появляются сбои в изложенной выше схеме.

Нестандартный вариант 1. На каком-то этапе осуществления прямого хода метода Гаусса в каком-то из уравнений системы (или даже в нескольких уравнениях) могут исчезнуть (сократиться) все неизвестные, кроме свободных от неизвестных чисел, которые образуют неверное равенство типа  $0=1$ ,  $2=5$  и т.д. Так как в этом уравнении нет неизвестных, то и невозможно сделать его верным за счет какого-то подбора неизвестных. Система, содержащая хотя бы одно такое уравнение, не имеет решений. А значит, не будет иметь решений и исходная система (1.5).

Нестандартный вариант 2. Этот вариант, в отличие от первого нестандартного варианта, будет иметь место, если на каком-то этапе прямого хода метода Гаусса в каком-то из уравнений системы все его члены сократятся, и останется верное числовое равенство  $0=0$ . Это, кстати, может случиться и с несколькими уравнениями системы. Отбросив их, мы получим систему, в которой количество уравнений меньше количества неизвестных (получим так называемую *недоопределенную систему*). Кстати, если в системе окажется два или более одинаковых уравнения, то отбросив из дублирующих друг друга уравнений все, кроме одного, мы также получим недоопределенную систему.

Завершив прямой ход метода Гаусса в недоопределенной системе, в последнем уравнении системы мы будем иметь не одну неизвестную (как это получается в стандартном варианте (1.6)), а две или более. Это последнее уравне-

ние имеет бесчисленное множество решений, ибо в нем все неизвестные, кроме одной, можно задать произвольно (это – так называемые *свободные неизвестные*), а оставшаяся неизвестная (*связанная*) уже однозначно выражается через свободные неизвестные. После этого в процессе обратного хода метода Гаусса через свободные неизвестные однозначно выражаются и остальные неизвестные системы (остальные связанные неизвестные). В итоге мы получим бесчисленное множество решений исходной системы.

Подведем итог. Квадратные системы линейных уравнений вида (1.5) при любом их порядке  $n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) могут в принципе:

- 1) иметь единственное решение (стандартный вариант);
- 2) не иметь решений (нестандартный вариант 1);
- 3) иметь бесчисленное множество решений (нестандартный вариант 2).

Стандартный вариант на практике встречается как правило, нестандартные – как исключения.

Пример 4. Решить квадратную систему 3-го порядка

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

Решение. Применим метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса) по схеме, указанной в примечании выше. Опорное уравнение и опорную неизвестную на каждом шаге прямого хода этого метода будем подчеркивать.

а) Прямой ход:

$$\begin{cases} \underline{2x - 3y + z} = 2 & (4) \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(3) \\ +}} \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ \underline{9x - 7y} = 3 \\ 10x - 8y = 2 & (-1) \end{cases} \xrightarrow{\substack{(8) \\ +}} \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ -x + \underline{y} = 1 & (8) \\ 10x - 8y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(8) \\ +}} \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ -x + y = 1 \\ \underline{2x} = 10 \end{cases}$$

б) Обратный ход:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ -x + y = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ y = 1 + x = 1 + 5 = 6 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + 3y - 2x \\ y = 6 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{cases}$$

Итак, у данной системы оказалось единственное решение ( $x = 5$ ;  $y = 6$ ;  $z = 10$ ). Если подставить эти значения неизвестных в уравнения исходной системы, то можно убедиться в том, что все уравнения превращаются в верные числовые равенства. То есть решение системы найдено верно.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

Решение.

а) Прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} \underline{x+2y+3z=4} & (-2) \\ 2x+4y+6z=3 & \leftarrow + \\ 3x+y-z=1 & (-3) \end{cases} \begin{matrix} \\ + \\ + \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 0=5 \\ -5y-10z=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

По второму уравнению получившейся системы ясно, что система не имеет решений. Это и отмечено значком  $\emptyset$  («нет решений»).

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Решение. Данная система 3-го порядка однородная, так как столбец ее свободных членов состоит из одних нулей. Значит, по крайней мере, одно частное решение она заведомо имеет – это тривиальное решение ( $x=0$ ;  $y=0$ ;  $z=0$ ). Поищем возможные другие ее частные решения (мы говорим осторожно – поищем, а не найдем, ибо их может и не быть). Применим метод Гаусса.

а) Прямой ход:

$$\begin{cases} \underline{2x - y + 3z = 0} & (2) \\ x + 2y - 5z = 0 & (1) \\ 3x + y - 2z = 0 & \end{cases} \begin{matrix} \\ + \\ + \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 5x + z = 0 \\ 5x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 5x + z = 0 \end{cases}.$$

б) Обратный ход:

$$\begin{cases} z = -5x \\ y = 2x + 3z = -13x \\ x - \text{любое число} \\ (x - \text{свободная неизвестная}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \text{любое число} \\ (x - \text{свободная неизвестная}) \\ y = -13x \\ z = -5x \end{cases}$$

Таким образом, у системы оказалось бесчисленное множество частных решений. В их число при значении  $x=0$  свободной неизвестной входит и тривиальное решение ( $x=0$ ;  $y=0$ ;  $z=0$ ).

Кстати, найденные решения можно представить и в более удобной симметричной форме, если ввести обозначение  $x=C$  ( $C$  – произвольная константа). Тогда получим окончательно

$$\begin{cases} x = C \\ y = -13C \\ z = -5C \end{cases} \quad (C - \text{произвольная константа})$$

Вопрос о квадратных системах линейных уравнений мы исчерпали. Перейдем теперь к общему случаю (1.1), когда в системе любое число  $m$  уравнений и любое число  $n$  неизвестных, причем  $m \neq n$ . То есть перейдем к так называемым *прямоугольным системам*. Естественно, следует рассмотреть и случай  $m > n$ , и случай  $m < n$ .

#### 1.4. Переопределенные системы

Таковыми называются системы (1.1) в случае, когда  $m > n$  (когда количество уравнений больше количества неизвестных). Переопределенные системы, как правило, не имеют решений. Но, как исключение, они могут иметь единственное решение и даже бесчисленное множество решений.

Проиллюстрируем это на примере трех уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases} \quad (1.7)$$

Решая эту систему, мы ищем координаты  $(x; y)$  точек, в которых пересекаются сразу три прямые. Но таких точек у трех произвольных прямых, скорее всего, не будет. А значит, скорее всего, система (1.7) не будет иметь решений.

Однако все-таки возможен случай, когда все три заданные прямые пересекаются в одной точке. Тогда система (1.7) будет иметь единственное решение  $(x; y)$ , определяющее координаты этой точки.

Более того, все три прямые могут и совпадать! Тогда у них будет бесчисленное количество общих точек, а значит, в этом случае система (1.7) будет иметь бесчисленное количество решений. Этими решениями будут координаты  $(x; y)$  точек всех трех совпадающих прямых.

Пример 7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$$

Решение. Данная система является переопределенной (в ней три уравнения и лишь две неизвестные). Поэтому следует ожидать, что она, скорее всего, не будет иметь решений. Так ли это, выясним с помощью метода Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \\ x - 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x + 2y = 4} & (-2) & (-1) \\ 2x - 3y = 6 & + & \\ x - 5y = 5 & + & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -7y = -2 \Leftrightarrow \emptyset \\ -7y = 1 \end{cases}$$

Система действительно не имеет решений, так как два последних ее уравнения противоречат друг другу.

### 1.5. Недоопределенные системы

Таковыми называются системы (1.1) в случае, когда  $m < n$  (когда количество уравнений меньше количества неизвестных). Недоопределенные системы, как правило, имеют бесчисленное количество решений. Но, как исключение, они могут не иметь решений. Вариант единственного решения для таких систем исключается.

Проиллюстрируем сказанное на примере двух уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

Применяя к ней метод Гаусса, можем с помощью первого уравнения исключить какую-либо неизвестную из второго уравнения системы. Но все равно, вообще говоря, во втором уравнении останутся две неизвестные. Одну из них можно объявить свободной (она может принимать любые значения), тогда другая (связанная) неизвестная однозначно выразится через свободную. А затем из первого уравнения системы (1.8) однозначно выразится через свободную неизвестную и оставшаяся третья неизвестная (тоже связанная). В итоге получим бесчисленное количество решений недоопределенной системы (1.8).

Впрочем, может случиться и так, что после исключения какой-то неизвестной из второго уравнения системы в нем останется не две, а одна неизвестная. Тогда эта неизвестная найдется однозначно. Но после подстановки этой неизвестной в первое уравнение системы в этом первом уравнении окажется две неизвестных, одну из которых (любую) можно считать свободной. В итоге, очевидно, опять получим бесчисленное множество решений.

Наконец, во втором уравнении системы (1.8) после исключения из него какой-то неизвестной могут заодно исключиться и две другие неизвестные, так что оно примет вид числового равенства: верного типа  $2 = 2$  или неверного типа  $5 = 2$ . Второй из этих двух случаев будет, очевидно, означать, что система (1.8) не имеет решений. А первый – что все три неизвестные этой системы должны быть найдены из одного ее первого уравнения, ибо ее второе уравнение – прямое следствие первого. В этом первом уравнении две неизвестные из трех оказываются свободными, одна связанная, а система (3.11) в этом случае, естественно, имеет бесчисленное множество решений.

Ситуацию с решениями недоопределенной системы (3.11) и с их количеством можно наглядно проиллюстрировать и геометрически. Как известно из школьного курса математики, уравнение вида  $ax + by + cz + d = 0$  является *уравнением плоскости в пространстве*. В нем  $(x; y; z)$  – это координаты точек этой плоскости. Поэтому, решая систему (3.11), мы ищем координаты  $(x; y; z)$  общих точек (точек пересечения) двух плоскостей в пространстве. Но таких точек (а значит, и решений системы (1.8)) может, в принципе, быть:

- а) бесчисленное множество (плоскости пересекаются или совпадают);
- б) не быть вообще (плоскости параллельны).

Вариант (а) имеет место как правило, вариант (б) – как исключение.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Решение. Данная система является недоопределенной (в ней три неизвестные и лишь два уравнения). Поэтому следует ожидать, что она, скорее всего, будет иметь бесчисленное количество решений. Одно из них, в силу однородности системы, уже очевидно – это тривиальное решение  $(x = 0; y = 0; z = 0)$ . Найдем остальные решения (они обязательно будут):

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(-1) \\ +}} \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \text{свободная неизвестная} \\ z = -2x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Получили, как и ожидали, бесчисленное количество решений. Их можно представить и в более удобной симметричной форме, если ввести обозначение  $\frac{1}{2}x = C$  ( $C$  – произвольная константа). Тогда получим окончательно

$$\begin{cases} x = 2C \\ y = C \\ z = -4C \end{cases} \quad (C - \text{произвольная константа})$$

В этом множестве решений, заметим, содержится и тривиальное решение – оно получается при  $C = 0$ .

### Общий итог

Любая система линейных уравнений (1.1) (с любым количеством уравнений и любым количеством неизвестных) может, в принципе:

- а) иметь единственное решение;
- б) не иметь решений;

в) иметь бесчисленное множество решений.

При этом квадратные системы (у которых количество уравнений равно количеству неизвестных) имеют, *как правило*, одно решение.

Системы, у которых количество уравнений больше количества неизвестных (переопределенные системы), *как правило*, не имеют решений.

Системы, у которых количество уравнений меньше количества неизвестных (недоопределенные системы), *как правило*, имеют бесчисленное множество решений.

Окончательно вопрос о количестве решений и о самих решениях каждой конкретной системы может быть выяснен в процессе решения системы. При этом наиболее естественным, универсальным, экономным методом решения систем линейных (да и не только линейных!) уравнений является метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

Однако метод Гаусса определяет лишь *схему* (процесс) решения систем линейных уравнений, но не указывает каких-то готовых формул для искомого неизвестных системы. А такие формулы в некоторых случаях иметь желательно – чтобы подставить их в какие-то другие формулы, проанализировать их, и т.д. В связи с этим был разработан ряд других, отличных от метода Гаусса, методов решения систем линейных уравнений, приводящих к такого рода формулам. С двумя такими методами сейчас кратко и познакомимся.

## § 2. Понятие о других методах решения систем линейных уравнений

### 2.1. Метод определителей

Этот метод может быть применен лишь к квадратным системам линейных уравнений, да и то не к любым из них. Рассмотрим его на примере простейшей из квадратных систем – на примере системы размером  $2 \times 2$ :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

а) Умножая обе части первого уравнения этой системы на  $b_2$ , а второго на  $(-b_1)$  и складывая эти уравнения, получим уравнение–следствие системы (2.1), не содержащее  $y$ :

$$(a_1b_2 - a_2b_1) \cdot x = c_1b_2 - c_2b_1 \quad (2.2)$$

б) Умножая обе части первого уравнения системы (1.4) на  $(-a_2)$ , а второго на  $a_1$  и складывая эти уравнения, получим уравнение–следствие системы (2.1), не содержащее  $x$ :

$$(a_1b_2 - a_2b_1) \cdot y = a_1c_2 - a_2c_1 \quad (2.3)$$

А теперь введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 \quad (2.4)$$

Число  $\Delta$  называется *главным определителем системы* (2.1). Числа  $(a_1; a_2; b_1; b_2)$ , являющиеся коэффициентами при неизвестных этой системы, называются *элементами* этого определителя. В исходной записи, согласно (2.4), главный определитель системы имеет вид таблицы с двумя строками и двумя столбцами, ограниченными вертикальными линиями, и раскрывается по принципу, указанному в (2.4) (по диагоналям).

В (2.4) представлены еще два определителя:  $\Delta_x$  - *опредетитель неизвестной x* и  $\Delta_y$  - *опредетитель неизвестной y*. Принцип их формирования очевиден: определитель  $\Delta_x$  получается из главного определителя  $\Delta$  заменой его первого столбца (столбца коэффициентов при неизвестной  $x$  в системе (2.1)) на столбец свободных членов этой системы. А определитель  $\Delta_y$  получается из главного определителя  $\Delta$  заменой его второго столбца (столбца коэффициентов при неизвестной  $y$  в системе (2.1)) на столбец свободных членов этой системы. Раскрываются (вычисляются) определители неизвестных  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  по тому же принципу (по диагоналям), что и главный определитель системы  $\Delta$ .

С учетом обозначений (2.4) уравнения – следствия (2.2) и (2.3) системы (2.1) примут вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \quad (2.5)$$

Сразу обратим внимание на то, что система (2.5), являясь следствием исходной системы (2.1), вообще говоря, не равносильна последней. То есть каждое решение системы (2.1) будет и решением системы (2.5), но не каждое решение системы (2.5) обязательно будет решением исходной системы (2.1).

В частности, это совершенно очевидно, если  $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ . В этом случае система (2.5) удовлетворяется абсолютно при любых  $(x; y)$ . То есть ее решениями являются все точки  $(x; y)$  плоскости  $хоу$ . А исходная система (2.1), при решении которой определяются точки пересечения некоторых двух прямых на плоскости  $хоу$ , ни в каком случае не может иметь в качестве своих решений любые точки этой плоскости.

Однако если  $\Delta \neq 0$ , то при любых возможных значениях  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  системы (2.5) и (2.1) равносильны. Действительно, в случае  $\Delta \neq 0$  система (2.5) имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases} \quad (2.6)$$

Формулы (2.6), выражающие это решение, называются *формулами Крамера*.

Подставляя эти значения  $x$  и  $y$  в уравнения исходной системы (2.1) (проделайте это самостоятельно), убеждаемся, что оба ее уравнения удовлетворяются. То есть значения  $(x; y)$ , определяемые по формулам Крамера (2.6), являются решением исходной системы (2.1). И это решение будет для нее единственным, так как оно является единственным и для системы (2.5), являющейся следствием исходной системы.

Если же  $\Delta = 0$ , но  $\Delta_x \neq 0$  или  $\Delta_y \neq 0$ , то системы (2.1) и (2.5) тоже равносильны: обе они не имеют решений. Действительно, в этом случае заведомо не имеет решений система (2.5), а значит, не может их иметь и исходная система (2.1).

Наконец, рассмотрим подробно случай, когда  $\Delta = 0$ ;  $\Delta_x = 0$ ;  $\Delta_y = 0$ , то есть тот случай, когда системы (2.1) и (2.5) заведомо не равносильны. Итак, пусть одновременно

$$\begin{cases} \Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ \Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1 = 0 \\ \Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Отметим, что из четырех элементов  $(a_1; a_2; b_1; b_2)$  главного определителя системы  $\Delta$  хотя бы один заведомо не нуль, иначе в исходной системе (2.1) просто не останется неизвестных и система потеряет смысл. Пусть, например, этот ненулевой элемент есть  $a_1$ . Тогда из первого равенства системы (2.7) получаем:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow b_2 = \frac{a_2}{a_1}b_1 \Leftrightarrow b_2 = \lambda b_1 \quad \left( \lambda = \frac{a_2}{a_1} \right)$$

Подставляя выражения  $a_2 = \lambda a_1$  и  $b_2 = \lambda b_1$  в два других уравнения системы (2.7), получим:

$$\begin{cases} c_1\lambda b_1 - c_2b_1 = 0 \\ a_1c_2 - \lambda a_1c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(\lambda c_1 - c_2) = 0 \\ a_1(c_2 - \lambda c_1) = 0 \end{cases}$$

Так как во втором из этих равенств  $a_1 \neq 0$ , то  $c_2 = \lambda c_1$ . При этом автоматически выполняется и первое равенство. Итак, имеем:

$$a_2 = \lambda a_1; b_2 = \lambda b_1; c_2 = \lambda c_1 \quad (2.8)$$

а) Если  $\lambda = 0$ , то  $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ , и в системе (2.1) пропадет второе уравнение. Оставшееся первое уравнение  $a_1x + b_1y = c_1$  имеет, очевидно, бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} y - \text{любое} \\ x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \end{cases} \quad (2.9)$$

б) Если  $\lambda \neq 0$ , то подставляя выражения (2.8) во второе уравнение исходной системы (2.1) и сокращая обе его части на  $\lambda$ , получим в системе (2.1) два одинаковых уравнения:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Эта система равносильна одному уравнению  $a_1x + b_1y = c_1$ , которое опять имеет бесчисленное множество решений, выражаемое формулами (2.9).

Подведем итог решения системы (2.1) методом определителей.

1) Если ее главный определитель  $\Delta \neq 0$ , то она имеет единственное решение, выражаемое формулами Крамера (2.6).

2) Если  $\Delta = 0$ , но хотя бы один из определителей неизвестных,  $\Delta_x$  или  $\Delta_y$ , отличен от нуля, то система не имеет решений.

3) Если  $\Delta = 0$ , а также  $\Delta_x = \Delta_y = 0$ , то система (2.1) вырождается в одно уравнение с двумя неизвестными и, таким образом, имеет бесчисленное множество решений.

Метод определителей может быть применен и к квадратной системе линейных уравнений любого порядка  $n$ . Пусть, например,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (2.11)$$

– квадратная система линейных уравнений 3-го порядка. По той же схеме, по которой из системы (2.1) выделялись уравнения (2.2) и (2.3), содержащие лишь по одной неизвестной, мы можем и из системы (2.11) выделить такие уравнения. Если это сделать (выкладки опускаем), то из системы (2.11) получим систему вида

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases}, \quad (2.12)$$

являющуюся системой-следствием системы (2.11) и аналогом системы (2.5) для системы (2.1). Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

– так называемый *главный определитель системы* (2.11). Он, как и главный определитель (2.4) системы (1.1), состоит из коэффициентов при неизвестных. Но он, в отличие от определителей (2.4), не второго, а *третьего порядка*. Схема его вычисления указана в формуле (2.13).

Формулу эту легко усвоить: нужно взять элементы  $\{a_1; b_1; c_1\}$  первой строки определителя  $\Delta$ , последовательно умножить их на так называемые *миноры этих элементов*, то есть на определители меньшего (второго) порядка, получающиеся из определителя  $\Delta$  вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент, и затем сложить все эти произведения, взяв лишь второе из них с обратным знаком. Такое вычисление определителя третьего порядка  $\Delta$  называется *разложением его по первой строке*.

Это вычисление существенно упрощается, если в первой строке определителя имеются нули. Если же их там нет, то можно, при желании, их там и образовать, если использовать *свойства определителей*. Перечислим некоторые из них (приведенные ниже свойства справедливы для определителей любого порядка):

1. Если поменять местами любые две строки или любые два столбца определителя, то его знак изменится на противоположный.

2. Если поменять местами строки и столбцы определителя (провести так называемое *транспонирование определителя*), то его величина не изменится.

3. Если к элементам какой-либо строки или столбца определителя прибавить соответственно другую строку или столбец этого же определителя, все элементы которой (которого) умножить предварительно на произвольное число, то величина определителя не изменится.

4. Если у определителя имеются две одинаковых строки или два одинаковых столбца, то этот определитель равен нулю.

5. Если у определителя какая-то строка или столбец целиком состоит из одних нулей, то этот определитель равен нулю.

Для определителей второго и третьего порядка все эти свойства можно подтвердить, опираясь на правила (2.4) и (2.13) их вычисления, но на этом не останавливаемся.

В системе (2.12) фигурируют еще три определителя третьего порядка – *определители неизвестных*  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  и  $\Delta_z$ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

Схема их формирования очевидна: чтобы записать определитель какой-либо неизвестной, нужно взять за основу главный определитель системы  $\Delta$  и заменить в нем столбец коэффициентов при этой неизвестной столбцом свободных членов системы (2.11). Вычисляются они по той же схеме (2.13), что и главный определитель  $\Delta$ .

Связь систем (2.11) и (2.12) аналогична связи систем (2.1) и (2.5). А именно:

1) Если  $\Delta \neq 0$ , то система (2.11), как и система (2.12), имеет единственное решение, определяемое *формулами Крамера*:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (2.15)$$

2) Если  $\Delta = 0$ , но хотя бы один из определителей неизвестных  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  или  $\Delta_z$  отличен от нуля, то система (2.12) не имеет решений, а вместе с ней не имеет решений и система (2.11).

3) Если  $\Delta = 0$  и также  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ , то, как показывает дополнительный анализ, система (2.11) или не имеет решений, или имеет их бесчисленное множество. Какой из этих двух вариантов будет иметь место - можно выяснить, решив систему. Например, методом Гаусса.

Все, что сказано выше о применении метода определителей к решению квадратных линейных систем второго и третьего порядков, по аналогии может быть распространено и на квадратные системы 4-го, 5-го и т.д. порядков. При этом появляются и определители соответствующих порядков - 4-го, 5-го и т.д. Но подробности этого мы опускаем, ибо такие большие системы, если вручную, гораздо удобнее и быстрее решать методом Гаусса. Или, используя компьютерные программы, матричным методом.

## 2.2. Матричный метод

Вернемся к системе (1.1) – к произвольной системе  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Таблица коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

называется *матрицей коэффициентов при неизвестных*. А столбцы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

составленные из свободных членов и неизвестных системы (1.1), называются соответственно *матрицей-столбцом (вектором-столбцом) свободных членов системы* и *матрицей-столбцом (вектором-столбцом) неизвестных системы*.

Если определить произведение  $AX$  матрицы  $A$  на столбец  $X$  как столбец, состоящий из сумм произведений элементов отдельных строк матрицы  $A$  на элементы столбца  $X$ , то систему (1.1) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$AX = B \quad (2.18)$$

Из этого матричного уравнения при заданных матрице  $A$  и матрице-столбце  $B$  должна быть определена матрица-столбец  $X$ , содержащая неизвестные.

Для решения матричных уравнений типа (2.18) разработана специальная *теория матриц*, подробности которой опускаем. В этой теории определены действия с матрицами (сложение матриц, вычитание матриц, умножение их на число, произведение матриц, понятие нулевой и единичной матриц и т.д.). Если матрица  $A$  квадратная ( $m = n$ ) и ее определитель  $\Delta$  не равен нулю, то как показывается в этой теории, можно построить такую матрицу  $A^{-1}$ , называемую обратной к матрице  $A$ , что

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (2.19)$$

– решение матричного уравнения (2.18), а значит, и решение системы (1.1). Это решение, по сути, равносильно тому, которое может быть найдено методом определителей по формулам Крамера.

Например, для системы (2.1), которая в матричной форме имеет вид  $AX=C$ , из этой теории следует:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{\Delta} & -\frac{b_1}{\Delta} \\ -\frac{a_2}{\Delta} & \frac{a_1}{\Delta} \end{pmatrix}; X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Если же матрица  $A$  системы (1.1) не квадратная, или она квадратная, но с нулевым определителем  $\Delta$ , то обратная к ней матрица  $A^{-1}$  не существует, и решения матричного уравнения (2.18) в матричной форме найдены быть не могут (даже если они и существуют). Это обстоятельство сильно снижает ценность матричного метода решения систем линейных уравнений. Он, как и метод определителей, не является универсальным методом их решения (в отличие от метода Гаусса). Но зато, когда эти методы могут быть применены (для квадратных систем, имеющих единственное решение), то они позволяют получить это решение по *готовым формулам*. А именно, по формулам Крамера в методе определителей, или по формуле (2.19) в матричном методе. Формулы эти, кстати, легко программируются для ЭВМ и содержатся в любом математическом пакете программ.

В частности, пакет программ Excel в своем наборе математических программ содержит следующие необходимые для решения квадратных систем линейных уравнений программы:

- МОПРЕД ( ) – нахождение определителя матрицы;
- МОБР ( ) – нахождение обратной матрицы;
- МУМНОЖ ( ; ) - перемножение матриц.

Поэтому матричное решение (2.19) матричного уравнения (2.18) в Excel примет вид:

$$X = \text{МУМНОЖ}(\text{МОБР}(A); B) \quad (2.21)$$

В эту формулу нужно лишь вставить матрицу  $A$  коэффициентов при неизвестных и столбец  $B$  свободных членов системы, предварительно записанные на лист Excel. Все остальное компьютерная программа сделает сама.

## Упражнения

1. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 30 дней. После шестидневной совместной работы первый рабочий (работая один) может закончить её за 40 дней. За какое число дней второй рабочий, работая один, может выполнить всю работу?

Ответ: за 75 дней.

2. Решить систему 
$$\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}$$
,

где  $a$  – некоторый числовой параметр. Указать, при каких значениях  $a$  система: а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: а) При  $a \neq 0$  система имеет единственное решение ( $x = \frac{4}{a}$ ;  $y = 1$ );

б) при  $a = 0$  система не имеет решений; в) бесчисленного количества решений система ни при каких значениях  $a$  иметь не может.

3. При каких значениях параметра  $\alpha$  система 
$$\begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ \alpha x + y = \alpha^2 \end{cases}$$
 а) имеет един-

ственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: а)  $\alpha \neq \pm 1$ ; б)  $\alpha = -1$ ; в)  $\alpha = 1$ .

4. Методом Гаусса решить системы:

$$а) \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}; \quad в) \begin{cases} -2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ -5x + 10y - 7z = 3 \end{cases}.$$

Ответ: а) ( $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ); б) ( $x = 1$ ;  $y = 3$ ;  $z = 5$ ); в) Нет решений.

5. Показать, что переопределенная система

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \\ x - 5y = a \end{cases}$$

может иметь решение. При каком значении параметра  $a$  это будет иметь место?

Ответ: при  $a = 2$  система имеет единственное решение ( $x = \frac{24}{7}$ ;  $y = \frac{2}{7}$ ).

При  $a \neq 2$  система не имеет решений.

6. Решить недоопределенную систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + 5C \\ y = \frac{5}{3} - 7C \\ z = 3C \end{cases} \quad (C - \text{произвольная константа}).$$

7. Решить системы уравнений:

$$a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}; \quad з) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}; \quad д) \begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ответы: а) Система несовместна; б)  $(x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3)$ ;

в)  $(x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = \frac{1}{3}; x_4 = -\frac{3}{2})$ ; з)  $(x_1 = 5; x_2 = 7; x_3 = 0; x_4 = 1)$ ;

д) только нулевое (тривиальное) решение.

8. Методом определителей решить систему

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 5y = 6 \end{cases}$$

Для сравнения решить эту же систему методом Гаусса.

Ответ:  $x = 1; y = -1$ .

9. Методом определителей решить систему

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

Для сравнения решить эту же систему методом Гаусса.

Ответ:  $x = 5; y = 6; z = 10$ .

10. Вычислить  $\Delta = \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$ , если  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

Ответ: 1.

11. Решить уравнение: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

Ответ:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$ .

12. Решить уравнение: 
$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

13. Доказать, что если однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение, то решений у нее бесконечно много. Привести примеры этих решений.

14\*. Некоторая система линейных уравнений 2014-го порядка имеет единственное решение. Все коэффициенты и все значения переменных в её решении ненулевые. При решении студент неверно записал один из коэффициентов системы и решил её (она имела единственное решение). Каково количество совпадающих переменных в решениях первой и второй системы?

Ответ: 0.

15\*. Функция  $f(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(2014 - x) \cdot f(x) - 2x \cdot f(2014 - x) = 2015 \quad (x \neq 0; \quad x \neq 2015)$$

Найти  $f(2013)$ .

Ответ: -2015.

16\*. Участников соревнований разделили на 3 группы. В первой группе оказалось более трети всех участников, во второй – более 30% всех участников, а в третьей – более  $\frac{4}{11}$  всех участников. Найти наименьшее возможное число участников этих соревнований.

Ответ: 173.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Математический анализ – это важнейшая часть, ядро высшей математики. Со времен создания основ математического анализа берет свое начало вся высшая математика.

Главное содержание математического анализа составляют *дифференциальное и интегральное исчисления*, основу которых в конце 17 века заложили Исаак Ньютон (великий английский математик и физик) и Готфрид Лейбниц (великий немецкий математик и философ). Дифференциальное и интегральное исчисления составляют, можно сказать, стены и крышу здания математического анализа. Есть в этом здании и пристройки, появившиеся позже - например, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, ряды. А теоретическим фундаментом математического анализа является *теория пределов*, которая создавалась уже позже возведения самого здания этого анализа. И создавалась другими учеными, из которых в первую очередь следует назвать французского математика начала 19 века Огюстена Коши.

Отличительной чертой математического анализа является то, что в нем, в отличие от элементарной математики, изучаются не установившиеся, неизменные *состояния*, характеризуемые некоторыми постоянными величинами, а несравненно более сложные *процессы*, в ходе которых ключевые величины, характеризующие рассматриваемый процесс, меняют свои значения.

Например, не требует, очевидно, высшей математики задача об определении пути при постоянной скорости движения. И даже если эта скорость переменна, но сила, действующая на тело, постоянна (а, значит, при постоянной массе постоянно и ускорение тела), то математическое исследование такого движения тоже легко осуществляется с помощью элементарной математики. Но если, например, речь идет о математическом исследовании движения ракеты, у которой и масса меняется (из-за сгорания топлива), и сила тяги ее двигателей, и окружающая ракету среда не является неизменной, то тут уже элементарной математикой не обойдешься – нужно привлекать высшую. И в первую очередь – математический анализ.

Собственно говоря, математический анализ - это *анализ переменных величин и связей между ними*. Причем в математическом анализе при рассмотрении переменных величин ключевую роль играют *бесконечно малые изменения* этих величин. В связи с этим до недавних времен математический анализ называли *анализом бесконечно малых*.

## ГЛАВА 3

### Пределы

Предел – это одно из самых фундаментальных понятий высшей математики вообще и математического анализа в частности. Различают две основные разновидности пределов: 1) предел переменной величины; 2) предел функции.

#### § 1. Предел переменной величины

*Переменная величина*  $x$  – это величина, которая может менять свои значения. Этим она принципиально отличается от любой *постоянной величины*  $a$ , которая своего неизменного значения не меняет.

Одна и та же величина в одних условиях может быть постоянной, а в других переменной. Например, в процессе движения тела его скорость может быть постоянной (если движение равномерное), а может быть и переменной, если движение неравномерное. То же самое касается и других величин, характеризующих движение тела: ускорения тела (оно постоянно при равноускоренном движении и переменное в более сложных случаях), кинетической энергии тела, и даже массы тела (у падающего кирпича она постоянная, у летящей ракеты из-за постоянно сгорающего топлива – переменная).

Постоянные величины считаются простейшими частными случаями величин переменных. В частности, высота дерева, если оно перестанет расти и засохнет, из переменной становится постоянной. Ясно, что переменные величины и сложнее, и интереснее постоянных величин, ибо всякое движение, всякая жизнь и интереснее, и сложнее неизменного покоя.

Переменная величина может меняться плавно (непрерывно), а может меняться и скачкообразно (дискретно). В первом случае переменная величина называется *непрерывной*, а во втором *дискретной*. Например, путь, пройденный движущимся пешеходом, меняется, очевидно, непрерывно, ибо траектория движения пешехода – сплошная (непрерывная) линия. То есть этот путь – непрерывная переменная величина. А если отмечать этот путь лишь по оставляемым пешеходом следам на дороге, то в этом случае путь уже будет меняться скачкообразно (дискретно), и он будет дискретной переменной величиной. Аналогично скорость движущегося по дороге автомобиля меняется, очевидно, непрерывно. А скорость хаотичного движения молекулы газа, сталкивающейся с соседними молекулами, меняется в результате этих столкновений скачкообразно (дискретно). То есть скорость автомобиля – непрерывная переменная величина, а скорость молекулы – дискретная. И т.д.

В математическом анализе в основном рассматриваются непрерывные переменные величины. А с дискретными величинами систематически оперируют не в математическом анализе, а в так называемой *дискретной математике*.

## Предел дискретной переменной величины

Пусть  $x$  – переменная величина. Причем будем считать, что  $x$  – дискретная переменная величина. То есть  $x$  – переменная величина, меняющаяся скачкообразно. Она считается заданной, если задана *последовательность*

$$\{x_n\} = x_1; x_2; x_3; \dots x_n; \dots \quad (1.1)$$

*ее значений*. То есть тех значений  $x_1; x_2; x_3; \dots$ , которые она последовательно, одно за другим, принимает в процессе своего скачкообразного изменения ( $x_1$  – первое значение переменной  $x$ ,  $x_2$  – второе, и т.д.).

Будем считать, что этот процесс изменения переменной величиной  $x$  своих значений ни на каком этапе не прекращается. То есть у этой переменной нет последнего значения, после которого она перестанет меняться и превратится в постоянную величину. Ибо в таком застывшем, «мертвом» виде она уже не будет нам интересна. А это значит, что последовательность (1.1) её значений имеет бесконечное число членов, что и отмечено в (1.1) многоточием.

Естественно, возникает интерес относительно характера изменения величиной  $x$  своих значений. То есть возникает вопрос: меняются эти значения бессистемно, хаотически или все же как-то целенаправленно?

В принципе, для переменной  $x$  возможно и то, и другое. Основной интерес представляет, конечно, второй вариант.

А именно, пусть значения  $x_n$  переменной  $x$  в процессе их изменения, то есть по мере увеличения их номера  $n$ , неограниченно приближаются (*стремятся*) к некоторому конкретному числу  $a$ . Это значит, что разность (расстояние)  $|x_n - a|$  между значениями  $x_n$  переменной  $x$  и числом  $a$  сокращается, стремясь при увеличении  $n$  (при  $n \rightarrow \infty$ ) к нулю. Заменяя слово «стремятся» стрелкой, сказанное выше можно записать так:

$$x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n - a| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Если имеет место (1.2), то говорят, что *переменная  $x$  стремится к числу  $a$* . Это число  $a$  называется *пределом переменной  $x$* . И записывается это в следующих равносильных вариантах:

$$\lim x = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty; \Leftrightarrow x \rightarrow a \quad (1.3)$$

Читается: *предел переменной  $x$  равен  $a$* ; или: *предел числовой последовательности  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$  равен  $a$* ; или: *числовая последовательность  $x_n$  стремится к  $a$  при  $n \rightarrow \infty$* ; или: *переменная  $x$  стремится к  $a$* .

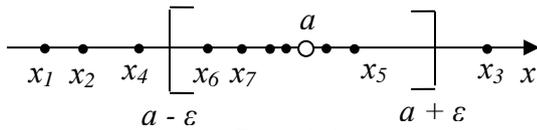


Рис. 1.1

Стремление дискретной переменной  $x$  к своему пределу  $a$  можно наглядно проиллюстрировать на числовой оси. Точный математический смысл этого стремления  $x$  к  $a$  состоит в том, что какое бы малое положительное число  $\varepsilon$  ни

взять, а значит, каким бы малым промежутком  $[a - \varepsilon; a + \varepsilon]$  ни окружить на числовой оси число  $a$ , в этот промежуток (в так называемую  $\varepsilon$ -окрестность числа  $a$ ) попадут, начиная с некоторого номера  $N$ , все значения  $x_n$  переменной  $x$ . В частности, на рис. 1.1 в изображенную  $\varepsilon$ -окрестность числа  $a$  попали все значения  $x_n$  переменной  $x$ , начиная с номера  $N = 5$ .

Отметим, что совершенно не важно, стремится ли переменная  $x$  к своему пределу  $a$  монотонно (так, что каждое следующее ее значение находится ближе к пределу, чем предыдущее), или она делает это немонотонно - то приближаясь к своему пределу, то несколько удаляясь от него; находятся ли все значения переменной с одной стороны предела или с разных; достигает ли в каких-то своих значениях переменная своего предела или нет. Существенно лишь то, о чем говорится в определении предела: переменная  $x$  в конце концов должна подойти как угодно близко к своему пределу  $a$  и после этого (для всех более поздних своих значений) дальше от него уже ни с какой стороны не отходить.

Переменная  $x$ , имеющая своим пределом нуль (то есть стремящаяся к нулю) называется *бесконечно малой*. А переменная  $x$ , неограниченно растущая по абсолютной величине, называется *бесконечно большой* (ее модуль стремится к бесконечности).

Итак, если  $x \rightarrow 0$ , то  $x$  – бесконечно малая переменная величина. А если  $|x| \rightarrow \infty$ , то  $x$  – бесконечно большая переменная величина. В частности, если  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ , то  $x$  – бесконечно большая переменная величина.

Если  $x \rightarrow a$ , то  $x - a = \alpha \rightarrow 0$ . И обратно, если  $x - a = \alpha \rightarrow 0$ , то  $x \rightarrow a$ . Отсюда получаем следующую важную связь между переменной  $x$  и ее пределом  $a$ :

$$\lim x = a \ (x \rightarrow a) \Leftrightarrow x = a + \alpha \ (\alpha \rightarrow 0) \quad (1.4)$$

Отметим, что не всякая переменная  $x$  имеет предел. У многих переменных нет предела. Есть он или нет – это зависит от того, какова последовательность (1.1) значений этой переменной.

Пример 1. Пусть

$$\{x_n\} = 1,9; 1,99; 1,999; 1,9999; \dots$$

- последовательность значений переменной  $x$ . Совершенно очевидно, что при такой последовательности своих значений переменная  $x \rightarrow 2$ , то есть  $\lim x = 2$ .

Пример 2. Пусть

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$$

- последовательность значений переменной  $x$ . Здесь, очевидно,  $x \rightarrow 0$ , то есть  $\lim x = 0$ . Значит, переменная  $x$  с такой последовательностью значений – бесконечно малая переменная.

Пример 3. Пусть

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} \right\} = 0; \frac{2}{2}; 0; \frac{2}{4}; 0; \frac{2}{6}; 0; \frac{2}{8}; \dots$$

Очевидно, что и здесь, как и в предыдущем примере,  $x \rightarrow 0$ . То есть и здесь переменная  $x$  – бесконечно малая. Но тут есть своя особенность: в примере 2 переменная  $x$  никогда не достигает своего предела, а в данном примере переменная  $x$  через раз своего предела достигает.

Пример 4. Пусть

$$\{x_n\} = \{n^2\} = 1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \dots$$

Здесь, очевидно,  $x \rightarrow +\infty$ , то есть  $\lim x = +\infty$ . Переменная  $x$  из этого примера – бесконечно большая.

Пример 5. Пусть

$$\{x_n\} = 1; -1; 1; -1; \dots$$

Здесь, очевидно, переменная  $x$  ни к чему не стремится. То есть предела у нее нет ( $\lim x$  не существует).

Пример 6. Пусть

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{3n}{2n-1} \right\} = \frac{3}{1}; \frac{6}{3}; \frac{9}{5}; \frac{12}{7}; \dots$$

Здесь ситуация с пределом переменной  $x$  не так очевидна, как в предыдущих пяти примерах. Для прояснения этой ситуации преобразуем значения  $x_n$  переменной  $x$ :

$$x_n = \frac{3n}{2n-1} = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } n \end{array} \right| = \frac{3}{2-1/n}$$

Очевидно, что  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Значит,  $x_n = \frac{3}{2-1/n} \rightarrow \frac{3}{2-0} = \frac{3}{2}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

А это значит, что переменная  $x \rightarrow \frac{3}{2} = 1,5$ , то есть  $\lim x = 1,5$ .

## Предел непрерывной переменной величины

Пусть теперь  $x$  - непрерывная переменная величина. Это значит, что если эту величину представить себе как точку  $x$  числовой оси, то эта точка перемещается по числовой оси плавно, без скачков, оставляя после себя сплошной след. И если в процессе своего движения она все ближе и ближе приближается к некоторой неподвижной точке с координатой  $a$ , так что расстояние  $|x - a|$  от точки  $x$  до точки  $a$  сокращается, стремясь к нулю, то такое число  $a$  является пределом переменной  $x$ . При этом, как и в случае дискретной переменной величины, пишут:

$$\lim x = a \Leftrightarrow x \rightarrow a \quad (1.5)$$

Иначе говоря, число  $a$  будет пределом переменной величины  $x$ , если какое бы малое положительное число  $\varepsilon$  ни взять и каким бы малым промежутком  $[a - \varepsilon; a + \varepsilon]$  ни окружить на числовой оси число  $a$ , наступит такой момент (такой этап) в изменении переменной  $x$ , после которого переменная  $x$  попадет в этот промежуток (в так называемую  $\varepsilon$ -окрестность числа  $a$ ) и уже не будет выходить из нее. При этом совершенно не важно, движется ли точка  $x$  к своему пределу  $a$  монотонно или нет, и с какой стороны движется, и достигает ли когда-нибудь своего предела или нет. Главное, что такое число  $a$  существует. Если же такого числа не существует, то непрерывная переменная  $x$  предела не имеет.

В частности, если  $\lim x = 0$ , то есть если  $x \rightarrow 0$ , то непрерывная переменная  $x$  (как и дискретная) называется *бесконечно малой*. А если  $|x| \rightarrow \infty$ , то непрерывная переменная  $x$ , как и дискретная, называется *бесконечно большой*.

### Основные свойства переменных величин и их пределов

Указанные ниже свойства имеют место как для дискретных, так и для непрерывных переменных величин. Они почти очевидны, хотя их можно и строго доказать.

1) Если  $x = a$  (переменная  $x$  неизменна и равна постоянной  $a$ ), то естественно считать, что и  $\lim x = a$ . То есть предел постоянной равен ей самой:

$$\lim a = a \quad (1.6)$$

2) Если  $x \rightarrow a$ ,  $y \rightarrow b$ , и числа  $a$  и  $b$  конечны, то  $z = x \pm y \rightarrow a \pm b$ . То есть

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y \quad (1.7)$$

(предел суммы или разности переменных величин равен сумме или разности их пределов).

3) Если  $x \rightarrow a$ ,  $y \rightarrow b$ , и числа  $a$  и  $b$  конечны, то  $z = xy \rightarrow ab$ . То есть

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y \quad (1.8)$$

(предел произведения переменных величин равен произведению их пределов).

4) Если  $x \rightarrow a$ ,  $y \rightarrow b$ ,  $a$  и  $b$  конечны и  $b \neq 0$ , то  $z = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{a}{b}$ . То есть

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \quad (1.9)$$

(предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю).

5) Если  $x \rightarrow a$ , и  $C$  - любая константа, то  $Cx \rightarrow Ca$ . То есть

$$\lim Cx = C \lim x \quad (1.10)$$

(постоянный множитель можно выносить за знак предела).

6) Если  $x$  – бесконечно малая переменная величина ( $x \rightarrow 0$ ), то  $y = \frac{1}{x}$  – бесконечно большая переменная величина ( $|y| \rightarrow \infty$ ).

7) Если  $x$  – бесконечно большая переменная величина ( $|x| \rightarrow \infty$ ), то  $y = \frac{1}{x}$  – бесконечно малая переменная величина ( $y \rightarrow 0$ ).

8) Если переменная  $x$  ограничена (это значит, что все ее значения расположены в некотором конечном числовом промежутке  $[c_1; c_2]$ ), а переменная  $y$  бесконечно малая ( $y \rightarrow 0$ ), то переменная  $z = xy$  – тоже бесконечно малая ( $z \rightarrow 0$ ).

9) Если переменная  $x$  ограничена, а переменная  $y$  бесконечно большая ( $|y| \rightarrow \infty$ ), то переменная  $z = \frac{x}{y}$  – бесконечно малая ( $z \rightarrow 0$ ).

10) Теорема Вейерштрасса.

а) Пусть значения переменной  $x$  монотонно возрастают и при этом все они меньше некоторой постоянной величины  $C$ . Такая переменная  $x$  называется *монотонно возрастающей и ограниченной сверху* (числом  $C$ ). Она заведомо имеет конечный предел  $a$ , причем  $a \leq C$ . Наглядную иллюстрацию этой ситуации для случая дискретной переменной величины дает рис. 1.2.



Рис. 1.2



Рис. 1.3

б) Пусть значения переменной  $x$  монотонно убывают и при этом все они больше некоторой постоянной величины  $C$ . Такая переменная  $x$  называется *монотонно убывающей и ограниченной снизу* (числом  $C$ ). Она заведомо имеет ко-

нечный предел  $a$ , причем  $a \geq C$ . Наглядную иллюстрацию этой ситуации для случая дискретной переменной величины дает рис. 1.3.

### Упражнения

1.  $\{x_n\} = \left\{ \frac{\cos n\pi}{n} \right\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Развернуть эту последовательность значений переменной  $x$  и найти ее предел.

Ответ:  $\{x_n\} = -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$ .  $\lim x = 0$ .

2.  $\{x_n\} = 0,6; 0,66; 0,666; \dots$ . Найти  $\lim x$ .

Ответ:  $\lim x = \frac{2}{3}$ .

3.  $\{x_n\} = \left\{ \frac{n^2 - 4}{2n + n^2} \right\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Найти  $\lim x$ .

Ответ:  $\lim x = 1$ .

4.  $\{x_n\} = \left\{ 1 + \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Найти  $\lim x$ .

Ответ:  $\lim x = 1$ .

5.  $\{x_n\} = \{(-1)^n (2n + 1)\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Найти  $\lim x$ .

Ответ:  $\lim x$  не существует.

6.  $\{x_n\} = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n} \right\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Найти  $\lim x$ .

Ответ:  $\lim x = 2$ .

7. Точка  $x$  движется по оси  $ox$  по закону  $x = \frac{2t+1}{t}$  ( $t \geq 1, t$  - время). По-

строить график зависимости  $x$  от  $t$ . Показать, что точка непрерывно и монотонно движется по оси  $ox$  справа налево и стремится к точке 2, хотя и никогда не достигает ее.

## § 2. Предел функции. Непрерывность и разрывы функций

Пусть  $y = f(x)$  – некоторая функция, рассматриваемая на некотором промежутке оси  $ox$  (например, на отрезке  $[a;b]$  или на интервале  $(a;b)$  этой оси). То есть функцию  $y = f(x)$  будем рассматривать лишь для значений  $x$ , принадлежащих этому промежутку. При этом предполагается, что функция определена (может быть вычислена) для любого значения  $x$  из этого промежутка, за исключением, может быть, одной или нескольких точек этого промежутка. И пусть  $x_0$  – некоторая внутренняя или граничная точка этого промежутка. Для отрезка  $[a;b]$  такой точкой  $x_0$  может быть любая точка этого отрезка. А для интервала  $(a;b)$  – любая точка этого интервала, включая не принадлежащие ему его границы  $a$  и  $b$ .

Будем рассматривать значения функции  $y = f(x)$  для аргумента  $x$ , стремящегося к  $x_0$ . Как при этом будет осуществляться это стремление, непрерывно или дискретно – это для нас неважно. При стремлении  $x$  к  $x_0$  значения  $y$  функции  $y = f(x)$  могут стремиться к некоторому значению  $y_0$ , конечному или бесконечному. И если это стремление  $y$  к  $y_0$  осуществляется *при любом способе* стремления  $x$  к  $x_0$ , то число  $y_0$  называется *пределом функции*  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . И записывается это так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad (2.1)$$

(читается: предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  равен  $y_0$ ). Обратное, равенство (2.1) означает, что при  $x \rightarrow x_0$  функция  $y = f(x) \rightarrow y_0$ . Причем стремление  $y$  к  $y_0$  осуществляется *при любом способе* стремления  $x$  к  $x_0$ .

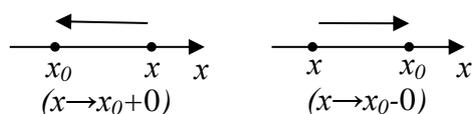


Рис. 1.4

Отметим, что если  $x_0$  – граничная точка числового промежутка оси  $ox$ , на котором рассматривается функция  $y = f(x)$  (крайняя левая или крайняя правая его точка), то  $x$  может стремиться к  $x_0$  либо только справа, либо только слева. Такое стремление  $x$  к  $x_0$  обозначают соответственно  $x \rightarrow x_0 + 0$  ( $x$  стремится к  $x_0$  справа) и  $x \rightarrow x_0 - 0$  ( $x$  стремится к  $x_0$  слева) – рис. 1.4. А соответствующие пределы функции  $y = f(x)$  называют соответственно пределами справа и слева:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = y_1 \text{ – предел функции } y = f(x) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ справа;} \quad (2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = y_2 \text{ – предел функции } y = f(x) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ слева.}$$

Такие пределы функции называются *односторонними*. А предел (2.1) называют *общим* (или *двусторонним*).

Если  $x_0$  – внутренняя точка числового множества оси  $ox$ , на котором рассматривается функция  $y = f(x)$ , то для нее можно искать оба односторонних предела – и предел справа (при  $x \rightarrow x_0 + 0$ ), и предел слева (при  $x \rightarrow x_0 - 0$ ). Кроме того, можно искать и общий (двусторонний) предел (2.1). Естественно, что если этот двусторонний предел существует и равен  $y_0$ , то существуют и оба односторонних, и оба они равны  $y_0$ . Обратно, если оба односторонних предела (2.2) существуют и равны, то существует и равен им двусторонний предел (2.1). Если же односторонние пределы существуют, но не равны, или один существует, а другой нет, то общий (двусторонний) предел, естественно, не существует.

Суть пределов функции, как двустороннего, так и односторонних, можно наглядно проиллюстрировать. В частности, сделаем это для двустороннего предела (2.1).

Согласно определению этого предела, при любом способе стремления  $x$  к  $x_0$  соответствующее значение функции  $y = f(x)$  стремится к  $y_0$ . То есть если  $x$  подойдет достаточно близко к  $x_0$ , то и  $y = f(x)$  подойдет достаточно близко к  $y_0$ . Иначе говоря, как бы ни была мала  $\varepsilon$ -окрестность  $[y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon]$  точки  $y_0$ , должна найтись такая соответствующая ей  $\delta$ -окрестность  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$  точки  $x_0$ , что как только  $x$  в своем стремлении к  $x_0$  попадет в  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , соответствующее этому  $x$  значение функции  $y = f(x)$  попадет в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y_0$  (рис. 1.5).

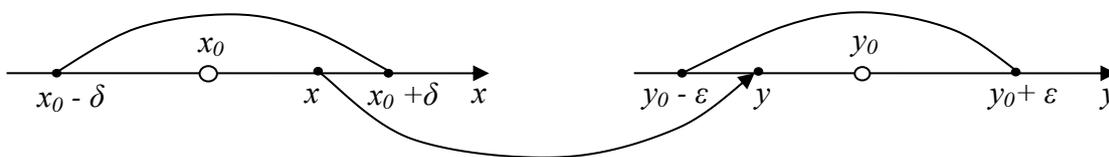


Рис. 1.5

Для иллюстрации же односторонних пределов (2.2) в рис. 1.5 нужно заменить двустороннюю  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$  на соответствующую одностороннюю  $[x_0; x_0 + \delta]$  или  $[x_0 - \delta; x_0]$ .

Теперь перейдем к рассмотрению такого важнейшего понятия, как *непрерывность функции*.

### Непрерывность и разрывы функций

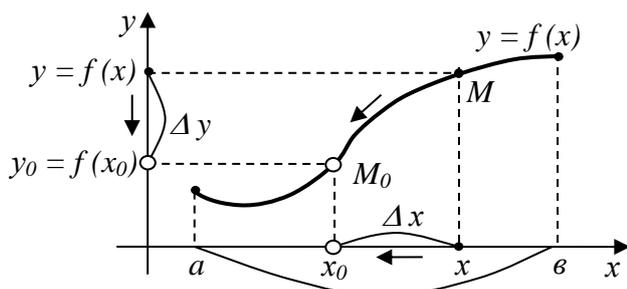


Рис. 1.6

Если функция  $y = f(x)$  определена для всех  $x$  из некоторого отрезка  $[a; b]$  или интервала  $(a; b)$  оси  $ox$ , и ее график для указанных  $x$  – сплошная (непрерывная) линия, то такая функция называется *непрерывной на этом отрезке или интервале*. Непрерывная на отрезке или интервале функция счита-

ется непрерывной в любой конкретной точке  $x_0$  этого отрезка или интервала.

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в некоторой точке  $x_0$ , то очевидно, что при  $x \rightarrow x_0$  значение функции  $y = f(x) \rightarrow y_0 = f(x_0)$  (рис. 1.6). Причем это стремление  $y$  к  $y_0$  при  $x \rightarrow x_0$  будет иметь место и при  $x \rightarrow x_0 + 0$ , и  $x \rightarrow x_0 - 0$ . Действительно, стремление  $x$  к  $x_0$  вызывает для непрерывной функции стремление (приближение) точки  $M$  к точке  $M_0$ , а значит, и стремление ординаты  $y$  точки  $M$  к ординате  $y_0$  точки  $M_0$ , с какой бы стороны от точки  $M_0$  ни находилась точка  $M$ .

Стремление  $y = f(x)$  к  $y_0 = f(x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$  означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (2.3)$$

Если ввести обозначения (см. рис. 1.6)

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x - \text{приращение аргумента } x \text{ в точке } x_0; \\ y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \Delta y - \text{приращение функции } y = f(x) \text{ в точке } x_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

то стремление  $y = f(x)$  к  $y_0 = f(x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то есть выполнение равенства (2.3), означает, что  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . И обратно, если при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ , то это означает, что при аргументе  $x \rightarrow x_0$  функция  $y \rightarrow y_0$ , а значит, выполняется равенство (2.3). Таким образом, условие

$$\Delta y \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \quad \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \right) \quad (2.5)$$

и условие (2.3) равносильны. Оба они, в разной форме, представляют собой *математическое определение непрерывности функции  $y = f(x)$  в заданной точке  $x_0$* .

Если условие непрерывности (2.3) (или равносильное ему условие (2.5)) функции  $y = f(x)$  в некоторой точке  $x_0$  не выполняется, то функция называется *разрывной в точке  $x_0$* . А сама такая точка  $x_0$  называется *точкой разрыва* функции  $y = f(x)$ . Например, точка  $x_0$  является точкой разрыва функции  $y = f(x)$  и на рис. 1.7(а), и на рис. 1.7(б), и на рис. 1.7(в).

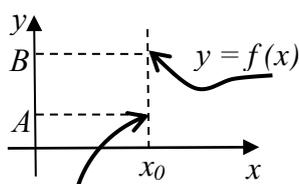


Рис. 1.7 (а)

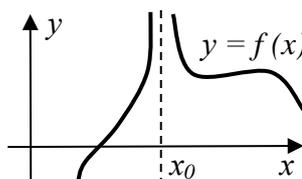


Рис. 1.7 (б)

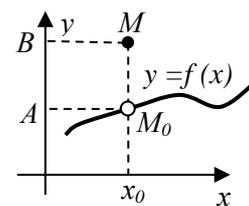


Рис. 1.7 (в)

Действительно, для рис. 1.7 (а) условие непрерывности (2.3) не выполняется сразу по двум причинам:

1)  $f(x_0)$  – не существует; 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = B$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ ;  $B \neq A$ , значит,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  – не существует.

Для рис. 1.7 (б) условие непрерывности (2.3) тоже, очевидно, не выполняется. Действительно,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  (существует, хоть и не является конечным числом), но

$f(x_0)$  – не существует.

На рис. 1.7 (в) из сплошного (непрерывного) графика функции  $y = f(x)$  вырезана точка  $M_0$  и перемещена по вертикали в другое положение  $M$ . В итоге точка  $x_0$  становится точкой разрыва функции  $y = f(x)$ , ибо для неё получаем:

1)  $f(x_0) = B$  – существует; 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  – существует; 3) Однако  $B \neq A$ ,

то есть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ . Если вернуть точку  $M$  на место (в точку  $M_0$ ), то функция  $y = f(x)$  опять станет непрерывной в точке  $x_0$ . Поэтому разрыв этой функции в точке  $x_0$ , изображенный на рис. 1.7 (в), называется *устранимым*, а сама точка  $x_0$  – *устранимой точкой разрыва*.

Разрывы же функции  $y = f(x)$ , изображенные на рисунках 1.7 (а) и 1.7 (б), являются, очевидно, неустранимыми. Причем эти разрывы по-разному называются: на рисунке 1.7 (а) точка  $x_0$  – это точка разрыва 1-го рода, а на рисунке 1.7 (б) – 2-го рода. Разница здесь в том, что в точках разрыва первого рода происходит *конечный скачок* значения функции, а в точках разрыва второго рода – *бесконечный*.

Но какого бы рода ни была точка разрыва функции, суть этой точки во всех случаях одна и та же: *точкой разрыва функции  $y = f(x)$  является такое значение  $x_0$  аргумента  $x$  этой функции, при котором нарушается сплошность (непрерывность) ее графика.*

Вспомним, что графики всех основных элементарных функций (линейной  $y = kx + b$ , квадратичной  $y = ax^2 + bx + c$ , обратно-пропорциональной зависимости  $y = \frac{k}{x}$ , показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических) являются сплошными (непрерывными) линиями для всех  $x$ , для которых эти функции определены. И разрыв указанные линии терпят лишь при тех изолированных значениях  $x = x_0$ , при которых соответствующие им функции не определены. Такие  $x_0$  и являются точками разрыва элементарных функций.

Например, квадратичная функция  $y = ax^2 + bx + c$  определена для любых  $x$ . И ее график (парабола) является сплошной (непрерывной) линией при любых

$x$ . То есть точек разрыва у функции  $y = ax^2 + bx + c$  нет. А вот функция  $y = \frac{k}{x}$  определена для любых  $x$ , кроме  $x = 0$ . И соответственно ее график (гипербола) является сплошной (непрерывной) линией для любых  $x$ , кроме  $x = 0$ , где она терпит разрыв (рис. 1.8 (а) и 1.8 (б)). Причем разрыв 2-го рода.

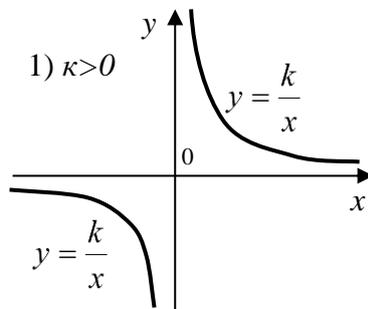


Рис. 1.8 (а)

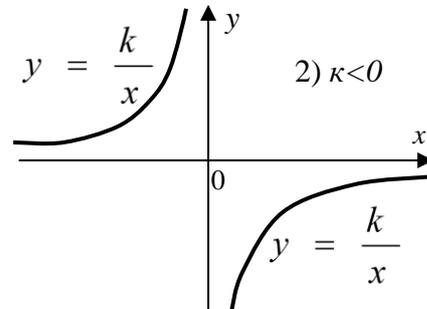


Рис. 1,8 (б)

Указанным выше свойством основных элементарных функций обладают, как можно доказать, и любые конечные комбинации этих функций (их суммы, произведения, функции от функций, то есть сложные функции, и т.д.). То есть любые функции  $y = f(x)$ , составленные из основных элементарных функций (а с другими функциями мы встречаемся и не будем) *будут непрерывны для всех значений аргумента  $x$ , для которых они определены*. А, следовательно, *точками их разрыва будут лишь те отдельные изолированные точки  $x_0$ , в которых они не определены*. Изолированные – это значит такие точки  $x_0$ , что в окрестности  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$  этих точек функция определена, и лишь в самих точках  $x_0$  она не определена.

Например, функция  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)}$  определена, а следовательно, и непрерывна для любых  $x$ , кроме точек  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 1$ . В окрестности каждой из этих точек функция определена, и только в самих этих точках она не определена. Значит, эти точки  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 1$  и есть точки разрыва данной функции  $y$ .

Выясним, заодно, и характер поведения этой функции возле каждой из ее точек разрыва – и справа, и слева.

1) Пусть  $x \rightarrow 0+0$ ; тогда  $y \rightarrow \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0+0} y = -\infty$ .

2) Пусть  $x \rightarrow 0-0$ ; тогда  $y \rightarrow \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0-0} y = -\infty$ .

3) Пусть  $x \rightarrow 1+0$ ; тогда  $y \rightarrow \left(\frac{2}{+0}\right) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$ .

4) Пусть  $x \rightarrow 1-0$ ; тогда  $y \rightarrow \left(\frac{2}{-0}\right) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$ .

Отобразив установленное поведение функции  $y$  возле ее точек разрыва, полу-

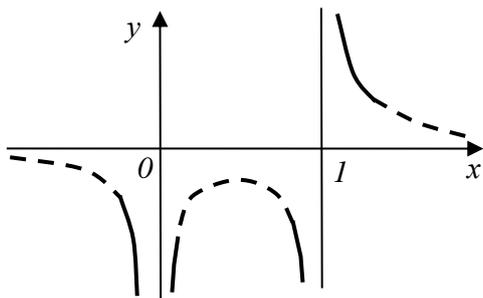


Рис. 1.9

чим важные фрагменты графика функции (они изображены на рис. 1.9 сплошными линиями). Другие же части графика функции (обозначенные пунктиром) требуют для своего детального изображения дополнительного исследования. Но об этом поговорим позже, когда будет рассмотрена полная схема исследования функций (глава 4, § 3).

Рассмотрим теперь несколько примеров вычисления пределов функций.

Пример 1. Найти  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$ .

Решение. Функция  $y = x^2$  определена, а, следовательно, и непрерывна в любой точке  $x$ , в том числе и в точке  $x = 2$ . Поэтому, пользуясь равенством (2.3) для непрерывных функций, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$$

Впрочем, этот результат и так очевиден, ибо естественно, что при  $x \rightarrow 2$  функция  $y = x^2 \rightarrow 4$ .

Пример 2. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ .

Решение. Функция  $y = \frac{1}{x^2}$  определена, а, следовательно, и непрерывна для всех  $x$ , кроме  $x = 0$ . То есть  $x = 0$  – точка разрыва этой функции. Поэтому найти искомый предел при  $x \rightarrow 0$  по формуле (2.3), которая применяется лишь для непрерывных в точке  $x_0$  функций, нельзя. Но это в данном случае и не важно – значение предела и так очевидно. Действительно, совершенно очевидно, что при любом способе стремления  $x \rightarrow 0$  функция  $y = \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ . То есть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \left( \frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Пример 3. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$ .

Решение. При  $x \rightarrow \infty$  функция  $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$ , очевидно, стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = \left( \frac{3}{\infty} \right) = 0.$$

Пример 4. Найти  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ .

Решение. Как и в примере 2, воспользоваться равенством (2.3) здесь нельзя, так как  $x = 2$  – точка разрыва функции  $y = \frac{1}{x-2}$ . Однако очевидно, что при  $x \rightarrow 2+0$  функция  $y \rightarrow +\infty$ , а при  $x \rightarrow 2-0$  функция  $y \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = \left( \frac{1}{+0} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = \left( \frac{1}{-0} \right) = -\infty.$$

Это односторонние пределы, и они разные. А это значит, что общий  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$  не существует.

Пример 5. Найти  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{3x-x^2}$ .

Решение. Воспользоваться равенством (2.3) и здесь нельзя, так как при  $x = 3$  функция  $y = \frac{x^2-9}{3x-x^2}$  не определена (при  $x = 3$  выражение  $\frac{x^2-9}{3x-x^2}$  дает неопределенное выражение  $\frac{0}{0}$ ). Значит, как и в примерах (2) – (4), нужно анализировать поведение функции при  $x \rightarrow 3$ .

Функция  $y = \frac{x^2-9}{3x-x^2}$  представляет собой дробь, у которой при  $x \rightarrow 3$  и числитель, и знаменатель одновременно стремятся к нулю. Но стремление числителя дроби к нулю ведет к уменьшению этой дроби, а стремление знаменателя к нулю – наоборот, к ее увеличению. Какой фактор перевесит – пока неясно, в разных случаях бывает по-разному. То есть в данном пределе имеется неясность (неопределенность) типа  $\frac{0}{0}$ . Кстати, это не единственный возможный тип неопределенности, но о прочих типах – позже.

Неопределенность, встретившуюся при вычислении предела, нужно *раскрывать*. То есть как-то так преобразовать выражение под знаком предела, чтобы неопределенность исчезла и предел стал очевиден. В частности, раскроем нашу неопределенность:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{3x-x^2} = \left( \frac{0}{0} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(3-x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{-x} = \frac{3+3}{-3} = -2$$

Пример 6. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-9}{x+4}$ .

Решение. Здесь при  $x \rightarrow \infty$  и числитель, и знаменатель дроби стремятся к

бесконечности. Но стремление числителя дроби к бесконечности ведет к неограниченному росту дроби, а стремление знаменателя дроби к бесконечности, наоборот, ведет к неограниченному уменьшению дроби (к стремлению ее к нулю). Эти два фактора, как и в предыдущем примере, работают друг против друга, приводя к неопределенности типа  $\frac{\infty}{\infty}$ . Раскроем её:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-9}{x+4} &= \left( \frac{\infty}{\infty} = ? \right) = \left| \begin{array}{l} \text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-9/x}{1+4/x} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что при } x \rightarrow \infty \\ 9/x \rightarrow 0 \text{ и } 4/x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \frac{2-0}{1+0} = 2. \end{aligned}$$

Неопределенности типа  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$  принадлежат к числу наиболее часто встречающихся при вычислении пределов неопределенностей. Но есть и другие типы неопределенностей. Всего этих типов семь:

$$\begin{aligned} 1) \frac{0}{0} = ?; \quad 2) \frac{\infty}{\infty} = ?; \quad 3) 0 \cdot \infty = ?; \quad 4) \infty - \infty = ?; \\ 5) \infty^0 = ?; \quad 6) 0^0 = ?; \quad 7) 1^\infty = ?. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эти записи нужно понимать не буквально, не как арифметические операции с символами 0 и  $\infty$ , а как *предельные ситуации при вычислении пределов*. Для сравнения приведем другие предельные ситуации, неопределенностями не являющиеся:

$$\begin{aligned} 1) \infty + \infty = \infty; \quad 2) \infty \cdot \infty = \infty; \quad 3) \frac{0}{\infty} = 0; \quad 4) \frac{\infty}{0} = \infty \\ \left( \frac{+\infty}{+0} = +\infty; \quad \frac{+\infty}{-0} = -\infty; \quad \frac{-\infty}{+0} = -\infty; \quad \frac{-\infty}{-0} = +\infty \right) \\ 5) 0^{+\infty} = 0; \quad 6) 0^{-\infty} = \frac{1}{0^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

Если при вычислении предела функции возникает какая-либо из неопределенностей (2.6), ее нужно раскрывать. Если неопределенности нет, значит, ситуация ясная, и результат следует записать сразу.

Пример 7. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - x^2)$ .

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - x^2) = (\infty - \infty = ?) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(2 - x) = (\infty \cdot (-\infty) = -\infty) = -\infty$$

Пример 8. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{x}$ .

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{x} = \left| \text{Учтем, что } \lg x \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow 0 \right| = \left( \frac{-\infty}{+0} \right) = -\infty$$

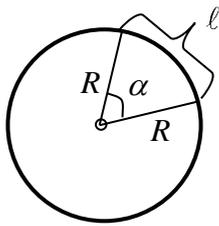
### Два замечательных предела

Вычислению многих пределов, содержащих неопределенности, часто помогает использование двух так называемых *замечательных пределов*:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left( \frac{0}{0} = ? \right) = 1 \quad (x - \text{угол в радианах)} \quad (2.7)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty = ?) = e, \text{ где } e = 2,71828... \approx 2,72.$$

Докажем первый замечательный предел. Для этого вспомним школьную формулу для длины  $l$  произвольной дуги окружности (рис. 1.10):



$$l = R\alpha \\ (\alpha - \text{в радианах})$$

Рис. 1.10

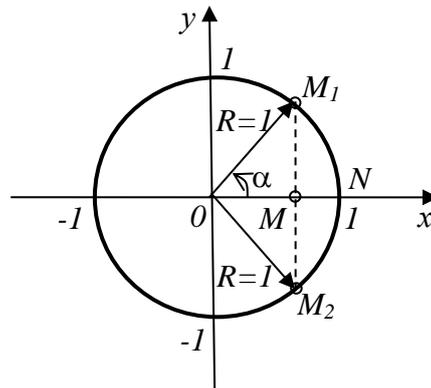


Рис. 1.11

А теперь рассмотрим рис. 1.11:

$$M_1M = \sin \alpha; \quad M_1M_2 = 2MM_1 = 2\sin \alpha; \quad \cup M_1N = R\alpha = \alpha; \\ \cup M_1NM_2 = 2 \cdot \cup M_1N = 2\alpha; \quad \frac{M_1M_2}{\cup M_1NM_2} = \frac{2\sin \alpha}{2\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (\alpha - \text{в радианах}).$$

При  $\alpha \rightarrow 0$  хорда  $M_1M_2$  и дуга  $M_1NM_2$ , неограниченно уменьшаясь, практически становятся неразличимыми (малая дуга практически не отличается от стягивающей ее хорды). То есть их отношение стремится к единице. Таким образом, при  $\alpha \rightarrow 0$  дробь  $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \rightarrow 1$ . А это и означает, что  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ . Полученный результат совпадает (при другом обозначении) с первым замечательным пределом (2.7).

Второй замечательный предел, приводящий к числу  $e$  (к Неперову числу – по имени шотландского математика 16-го века Джона Непера, введшего в ма-

тематику это число), оставим без доказательства.

Число  $e \approx 2,72$ , как и число  $\pi \approx 3,14$ , принадлежит к числу важнейших математических констант. А такие функции, как  $y = e^x$  и  $y = \log_e x = \ln x$ , принадлежат к числу важнейших элементарных функций, используемых в высшей математике. Графики этих функций показаны на рисунках (1.12) и (1.13). При этом показательная функция  $y = e^x$  называется *экспоненциальной*, а ее график называется *экспонентой*. А логарифмическая функция  $y = \ln x = \log_e x$  называется *функцией натурального логарифма*, а ее график называется *натуральной логарифмической кривой*. Эти функции играют большую роль при математическом описании различного рода природных процессов. Именно поэтому, в частности, логарифм по основанию  $e$  назвали натуральным – от слова «Natur» (природа).

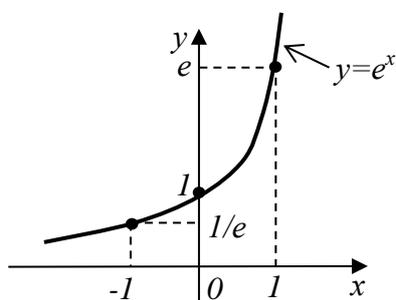


Рис. 1.12

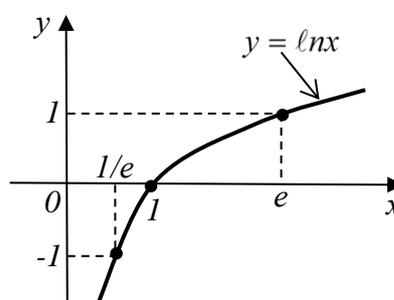


Рис. 1.13

Значения этих функций можно получать на инженерном калькуляторе – для этого на нем есть специальные клавиши.

Кстати, не следует путать натуральный логарифм  $\ln x = \log_e x$  с десятичным логарифмом  $\lg x = \log_{10} x$ . Для десятичных логарифмов на инженерном калькуляторе тоже есть своя клавиша.

### Упражнения

1. Найти  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ . Указание: положить  $x-2 = \alpha$ . Или разложить квадратный трехчлен в знаменателе на множители. Ответ: 1.
2. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-6x}{3x-1}$ . Ответ:  $\infty$ .
3. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$ . Ответ:  $1/2$ .
4. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^{\frac{x}{2}}$ . Ответ:  $1/\sqrt{e}$ .

5. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ . Ответ: 0.

6. Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}}$ . Ответ: а)  $+\infty$ ; б) 0.

7. Указать точный смысл условных записей:

1)  $\frac{2}{\infty} = 0$ ; 2)  $\frac{2}{0} = \infty$   $\left( \frac{2}{+0} = +\infty; \frac{2}{-0} = -\infty \right)$ ; 3)  $3^\infty = \infty$ ; 4)  $3^{-\infty} = 0$ ;

5)  $\ln 0 = -\infty$ ; 6)  $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty$ .

8. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ . Ответ: 1.

9. Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ . Ответ:  $\frac{2}{3}$ .

# ГЛАВА 4

## Дифференциальное исчисление

Дифференциальное исчисление – это раздел высшей математики, базирующийся на использовании таких ключевых для всей высшей математики понятий, как производные и дифференциалы функций. Эти понятия были введены в математику в конце 17 века Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем.

### § 1. Производная функции. Определение и смысл (геометрический и физический)

Производная функции рассматривалась в школьном курсе математики. Кратко повторим пройденное.

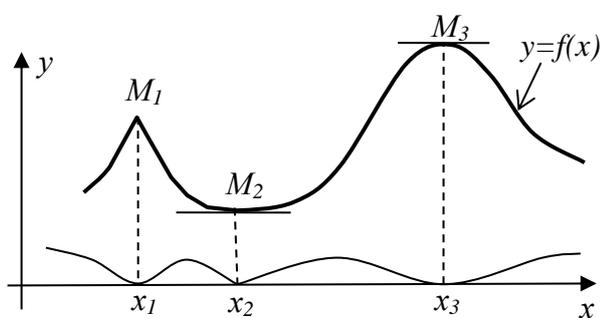


Рис. 2.1

Пусть  $y = f(x)$  – некоторая непрерывная функция (ее график – сплошная линия) – рис.2.1. Здесь ( $M_1, M_2, M_3, \dots$ ) – вершины и впадины графика функции. А их проекции ( $x_1, x_2, x_3, \dots$ ) на ось  $ox$  называются соответственно *точками максимума и минимума* функции. Эти точки имеют и общее название: *точки экстремума функции*. Или, как иногда добавляют, *точки локального экстремума*. Ну и,

соответственно, *точки локального максимума* и *точки локального минимума*. Но мы это слово «локального» добавлять обычно не будем.

Повторим еще раз: точки экстремума (точки максимума и минимума) функции – это не вершины и впадины графика функции, а *только их абсциссы, то есть их проекции на ось  $ox$* .

Интервал оси  $ox$ , на котором с увеличением аргумента  $x$  растет и функция  $y$ , называется *интервалом возрастания функции*. А интервал оси  $ox$ , на котором с увеличением аргумента  $x$  функция  $y$  убывает, называется *интервалом ее убывания*. В частности, на рис. 2.1 интервалы  $(-\infty; x_1)$  и  $(x_2; x_3)$  – интервалы возрастания функции  $y = f(x)$ , а интервалы  $(x_1; x_2)$  и  $(x_3; +\infty)$  – интервалы ее убывания.

Функция, возрастающая (убывающая) на некотором интервале, считается *возрастающей (убывающей) в каждой точке  $x$  этого интервала*.

Заметим, что возрастая или убывая, функция делает это для разных  $x$ , вообще говоря, неодинаково быстро. Например, возрастающая на интервале  $(x_2; x_3)$  функция  $y = f(x)$  (рис. 2.1) сначала для  $x$ , близких к  $x_2$ , растет медленно (график функции поднимается медленно); затем, по мере увеличения  $x$ , крутизна подъема графика функции возрастает, а значит, увеличивается и скорость роста функции; затем, по мере приближения  $x$  к  $x_3$ , скорость роста функции

снижается. В точке  $x_3$  рост функции прекращается и затем, для  $x > x_3$ , начинается убывание функции. И оно тоже, очевидно, происходит для разных  $x$  с разной скоростью.

Возникает естественная задача: оценить скорость изменения функции (скорость ее роста или убывания) в каждой точке  $x$  численно. Эта задача решена в конце 17 века Ньютоном и Лейбницем путем введения в математику понятия *производной функции*.

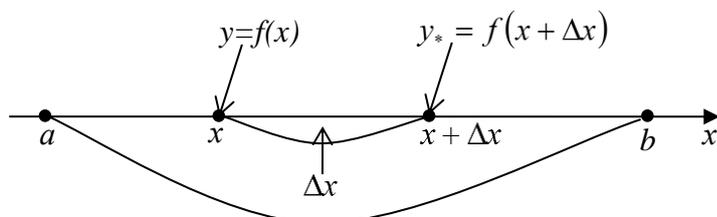


Рис. 2.2

Вспомним, как вводится это понятие. Пусть  $y = f(x)$  – некоторая непрерывная на интервале  $(a; b)$  оси  $ox$  функция. Если на этом интервале взять конкретное значение аргумента  $x$  (конкретную точку  $x$ ), то в этой точке

функция  $y$  получит конкретное значение  $y = f(x)$ . А теперь изменим  $x$  на некоторое  $\Delta x > 0$ , то есть перейдем от  $x$  к  $x + \Delta x$ . Причем возьмем  $\Delta x$  такое, чтобы и точка  $x + \Delta x$  тоже принадлежала интервалу  $(a; b)$  (рис. 2.2).

Переход от  $x$  к  $x + \Delta x$  означает, что аргумент  $x$  получил приращение (изменение)  $\Delta x$ . При этом, естественно, и функция  $y = f(x)$  получит некоторое изменение (приращение)  $\Delta y$ :

$$\Delta y = y_* - y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (1.1)$$

В силу непрерывности функции при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$  (см. (2.5) главы 3).

Приращение  $\Delta y$  функции  $y = f(x)$  зависит от исходного значения аргумента  $x$  и его приращения  $\Delta x$ . Оно может оказаться как положительным, так и отрицательным. Если окажется, что  $\Delta y > 0$ , то  $\Delta y$  - действительно приращение функции, ибо функция приросла на величину  $\Delta y$ . А если окажется, что  $\Delta y < 0$ , то, наоборот, функция получила не приращение, а убыль на величину  $\Delta y$ . Но и в этом случае величину  $\Delta y$  будем называть приращением функции. Просто это приращение будет не положительным, а отрицательным.

Пример 1. Найти приращение  $\Delta y$  функции  $y = x^2$  при а)  $x = 2$ ;  $\Delta x = 0,1$  и б)  $x = -3$ ;  $\Delta x = 0,1$ .

Решение. В данном случае  $f(x) = x^2$ . А значит,  $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$ . Применяя формулу (1.1), получим:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta y &= (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2 + 0,1)^2 - 2^2 = 0,41 \\ \text{б) } \Delta y &= (x + \Delta x)^2 - x^2 = (-3 + 0,1)^2 - (-3)^2 = -0,59 \end{aligned}$$

Таким образом, при переходе от  $x = 2$  к  $x = 2 + 0,1 = 2,1$  функция  $y = x^2$  получила приращение  $\Delta y = 0,41$ , то есть возросла на  $0,41$ . А при переходе от  $x = -3$  к  $x = -3 + 0,1 = -2,9$  эта функция получила приращение  $\Delta y = -0,59$ , то есть уменьшилась на  $0,59$ . И это совершенно естественно, если вспомнить график функции  $y = x^2$  (параболу), которая убывает при  $x < 0$  и возрастает при  $x > 0$ .

Вычислив при данных  $x$  и  $\Delta x$  приращение  $\Delta y$  данной функции  $y = f(x)$ , мы должны как-то оценить величину этого приращения - много это или мало. Для этого его нужно с чем-то сравнить. Самый естественный путь - это сравнить приращение  $\Delta y$  функции с приращением  $\Delta x$  ее аргумента. Для этого рас-

сматривается отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , то есть рассматривается отношение приращения функции к приращению ее аргумента. Это отношение показывает, на сколько единиц *в среднем* изменится  $y$ , если  $x$  увеличится на единицу длины участка  $[x; x + \Delta x]$ . То есть отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  определяет *среднюю скорость* изменения функции  $y = f(x)$  на участке  $[x; x + \Delta x]$  оси  $ox$ .

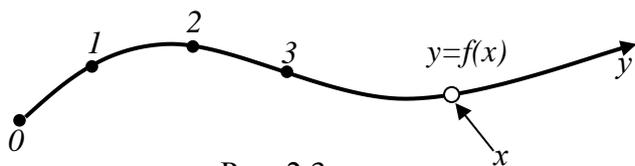


Рис. 2.3

Проиллюстрируем оправданность этого термина «средняя скорость» на механическом примере. Пусть функция  $y = f(x)$  определяет закон движения некоторой материальной точки по

траектории ее движения, где  $x$  - время, а  $y$  - координата точки на ее траектории (рис. 2.3). Как и на реальной дороге, координату  $y$  точки на траектории ее движения можно понимать как удаленность этой точки от некоторой начальной точки  $O$  (от стартовой точки). Зная закон движения  $y = f(x)$  движущейся точки, мы можем определить координату  $y$  этой точки в любой интересующий нас момент времени  $x$ . Тогда за время  $\Delta x$ , прошедшее с момента  $x$  до момента  $x + \Delta x$ , координата  $y$  движущейся точки изменится со значения  $y = f(x)$  до значения  $y_* = f(x + \Delta x)$ , то есть точка пройдет путь (точнее, получит перемещение)  $\Delta y$ , определяемое формулой (1.1). Заметим, что это перемещение может быть и положительным, и отрицательным. Положительным оно будет, если точка удаляется от начальной точки  $O$  (у нее тогда будет расти  $y$ ), а отрицательным - если точка приближается к точке  $O$  (у нее тогда  $y$  будет убывать). При этом средняя скорость движения за время  $\Delta x$  (с момента  $x$  до момента  $x + \Delta x$ ) будет равна

$$v_{cp} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

Таким образом, выражение (1.2) действительно имеет смысл средней скорости изменения функции  $y = f(x)$  на участке  $[x; x + \Delta x]$ .

Однако нас в конечном итоге интересует не средняя скорость изменения функции на участке, а истинная (мгновенная) скорость её изменения в *заданной точке*  $x$ . В частности, нас интересует *мгновенная скорость* движения точки по ее траектории (скорость в *заданный момент времени*  $x$ ).

Чтобы получить эту скорость, нужно, очевидно, стянуть промежуток  $[x; x + \Delta x]$  в точку  $x$ . А для этого длину  $\Delta x$  этого промежутка нужно устремить к нулю. При этом, в силу непрерывности функции  $y = f(x)$ , и  $\Delta y$  устремится к нулю, а отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  устремится к искомой мгновенной скорости изменения функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ . То есть мгновенная скорость  $v(x)$  изменения функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  - это

$$v(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.3)$$

В частности,  $v(x)$  - это мгновенная скорость движения точки по ее траектории в момент времени  $x$ , если  $y = f(x)$  - закон движения точки.

Определение. Предел (1.3), представляющий собой мгновенную скорость изменения функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ , называется *производной функции*  $y = f(x)$  в *точке*  $x$ . Используется несколько различных обозначений этой производной:

$$y' = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \dot{y} \quad (1.4)$$

Последнее из этих обозначений использовал Ньютон, предпоследнее - Лейбниц, а первые три ввел французский математик Коши. В дальнейшем для обозначения производной функции  $y = f(x)$  мы в основном будем использовать обозначение Коши  $y'$  (или  $f'(x)$ ), а при необходимости и  $y'_x$  (читается: производная функции  $y$  по переменной  $x$ ). В скором будущем нам понадобится и обозначение Лейбница. А обозначение Ньютона использовать не будем – его в основном любят использовать физики.

Итак,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (1.5)$$

или подробнее

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.6)$$

– *математическое определение* производной функции  $y = f(x)$  в заданной точке  $x$ . Читается это определение так: *производная функции – это предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

Если  $x$  – время, а  $y$  – координата движущейся точки на траектории ее движения (рис. 2.3), то функция  $y = f(x)$  определяет закон движения точки, а производная этой функции – мгновенную скорость движения точки по ее траектории в различные моменты времени  $x$ :

$$y' = f'(x) = v(x) \quad (1.7)$$

В этом состоит *физический смысл производной функции*.

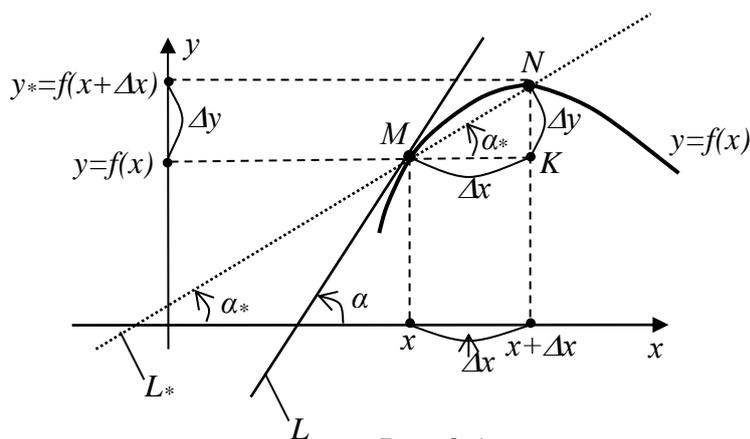


Рис. 2.4

Но у производной функции есть и наглядный *геометрический смысл*. Для его выяснения рассмотрим рис.2.4. Проведем к графику функции  $y = f(x)$  через точку  $M(x; f(x))$  и точку  $N(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$  секущую  $L_*$ , а через точку  $M(x; f(x))$  касательную  $L$ .

Их углы наклона к оси  $ox$  обозначим соответственно  $\alpha_*$  и  $\alpha$ . Из  $\Delta MNK$  следует:

$$\frac{NK}{MK} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_* \quad (1.8)$$

Если устремить  $\Delta x$  к нулю, то и  $\Delta y$  устремится к нулю, а точка  $N$  устремится к точке  $M$ . Соответственно секущая  $L_*$  устремится к касательной  $L$ , проведенной в точке  $M$ , а угол наклона  $\alpha_*$  секущей устремится к углу наклона  $\alpha$  касательной. То есть  $\alpha_* \rightarrow \alpha$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Но тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_* \rightarrow \operatorname{tg} \alpha \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

Иначе говоря,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.10)$$

что с учетом (1.5) дает

$$y' = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha \quad (1.11)$$

То есть *производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  – это тангенс угла наклона к оси  $ox$  касательной, проведенной к графику функции в точке, у которой абсцисса  $x$*  (см. рис. 2.5). В этом и состоит *геометрический смысл производной функции*.

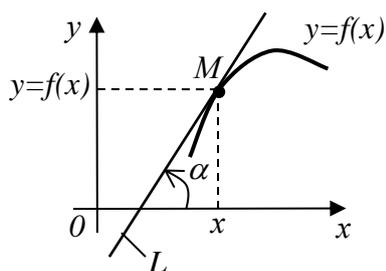


Рис. 2.5

### Дифференцируемость функции в точке и на промежутке

Производная функции, согласно ее математическому определению (1.5) и (1.6) – это некий предел. Но, как и всякий предел, он может оказаться:

- а) конечным; б) бесконечным; в) вообще не существовать.

Если для данного  $x$  имеет место вариант (а), то есть если при заданном  $x$  производная  $y' = f'(x)$  функции  $y = f(x)$  существует и конечна, то эта функция называется *дифференцируемой в точке  $x$* .

Функция, дифференцируемая в *каждой точке  $x$*  некоторого промежутка оси  $ox$  (например, интервала  $(a; b)$  или отрезка  $[a; b]$ ) называется *дифференцируемой на этом промежутке*. Кстати, сама процедура вычисления производной функции называется ее *дифференцированием* (продифференцировать функцию – значит найти ее производную).

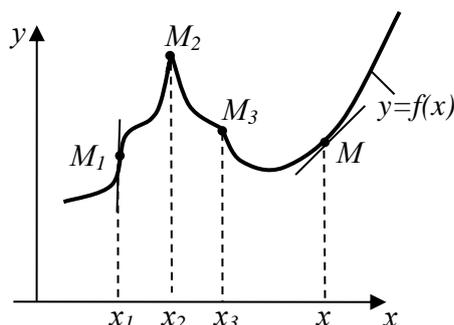


Рис. 2.7

Из геометрического смысла производной функции, определяемого равенством (1.11) и рис. 2.5, вытекают следующие два наглядных *необходимых и достаточных условия* дифференцируемости заданной функции  $y = f(x)$  в заданной точке  $x$ :

1) Существование касательной к графику функции, проведенной в той точке этого графика, которая имеет абсциссу  $x$ .

2) Невертикальность этой касательной (ибо если  $\alpha = 90^\circ$ , то  $tg \alpha = tg 90^\circ$  – не существует).

Например, функция  $y = f(x)$ , график которой изображен на рис. 2.7, не дифференцируема в точках  $x_1, x_2$  и  $x_3$ .

Действительно, точке  $x_1$  соответствует на графике функции точка  $M_1$  с вертикальной касательной. Точке  $x_2$  (точке максимума функции) соответствует остроконечная вершина  $M_2$ , касательная в которой не существует. Точке  $x_3$  соответствует точка  $M_3$  – точка излома графика функции, в которой тоже касательная не существует.

Во всех же остальных точках  $M$  графика функции касательную к графику провести можно, и она не вертикальна. Значит, для всех остальных  $x$ , отличных от  $(x_1; x_2; x_3)$ , существует производная функции. То есть во всех остальных точках  $x$  функция  $y = f(x)$  дифференцируема.

## Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Теорема. Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , то она и непрерывна в этой точке. Обратное не гарантировано.

Доказательство. Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ . Это значит, что ее производная  $y' = f'(x)$  существует в точке  $x$  и конечна. То есть

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

существует и конечен. По определению предела это значит, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y' = f'(x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

То есть при малых  $\Delta x$  имеем  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y'$ , откуда  $\Delta y \approx y' \cdot \Delta x$ , причем это приближенное равенство тем точнее, чем меньше  $\Delta x$ . Устремляя в нем  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем, что и  $\Delta y \rightarrow 0$ . А это, в силу (2.5) главы 3, и означает непрерывность функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ . Первая часть теоремы доказана.

Обратно, если функция  $y = f(x)$  непрерывна в некоторой точке  $x$ , то это еще не значит, что она дифференцируема в этой точке. Например, функция  $y = f(x)$ , график которой изображен на рис. 2.7, непрерывна в любой точке  $x$ , ибо её график сплошной (без разрывов). И тем не менее в точках  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , как было показано выше, она не дифференцируема.

### Упражнения

1. Опираясь на геометрический смысл производной показать, что
  - а) производная функции  $y = 2x - 3$  для любого  $x$  равна 2;
  - б) производная функции  $y = -3$  для любого  $x$  равна 0;
  - в) производная функции  $y = x^2$  для  $x > 0$  положительна, а для  $x < 0$  отрицательна.
2. Уравнение движения точки по ее траектории (рис. 2.3) имеет вид:  $y = \sqrt{x}$ . Показать, что точка тормозит при своем движении.
3. Доказать, что производная четной функции есть функция нечетная. И показать, что производная нечетной функции есть функция четная.

## § 2. Производные основных элементарных функций. Таблица производных. Правила дифференцирования

Опираясь на математическое определение производной (1.6), а также на ее физический (1.7) и геометрический (1.11) смысл, можно найти производные всех основных элементарных функций.

Пример 1. Пусть  $y = f(x) = C$  ( $C$  – произвольная константа). Найдем производную  $y'$  этой функции. То есть найдем производную  $C'$  константы  $C$ .

Решение. Её можно получить тремя способами.

а) Способ 1 – геометрический.

Графиком функции  $y = C$  является горизонтальная прямая. Касательной к этой прямой, проведенной в любой ее точке, будет сама эта прямая. Ее угол наклона  $\alpha$  к оси  $ox$  равен нулю. Но  $\operatorname{tg} 0 = 0$ . Значит, согласно (1.11),  $y' = C' = 0$ .

б) Способ 2 – физический.

Функция  $y = C$  от  $x$  не зависит, то есть с изменением  $x$  не меняется. А значит, скорость  $v(x)$  ее изменения равна нулю. Но ведь скорость изменения функции, согласно (1.7) – это производная функции. Таким образом, если  $y = C$ , то  $y' = C' = 0$ . Физический смысл этого вывода очевиден: если координата  $y$  движущейся точки неизменна, то точка стоит. А значит, скорость ее движения равна нулю.

в) Способ 3 – математический.

Воспользуемся математическим определением (1.6) производной функции:

$$y' = C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \text{у нас } f(x) = C; \\ \text{тогда } f(x + \Delta x) = C \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Итак, разными способами получаем один и тот же вывод: если  $y = C$ , то  $y' = C' = 0$ .

Пример 2. Пусть  $y = f(x) = x$ . Найдем производную  $y' = x'$  этой функции.

Решение. Его наиболее просто получить геометрическим способом. Графиком функции  $y = x$  является прямая, представляющая собой биссектрису первого и третьего координатных углов. Ее угол наклона к оси  $ox$  составляет  $45^\circ$ . Касательная к этой прямой в любой ее точке (при любом  $x$ ) совпадает с этой же прямой. Поэтому, опираясь на геометрический смысл производной (1.11), получаем:  $y' = x' = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ . То есть  $x' = 1$ . Этот же результат, заметим, следует и из математического определения производной (1.6):

$$y' = x' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \text{у нас } f(x) = x; \\ \text{тогда } f(x + \Delta x) = x + \Delta x \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Пример 3. Пусть  $y = f(x) = x^2$ . Найдем производную  $y' = (x^2)'$  этой функции.

Решение. Графиком функции  $y = x^2$  является парабола. Касательная к ней в разных ее точках имеет разное направление (разный угол наклона  $\alpha$  к оси  $ox$ ). Поэтому использовать геометрическую формулу (1.11) для нахождения производной этой функции в данном случае затруднительно. Затруднительно использовать и физический смысл производной (1.7). Тогда остается воспользоваться её математическим определением (1.6):

$$\begin{aligned} y' = (x^2)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \text{у нас } f(x) = x^2; \\ \text{тогда } f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

Итак, если  $y = x^2$ , то  $y' = (x^2)' = 2x$ .

Используя математическое определение производной (1.6), можно найти производные всех основных элементарных функций. Опуская соответствующие выкладки, приведем уже в готовом виде таблицу производных этих функций.

### Таблица производных основных элементарных функций

$$\begin{aligned} 1. C' &= 0; & 2. x' &= 1; & 3. (x^2)' &= 2x; & 4. (x^n)' &= n \cdot x^{n-1}; & 5. (a^x)' &= a^x \cdot \ln a; \\ 5^*. (e^x)' &= e^x; & 6. (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}; & 6^*. (\ln x)' &= \frac{1}{x}; & 7. (\sin x)' &= \cos x; \\ 8. (\cos x)' &= -\sin x; & 9. (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; & 10. (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\ 11. (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & 12. (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & & & & & & (2.1) \\ 13. (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}; & 14. (\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

**Таблицу производных желательно выучить наизусть!**

Обратим внимание на то, что: а) производные степенной и показательной функции (формулы 4 и 5) находятся по разным формулам; б) что из всех показательных функций  $a^x$  наиболее простую производную имеет функция  $e^x$ ; в) что из всех логарифмических функций  $\log_a x$  наиболее простую производную имеет натуральный логарифм  $\ln x$ .

Нахождение производных многих других элементарных функций (более сложных, не входящих в эту таблицу) осуществляется на основе следующих правил вычисления производных (**правил дифференцирования функций**):

$$\begin{aligned}
 & 1. (u+v)' = u' + v'; \quad 2. (u-v)' = u' - v'; \quad 3. (C \cdot u)' = C \cdot u'; \\
 & 4. (u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'; \quad 5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  – любые две дифференцируемые функции, а  $C$  – любая константа.

Таблица производных (2.1) и правила дифференцирования (2.2) известны еще из курса школьной математики, поэтому их вывод, основанный на использовании математического определения производной (1.6), приводить не будем.

Пример 4.  $y = 2x^2 - 3x + 5$ ;  $y' = ?$

Решение.

$$y' = (2x^2 - 3x + 5)' = (2x^2)' - (3x)' + (5)' = 2(x^2)' - 3(x)' + (5)' = 2 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0 = 4x - 3$$

Пример 5.  $y = \sqrt{x}$ ;  $y' = ?$

Решение.

$$y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \left| \text{учтем, что } (x^n)' = nx^{n-1} \right| = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Полученный результат

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \tag{2.3}$$

наряду с формулами (2.1), полезно запомнить.

Пример 6.  $y = (2x + 3) \sin x$ ;  $y' = ?$

Решение.

$$\begin{aligned}
 y' &= ((2x + 3) \cdot \sin x)' = \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что} \\ (u \cdot v)' = u'v + uv' \end{array} \right| = (2x + 3)' \cdot \sin x + (2x + 3) \cdot (\sin x)' = \\
 &= 2 \sin x + (2x + 3) \cos x.
 \end{aligned}$$

Пример 7.  $y = \frac{1}{x}$ ;  $y' = ?$

Решение.

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right| = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Полученный результат

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \tag{2.4}$$

тоже полезно запомнить.

## Производная сложной функции

Пусть  $y = y(u)$ , а  $u = u(x)$  – любые две дифференцируемые функции своих аргументов. Тогда функция  $y = y(u(x))$  – это так называемая *сложная функция от  $x$*  (она представляет собой функцию от функции). Найдем ее производную  $y' = y'_x$  (производную от  $y$  по  $x$ ). Для этого дадим аргументу  $x$  некоторое приращение  $\Delta x$ , то есть перейдем от  $x$  к  $x + \Delta x$ . Приращение  $\Delta x$  величины  $x$  вызовет некоторое приращение  $\Delta u$  величины  $u$ , а то, в свою очередь, вызовет некоторое приращение  $\Delta y$  величины  $y$ . Так как функции  $y = y(u)$  и  $u = u(x)$  являются, по условию, дифференцируемыми функциями своих аргументов, то они являются и непрерывными функциями своих аргументов (см. теорему в § 1). То есть при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta u \rightarrow 0$ , и  $\Delta y \rightarrow 0$ . А тогда, согласно (1.5), получаем:

$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta u \rightarrow 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x.$$

Итак, если  $y = y(u(x))$  – сложная функция от  $x$ , то  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ . Или, опуская значок  $x$  (но подразумевая его) запишем короче:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \Leftrightarrow y' = y'_u \cdot u' \quad (2.5)$$

Формула (2.5) представляет собой *правило вычисления производной (правило дифференцирования) сложной функции*.

Собственно говоря, суть правила (2.5) проста. А именно, если функция  $y = y(x)$  – простая функция от  $x$  (из числа основных элементарных функций, чьи производные содержатся в таблице (2.1)), то ее производная и выглядит, и находится просто:  $y' = y'_x$ . А если  $y = y(u)$ , где  $u = u(x)$  – две простых функции, то  $y = y(u(x))$  – уже сложная функция от  $x$ . Ее производная  $y' = y'_x$  по  $x$  находится уже по формуле (2.5): сначала находим производную функции  $y = y(u)$  по переменной  $u$  (точно так же, как находим производную от функции  $y = y(x)$  по переменной  $x$ ), а затем умножаем ее на производную функции  $u = u(x)$  по переменной  $x$ .

Чтобы сделать наглядным применение этого правила, приведем таблицу сравнения, содержащую производные некоторых простых и аналогичных им сложных функций от  $x$ :

Производные простых функций ( $x$ – независимая переменная)	Производные сложных функций ( $u = u(x)$ – любая дифференцируемая функция)
1. $(x^2)' = 2x$	1. $(u^2)' = 2u \cdot u'$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	2. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	3. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
4. $(e^x)' = e^x$	4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	5. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
6. $(\sin x)' = \cos x$	6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
(.....)	(.....)

(2.6)

Таблица (2.6) наглядно иллюстрирует разницу между производными простых и сложных функций.

Пример 8.  $y = \ln \sin x$ ;  $y' = ?$

Решение.

$$y' = (\ln \sin x)' = \left. \begin{array}{l} \text{учтем, что } (\ln x)' = 1/x; \\ \text{значит, } (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'; \\ \text{у нас } u = \sin x \end{array} \right| = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

Пример 9.  $y = \cos 3x$ ;  $y' = ?$

Решение.

$$y' = (\cos 3x)' = \left. \begin{array}{l} \text{учтем, что } (\cos x)' = -\sin x; \\ \text{значит, } (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \\ \text{у нас } u = 3x; \end{array} \right| = -\sin 3x \cdot (3x)' = -3 \sin 3x$$

Пример 10.  $y = \sqrt{1-x^2}$ ;  $y' = ?$

Решение.

$$y' = (\sqrt{1-x^2})' = \left. \begin{array}{l} \text{учтем, что } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\ \text{значит, } (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'; \\ \text{у нас } u = 1-x^2; \end{array} \right| = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 11.  $y = \operatorname{tg}^3 4x$ ;  $y' = ?$

Решение.

$$y' = (\operatorname{tg}^3 4x)' = ((\operatorname{tg} 4x)^3)' = \left. \begin{array}{l} \text{учтем, что } (x^3)' = 3x^2; \\ \text{значит, } (u^3)' = 3u^2 \cdot u'; \\ \text{у нас } u = \operatorname{tg} 4x \end{array} \right| = 3(\operatorname{tg} 4x)^2 \cdot (\operatorname{tg} 4x)' =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{учтем, что } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \\ \text{значит, } (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'; \\ \text{у нас } u = 4x \end{array} \right| = 3\operatorname{tg}^2 4x \cdot \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot (4x)' = \frac{12\operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x} \cdot$$

### Производная функции, заданной неявно

Если функция  $y = f(x)$  задана в неявном виде, то есть задана уравнением  $F(x; y) = 0$  (в этом уравнении  $y$  не выражен через  $x$ , и выразить его не удастся), то при нахождении производной  $y'$  такой функции поступают следующим образом:

1) Дифференцируют обе части уравнения  $F(x; y) = 0$  по  $x$ , помня при этом, что  $y$  – это функция от  $x$ . В результате появляется некоторое равенство  $\Phi(x; y; y') = 0$ , содержащее искомую производную  $y'$ .

2) Выражают из полученного равенства эту производную.

Таким образом, производную  $y'$  функции  $y$ , заданной неявно уравнением  $F(x; y) = 0$ , находят по схеме:

$$F(x; y) = 0 \Rightarrow (F(x; y))'_x = (0)'_x \Rightarrow \Phi(x; y; y') = 0 \Rightarrow y' = \varphi(x; y) \quad (2.7)$$

Пример 12. Найти производную  $y'$  функции  $y$ , заданной неявно уравнением  $\sin xy + y - x^2 = 0$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \sin xy + y - x^2 = 0 &\Rightarrow (\sin xy + y - x^2)'_x = (0)'_x \Rightarrow \cos xy \cdot (xy)'_x + y' - 2x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos xy \cdot (x'y + xy') + y' - 2x = 0 \Rightarrow \cos xy \cdot (y + xy') + y' - 2x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow xy' \cos xy + y' = 2x - y \cos xy \Rightarrow y' = \frac{2x - y \cos xy}{x \cos xy + 1} \end{aligned}$$

## Производная функции, заданной параметрически

Если функция задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t - \text{независимый параметр}), \quad (2.8)$$

то ее производную  $y' = y'_x$  находят по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (2.9)$$

Подтвердим эту формулу. Пусть  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  – дифференцируемые функции параметра  $t$ . Зафиксируем некоторое  $t$ , а затем придадим ему приращение  $\Delta t$ . При этом  $x$  и  $y$  получают некоторые приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , причем при  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\Delta x \rightarrow 0$ , и  $\Delta y \rightarrow 0$  (функции  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  – дифференцируемые, а значит, и непрерывные). А тогда

$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta t \rightarrow 0)}} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 13. Функция  $y = y(x)$ , заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$$

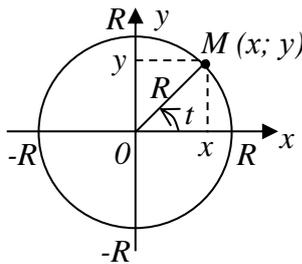


Рис. 2.8

представляет собой параметрическое уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом  $R$  (рис. 2.8).

Найдем производную  $y' = y'_x$  этой функции.

Применяя правило (2.9), получим:

$$y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(R \sin t)'_t}{(R \cos t)'_t} = \frac{R \cos t}{-R \sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

## Производные высших порядков

Пусть  $y = f(x)$  – некоторая заданная функция, а  $y' = f'(x)$  – ее производная. Тогда  $(y')' = y''$  – производная второго порядка функции  $y$ . Применяют и другие обозначения этой производной:

$$(y')' = y'' = y''_{x^2} = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \ddot{y} \quad (2.10)$$

Далее,

$$(y'')' = y''' = y'''_{x^3} = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \ddot{\ddot{y}} \quad (2.11)$$

– производная третьего порядка функции  $y$ . И т.д. Кстати, обычную производную  $y' = f'(x)$  часто называют *производной первого порядка*.

Пример 14.  $y = \sin x$ ;  $y''' = ?$

Решение. Чтобы найти  $y'''$ , сначала нужно найти  $y'$  и  $y''$ :

$$y' = (\sin x)' = \cos x; \quad y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x; \quad y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x.$$

Пример 15. Функция  $y = f(x)$  задана неявно уравнением  $x^2 + y^2 = 4$ . Найти  $y''$ .

Решение. Сначала найдем  $y'$ :

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (x^2 + y^2)'_x = (4)'_x \Rightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Теперь найдем и  $y''$ :

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{1 \cdot y - x \cdot (-x/y)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = \left| \frac{x^2 + y^2}{y^3} \right|_{x^2 + y^2 = 4} = -\frac{4}{y^3}$$

Пример 16. Функция  $y = f(x)$  задана параметрически:  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$ .

Найти  $y'' = y''_{x^2}$ .

Решение. Сначала найдем  $y' = y'_x$ :  $y'_x = -\operatorname{ctg} t$  (см. пример 13). А теперь найдем  $y'' = y''_{x^2}$ , опять используя формулу (2.9):

$$y'' = y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(R \cos t)'_t} = \frac{1/\sin^2 t}{-R \sin t} = -\frac{1}{R \sin^3 t}.$$

### Физический смысл производной второго порядка

Если  $y = f(x)$  – уравнение движения точки по ее траектории (см. рис. 2.3), то, как мы знаем, ее производная  $y' = f'(x)$  (производная первого порядка) представляет собой скорость  $v(x)$  движения точки (мгновенную скорость движения) – см. (1.7). Но тогда производная второго порядка  $y'' = (y')' = v'(x)$  будет иметь смысл «скорость изменения скорости» движения точки. В физике та-

кая величина называется ускорением. Поэтому

$$y'' = f''(x) = v'(x) = a(x) \quad (2.12)$$

– ускорение движения точки в момент  $x$ . В этом и состоит физический смысл производной второго порядка.

Пример 17. Как известно, уравнение движения свободно падающего в безвоздушном пространстве тела, начавшего свое падение в момент  $t = 0$ , имеет

вид:  $s = \frac{gt^2}{2}$  ( $s$  – путь, пройденный падающим телом за время  $t$ ). Найдем скорость  $v = v(t)$  и ускорение  $a = a(t)$  падающего тела:

$$v = s' = \left( \frac{gt^2}{2} \right)' = \frac{g}{2} (t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt ;$$
$$a = s'' = (s')' = v' = (gt)' = g .$$

То есть ускорение  $a$  падающего тела неизменно и равно  $g$  – ускорению свободного падения ( $g \approx 9,8$  м/сек<sup>2</sup>). А скорость  $v$  падающего тела возрастает пропорционально времени по формуле  $v = gt$ .

### Упражнения

1. Найти угол наклона к оси  $ox$  касательной, проведенной к параболе  $y = x^2$  в точке  $M(2;4)$ .

Ответ:  $\alpha = \arctg 4 \approx 76^\circ$ .

2. Найти на параболе  $y = x^2$  такую точку  $M(x; y)$ , чтобы касательная к параболе, проведенная в этой точке, составила с осью  $ox$  угол  $\alpha = 45^\circ$ .

Ответ:  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ .

3. В момент времени  $t = 1$  найти скорость  $v$  и ускорение  $a$  точки, движущейся по оси  $ox$  по закону  $x = 5 - 2t + 10t^2$ .

Ответ:  $v(1) = 18$ ;  $a(1) = 20$ .

4. Найти производную  $y' = y'_x$  функций:

а)  $y = \frac{1}{x^2}$ ; б)  $y = \sqrt{8 - x^3}$ ; в)  $y = xe^{-3x}$ ; г)  $y + \arctg y = x$ ; д)  $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$

Ответ: а)  $y' = -\frac{2}{x^3}$ ; б)  $y' = \frac{-3x^2}{2\sqrt{8-x^3}}$ ; в)  $y' = (1-3x)e^{-3x}$ ;

г)  $y' = \frac{y^2+1}{y^2+2}$  ; д)  $y' = \frac{\sin t}{1-\cos t}$ .

5. Найти производную  $y'' = y''_{x^2}$  функций:

а)  $y = \cos^2 4x$ ; б)  $x - \sin 2y = 0$ ; в)  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

Ответ: а)  $y'' = -32 \cos 8x$ ; б)  $y'' = \frac{\sin 2y}{2 \cos^3 2y}$ ; в)  $y'' = \frac{t^2+1}{4t^3}$ .

9. Найти производную функции  $y = (a+bx)^2$ . Причем сделать это двумя способами: 1) раскрыв квадрат разности; 2) не раскрывая его.

Ответ:  $y' = 2a(ax+b)$ .

10. Найти производные функций: а)  $y = (a-bx)^3$ ; б)  $y = (1-5x^2)^{10}$ .

Ответ: а)  $y' = -3b(a-bx)^2$ ; б)  $y' = -100x(1-5x^2)^9$ .

11. Найти производные функций: а)  $y = \sin^2 4x$ ; б)  $y = \sqrt{1+\cos^3 2x}$ .

Ответ: а)  $y' = 4\sin 8x$ ; б)  $y' = -\frac{3\cos^2 2x \cdot \sin 2x}{\sqrt{1+\cos^3 2x}}$ .

12. Найти производные функций: а)  $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$ ; б)  $y = 2xe^{-x^2}$ ;

в)  $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ .

Ответ: а)  $y' = \frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$ ; б)  $y' = 2(1-2x^2)e^{-x^2}$ ; в)  $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ .

13.  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$ . Показать, что  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ .

14. Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ . Найти

$y'(0)$ . Ответ:  $y'(0) = \frac{1}{3}$ .

15. Функция  $y = y(x)$  задана неявно уравнением  $x \ln y - y \ln x = 1$ . Найти

$y'(1)$ . Ответ:  $y'(1) = e^2$ .

16. Показать, что функция  $y = -\frac{e^{-x^2}}{2x^2}$  удовлетворяет уравнению  $xy' + 2y = e^{-x^2}$ .

17. Показать, что функция  $y = xe^{\frac{1}{x}}$  удовлетворяет уравнению  $x^3y'' - xy' + y = 0$ .

18. Точка движется по оси  $ox$  по закону  $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$  ( $x$  - координата движущейся точки,  $t$  - время). Определить скорость и ускорение точки. В какие моменты времени точка меняет направление своего движения? Показать на оси  $ox$  схему движения точки.

### § 3. Исследование функций с помощью производных

Теорема 1. Если функция  $y = f(x)$  возрастает на некотором интервале  $(a; b)$  оси  $ox$  (с ростом  $x$  растет и  $y$ ) и дифференцируема на этом интервале, то для любого  $x$  из этого интервала  $y' = f'(x) > 0$  (производная имеет знак (+)). А если она убывает на этом интервале ( $y$  убывает с ростом  $x$ ) и дифференцируема на нем, то для любого  $x$  из этого интервала  $y' = f'(x) < 0$  (производная имеет знак (-)).

Доказательство.

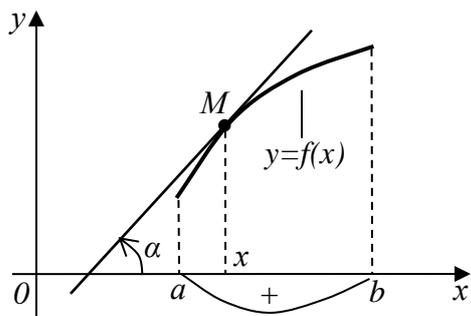


Рис. 2.9

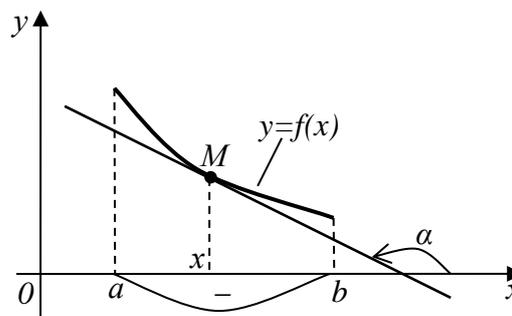


Рис. 2.10

Рассмотрим сначала рис. 2.9. На нем изображен график возрастающей и дифференцируемой на интервале  $(a; b)$  функции  $y = f(x)$ . В каждой точке  $M$  этого графика касательная составляет с осью  $ox$  острый угол  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Но тангенсы острых углов, как известно, положительны. Значит, согласно геометрическому смыслу производной (1.11), и производная  $y' = f'(x)$  положительна для любых  $x$  из интервала  $(a; b)$  возрастания функции.

А теперь рассмотрим рис. 2.10, на котором изображен график убывающей на интервале  $(a; b)$  функции  $y = f(x)$ . Здесь для любой точки  $M$  графика функ-

ции (а значит, для любого  $x$  из интервала  $(a;b)$ ) угол  $\alpha$  наклона касательной, проведенной к графику функции, тупой ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Но тангенсы таких углов отрицательны. А значит, согласно (1.11), и производная  $y' = f'(x)$  отрицательна.

Следствие теоремы 1. Если на некотором интервале  $(a;b)$  оси  $ox$  в любой его точке  $x$  производная функции  $y = f(x)$  положительна, то функция возрастает на этом интервале. А если отрицательна – то убывает. Это следствие играет очень важную роль в исследовании функций. Оно позволяет по знаку производной функции определять, растет или убывает функция, и где именно (для каких  $x$ ) растет, и где (для каких  $x$ ) убывает.

Пример 1. Рассмотрим функцию  $y = x^2$ . Ее производная  $y' = 2x$ . Она положительна при  $x > 0$  и отрицательна при  $x < 0$ . Значит, при  $x > 0$  функция  $y = x^2$  возрастает, а при  $x < 0$  она убывает. График этой функции (всем известная парабола) наглядно подтверждает сказанное.

### Применение производной функции к нахождению точек экстремума функции

Напомним (см. § 1), что термин «точки экстремума» – это общее название точек максимума и минимума функции. А под ними, в свою очередь, понимаются абсциссы вершин и впадин графика функции (то есть проекции вершин и впадин на ось  $ox$ ). Или, если не прибегать к геометрической трактовке, точки экстремума функции – это те значения ее аргумента  $x$ , при которых функция  $y = f(x)$  принимает экстремальные (пиковые) значения – максимальные или минимальные. Точек экстремума у функции  $y = f(x)$  столько, сколько вершин и впадин у ее графика.

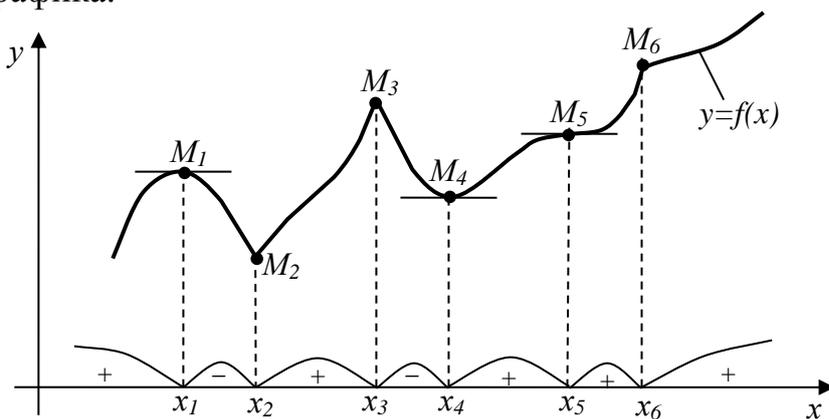


Рис. 2.11

Рассмотрим рис. 2.11. На нем изображен график непрерывной функции  $y = f(x)$ , имеющей и интервалы возрастания, и интервалы убывания, и точки экстремума:

Интервалы возрастания функции помечены знаком  $(+)$ , а интервалы убывания – знаком  $(-)$ . Согласно доказанной выше теореме 1, это заодно и знаки производной функции  $y = f(x)$ .

Точками экстремума данной функции являются точки  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Причем точки  $x_1$  и  $x_3$  – точки максимума, а  $x_2$  и  $x_4$  – точки минимума. Точки  $x_5$  и  $x_6$  точками экстремума функции не являются, так как соответствующие им точки графика  $M_5$  и  $M_6$  не вершины и не впадины этого графика.

Точки экстремума разделяют собой интервалы возрастания и убывания функции. В точках максимума совершается переход от возрастания функции (слева от точки максимума) к ее убыванию (справа от точки максимума). То есть в точках максимума знак производной функции меняется с (+) слева на (–) справа. А в точках минимума, наоборот, совершается переход от убывания функции к ее возрастанию. То есть в точках минимума знак производной функции меняется с (–) слева на (+) справа.

Сами же точки экстремума не принадлежат ни к интервалам возрастания, ни к интервалам убывания функции. Потому в точках экстремума производная не может быть ни положительной, ни отрицательной. Значит, в этих точках она или равна нулю, или ее не существует вообще.

Этот вывод понятен и с геометрической точки зрения. Действительно, производная функции, согласно ее геометрическому смыслу (1.11) и рис. 2.5, связана с касательной к графику функции. А именно, представляет собой тангенс угла наклона этой касательной к оси  $ox$ . Но точкам экстремума функции соответствуют на ее графике вершины и впадины, в которых касательная к графику или параллельна оси  $ox$  (если вершина или впадина графика округлая, то есть гладкая), или эта касательная отсутствует вообще (если вершина или впадина острая). В первом случае угол наклона  $\alpha$  касательной к оси  $ox$  равен нулю. Значит, и  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , а значит, и производная  $y' = f'(x) = 0$ . Во втором случае угол  $\alpha$  не существует вообще, а значит, не существует для данной точки экстремума  $x$  и производная  $y' = f'(x)$ . В частности, для рис. 2.11 имеем:

$$y'(x_1) = 0; \quad y'(x_2) \text{ – не суц.}; \quad y'(x_3) \text{ – не суц.}; \quad y'(x_4) = 0.$$

Итак, в точках экстремума производная функции или равна нулю, или не существует. Однако не любая точка  $x$ , в которой производная равна нулю или не существует, непременно будет точкой экстремума. В частности, на рис. 2.11  $y'(x_5) = 0$ ;  $y'(x_6)$  не существует, и тем не менее ни точка  $x_5$ , ни точка  $x_6$  не являются точками экстремума функции  $y = f(x)$ .

Все сказанное выше о точках экстремума функции можно оформить в виде теоремы.

Теорема 2. Необходимое условие экстремума.

*Для того, чтобы некоторая точка  $x$  являлась точкой экстремума функции  $f(x)$ , необходимо, чтобы в этой точке производная  $y' = f'(x)$  функции или равнялась нулю, или не существовала. Это условие не является достаточным.*

Таким образом, лишь те точки (значения  $x$ ), в которых производная  $y' = f'(x)$  функции равна нулю или не существует, могут быть точками экстремума этой функции. Но еще не факт, что все такие точки будут точками экс-

тремума. Иначе говоря, точки (значения  $x$ ), в которых  $y' = f'(x) = 0$  или  $y' = f'(x)$  не существует, являются *лишь подозрительными на экстремум*. Чтобы выяснить суть каждой подозрительной точки, нужно посмотреть знак производной слева и справа от неё. Здесь возможны три варианта:

- 1) Если слева от подозрительной на экстремум точки знак производной (+), а справа (–), то эта подозрительная точка – точка максимума.
- 2) Если слева от подозрительной на экстремум точки знак производной (–), а справа (+), то эта подозрительная точка – точка минимума.
- 3) Если слева и справа от подозрительной на экстремум точки знак производной один и тот же, то эта подозрительная точка – не точка экстремума.

Сказанное наглядно иллюстрирует рис. 2.11. Таким образом, становится понятной и очевидной следующая

Схема исследования функции  $y = f(x)$  на возрастание-убывание и точки экстремума

1. Стандартное начало исследования любой функции таково: находим область ее определения. То есть находим все те значения  $x$ , для которых существует (можно найти) значение функции  $y = f(x)$ . Заодно устанавливаем интервалы непрерывности и точки разрыва функции.

2. Находим производную  $y' = f'(x)$ .

3. Находим точки (значения  $x$ ), подозрительные на экстремум. То есть находим те точки (значения  $x$ ), в которых производная функции или равна нулю, или не существует:

а)  $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = (x_1; x_2; \dots)$

б)  $y'$  не существует  $\Rightarrow x = (x_1^*; x_2^*; \dots)$

4. Наносим все найденные в пунктах (а) и (б) подозрительные на экстремум точки на область определения функции (на ось  $ox$ ) и фиксируем (например, дугами) интервалы, на которые разобьется область определения этими точками. Так как внутри каждого такого интервала производная функции существует и не обращается в нуль, то в каждом интервале производная сохраняет свой знак, который может измениться лишь при переходе к другому интервалу. С помощью вычисления производной в пробных внутренних точках интервалов определяем знак производной в каждом интервале. По найденным знакам производной устанавливаем интервалы возрастания и убывания функции, а по смене знака производной определяем точки экстремума функции (точки максимума и минимума).

5. В найденных точках максимума и минимума вычисляем значения функции  $y = f(x)$  и тем самым определяем вершины и впадины графика функции, отмечая заодно, гладкие они или острые.

Пример 1. Исследовать функцию  $y = x^3 - 3x^2$  на возрастание-убывание и точки экстремума.

Решение. Действуем по изложенной выше схеме.

1. Находим область определения функции. Функция  $y = x^3 - 3x^2$  определена (а следовательно, и непрерывна) для любых  $x$ , то есть на всей числовой оси  $ox$  ( $-\infty < x < \infty$ ). Значит, её график – сплошная (без разрывов) линия.

2. Найдем производную  $y'$ :

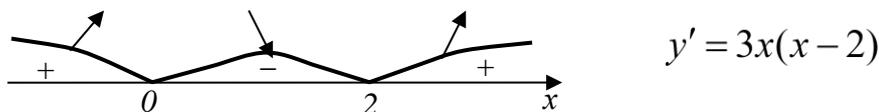
$$y' = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

3. Найдем точки (значения  $x$ ), подозрительные на экстремум:

а)  $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0; x_2 = 2).$

б)  $y'$  не существует  $\Rightarrow$  таких  $x$  нет.

4. Нанесем найденные подозрительные на экстремум точки  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 2$  на область определения функции (на ось  $ox$ ). Ось  $ox$  этими точками разобьется на три интервала:



С помощью пробных точек, взятых на каждом интервале, определяем знаки производной  $y' = 3x(x - 2)$  в этих интервалах (они отмечены на рис. выше). Тем самым устанавливаем интервалы возрастания функции  $y = x^3 - 3x^2$  (они помечены стрелкой вверх) и интервал ее убывания (стрелка вниз), а также устанавливаем, что точка  $x_1 = 0$  – точка максимума функции, а точка  $x_2 = 2$  – точка ее минимума.

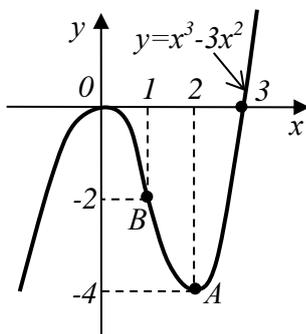


Рис. 2.12

5. Находим (вычисляем) значения функции  $y = x^3 - 3x^2$  в точках ее максимума и минимума, устанавливая тем самым вершины и впадины графика функции:

$$x = x_{\max} = 0 \Rightarrow y = y_{\max} = 0;$$

Точка  $O(0;0)$  – вершина графика функции (гладкая, т.к.  $y'(0) = 0$ ).

$$x = x_{\min} = 2 \Rightarrow y = y_{\min} = -4;$$

Точка  $A(2;-4)$  – впадина графика функции (гладкая, т.к.  $y'(2) = 0$ ).

б. В дополнение к проведенному исследованию найдем еще точки пересечения графика функции с осями координат:

а) С осью  $ox$ :

$$y = 0 \Leftrightarrow y = x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0; x_2 = 3)$$

б) С осью  $oy$ :  $x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$ .

А теперь построим этот график (рис. 2.12):

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции  
(глобального максимума и глобального минимума)

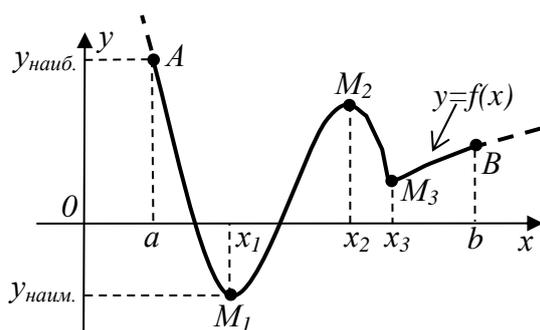


Рис 2.13

Пусть  $y = f(x)$  – функция, непрерывная на некотором отрезке  $[a; b]$  оси  $ox$  (рис. 2.13)

Ставится задача: указать схему нахождения тех точек отрезка  $[a; b]$  оси  $ox$ , в которых функция  $y = f(x)$  достигает своего наибольшего значения  $y_{наиб.}$  и своего наименьшего значения  $y_{наим.}$ , и найти эти  $y_{наиб.}$  и  $y_{наим.}$ .

Кстати, эти  $y_{наиб.}$  и  $y_{наим.}$  называют *глобальным максимумом* и *глобальным минимумом* функции.

Сразу отметим, что такие точки  $x$  в которых имеет место (достигается) и глобальный максимум, и глобальный минимум, на отрезке  $[a; b]$  заведомо существуют (это доказано). А вот на интервале  $(a; b)$  их может и не быть. То есть на интервале функция своих наибольшего и наименьшего значений может и не иметь. Например, функция  $y = x^2$  на отрезке  $[0; 2]$  имеет свое наименьшее значение (глобальный минимум)  $y_{наим.} = 0$ , и достигает она его в точке  $x = 0$ . И она имеет свое наибольшее значение (глобальный максимум)  $y_{наиб.} = 4$ , и достигает она его в точке  $x = 2$ . А вот на интервале  $(0; 2)$  своих наибольшего и наименьшего значений функция  $y = x^2$ , очевидно, не имеет (не достигает).

Вернемся к рис. 2.13, на котором изображена произвольная непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $y = f(x)$ . Здесь  $y_{наиб.}$  достигается функцией на конце  $a$  отрезка  $[a; b]$ , а  $y_{наим.}$  – в точке  $x_1$ , являющейся одной из точек минимума функции. И вообще, очевидно, что и при любой другой форме графика непрерывной функции наибольшее и наименьшее значения на отрезке  $[a; b]$  достигаются ею или в её точках экстремума, содержащихся на этом отрезке, или на концах отрезка. Отсюда вытекает следующая

схема нахождения  $y_{\text{наиб.}}$  и  $y_{\text{наим.}}$  функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ :

1. Находим производную  $y' = f'(x)$ .

2. Находим принадлежащие отрезку  $[a; b]$  точки, подозрительные на экстремум.

3. Не исследуя этих точек, вычисляем значение функции  $y = f(x)$  во всех найденных подозрительных точках, а также на концах  $a$  и  $b$  отрезка  $[a; b]$ . Из всех найденных значений  $y$  выбираем  $y_{\text{наиб.}}$  и  $y_{\text{наим.}}$ . А заодно устанавливаем, в каких точках отрезка  $[a; b]$  эти  $y_{\text{наиб.}}$  и  $y_{\text{наим.}}$  достигаются.

Пример 2. На отрезке  $[-1; 3]$  найти наибольшее  $y_{\text{наиб.}}$  и наименьшее  $y_{\text{наим.}}$  значения функции  $y = x^4 - 8x^2$ .

Решение. Реализуем изложенную выше схему.

1. Найдем  $y'$ :

$$y' = (x^4 - 8x^2)' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2).$$

2. Найдем на отрезке  $[-1; 3]$  точки (значения  $x$ ), подозрительные на экстремум:

а)  $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2).$

б)  $y'$  не существует  $\Rightarrow$  таких  $x$  нет.

На отрезке  $[-1; 3]$  содержатся лишь две подозрительные на экстремум точки: это  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 2$ .

3. Вычисляем значения функции  $y = x^4 - 8x^2$  в обеих найденных подозрительных точках, а также на концах отрезка, и выберем из найденных значений функции наибольшее и наименьшее:

$$y(0) = 0; y(2) = -16; y(-1) = -7; y(3) = 9$$

Ответ:  $y_{\text{наиб.}} = y(3) = 9; y_{\text{наим.}} = y(2) = -16.$

## Упражнения

1. Сеткой длиной 120 метров нужно огородить прямоугольную площадку, примыкающую к стене. Каковы должны быть размеры этой площадки, чтобы ее площадь была максимальной?

Ответ: 60м  $\times$  30м.

2. Из квадратного листа картона со стороной  $a$  вырезаются по углам одинаковые квадраты, а из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был максимальным?

Ответ:  $\frac{1}{6}a.$

3. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была максимальной.

Ответ: 20 см.

4. В полукруг радиуса  $R$  вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить размеры и площадь этого треугольника.

Ответ:  $S_{\max} = R^2$  при высоте прямоугольника  $\frac{R}{\sqrt{2}}$  и длине  $R\sqrt{2}$ .

5. Из круга вырезается сектор, содержащий угол  $\alpha$ , а затем сектор сворачивается в конус (в кулек). При каком значении угла  $\alpha$  объем конуса будет наибольшим?

Ответ: при  $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 294^\circ$ .

6. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом  $32 \text{ м}^3$  так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ:  $4 \times 4 \times 2 \text{ м}$ .

7. Вблизи завода  $A$  проходит железная дорога к городу  $B$ . Под каким углом  $\alpha$  к железной дороге нужно провести шоссе, соединяющее завод  $A$  с железной дорогой, чтобы доставка продукции до города  $B$  была максимально дешевой, если стоимость 1 тонны-километра при перевозке по шоссе в  $m$  раз дороже, чем по железной дороге?

Ответ:  $\cos \alpha = \frac{1}{m}$ .

8. Груз весом  $P$ , лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему силой  $F$ . Под каким углом  $\alpha$  к горизонту нужно направить силу  $F$ , чтобы величина ее была наименьшей? Коэффициент трения покоя между грузом и плоскостью равен  $k$ .

Ответ:  $\operatorname{tg} \alpha = k$ . При этом  $F = \frac{kP}{\cos \alpha + k \sin \alpha}$ .

9\*. Известно, что произведение двух положительных чисел не меньше их суммы. Каково наименьшее возможное значение суммы таких чисел?

Ответ: 4.

## § 4. Некоторые другие приложения производных

### 4.1. Приближенное решение уравнений методом половинного деления

Пусть требуется решить некоторое уравнение  $f(x) = 0$ . Решить его – это значит найти все его корни. То есть найти те значения неизвестной  $x$ , которые удовлетворят уравнению. Корни уравнения  $f(x) = 0$  имеют и наглядный геометрический смысл: это точки пересечения графика функции  $y = f(x)$  с осью  $ox$ .

Пусть  $y = f(x)$  – непрерывная на заданном отрезке  $[a; b]$  функция, то есть ее график – сплошная (непрерывная) линия для всех  $x$  этого отрезка. Тогда очевидно следующее: если на концах этого отрезка (в точках  $a$  и  $b$ ) функция  $y = f(x)$  принимает значения разных знаков, то график этой функции непременно пересечет отрезок  $[a; b]$  оси  $ox$  хотя бы один раз. А значит, уравнение  $f(x) = 0$  заведомо будет иметь на этом отрезке хотя бы один корень (один корень  $x_1$  на рис. 2.14 (а) и три корня ( $x_1, x_2, x_3$ ) на рис. 2.14 (б)).

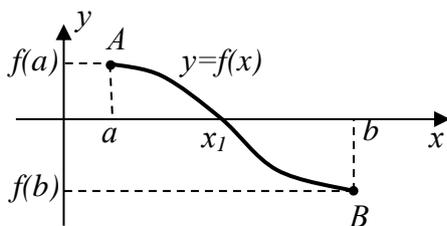


Рис.2.14 (а)

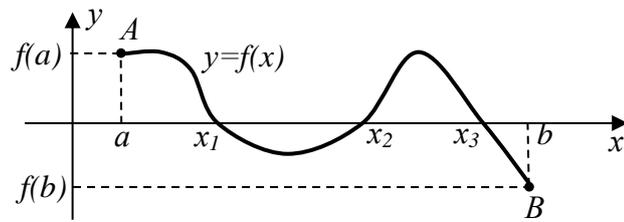


Рис. 2.14(б)

В частности, если на отрезке  $[a; b]$  функция  $y = f(x)$  дифференцируема (это значит, что на отрезке  $[a; b]$  в каждой его точке  $x$  существует производная  $y' = f'(x)$ ), и эта производная на всем отрезке сохраняет свой знак, то при знаке (+) этой производной функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  монотонно растет, а при знаке (–) монотонно убывает. В любом из этих вариантов график функции  $y = f(x)$ , имеющей на концах отрезка  $[a; b]$  значения разных знаков, пересечет этот отрезок только один раз (как, например, на рис. 2.14 (а)). А значит, уравнение  $f(x) = 0$  будет иметь на отрезке  $[a; b]$  только один корень  $x_1$ .

Простейшим и вместе с тем эффективным методом численного нахождения этого корня  $x_1$  является *метод половинного деления*. Суть его в следующем:

1) Находим середину  $c_1$  отрезка  $[a; b]$  и вычисляем  $f(c_1)$ . Искомый корень  $x_1$  окажется, очевидно, в той из половин  $[a; c_1]$  или  $[c_1; b]$  отрезка  $[a; b]$ , на концах которой функция  $y = f(x)$  имеет разные знаки. Выбираем эту половину.

2) Находим середину  $c_2$  той половины отрезка  $[a; b]$ , на которой находится искомый корень  $x_1$ , и вычисляем  $f(c_2)$ . Выбираем ту половину найденной в пункте 1 половины, на концах которой функция  $y = f(x)$  имеет разные знаки. Именно на ней находится искомый корень  $x_1$  уравнения  $f(x) = 0$ .

3) Потом полученный отрезок (четвертинку исходного отрезка  $[a;b]$ ) опять делим пополам, и т.д.

В итоге, последовательно сужая промежуток оси  $ox$ , на котором содержится искомый корень  $x_1$  уравнения  $f(x) = 0$ , через несколько шагов получим достаточно узкий промежуток. Например, через 10 шагов исходный промежуток  $[a;b]$  уменьшится в  $2^{10} \approx 1000$  раз, через 20 шагов – в  $2^{20} \approx 1$  миллион раз, и т.д. Любая точка этого промежутка (например, его середина) может быть принята за приближенное значение искомого корня  $x_1$ . И корень этот, очевидно, может быть найден с любой заданной точностью.

Причем вручную это делать не нужно, можно воспользоваться соответствующей компьютерной программой. Программа приближенного поиска корней уравнений содержится в любом специализированном пакете математических программ. Например, в пакетах MATHCAD, MATLAB, MATHEMATICA.

Примечание. Если известно, что уравнение  $f(x) = 0$  имеет несколько корней ( $x_1, x_2, \dots$ ) – см. например, рис. 2.19 (б), то отделяя каждый из них своим промежутком и используя для каждого такого промежутка изложенную выше схему половинного деления, можно найти все эти корни. А чтобы узнать, сколько корней имеется у данного уравнения  $f(x) = 0$ , следует представлять себе, хотя бы в общих чертах, график функции  $y = f(x)$ . То есть нужно исследовать эту функцию. И в этом исследовании главное – это определение интервалов непрерывности и точек разрыва функции, определение интервалов возрастания-убывания и точек экстремума.

Пример 1. Определить количество корней уравнения  $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$  и разделить некоторым промежутком каждый из них.

Решение. Рассмотрим функцию  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ . Эта функция определена (а следовательно, и непрерывна) для всех  $x$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Исследуя ее на возрастание-убывание и точки экстремума (проделайте это по изложенной выше схеме самостоятельно), устанавливаем, что интервалы  $(-\infty; 0)$  и  $(2; +\infty)$  являются интервалами возрастания функции, а интервал  $(0; 2)$  – интервал ее убывания;  $x = 0$  – точка максимума функции, а точка  $A(0; 2)$  – вершина ее графика;  $x = 2$  – точка минимума функции, а точка  $B(2; -2)$  – впадина ее графика. При  $x \rightarrow +\infty$  функция  $y \rightarrow +\infty$ , а при  $x \rightarrow -\infty$  функция  $y \rightarrow -\infty$ . По этим ре-

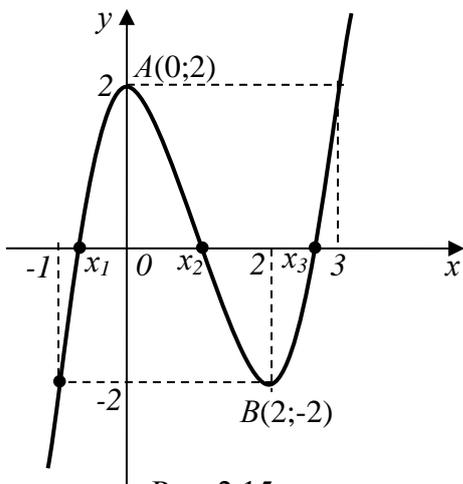


Рис. 2.15

зультатам можно уже схематично построить график функции  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  (рис. 2.15). Из этого графика видим, что он пересекает ось  $ox$  три раза – в точ-

как  $(x_1, x_2, x_3)$ . То есть уравнение  $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$  имеет три корня  $(x_1, x_2, x_3)$ . Корень  $x_1$  находится на промежутке  $[-1; 0]$ ; корень  $x_2$  – на промежутке  $[0; 2]$ , корень  $x_3$  – на промежутке  $[2; 3]$ . Каждый из них с любой заданной точностью может быть найден изложенным выше методом половинного деления.

Впрочем, так как  $x_2 = 1$  – точное значение второго корня, то можно точно найти и значения корней  $x_1$  и  $x_3$ :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left\{ x_2 = 1; x_1 = 1 - \sqrt{3}; x_3 = 1 + \sqrt{3} \right\}$$

## 4.2. Правило Лопиталья вычисления пределов

Это правило состоит в следующем. Если требуется найти предел вида

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad (4.1)$$

где  $x_0$  – число или символ  $\pm \infty$ , и этот предел приводит к неопределенности вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}, \quad (4.2)$$

Словесная формулировка правила Лопиталья (4.2) такова: предел отношения бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

Доказательство правила Лопиталья довольно громоздко, поэтому приводить его не будем.

Примечание. Предел отношения производных, стоящий в правой части равенства (4.2), тоже может приводить к неопределенности вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ . Тогда правило Лопиталья можно применить и к нему. То есть можно применить это правило повторно.

### Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left( \frac{0}{0} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \left( \frac{0}{0} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left( \frac{0}{0} = ? \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \left( \frac{0}{0} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Пример 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left( \frac{\infty}{\infty} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Пример 5.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} &= \left( \frac{\infty}{\infty} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left( \frac{\infty}{\infty} = ? \right) = (\dots) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot x^0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.\end{aligned}$$

Последние два пример показывают, что при  $x \rightarrow \infty$   $\ln x$  растет несравненно медленнее, чем  $x$ , а  $e^x$  – несравненно быстрее, чем  $x^n$  при любом значении  $n$ .

### Упражнения

1. В примере 1 было показано, что уравнение  $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$  имеет три корня:  $x_1 \in [-1; 0]$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 \in [2; 3]$ . Методом половинного деления найти корни  $x_1$  и  $x_3$  с точностью до 0,01 и сравнить эти значения с точными.

Ответ:  $x_1 \approx -0,73$ ; ( $x_1 = 1 - \sqrt{3} = -0,73205\dots$  – точно).

$x_3 \approx 2,73$ ; ( $x_3 = 1 + \sqrt{3} = 2,73205\dots$  – точно).

2. С помощью правила Лопиталья найти пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + e^x}{x^2}$

Ответ: а)  $-\frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ; в)  $\infty$ ;

3. С помощью правила Лопиталья доказать второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

## § 5. Дифференциал функции

Понятие дифференциала функции тесно связано с понятием ее производной. Как и производная функции, дифференциал функции принадлежит к числу важнейших понятий математического анализа и введен в математику Ньютоном и Лейбницем параллельно с понятием производной.

Вспомним определение производной функции  $y = f(x)$  в некоторой фиксированной точке  $x$  (§ 1, формулы 1.5 и 1.6):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (5.1)$$

Здесь  $\Delta x$  – приращение аргумента  $x$ , а  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  – соответствующее приращение функции  $y$ .

Будем считать, что данная функция  $y = f(x)$  дифференцируема в рассматриваемой фиксированной точке  $x$ . То есть будем считать, что производная  $y' = f'(x)$  в этой точке существует и конечна. Тогда, согласно (5.1),

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y' = f'(x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 \quad (5.2)$$

А это значит, что при малых значениях  $\Delta x$  будем иметь:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y' \Leftrightarrow \Delta y \approx y' \cdot \Delta x \quad (5.3)$$

Причем приближенные равенства (5.3) будут тем точнее, чем меньше  $\Delta x$  (и соответственно чем меньше  $\Delta y$ ).

А теперь будем считать приращение  $\Delta x$  аргумента функции  $y = f(x)$  не просто малым, а *бесконечно малым*, и назовем его *дифференциалом аргумента*  $x$ . Введем (следуя Лейбницу) для него и специальное обозначение:

$$dx - \text{дифференциал аргумента } x. \quad (5.4)$$

Таким образом, *дифференциал  $dx$  аргумента  $x$*  – это *бесконечно малое приращение  $\Delta x$  этого аргумента*. Конечно, только что введенное понятие дифференциала переменной  $x$  – математическая абстракция (она сродни диаметру точки или толщине линии). Но математика постоянно пользуется абстракциями, поэтому еще одна абстракция пугать нас не должна.

Если приращение  $\Delta x$  аргумента  $x$  бесконечно мало ( $\Delta x = dx$ ), то и приращение  $\Delta y$  дифференцируемой функции  $y$  тоже будет бесконечно мало. Обозначим его символом  $dy$  и будем называть *дифференциалом функции*  $y$ . Так как  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , то

$$dy = f(x + dx) - f(x) - \text{дифференциал функции } y. \quad (5.5)$$

Если теперь в приближенных равенствах (5.3) заменить малые, но конечные  $\Delta x$  и  $\Delta y$  на бесконечно малые  $dx$  и  $dy$ , то эти равенства станут *точными*.

$$\frac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y' \cdot dx \quad (5.6)$$

Оба равенства (5.6) имеют важный смысл. Первое из них дает выражение производной  $y'$  функции  $y$  через отношение дифференциалов  $dy$  и  $dx$  функции и аргумента. А второе дает выражение дифференциала функции  $dy$  через производную функции  $y'$  и дифференциал аргумента  $dx$ .

Кстати, если учесть, что  $y = f(x)$ , то последнее равенство (5.6) можно записать подробнее:

$$df(x) = f'(x)dx \quad (5.7)$$

А если еще учесть исходное выражение (5.5) для дифференциала  $dy = df(x)$  функции  $y = f(x)$ , то из последнего равенства получаем:

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx \quad (5.8)$$

Равенство (5.8) позволяет записать значение  $f(x + dx)$  функции  $f(x)$  в точке  $x + dx$ , бесконечно близкой к точке  $x$ , через значение функции и ее производной в самой точке  $x$ . Эта формула имеет большое теоретическое значение.

Если в равенстве (5.8) заменить бесконечно малое  $dx$  на малое, но конечное  $\Delta x$ , то вместо точного оно станет приближенным:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \quad (5.9)$$

Эта приближенная формула тем точнее, чем меньше  $\Delta x$ . Она используется для приближенного вычисления значения  $f(x + \Delta x)$  по значениям  $f(x)$  и  $f'(x)$ .

В частности, применяя эту формулу для функций  $f(x) = \sin x$ ;  $f(x) = \ln x$ ;  $f(x) = x^n$ ;  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , и т.д., получим следующие интересные формулы для производства приближенных вычислений:

- 1)  $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$ ; ( $\Delta x$  – в радианах)
- 2)  $\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$ ;
- 3)  $(x + \Delta x)^n \approx x^n \left(1 + \frac{n}{x} \cdot \Delta x\right)$ ;  $\Rightarrow (1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ ;
- 4)  $\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} \left(1 + \frac{\Delta x}{nx}\right)$ ;  $\Rightarrow \sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$ ;

$$(5.10)$$

Эти формулы тем точнее, чем меньше  $\Delta x$  (или  $\alpha$ ). В частности, используя последнюю формулу, получим:

$$\sqrt[4]{15,6} = \sqrt[4]{16-0,4} = \sqrt[4]{16+(-0,4)} \approx \sqrt[4]{16} \left( 1 + \frac{-0,4}{4 \cdot 16} \right) = 2(1-0,0125) = 1,9875.$$

Для сравнения: калькулятор дает  $\sqrt[4]{15,6} = 1,98738\dots$ . То есть приближенное значение  $\sqrt[4]{15,6}$ , полученное вручную, отличается от его точного значения лишь в четвертом знаке после запятой.

### Погрешности вычисления значений функции одной переменной

Пусть  $y = f(x)$  - некоторая дифференцируемая функция одной переменной. Поставим вопрос: какова абсолютная и относительная погрешности вычисления функции  $y$ , вызываемые некоторой достаточно малой абсолютной погрешностью  $\varepsilon_x = |\Delta x|$  аргумента  $x$ ?

Используя приближенную формулу (5.3) для малых приращений  $\Delta x$  и  $\Delta y$  аргумента и функции, можем записать:  $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$ . Отсюда для  $\varepsilon_y = |\Delta y|$  - абсолютной ошибки числа  $y$  - получаем:

$$\varepsilon_y = |\Delta y| \approx |f'(x)| \cdot |\Delta x| \quad (5.11)$$

Относительная ошибка  $\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|y|}$  функции  $y = f(x)$  оценивается следующим приближённым равенством:

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|y|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |\Delta x|}{|f(x)|} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot |\Delta x| \quad (5.12)$$

Формулы (5.11) и (5.12) широко используются при оценке погрешностей, возникающих при производстве приближенных вычислений.

Пример 1. Найти относительную погрешность вычисления функции  $y = \sqrt{x}$ .

Решение. Применяя формулу (5.12) для функции  $f(x) = \sqrt{x}$ , получим:

$$\delta_y \approx \left| \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} \right| \cdot |\Delta x| = \left| \frac{1}{2x} \right| \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\Delta x|}{x} = \frac{1}{2} \delta_x \quad (5.13)$$

Таким образом,  $\sqrt{x}$  имеет относительную погрешность в два раза меньшую, чем  $x$ , так что при вычислении  $y = \sqrt{x}$  число  $y$  будет иметь не меньше верных значащих цифр, чем число  $x$ . Впрочем, и не больше, ибо лишняя значащая цифра уменьшает относительную ошибку числа сразу на порядок, то есть в 10 раз.

Пример 2. Найти погрешность вычисления функции  $y = x^n$ .

Решение. Применяя формулу (5.12) для функции  $f(x) = x^n$ , находим:

$$\delta_y = \left| \frac{(x^n)'}{x^n} \right| \cdot |\Delta x| = \left| \frac{nx^{n-1}}{x^n} \right| \cdot |\Delta x| = n \cdot \frac{|\Delta x|}{|x|} = n \cdot \delta_x \quad (5.14)$$

То есть относительная ошибка степени  $x^n$  в  $n$  раз больше, чем относительная ошибка числа  $x$ . Это означает, чем больше степень  $n$ , тем менее точным, по сравнению с  $x$ , получается результат вычисления  $x^n$ . Например, при вычислении  $y = x^{10}$  результат вычисления будет содержать уже на одну верную значащую цифру меньше, чем исходное число  $x$ .

Пример 3. Найти погрешность вычисления функции  $y = \ln x$ .

Решение. Пользуясь формулой (15) для  $f(x) = \ln x$ , находим:

$$\varepsilon_y \approx \frac{|\Delta x|}{x} = \delta_x \quad (5.15)$$

Таким образом, абсолютная ошибка вычисления функции  $y = \ln x$  равна относительной погрешности числа  $x$ .

Пусть, например, необходимо вычислить  $\ln x$  числа  $x$ , содержащего три верные значащие цифры. Это значит, что число  $x$  задано с относительной погрешностью  $\delta_x$  порядка 0,1%, или  $\delta_x \approx 0.001$ . Такова же приблизительно и абсолютная погрешность числа  $\ln x$ . То есть последний разряд, который следует оставить при округлении  $\ln x$  - тысячные.

Вернемся все же к формулам (5.6) и (5.7), служащим для нахождения дифференциала функции  $y = f(x)$ . На базе этих формул можно установить следующие

свойства дифференциала функции:

1)  $dC = 0$ ; 2)  $d(C \cdot f(x)) = C \cdot df(x)$ ; 3)  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ;

$$4) d(uv) = u dv + v du; \quad 5) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (5.16)$$

Здесь  $C$  – любая константа, а  $f(x)$ ,  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  – любые дифференцируемые функции. Действительно:

1.  $dC = C' \cdot dx = 0 \cdot dx = 0$ ;
2.  $d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = (u' \pm v') dx = u' dx \pm v' dx = du \pm dv$ .

Совершенно аналогично доказываются и остальные свойства (5.16).

Пусть теперь  $y = y(u)$  и  $u = u(x)$  – любые две дифференцируемые функции. Тогда  $y = y(u(x))$  – сложная функция от  $x$ . И ее дифференциал  $dy$ , как оказывается, можно найти по любой из двух следующих формул:

$$1) dy = y'_x \cdot dx; \quad 2) dy = y'_u \cdot du \quad (5.17)$$

Формулы (5.17) выражают так называемое *свойство инвариантности формы дифференциала функции*. Согласно этому свойству, дифференциал функции имеет форму произведения производной этой функции на дифференциал ее аргумента независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной ( $x$ ) или функцией ( $u$ ) от другого аргумента.

Действительно, если  $x$  – независимая переменная, то дифференциал  $dy$  функции  $y$ , зависящей от  $x$ , находится, в соответствии с (5.6), по первой из формул (5.17). Но так как  $y = y(u(x))$  – сложная функция от  $x$ , то используя формулу (2.5) для производной сложной функции, получим:

$$dy = y'_x \cdot dx = y'_u \cdot u'_x \cdot dx = y'_u \cdot du$$

То есть приходим ко второй формуле (5.17).

### Упражнения

1. Найти дифференциалы следующих функций:

а)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ ; б)  $s = \frac{gt^2}{2}$ ; в)  $R = 1 - \cos u$ , где  $u$  – дифференцируемая функция некоторой независимой переменной.

Ответ:

а)  $dy = (3x^2 - 6x + 3)dx$ ; б)  $ds = gtdt$ ; в)  $dR = \sin u du$

2. При измерении стороны куба вместо истинного значения  $x$  получено значение  $x + \Delta x$ , где  $\Delta x$  – допущенная погрешность, малая по сравнению с  $x$ . Найти абсолютную и относительную погрешности вычисления объема куба  $y = x^3$ . Причем найти их: а) точно; б) приближенно с помощью формулы (5.11) и (5.12). Сравнить приближенные значения с точными.

Решение. Если вместо истинного значения  $x$  стороны куба получено оши-

бочное ее значение  $x + \Delta x$ , то вместо точного значения  $y = x^3$  объема куба будет получено ошибочное его значение  $y_* = (x + \Delta x)^3$ . Абсолютная ошибка (абсолютная погрешность)  $\varepsilon = y_* - y$  при нахождении объема куба составит *точно*:

$$\varepsilon = \varepsilon_y = \Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Найдя ее отношение к истинному объему куба  $y = x^3$ , найдем *точное* значение относительной погрешности вычисления объема куба. Тем самым мы узнаем, какую долю составляет абсолютная погрешность объема куба по отношению к нему самому:

$$\delta = \delta_y = \frac{\varepsilon_y}{y} = 3\frac{\Delta x}{x} + 3\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 = 3\delta_x + 3\delta_x^2 + \delta_x^3$$

А теперь найдем *приближенные значения* этих погрешностей:

$$\varepsilon = \varepsilon_y = \Delta y \approx y'\Delta x = 3x^2\Delta x; \quad \delta = \delta_y = \frac{\varepsilon_y}{y} \approx \frac{3x^2\Delta x}{x^3} = 3\frac{\Delta x}{x} = 3\delta_x.$$

Точные и приближенные выражения для обеих этих погрешностей, как видим, не совпадают – приближенные выражения содержат только первое из тех трех слагаемых, которые содержатся в точных выражениях. Но последние два слагаемых в точных выражениях при малых  $\Delta x$  много меньше первого (главного) слагаемого, так что их без большого ущерба можно и отбросить. А отбросив их, как раз и получим приближенные выражения погрешностей. По величине они будут почти такие же, как точные. Но находятся они гораздо проще, чем точные.

Проиллюстрируем это на числовом примере. Пусть ребро куба составляет  $x=10\text{см}$ , а при измерении этого ребра допущена погрешность  $\Delta x=1\text{мм}=0,1\text{см}$ . Тогда:

$$y = x^3 = 1000\text{см}^3 - \text{точное значение объема куба};$$

$$\varepsilon_y = 30+0,3+0,001=30,301\text{ см}^3 - \text{точно}; \quad \varepsilon_y = 30\text{см}^3 - \text{приближенно};$$

$$\delta_y = 0,03+0,0003+0,000001=0,030301 - \text{точно}; \quad \delta_y = 0,03 - \text{приближенно}.$$

Как видим, действительно точные погрешности вполне можно заменить приближенными.

3. Как известно, площадь круга  $S$  радиуса  $R$  находится по формуле  $S = \pi R^2$ , а объем шара  $V$  радиуса  $R$  – по формуле  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Используя приближенную формулу (5.11), найти:

- а) площадь тонкого кругового кольца с внутренним радиусом  $R$  и шириной  $\Delta R$ ;
- б) объем тонкой сферической оболочки с внутренним радиусом  $R$  и толщиной  $\Delta R$ . Сравнить эти приближенные выражения с точными.

Ответ:

$$\text{а) } \begin{cases} S_{\text{кольца}} = \Delta S \approx S'_R \cdot \Delta R = 2\pi R \cdot \Delta R - \text{приближенно;} \\ S_{\text{кольца}} = \pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2 = 2\pi R \cdot \Delta R \left(1 + \frac{\Delta R}{2R}\right) - \text{точно.} \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} V_{\text{оболочки}} = \Delta V \approx V'_R \cdot \Delta R = 4\pi R^2 \cdot \Delta R - \text{приближенно;} \\ V_{\text{оболочки}} = \frac{4}{3}\pi(R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \cdot \Delta R \left(1 + \frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2\right) - \text{точно.} \end{cases}$$

4. Используя формулу (5.9) для функции  $f(x) = e^x$ , вычислить приближенно  $e^{-0,2}$ .

Ответ:  $e^{-0,2} \approx 0,8$ .

5. Период  $T$  колебаний маятника длиной  $l$  равен  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Как нужно изменить длину метрового маятника, чтобы его период колебаний уменьшился на 0,1 сек?

Ответ: маятник нужно сделать короче на  $\Delta l \approx 10$  см.

# Глава 5

## Интегральное исчисление

Интегральное исчисление, наряду с дифференциальным исчислением, принадлежит к числу важнейших составляющих математического анализа. Это исчисление базируется на понятиях неопределенного и определенного интегралов, введенных в математику Ньютоном и Лейбницем в конце 17-го века параллельно с введением ими же понятий производных и дифференциалов функций.

### §1. Первообразная для функции и неопределенный интеграл от нее

В дифференциальном исчислении ставилась задача: для данной функции найти ее производную. В интегральном исчислении ставится обратная задача: по производной функции найти саму функцию.

Пусть  $y = f(x)$  – некоторая заданная функция.

**Определение.** Всякая функция  $y = F(x)$ , производная  $y' = F'(x)$  которой совпадает с функцией  $y = f(x)$ , называется первообразной для функции  $y = f(x)$ . То есть если  $F'(x) = f(x)$ , то функция  $F(x)$  будет первообразной для функции  $f(x)$  (а  $f(x)$  будет производной своей первообразной  $F(x)$ ).

В частности, функция  $y = f(x)$  будет первообразной для своей производной  $y' = f'(x)$ .

*Пример 1.* Функция  $F(x) = x^2$  является первообразной для функции  $f(x) = 2x$ , так как  $(x^2)' = 2x$ .

Отметим, что функция  $F(x) = x^2$  – не единственная первообразная для функции  $f(x) = 2x$ . В самом деле, любая функция вида  $F(x) = x^2 + C$ , где  $C$  – произвольная (неопределенная) константа, тоже будет первообразной для функции  $f(x) = 2x$ . Действительно,  $(x^2 + C)' = 2x$ .

И вообще, если  $F(x)$  – первообразная для заданной функции  $f(x)$ , то и все функции вида  $F(x) + C$ , где  $C$  – неопределенная константа, тоже будут первообразными для функции  $f(x)$ . Действительно, если  $F'(x) = f(x)$ , то и  $(F(x) + C)' = f(x)$ .

Таким образом, найдя какую-либо первообразную  $F(x)$  для данной функции  $f(x)$ , мы сразу можем записать для нее и множество других первообразных:

$$F(x) + C \quad (C - \text{неопределенная константа}) \quad (1.1)$$

Более того, мы сейчас докажем, что выражение (1.1) дает множество *всех* первообразных для функции  $f(x)$ .

Действительно, пусть  $F(x)$  – какая-либо конкретная первообразная для функции  $f(x)$ , а  $F_*(x)$  – любая другая первообразная для этой же функции  $f(x)$ . Образует новую функцию  $y = y(x) = F_*(x) - F(x)$  и найдем ее производную:

$$y' = F'_*(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Как оказалось, эта функция  $y = y(x)$  имеет нулевую производную для любого  $x$ . Но, как известно, производная функции характеризует скорость изменения функции. Значит, скорость изменения функции  $y = y(x)$  для любого  $x$  равна нулю. А это значит, что при изменении  $x$  функция  $y = y(x)$  не меняется (сохраняет постоянное значение). То есть  $y = C$ , где  $C$  – некоторая постоянная. Таким образом,  $F_*(x) - F(x) = C$ , откуда  $F_*(x) = F(x) + C$ . То есть действительно любая первообразная  $F_*(x)$  для функции  $f(x)$  находится среди функций (1.1). Иначе говоря, множество функций (1.1) действительно представляет собой *множество всех первообразных для функций  $f(x)$* . Это множество Лейбниц обозначил специальным символом

$$\int f(x)dx \tag{1.2}$$

и назвал *неопределенным интегралом от функции  $f(x)$* . Здесь знак  $\int$  – *знак неопределенного интеграла*;  $f(x)$  – *подынтегральная функция*;  $f(x)dx$  – *подынтегральное выражение*;  $x$  – *переменная интегрирования*.

Так как выражение (1.2) – это лишь другое обозначение выражения (1.1), то можно записать:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.3}$$

Таким образом, *отыскивая (вычисляя) неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$ , мы тем самым ищем все первообразные  $F(x) + C$  для подынтегральной функции  $f(x)$* . То есть ищем все функции, производные от которых равны  $f(x)$ . Эти функции (их бесчисленное множество) представляют собой сумму конкретной функции  $F(x)$  (конкретной первообразной для  $f(x)$ ) и неопределенной константы  $C$ , которой можно придать любое значение. Из-за наличия этой неопределенной константы в равенстве (1.3) и результат вычисления неопределенного интеграла оказывается неопределенным. Отсюда и термин: *неопределенный интеграл*.

Если неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$  найден верно (то есть множество всех функций  $F(x) + C$ , являющихся первообразными для подынтегральной функции  $f(x)$ , найдено верно), то должно выполняться *проверочное для (1.3) равенство*:

$$(F(x) + C)' = f(x) \tag{1.4}$$

Пример 2.

$$\int 2x dx = x^2 + C \text{ - верно, так как } (x^2 + C)' = 2x.$$

$$\int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + C \text{ - верно, так как } (x^2 - 3x + C)' = 2x - 3.$$

$$\int x^2 dx = x^3 + C \text{ - неверно, так как } (x^3 + C)' = 3x^2 \neq x^2.$$

### Основные свойства неопределенных интегралов

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x) \quad (1.5)$$

Доказательство. Используя (1.3) и (1.4), получим:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx \quad (1.6)$$

Доказательство. Вспоминая формулу для нахождения дифференциала функции (формулу (5.7) главы 4), получим:

$$d \int f(x) dx = d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = f(x) dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс неопределенная константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad (1.7)$$

Доказательство:

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

4. Нахождение функции  $F(x)$  по ее дифференциалу  $dF(x)$ :

$$\text{если } dF(x) = f(x) dx, \text{ то } F(x) = \int dF(x) = \int f(x) dx. \quad (1.8)$$

Доказательство. Если  $dF(x) = f(x) dx$ , то  $f(x) = F'(x)$ . А это значит, что функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ . Но этих первообразных для функции  $f(x)$  имеется бесчисленное количество, и все они находятся

посредством вычисления  $\int f(x)dx$ .

Примечание. Функция  $F(x)$  определяется по формуле (1.8) неоднозначно – она определяется с точностью до неопределенной константы  $C$ , которая появится после вычисления  $\int f(x)dx$ . Поэтому для однозначного определения функции  $F(x)$  по ее дифференциалу  $dF(x) = f(x)dx$  нужно задать некоторое дополнительное условие для этой функции. Таким условием, в частности, может быть следующее условие:  $F(x_0) = A$ , где  $x_0$  и  $A$  - заданные числа.

Пример 3. Найти функцию  $F(x)$ , если известно, что  $dF(x) = \cos x dx$  и что  $F(0) = 1$ .

Решение. Используя (1.8), получаем:

$$dF(x) = \cos x dx \Rightarrow F(x) = \int dF(x) = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Мы получили бесчисленное множество функций  $F(x)$ :

$$F(x) = \sin x + C \quad (C - \text{неопределенная константа}).$$

Константу  $C$  найдем из дополнительного условия  $F(0) = 1$ :

$$F(0) = 1 \Rightarrow \sin 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Таким образом, получаем окончательно:  $F(x) = \sin x + 1$ .

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (k - \text{константа, } k \neq 0) \quad (1.9)$$

Доказательство. Рассмотрим правую часть равенства (1.9):

$$k \int f(x) dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC = kF(x) + C_*,$$

где  $C_* = kC$  - неопределенная константа (если  $k \neq 0$ ). Таким образом, равенство (1.9) принимает вид:

$$\int kf(x) dx = kF(x) + C_*.$$

А это равенство верно, что подтверждает его проверка:

$$(kF(x) + C_*)' = kF'(x) + 0 = kf(x)$$

6. Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_n(x) dx \quad (1.10)$$

Доказательство. Вычисляя правую часть равенства (1.10), получаем:

$$\begin{aligned} & \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_n(x) dx = \\ & = [F_1(x) + C_1] \pm [F_2(x) + C_2] \pm \dots \pm [F_n(x) + C_n] = \\ & = [F_1(x) \pm F_2(x) \pm \dots \pm F_n(x)] + [C_1 \pm C_2 \pm \dots \pm C_n] = F(x) + C, \end{aligned}$$

где

$$F(x) = [F_1(x) \pm F_2(x) \pm \dots \pm F_n(x)]; \quad C = [C_1 \pm C_2 \pm \dots \pm C_n]$$

Таким образом, доказываемое равенство (1.10) принимает вид:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] dx = F(x) + C$$

А оно верно, так как

$$(F(x) + C)' = F'(x) = [F_1(x) \pm F_2(x) \pm \dots \pm F_n(x)]' = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x).$$

#### Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \quad (1.11)$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5*. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a} \right  + C$

Используя проверку (1.4) для неопределенного интеграла (1.3), легко убедиться в истинности каждого из результатов таблицы (1.11). Проверим, например, первые 4 равенства из (1.11):

$$1) C' = 0 \text{ – верно; } 2) (x + C)' = 1 \text{ – верно; } 3) \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{1}{n+1} (n+1)x^n = x^n \text{ –}$$

верно;

4а) Если  $x > 0$ , то  $|x| = x$ , и (4) принимает вид:  $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ . А это верно, так как  $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$ .

4б) Если  $x < 0$ , то  $|x| = -x$ , и (4) принимает вид:  $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$ . И это верно, так как  $(\ln(-x) + C)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ .

Совершенно аналогично дифференцированием правой части можно подтвердить и все остальные равенства в таблице (1.11).

Таблица (1.11) содержит лишь наиболее простые неопределенные интегралы. А в математических справочниках содержатся многие сотни (и даже тысячи) наиболее часто встречающихся на практике и уже вычисленных неопределенных интегралов. К таким справочникам относятся, например, следующие:

1. Бронштейн И.Н. и Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М., «Наука», 1981.

2. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М. «Наука», 1977.

3. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.

Таким образом, если требуется вычислить некоторый неопределенный интеграл, то его можно просто поискать в таблице интегралов справочника.

Есть и другой путь нахождения неопределенных интегралов в готовом, вычисленном виде – через использование таких систем компьютерной математики, как Mathcad, MatLab, Mathematica, и др. Эти пакеты математических программ содержат встроенные функции символьных (аналитических) преобразований и вычислений. Среди этих функций есть и функция вычисления неопределенных интегралов. Путем всевозможных преобразований данного неопределенного интеграла компьютер старается свести его к одному или нескольким уже известным (табличным) интегралам. Добившись этого (если у него это получится!), он высвечивает на экране результат.

Отметим следующее важное обстоятельство, связанное с интегрированием функций (с вычислением неопределенных интегралов) и отличающее интегрирование от дифференцирования. Производная  $f'(x)$  любой элементарной функции  $f(x)$  всегда может быть найдена, и она опять же элементарная функция. А вот неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$  не от всякой элементарной

функции  $f(x)$  может быть записан через элементарные функции вида  $F(x)+C$ . Иначе говоря, не всякий неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$  может быть сведен к табличным. А стало быть, не всякий неопределенный интеграл может быть вычислен в явном виде – даже с помощью компьютера. Такие, не сводимые к табличным, неопределенные интегралы называются *неберущимися* (ибо вычислить неопределенный интеграл – это, на математическом жаргоне, «взять» интеграл). Неберущимися являются многие, даже совсем простые на первый взгляд, неопределенные интегралы. Например, такие:

$$\begin{aligned}
 1. & \int e^{-x^2} dx - \text{интеграл Пуассона} \\
 2. & \int \frac{dx}{\ln x} - \text{интегральный логарифм} \\
 3. & \int \frac{\cos x}{x} dx - \text{интегральный косинус.} \\
 4. & \int \frac{\sin x}{x} dx - \text{интегральный синус.}
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Эти и другие неберущиеся интегралы не могут быть найдены точно. Они могут быть найдены лишь приближенно. В соответствии с равенством (1.3) нахождение неопределенного интеграла сводится к нахождению какой-либо первообразной для подынтегральной функции. Вот эту первообразную для подынтегральной функции можно, используя машинные методы, подобрать приближенно с нужной степенью точности. Конкретнее об этом будет сказано в §4.

### Упражнения

1. Показать, что на всей числовой оси  $ox$  функция  $F(x) = \sqrt{1+x^2}$  является первообразной для функции  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

2. Найти все первообразные для функции  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

Ответ:  $F_*(x) = \sqrt{1+x^2} + C$ .

3. Верно ли равенство:  $\int \sin 2x dx = \sin^2 x + C$ ?

Ответ: верно.

4. Найти функцию  $F(x)$ , если  $F'(x) = 2x^3$  и  $F(1) = 0$ .

Ответ:  $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}$ .

## §2. Основные методы интегрирования

Основных методов интегрирования, то есть основных методов вычисления неопределенных интегралов, *четыре*:

- 1) Непосредственное интегрирование.
- 2) Интегрирование с помощью подстановки (с помощью замены переменной интегрирования).
- 3) Интегрирование по частям.
- 4) Приближенное интегрирование.

### 2.1. Непосредственное интегрирование

Этот метод основан на тождественных преобразованиях подынтегральной функции с последующим применением свойств неопределенных интегралов и таблицы основных неопределенных интегралов.

Пример 1.

Вычислить  $\int (2x^2 - 3x + 5)dx$ .

Решение. Оно очевидно:

$$\begin{aligned}\int (2x^2 - 3x + 5)dx &= \int 2x^2 dx - \int 3x dx + \int 5 dx = \\ &= 2\int x^2 dx - 3\int x dx + 5\int dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 3\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 5(x + C_3) = \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + (2C_1 - 3C_2 + 5C_3) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.\end{aligned}$$

Итак,

$$\int (2x^2 - 3x + 5)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Здесь  $C$  - неопределенная константа, представляющая собой комбинацию  $2C_1 - 3C_2 + 5C_3$  неопределенных констант ( $C_1$ ;  $C_2$ ;  $C_3$ ).

Проверка:

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C\right)' = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 = 2x^2 - 3x + 5 - \text{верно.}$$

Этот пример показывает, что при разбиении неопределенного интеграла на сумму или разность нескольких неопределенных интегралов появляется и несколько неопределенных констант. Но они затем объединяются в одну неопределенную константу. Поэтому при записи суммы или разности нескольких интегралов их неопределенные константы можно не писать, а записать лишь одну общую неопределенную константу  $C$  в самом конце.

Пример 2. Вычислить  $\int tg^2 x dx$ .

Решение:

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C$$

Проверка:

$$(tgx - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 0 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x - \text{ верно.}$$

## 2.2. Интегрирование с помощью подстановки (с помощью замены переменной интегрирования)

Суть этого метода в следующем. Пусть требуется вычислить некоторый неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$ . Нередко его можно упростить, сведя к табличному, путем замены переменной интегрирования  $x$  на какую-то новую переменную (на переменную  $t$ ), используя подходящую подстановку  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$ - некоторая дифференцируемая функция. Тогда получим следующую схему вычисления неопределенного интеграла с помощью подстановки:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \left| \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку } x = \varphi(t); \\ \text{тогда } dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{g(t)} dt = \int g(t)dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{вычисляем этот} \\ \text{упростившийся интеграл} \end{array} \right| = G(t) + C = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{делаем обратную к } x = \varphi(t) \\ \text{подстановку } t = t(x) \end{array} \right| = \underbrace{G(t(x))}_{F(x)} + C = F(x) + C \end{aligned}$$

Естественно, что применяемая подстановка будет оправданной лишь в том случае, если полученный в результате ее применения интеграл  $\int g(t)dt$  будет проще, чем исходный интеграл  $\int f(x)dx$ .

Примечание. В практических случаях чаще удобнее делать не подстановку вида  $x = \varphi(t)$ , а подстановку вида  $t = \varphi(x)$ .

Пример 3. Вычислить  $\int \frac{x^2 dx}{x+1}$ .

Решение:

$$\int \frac{x^2 dx}{x+1} = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку: } x+1=t. \text{ Тогда } x=t-1; \\ x^2=(t-1)^2=t^2-2t+1; \quad dx=d(t-1)=(t-1)'dt=dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^2-2t+1)dt}{t} =$$
$$= \int \left( t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \int t dt - 2 \int dt + \int \frac{dt}{t} = \left| \text{эти интегралы табличные} \right| =$$
$$= \frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t| + C = \left| \begin{array}{l} \text{делаем обратную} \\ \text{подстановку } t=x+1 \end{array} \right| = \frac{(x+1)^2}{2} - 2(x+1) + \ln|x+1| + C.$$

Пример 4. Вычислить  $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ .

Решение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку: } \sqrt{a^2-x^2}=t. \text{ Тогда } a^2-x^2=t^2; \\ d(a^2-x^2)=d(t^2); \quad (a^2-x^2)'dx=(t^2)'dt; \quad -2xdx=2tdt; \quad xdx=-tdt \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{-tdt}{t} = -\int dt = -t + C = \left| \text{учтем, что } t=\sqrt{a^2-x^2} \right| = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Пример 5. Вычислить  $\int \cos 4x dx$ .

Решение:

$$\int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку: } 4x=t. \text{ Тогда } x=\frac{t}{4}; \\ dx=d\left(\frac{t}{4}\right); \quad dx=\left(\frac{t}{4}\right)' dt; \quad dx=\frac{1}{4} dt \end{array} \right| = =$$
$$\int \cos t \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} (\sin t + C) = \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4} C = =$$
$$\left| \begin{array}{l} \text{учтем, что } t=4x, \text{ и еще учтем, что } \frac{1}{4} C \\ \text{- это неопределенная константа } C \end{array} \right| = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

Пример 6. Вычислить  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .

Решение:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку: } \ln x=t. \\ \text{тогда } d(\ln x)=dt; \quad (\ln x)'dx=dt; \quad \frac{1}{x} dx=dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C =$$
$$= \left| \text{учтем, что } t=\ln x \right| = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$$

Пример 7. Вычислить  $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$ .

Решение:

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 1} = \left. \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку: } x^4 = t. \text{ Тогда } d(x^4) = dt; \\ (x^4)' dx = dt; \quad 4x^3 dx = dt; \quad x^3 dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{4}}{t^2 + 1} = \int \frac{dt}{4(t^2 + 1)} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} (\arctgt + C) = \frac{1}{4} \arctgt + \frac{1}{4} C = \frac{1}{4} \arctgx^4 + C.$$

### 2.3. Интегрирование по частям

Этот метод основан на использовании формулы

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (2.2)$$

которая называется *формулой интегрирования по частям*. В этой формуле  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  - любые две дифференцируемые функции, для которых существуют  $\int u dv$ , и  $\int v du$ .

Докажем эту формулу. Опираясь на формулу для дифференциала произведения двух функций

$$d(uv) = u dv + v du$$

(формула (5.11) главы 2), и интегрируя обе части этого равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

Применяя теперь свойство (1.7) неопределенных интегралов к интегралу слева, получим:

$$uv + C = \int u dv + \int v du, \text{ откуда } \int u dv = uv - \int v du + C.$$

В правой части  $\int v du$  даст, после своего вычисления, некоторую функцию плюс неопределенную константу. Вместе с уже имеющейся там неопределенной константой  $C$  этих констант в правой части окажется две. Поэтому одну из них (а именно, константу  $C$ ) можно отбросить, так как эти две константы все равно объединятся в одну. В итоге как раз и получим формулу (2.2)

Примечание. При вычислении  $\int u dv$  по формуле интегрирования по частям (2.2) нам придется вычислить два неопределенных интеграла (выполнить работу, состоящую из двух частей). Сначала по имеющемуся дифференциалу  $dv$  функции  $v$  нужно будет найти саму функцию  $v$ . Для этого используем формулу (1.8):

$$\text{если } dv = f(x)dx, \text{ то } v = \int dv = \int f(x)dx = F(x) + C \quad (2.3)$$

Таким образом, получаем:  $v = F(x) + C$ . То есть получаем не одну, а множество функций  $v$ . Но нам нужна лишь одна из них (любая). Проще всего получить ее, отбросив в (2.3) константу  $C$ :

$$v = \int dv = \int f(x)dx = F(x) + C = \left| \text{отбрасываем } C \right| = F(x) \quad (2.4)$$

По этой схеме находится функция  $v$ . Затем, в соответствии с формулой (2.2), нужно выполнить вторую часть работы - вычислить интеграл  $\int v du$ .

Формулу (2.2) для вычисления  $\int u dv$  по частям есть смысл применять, если можно вычислить оба интеграла: и  $\int dv$ , и  $\int v du$ .

Пример 8. Вычислить  $\int x^2 \ln x dx$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} \text{Применим формулу интегрирования по частям.} \\ \text{Пусть } u = \ln x, \text{ а } dv = x^2 dx. \text{ Тогда} \\ du = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx; \quad v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C = \left| \text{отбросим } C \right| = \frac{x^3}{3} \\ = uv - \int v du = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C. \end{array} \right| = \end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить  $\int x \cos 3x dx$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \int x \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} \text{Сначала сделаем подстановку: } 3x = t. \\ \text{Тогда } x = \frac{t}{3}; \quad dx = d\left(\frac{t}{3}\right) = \left(\frac{t}{3}\right)' dt = \frac{1}{3} dt \\ = \int \frac{t}{3} \cdot \cos t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{9} \int t \cos t dt = \end{array} \right| = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{А теперь применим интегрирование по частям.} \\ \text{Пусть } u = t, \text{ а } dv = \cos t dt. \text{ Тогда } du = dt; \\ v = \int dv = \int \cos t dt = \sin t + C = \left| \text{отбросим } C \right| = \sin t \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{9} (uv - \int v du) = \frac{1}{9} (t \cdot \sin t - \int \sin t dt) = \frac{1}{9} (t \sin t + \cos t) + C = \\ &= \left| \text{учтем, что } t = 3x \right| = \frac{x}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

В примере 9 применены и подстановка, и интегрирование по частям.

В заключение этого параграфа укажем следующее. Проблема вычисления неопределенных интегралов – гораздо более сложная, чем проблема вычисления производных. Среди неопределенных интегралов и много неберущихся. Однако доказана теорема (см. ниже §4): если функция  $f(x)$  непрерывна на некотором промежутке оси  $ox$  (например, на отрезке  $[a; b]$  оси  $ox$ ), то на этом промежутке существует и  $\int f(x)dx$ , то есть существует множество первообразных  $F(x)+C$  для подынтегральной функции  $f(x)$ . Но только не всегда эти первообразные можно выразить через элементарные функции. В этих случаях (случаях неберущихся интегралов) применяют приближенное интегрирование. Один из путей такого приближенного интегрирования будет указан в §4.

### Упражнения

1. Подтвердить правильность вычисления неопределенных интегралов:

$$\text{а) } \int 3x^2 dx = x^3 + C; \quad \text{б) } \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C; \quad \text{в) } \\ \int \arctg x dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

2. Путем непосредственного интегрирования вычислить следующие неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \left( 8x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad \text{б) } \int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx; \quad \text{в) } \int e^x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx; \\ \text{г) } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx; \quad \text{д) } \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}; \quad \text{е) } \int \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

Ответы:

$$\text{а) } 2x^4 + 4\sqrt{x} + C; \quad \text{б) } 2x^5 - \frac{1}{x^3} + C; \quad \text{в) } e^x + \operatorname{tg} x + C; \\ \text{г) } -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C; \quad \text{д) } \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C; \quad \text{е) } \frac{x^3}{3} - x + \arctg x + C.$$

3. С помощью подходящей подстановки вычислить неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \cos 8x dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}; \quad \text{в) } \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{x(1+\ln x)}; \quad \text{д) } \int \frac{dx}{(3-2x)^4}; \\ \text{е) } \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; \quad \text{ж) } \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}; \quad \text{з) } \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}; \quad \text{и) } \int \cos^2 x dx; \quad \text{к) } \int \cos^3 x dx.$$

Ответы:

а)  $\frac{1}{8} \sin 8x + C$ ; б)  $-\sqrt{3-2x} + C$ ; в)  $-\frac{1}{\sin x} + C$ ; г)  $\ln|1 + \ln x| + C$ ;

д)  $\frac{1}{6(3-2x)^3} + C$ ; е)  $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C$ .

ж)  $\frac{1}{2-x} + C$ ; з)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$ ; и)  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ ; к)  $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ .

4. Вычислить интегрированием по частям неопределенные интегралы:

а)  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ ; б)  $\int \arcsin x dx$ ; в)  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ ; г)  $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$ .

Ответы:

а)  $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$ ; б)  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ ;

в)  $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$ ; г)  $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 4x + 8) + C$ .

### §3. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Определенные интегралы, как и неопределенные интегралы, введены в математику Ньютоном и Лейбницем. К понятию неопределенного интеграла их привела проблема нахождения первообразных для заданной функции, то есть задача, обратная задаче нахождения производных функций. А к понятию определенного интеграла их привела совсем другая проблема - проблема точного решения ряда фундаментальных для практики числовых задач, к рассмотрению которых мы сейчас и переходим.

#### 3.1. Задача о вычислении площади произвольной криволинейной трапеции

Рассмотрим рис. 3.1(а), где  $y = f(x)$  – некоторая непрерывная на  $[a; b]$  функция.

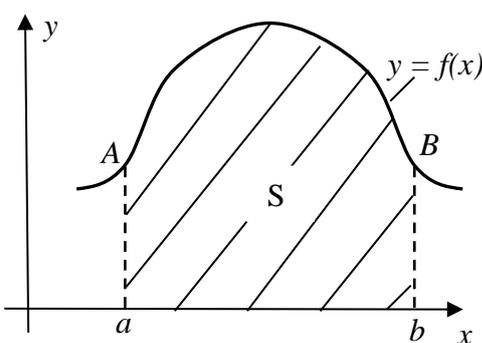


Рис. 3.1(а)

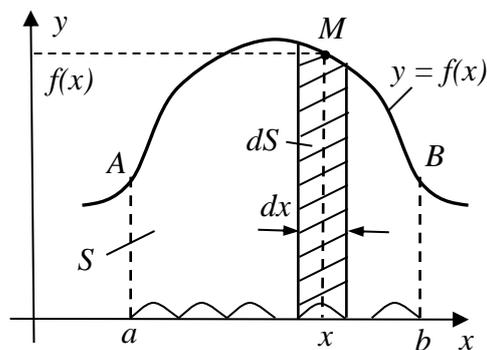


Рис. 3.1(б)

Заштрихованная на этом рисунке фигура называется *криволинейной трапецией*. А  $S$  - площадь этой трапеции. Поставим, вслед за Ньютоном и Лейбницем, задачу: вывести формулу для площади  $S$  этой трапеции при заданных  $a$ ,  $b$  и  $f(x)$ .

Решение. Разобьем мысленно отрезок  $[a; b]$  оси  $ox$  (основание трапеции) на бесконечно малые участки, как это показано на рис. 3.1(б). Для простоты будем считать их одинаковыми по длине. Эту бесконечно малую длину каждого участка обозначим символом  $dx$ . Если через концы этих участков провести вертикальные прямые, то вся криволинейная трапеция разобьется на бесконечно большое число бесконечно узких вертикальных полосок шириной  $dx$ . Рассмотрим одну из таких полосок (любую), и найдем ее площадь  $dS$  (см. рис. 3.1(б)).

Возьмем в основании полоски некоторую произвольную точку  $x$ . Так как полоска бесконечно узкая (то есть она представляет собой вертикальную нить), то  $x$  – это точка, являющаяся основанием этой нити. Согласно рис. 3.1(б), площадь  $dS$  рассматриваемой полоски (нити) можно найти, умножив ее высоту  $f(x)$  на ширину  $dx$ . То есть

$$dS = f(x)dx \quad (3.1)$$

Впрочем, такой была бы площадь  $dS$  полоски, если бы полоска была прямоугольником с основанием  $dx$  и высотой  $f(x)$ . Но наша полоска имеет сверху криволинейную границу, а  $f(x)$ - высота, на которой находится лишь одна из точек (точка  $M$ ) этой границы. Все остальные точки указанной верхней границы полоски находятся, вообще говоря, на другой, хотя и бесконечно близкой к  $f(x)$ , высоте. Так что формула (3.1) для площади каждой из полосок, на которые мы мысленно разбили криволинейную трапецию, не точная, а приближенная. Но очевидно, чем уже полоска, тем точнее формула для ее площади  $dS$ . А так как наша полоска (как и все остальные) не просто узкая, а *бесконечно узкая*, то мы вправе считать формулу (3.1) *точной*.

Складывая теперь площади  $dS$  всех вертикальных полосок, найдем, *причем точно*, и всю площадь  $S$  криволинейной трапеции:

$$S = \sum dS = \sum f(x)dx \quad (3.2)$$

Эта сумма необычная: слагаемые в ней бесконечно малые, а число слагаемых бесконечно велико ( $S$  - сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых). Этой сумме Лейбниц дал специальное обозначение

$$\sum f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad (3.3)$$

и назвал ее *определенным интегралом от функции  $f(x)$* . Здесь  $f(x)$  – подынтегральная функция;  $f(x)dx$  - подынтегральное выражение;  $x$  – переменная интегрирования;  $a$  и  $b$  - пределы интегрирования (нижний и верхний).

Итак, согласно (3.2) и (3.3),

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (3.4)$$

- площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 3.1(а).

### 3.2. Задача о вычислении пути при переменной скорости движения

Пусть некоторая материальная точка движется по некоторой траектории с известной в каждый момент времени  $t$  переменной скоростью  $v = v(t)$ . Требуется получить формулу для пути (перемещения)  $s$ , пройденного точкой по траектории своего движения с некоторого данного момента времени  $t_1$  до некоторого данного момента времени  $t_2$ .

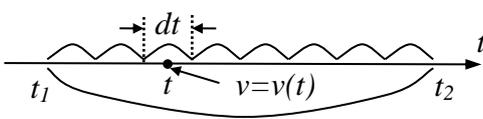


Рис. 3.2

Решение. Если бы скорость  $v$  движения точки была постоянной, то поставленная задача никакого труда бы не представляла: путь равен скорости, умноженной на время. То есть  $s = v(t_2 - t_1)$ . Но у нас скорость точки  $v = v(t)$  переменная (в разные моменты времени  $t$  она разная).

Для такого случая разобьем мысленно временной промежуток  $[t_1; t_2]$  на бесконечно малые промежутки времени  $dt$  и найдем путь  $ds$ , проходимый точкой за каждое время  $dt$ .

Рассмотрим один из промежутков  $dt$  (любой) и выберем на этом промежутке некоторую точку (некоторый момент времени)  $t$ . В этот момент времени скорость движения точки равна  $v = v(t)$  (рис.3.2). Практически такой же, в силу малости  $dt$ , она будет в других точках (в другие моменты времени) этого же промежутка времени. То есть можем считать, что в течение времени  $dt$  точка движется практически с постоянной скоростью  $v = v(t)$ . А тогда путь  $ds$ , пройденный точкой за время  $dt$ , найдется по формуле:

$$ds = v(t)dt \quad (3.5)$$

Впрочем, таким был бы путь  $ds$ , если бы в течение времени  $dt$  точка двигалась строго с постоянной скоростью  $v = v(t)$ . Но эта скорость хоть и незначительно, но все же меняется в течение времени  $dt$ . Поэтому формула (3.5) не точная, а приближенная. Однако очевидно, что с уменьшением времени  $dt$  она будет становиться все точнее и точнее. А так как наш промежуток времени  $dt$  не просто мал, а *бесконечно мал*, то мы вправе считать формулу (3.5) *точной*.

Складывая теперь пути  $ds$ , пройденные точкой за все промежутки времени  $dt$ , найдем, *причем точно*, и общий путь  $s$  (общее перемещение точки по траектории ее движения) за время от момента  $t_1$  до момента  $t_2$ :

$$s = \sum ds = \sum v(t)dt \quad (3.6)$$

Формула (3.6) по своей структуре совершенно аналогична формуле (3.2). Она, как и формула (3.2), представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. То есть представляет собой определенный интеграл вида (3.3):

$$\sum v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \quad (3.7)$$

Итак, получаем окончательно: если  $v = v(t)$  - переменная скорость движения точки, то перемещение  $s$ , пройденное точкой по траектории ее движения, найдется по формуле:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \quad (3.8)$$

### 3.3. Задача о нахождении работы переменной силы

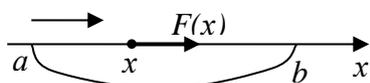


Рис. 3.3

Пусть по оси  $ox$  из точки  $a$  в точку  $b$  под действием заданной переменной силы  $F = F(x)$  движется материальная точка (точка приложения силы  $F(x)$ ) - см. рис. 3.3. Требуется вывести формулу для работы  $A$ , которую совершит сила  $F(x)$  при перемещении точки  $x$  из положения  $a$  в положение  $b$ .

ложение  $b$ .

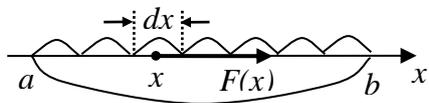


Рис. 3.4

Решение. Если бы сила  $F = F(x)$ , приложенная к движущейся точке  $x$ , была постоянной, то мы нашли бы работу  $A$  по известной школьной формуле  $A = F \cdot s = F \cdot (b - a)$ . Но у нас сила переменная - она меняется с изменением координаты  $x$  движущейся точки. В связи с этим разобьем мысленно промежуток  $[a; b]$  на бесконечно малые участки длиной  $dx$  и найдем работу  $dA$  силы  $F = F(x)$  на каждом участке (рис. 3.4).

Если  $x$  - некоторая точка на участке  $dx$ , то очевидно, что

$$dA = F(x)dx \quad (3.9)$$

Мы записали эту формулу, считая, что в любой точке, находящейся на данном участке  $dx$ , сила, действующая на движущуюся точку, такая же, как и в выбранной точке  $x$ , то есть постоянная. Но это, вообще говоря, не так: во время прохода точкой участка  $dx$  действующая на нее сила, хоть и незначительно, но меняется. Впрочем, изменение этой силы на  $dx$  тем меньше, чем меньше  $dx$ . А значит, с уменьшением  $dx$  формула (3.9) будет становиться все точнее и точнее. Но так как наш участок  $dx$  не просто мал, а бесконечно мал, то формулу (3.9) мы вправе считать *точной*.

А теперь, складывая работы  $dA$  силы  $F = F(x)$  на всех участках  $dx$ , на которые мы разбили отрезок  $[a; b]$ , мы получим, *причем точно*, всю искомую работу  $A$ :

$$A = \sum dA = \sum F(x)dx \quad (3.10)$$

А так как, по аналогии с равенствами (3.2) и (3.7),

$$\sum F(x)dx = \int_a^b F(x)dx, \quad (3.11)$$

то получим окончательно:

$$A = \int_a^b F(x)dx \quad (3.12)$$

Это и есть формула для работы  $A$ , которую совершит переменная сила  $F = F(x)$ , если её точка приложения  $x$  переместится вдоль оси  $ox$  из положения  $a$  в положение  $b$  (рис. 3.3).

### 3.4. Задача о нахождении объема производства при заданной производительности труда

Пусть функция  $z = f(t)$  описывает изменение производительности труда рабочего, бригады или целого предприятия с течением времени  $t$ . Требуется найти формулу для объема  $R$  произведенной продукции с момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_2$ , где  $t_1$  и  $t_2$  - заданные числа.

Решение. Если бы производительность труда (количество продукции, производимой в единицу времени)  $z = f(t)$  была постоянной, то искомый объем  $R$  произведенной продукции мы нашли бы, умножив производительность труда на время работы, то есть нашли бы по формуле  $R = z \cdot (t_2 - t_1)$ . Но, по условию, производительность труда  $z = f(t)$  меняется со временем. Чтобы в этом случае найти искомый объем  $R$  произведенной продукции, нужно, очевидно, разбить промежуток времени  $[t_1; t_2]$  на бесконечно малые промежутки времени  $dt$ , выбрать внутри каждого  $dt$  произвольную точку  $t$ , найти объем  $dR = z(t)dt$  произведенной за время  $dt$  продукции, и сложить все  $dR$  - то есть по существу проделать ту же процедуру, что была проделана в предыдущих трех задачах. В итоге получим формулу

$$R = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt, \quad (3.13)$$

совершенно аналогичную формулам (3.4), (3.8) и (3.12). Эта формула выражает объем продукции, произведенной за время от  $t_1$  до  $t_2$ , через производительность труда  $z = f(t)$ .

Итак, мы получим итоговые формулы (3.4), (3.8), (3.12) и (3.13) для четырех рассмотренных выше и имеющих важное практическое значение задач.

Можно было бы и продолжить рассмотрение аналогичных задач, но мы ограничимся теми, что уже рассмотрели. Вместо этого осмыслим ту общую идею, которая была заложена при решении всех этих задач. А эта идея следующая: нужную нам величину мы мысленно разбиваем на бесконечно малые части, а затем, складывая все эти части (их бесконечно много!), получаем искомую величину. Эта величина оказывалась выраженной через новое математическое понятие - определенный интеграл. Теперь, очевидно, нужно понять, какими свойствами обладают определенные интегралы и как их вычислять. Этим мы займемся в следующем параграфе.

### Упражнения

1. Пусть отрезок  $[a; b]$  оси  $ox$  – материальная нить, у которой  $\rho = \rho(x)$ - заданная линейная плотность вещества, распределенного по этой нити (линейная плотность - это масса единицы длины). Получить формулу для массы  $m$  всей нити.

Ответ: 
$$m = \int_a^b \rho(x) dx \quad (3.14)$$

2. Пусть  $V$  – объем тела вращения, образованного вращением криволинейной трапеции (рис. 3.1(а)) вокруг оси  $ox$ . Получить формулу для объема  $V$  этого тела.

Ответ: 
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (3.15)$$

3. Пусть  $L$  – длина участка  $AB$  кривой  $y = f(x)$  с абсциссами концов  $a$  и  $b$  (рис. 3.1(а)). Получить формулу для длины этого участка.

Ответ: 
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (3.16)$$

## §4. Свойства и вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница

Начнем с того, что введем понятие определенного интеграла без привязки его к каким-либо геометрическим, физическим и экономическим задачам. То есть введем его абстрактно, математически.

Пусть  $y = f(x)$  - некоторая непрерывная функция, заданная на некотором числовом промежутке  $[a; b]$  оси  $ox$ . Разобьем его на бесконечно большое число бесконечно малых участков длиной  $dx$  и выберем на каждом  $dx$  некоторую точку  $x$ . Так как каждый из этих участков бесконечно мал (то есть фактически представляет собой точку), то  $x$  и есть эта точка (рис. 3.5). Тогда  $f(x)dx = dM$  -

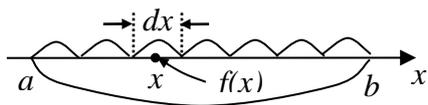


Рис. 3.5

бесконечно малое число (смысл его зависит от смысла функции  $f(x)$  и может быть самым разным - см. предыдущий параграф). А сумма всех этих бесконечно малых чисел  $dM$  называется *определенным интегралом*

$$\int_a^b f(x)dx \quad (4.1)$$

от функции  $f(x)$  с пределами интегрирования  $a$  и  $b$  (нижним и верхним).

Ниже мы покажем, что при непрерывной подынтегральной функции  $f(x)$  и конечных пределах интегрирования  $a$  и  $b$  определенный интеграл (4.1) заведомо существует (представляет собой некоторое конечное число  $M$ ). То есть при указанных условиях

$$\int_a^b f(x)dx = \sum f(x)dx = \sum dM = M - \text{число.} \quad (4.2)$$

Равенство (4.2) будем считать *математическим определением определенного интеграла*. Определенным он называется потому, что в отличие от неопределенного интеграла  $\int f(x)dx$ , представляющего собой бесчисленное множество функций, он представляет собой вполне определенное число. Таким образом, несмотря на внешнее сходство в обозначениях определенного и неопределенного интегралов, это совершенно разные вещи. Впрочем, как это ни удивительно, между ними имеется тесная связь. Но об этом – в конце параграфа.

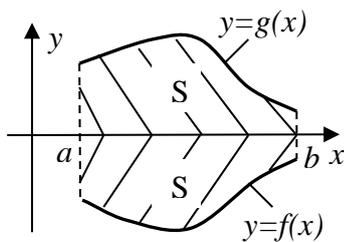


Рис. 3.6

А сейчас подтвердим, что в случае непрерывной подынтегральной функции и конечных пределов интегрирования определенный интеграл (4.1) действительно представляет собой некоторое конечное число. Для этого рассмотрим все возможные случаи относительно функции  $f(x)$ .

а) Пусть непрерывная функция  $f(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a; b]$ . Тогда, согласно (3.4), определенный интеграл (4.1) можно представлять себе как площадь  $S$

криволинейной трапеции (рис. 3.1(а)). И эта площадь  $S$  заведомо представляет собой число:

$$\int_a^b f(x)dx = S - \text{число} \quad (4.3)$$

б) Пусть непрерывная функция  $f(x) \leq 0$  для всех  $x \in [a; b]$ . Тогда функция  $-f(x) = g(x) \geq 0$  для всех  $x \in [a; b]$  (см. рис. 3.6). В этом случае

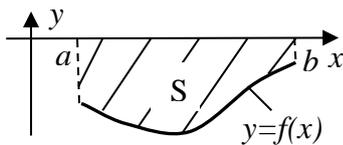


Рис. 3.7

$$\int_a^b f(x)dx = \sum f(x)dx = \sum -g(x)dx = \quad (4.4)$$

$$= -\sum g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx = -S$$

То есть и в этом случае  $\int_a^b f(x)dx$  - число (только отрицательное). А именно, этот интеграл, как и в случае (а), представляет собой площадь  $S$  криволинейной трапеции, заключенной между осью  $ox$  и графиком функции  $y = f(x)$ , только со знаком минус (рис. 3.7):

$$\int_a^b f(x)dx = -S \quad (4.5)$$

в) Наконец, если на части  $[a; c]$  отрезка  $[a; b]$  функция  $f(x) \geq 0$ , а на другой части  $[c; b]$  этого отрезка функция  $f(x) \leq 0$  (рис. 3.8), то

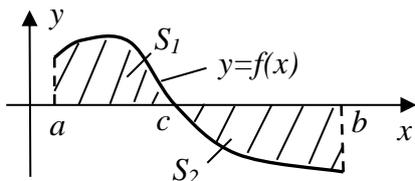


Рис. 3.8

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{(a \leq x \leq b)} f(x)dx = \sum_{(a \leq x \leq c)} f(x)dx + \sum_{(c \leq x \leq b)} f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

То есть и в этом случае  $\int_a^b f(x)dx$  представляет собой число.

Итак, подтверждение получено: для любой непрерывной на конечном промежутке  $[a; b]$  функции  $f(x)$  определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  существует (представляет собой некоторое число).

Итак, подтверждение получено: для любой непрерывной на конечном промежутке  $[a; b]$  функции  $f(x)$  определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  существует (представляет собой некоторое число).

Заметим, что определенные интегралы рассматривают и для разрывных подынтегральных функций, а также тогда, когда пределы интегрирования бесконечные. В таких случаях определенные интегралы могут и не существовать. Но такие интегралы (их называют *несобственными*) рассматривать, в силу краткости нашего курса, не будем.

### Основные свойства определенных интегралов

Наиболее просто и естественно установить эти свойства, опираясь на какой-либо наглядный смысл определенного интеграла. Например, на то, что любой определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  связан, согласно (4.3), (4.5) и (4.6), с

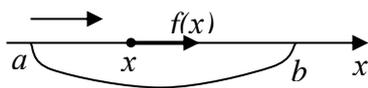


Рис. 3.9

площадями криволинейных трапеций. Но использовать этот геометрический смысл определенного интеграла для вывода его свойств в самом общем случае, то есть в случае знакопеременной функции  $y = f(x)$ , не очень удобно. Удобнее и нагляднее установить эти свойства,

если, в соответствии с (3.12), считать определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  работой  $A$  силы  $f(x)$  (силы любого направления, а значит, и любого знака), когда точка приложения  $x$  этой силы перемещается вдоль оси  $ox$  из положения  $a$  в положение  $b$  (рис. 3.9).

$$\int_a^b f(x)dx = A \quad (4.7)$$

Тогда сразу становятся очевидными следующие

Свойства определенных интегралов:

$$1) \int_a^b f(x)dx = A - \text{число} \quad (\text{число } A \text{ может быть любого знака}). \quad (4.8)$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = (\dots) = A \quad (4.9)$$

(переменную интегрирования в определенном интеграле можно обозначить как угодно – результат от этого не изменится).

$$3) \int_a^a f(x)dx = 0 \quad (4.10)$$

(ибо если перемещение точки отсутствует, то работа любой силы  $f(x)$  равна нулю).

$$4) \int_a^b 0 \cdot dx = 0 \quad (4.11)$$

(ибо если сила отсутствует, то и работа отсутствует).

$$5) \int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a \quad (4.12)$$

(ибо работа постоянной единичной силы численно равна перемещению точки под действием этой силы).

$$6) \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad (4.13)$$

$$7) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \left( \overbrace{a \quad c \quad b}^x \right) \quad (4.14)$$

$$8) \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \dots \pm \int_a^b f_n(x)dx \quad (4.15)$$

$$9) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k - \text{любая константа}) \quad (4.16)$$

$$10) \text{ Если } f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (4.17)$$

(физический смысл последних пяти свойств продумать самостоятельно).

11) Пусть  $m = [f(x)]_{\text{наим}}$  и  $M = [f(x)]_{\text{наиб}}$  – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на промежутке  $[a; b]$ . Тогда

$$m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b) \quad (4.18)$$

Действительно, так как  $m \leq f(x) \leq M$  для всех  $x \in [a; b]$ , то применяя свойство (4.17) и затем свойства (4.16) и (4.12), мы и получим двойное неравенство (4.18). Это неравенство часто используется для прикидки (*грубой оценки*) величины  $\int_a^b f(x)dx$ .

Пример 1. Оценить величину  $\int_1^3 \sqrt{8+x^3} dx$ .

Решение. Так как функция  $f(x) = \sqrt{8+x^3}$  монотонно возрастает на отрезке  $[1; 3]$ , то  $m = f(1) = \sqrt{9} = 3$ , а  $M = f(3) = \sqrt{35} \approx 5,9$ . Поэтому по формуле грубой оценки (4.18) получаем:

$$6 < \int_1^3 \sqrt{8+x^3} dx < 11,8$$

Пример 2. Оценить величину  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x + \cos x}$ .

Решение. Минимальное  $m$  и максимальное  $M$  значения функции  $y = f(x) = \frac{1}{x + \cos x}$  на промежутке  $[0; \pi]$  не очевидны, так как с возрастанием  $x$  в выражении  $x + \cos x$  первое слагаемое растет, а второе убывает. Чтобы разобраться в поведении функции  $y$ , найдем ее производную:

$$y' = \left( \frac{1}{x + \cos x} \right)' = \frac{\sin x - 1}{(x + \cos x)^2}.$$

Так как  $\sin x \leq 1$  для всех  $x$ , то  $y' \leq 0$  для всех  $x$ . А значит, функция  $y = \frac{1}{x + \cos x}$  убывает на всей области своего определения, в том числе и на отрезке  $[0; \pi]$ . Таким образом, на отрезке  $[0; \pi]$

$$m = [f(x)]_{\text{наим}} = f(\pi) = \frac{1}{\pi + \cos \pi} = \frac{1}{\pi - 1}; \quad M = [f(x)]_{\text{наиб}} = f(0) = \frac{1}{0 + \cos 0} = 1$$

Следовательно, грубая оценка (4.18) для данного интеграла имеет вид:

$$\frac{\pi}{\pi - 1} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{x + \cos x} < \pi \Leftrightarrow 1,47 < \int_0^{\pi} \frac{dx}{x + \cos x} < 3,14.$$

### Вычисление определенных интегралов (приближенное и точное).

#### Формула Ньютона-Лейбница

Определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , согласно его математическому определению (4.2), представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, образованных по схеме рисунка 3.5. Для непрерывной подынтегральной функции  $f(x)$  и конечных пределов интегрирования  $a$  и  $b$  этот интеграл, как было показано выше, заведомо существует (представляет собой некоторое число). Но найти его напрямую, следуя указанной на рис. 3.5 схеме, очевидно, невозможно, ибо эта схема содержит бесконечное число действий. По этой схеме его можно найти лишь приближенно.

Для этого промежуток интегрирования  $[a; b]$  следует разбить не на бесконечно малые участки  $dx$ , которых будет бесконечно много, а на конечное число (скажем, на 100) частичных промежутков одинаковой (а можно и не одинаковой) конечной длины  $\Delta x$ . Затем на каждом  $\Delta x$  выбрать некоторую точку  $x$

(скажем, середину) и подсчитать сумму

$$\sum f(x) \cdot \Delta x$$

из уже конечного числа (из 100) слагаемых. Эта сумма будет *приближенным значением* определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$ . Если нужно получить более точный результат, то нужно сделать более мелкое разбиение промежутка интегрирования (скажем, разбить его не на 100 частичных промежутков, а на 200, 300, и т.д.). Работы будет больше, зато результат станет точнее. Собственно, таким путем (с некоторыми не принципиальными усовершенствованиями указанной схемы) и вычисляют приближенно определенные интегралы компьютерные программы. Используя свое быстрое действие, компьютер делает такое мелкое разбиение промежутка интегрирования, что полученный ею результат практически не отличается от точного. Компьютерные программы умеют и оценивать точность полученного результата.

Например, стандартная точность вычисления определенных интегралов в компьютерной программе MATHCAD – 15 верных десятичных знаков после запятой, что, естественно, далеко выходит за границы практических потребностей. Эта программа, по желанию пользователей, позволяет получить и до нескольких тысяч верных десятичных знаков после запятой. Тем не менее, *абсолютно точного* результата компьютер дать не в состоянии.

И тут возникает вопрос: а нельзя ли все-таки вычислять определенные интегралы абсолютно точно? Ответ на это вопрос такой: можно, хотя далеко и не всегда. Для точного подсчета определенных интегралов, если оно возможно, применяется знаменитая формула Ньютона-Лейбница, Она сводит вычисление определенных интегралов к вычислению неопределенных.

Суть ее в следующем. Пусть  $f(x)$  – непрерывная на  $[a; b]$  функция, так что  $\int_a^b f(x)dx$  заведомо существует. И пусть вычислен неопределенный интеграл от функции  $f(x)$ :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (4.19)$$

Тогда *точное значение* определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  можно найти по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \quad (4.20)$$

Здесь  $F(x)$  – любая первообразная для функции  $f(x)$ . Формула (4.20) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Для доказательства формулы Ньютона-Лейбница докажем сначала, что функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad (a \leq x \leq b) \quad (4.21)$$

то есть определенный интеграл с переменным верхним пределом, имеет на  $[a; b]$  производную  $\Phi'(x)$ , совпадающую с  $f(x)$ . То есть  $\Phi'(x) = f(x)$ .

Действительно,

$$\Phi'(x) = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi(x+dx) - \Phi(x)}{dx} \quad (4.22)$$

Но

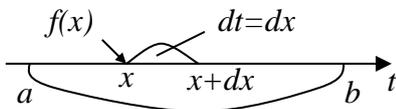


Рис. 3.10

$$\begin{aligned} \Phi(x+dx) - \Phi(x) &= \int_a^{x+dx} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+dx} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+dx} f(t)dt \end{aligned} \quad (4.23)$$

В последнем интеграле интегрирование происходит на бесконечно малом промежутке  $[x; x+dx]$  оси  $t$  длиной  $dx$ . На нем, при его разбиении на бесконечно малые промежутки  $dt$ , уместится лишь один такой промежуток  $dt = dx$  (см. рис. 3.10). Выбирая на нем в качестве произвольно выбираемой точки  $t$  точку  $x$  и следуя схеме (4.2) вычисления определенного интеграла, получим по этой схеме лишь одно слагаемое:

$$\Phi(x+dx) - \Phi(x) = \int_x^{x+dx} f(t)dt = f(x)dx \quad (4.24)$$

А значит, согласно (4.22), получаем:

$$\Phi'(x) = \left( \int_a^x f(t)dt \right)' = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (4.25)$$

Отметим, что заодно мы доказали следующий принципиальный факт, который мы обещали доказать в конце §2: у любой непрерывной на  $[a; b]$  функции  $f(x)$  имеется первообразная  $F(x)$ . Ею, в частности, является функция  $\Phi(x)$ . А значит, для любой непрерывной на  $[a; b]$  функции  $f(x)$  существует для  $x \in [a; b]$  и неопределенный интеграл (4.19). Хотя, как мы уже замечали в §1, он далеко не всегда может быть выражен через элементарные функции (может оказаться неберущимся). Найдя приближенно (численным путем) функцию  $\Phi(x)$ , мы тем самым найдем приближенно и  $\int f(x)dx$ .

А теперь перейдем непосредственно к доказательству формулы Ньютона-Лейбница (4.20). Пусть  $F(x)$  – любая первообразная для функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ . Так как она может отличаться от указанной выше первообразной  $\Phi(x)$  лишь на константу, то

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C \quad (a \leq x \leq b) \quad (4.26)$$

Полагая в этом равенстве  $x = a$ , получаем:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C \quad (4.27)$$

Значит, равенство (4.26) принимает вид:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) \quad (a \leq x \leq b) \quad (4.28)$$

А теперь, полагая в (4.28)  $x = b$ , получим:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a), \text{ откуда } \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad (4.29)$$

Но это, по сути, и есть формула (4.20) Ньютона-Лейбница.

Пример 3. Вычислить  $\int_0^{\pi} \sin x dx$ .

Решение. Вычислим сначала  $\int \sin x dx$  (он табличный):

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (\text{значит, } F(x) = -\cos x)$$

А тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = \cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2.$$

Геометрическая иллюстрация полученного результата изображена ниже:

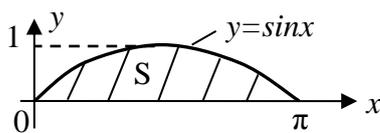


Рис. 3.11

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = S = 2 \text{ (кв. ед.)} \quad (4.30)$$

Формула Ньютона-Лейбница (4.20) принадлежит к числу важнейших формул высшей математики. Она позволяет просто, а главное, точно вычислять определенные интегралы. А значит, позволяет находить точные значения мно-

гих нужных для практики величин (площадей криволинейных фигур; пройденных телами путей при переменных скоростях их движения; работ переменных сил, и многое другое). То есть позволяет решать те задачи, которые элементарная математика решить не в состоянии. Но эта формула может быть использована, если только соответствующий неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$  – из берущихся. В противном случае неизвестна первообразная  $F(x)$  для функции  $f(x)$ , а значит, нечего подставить и в формулу (4.20) Ньютона-Лейбница.

Если неопределенный интеграл  $\int f(x)dx$  неберущийся, то соответствующий ему определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  может быть найден лишь приближенно. Например, с помощью компьютерной программы типа Mathcad и ей аналогичных – так, как об этом говорилось выше, перед выводом формулы Ньютона-Лейбница.

### Упражнения

1. На основании формулы (4.18) (формулы грубой оценки определенных интегралов) оценить величину следующих интегралов:

$$\text{а) } \int_0^1 \sqrt{4+x^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}.$$

Ответ: а)  $2 < \int_0^1 \sqrt{4+x^2} dx < 2,24$ ; б)  $\frac{2}{9} < \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} < \frac{2}{7}$ .

2. Найти площадь  $S$ , заключенную между параболой  $y = x^2 - 4x$  и осью  $ox$ .

Ответ:  $S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 10\frac{2}{3}$

3. Найти работу  $A$ , которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если для ее растяжения на 1 см необходима сила в 20 н.

Указание. При решении задачи использовать закон Гука: величина удлинения пружины пропорциональна растягивающей ее силе.

Ответ:  $A = 2000 \int_0^{0,06} x dx = 3,6 \text{ (дж)}$ .

4. Производительность труда  $z = f(t)$  среднестатистического рабочего на некотором предприятии представляет собой функцию

$$z = -0,15t^2 + 0,9t + 5 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

Найти объем  $q$  продукции, производимой рабочим за смену (8 часов).

Ответ:  $q = \int_0^8 (-0,15t^2 + 0,9t + 5)dt = 43,2$  (ед).

5. Подтвердить правильность следующих формул для вычисления площадей фигур:

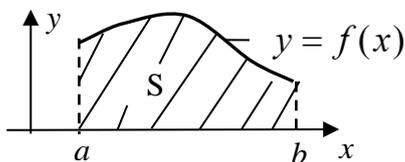


Рис. 3.12

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

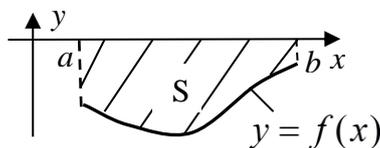


Рис. 3.13

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

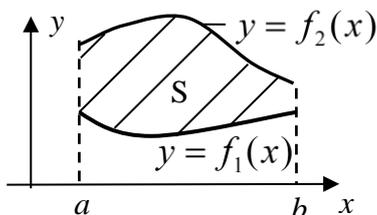


Рис. 3.14

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

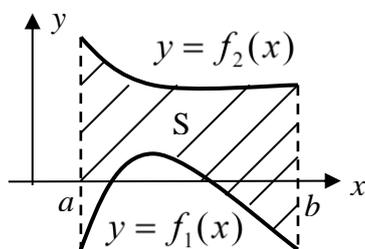


Рис. 3.15

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = 4 - x^2$  и прямой  $y = 2x - 1$ .

Ответ:  $S = 10\frac{2}{3}$ .

7. Найти площадь фигуры, ограниченной кубической параболой  $y = -x^3$  и прямой, проходящей через точки  $M_1(-2; 8)$  и  $M_2(2; -8)$ .

Ответ:  $S = 8$ .

## §5. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям. Использование четности – нечетности подынтегральной функции

Мы знаем, что с помощью подстановки и с помощью формулы интегрирования по частям упрощают и вычисляют неопределенные интегралы. Но эти же методы, с соответствующими изменениями, используют для упрощения и вычисления и определенных интегралов.

### Подстановка в определенных интегралах

Пусть  $y = f(x)$  – непрерывная на промежутке  $[a; b]$  оси  $ox$  функция, а  $x = \varphi(t)$  – непрерывная на промежутке  $[\alpha; \beta]$  функция, имеющая к тому же на  $[\alpha; \beta]$  непрерывную производную (то есть  $x = \varphi(t)$  – непрерывно дифференцируемая на  $[\alpha; \beta]$  функция). Кроме того, будем считать, что когда переменная  $t$  меняется от  $\alpha$  до  $\beta$ , то переменная  $x = \varphi(t)$  меняется от  $a$  до  $b$ . Таким образом,  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\varphi(\beta) = b$ . Тогда при вычислении  $\int_a^b f(x)dx$  можно совершить подстановку по следующей схеме:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку } x = \varphi(t); \\ \text{тогда } dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt; \end{array} \right. \left. \begin{array}{c} x \mid a \quad b \\ t \mid \alpha \quad \beta \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{g(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha) \quad (5.1)$$

Докажем правомочность схемы (5.1). Пусть

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (5.2)$$

Здесь  $F(x)$  – некоторая первообразная для функции  $f(x)$ . То есть  $F'(x) = f(x)$ . Но тогда, по правилу вычисления производной сложной функции,

$$(F(\varphi(t)))'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad (5.3)$$

Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \quad (5.4)$$

Равенство результатов (5.2) и (5.4) и доказывает правомочность схемы (5.1).

Кстати, сравнивая схему (5.1) вычисления определенных интегралов с помощью подстановки с аналогичной схемой (2.1) вычисления неопределенных интегралов, можно увидеть и то, что в этих схемах общее, и то, что различно.

Главных новшества здесь два: 1) при переходе к новой переменной интегрирования  $t$  нужно пересчитывать пределы интегрирования – то есть нужно строить табличку по пересчету этих пределов; 2) нет необходимости возвращаться к старой переменной интегрирования  $x$ .

Примечание. На практике часто бывает удобнее делать подстановку не вида  $x = \varphi(t)$ , а вида  $t = \varphi(x)$ .

Пример 1. Вычислить  $\int_0^3 \sqrt{1+x} dx$ .

Решение:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{Сделаем подстановку: } \sqrt{1+x} = t. \text{ Тогда } 1+x = t^2; \\ x = t^2 - 1; \quad dx = d(t^2 - 1) = (t^2 - 1)' dt = 2t dt; \end{array} \right. \frac{x}{t} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right. \frac{3}{2} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right. =$$

$$= \int_1^2 t \cdot 2t dt = 2 \int_1^2 t^2 dt = \left| \begin{array}{l} \text{Учтем, что } \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C \text{ и применим} \\ \text{формулу Ньютона - Лейбница} \end{array} \right. =$$

$$= 2 \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \cdot t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}.$$

### Вычисление определенных интегралов по частям

Мы знаем, что по частям можно вычислять неопределенные интегралы. Для этого используется формула (2.2). Но по частям можно вычислять и определенные интегралы. Это делается по внешне похожей формуле (5.5):

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (5.5)$$

Здесь  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  – любые две непрерывные на  $[a; b]$  функции, имеющие на этом промежутке непрерывные производные  $u'(x)$  и  $v'(x)$  (то есть  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  - непрерывно дифференцируемые на  $[a; b]$  функции).

Докажем формулу (5.5). Учтем, что

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (5.6)$$

Функция  $u'v + uv'$ , стоящая в этом равенстве справа, согласно указанным выше условиям для функций  $u$  и  $v$ , является непрерывной на промежутке  $[a; b]$ . Значит, существует определенный интеграл от нее:

$$\int_a^b (u'v + uv') dx = \int_a^b v \cdot u' dx + \int_a^b u \cdot v' dx = \int_a^b v du + \int_a^b u dv \quad (5.7)$$

С другой стороны, согласно (5.6), функция  $uv$  является первообразной для функции  $u'v + uv'$ . А значит, по формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = uv \Big|_a^b \quad (5.8)$$

Сравнивая (5.7) и (5.8), приходим к доказываемой формуле (5.5).

Пример 2. Вычислить  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ .

Решение:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} \text{Применим интегрирование по частям. Пусть } u = x, \text{ а } dv = \sin x dx. \\ \text{Тогда } du = dx, \text{ а } v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x + C = \left| \begin{array}{l} \text{отбрасываем } C \\ \text{отбрасываем } C \end{array} \right| = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= uv \Big|_a^b - \int_a^b v du = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \\ &= -(\pi \cos \pi - 0 \cos 0) + \sin x \Big|_0^{\pi} = -(-\pi) + \sin \pi - \sin 0 = \pi \end{aligned}$$

Использование четности-нечетности подынтегральной функции при вычислении определенных интегралов с симметричными пределами интегрирования

а) Если  $f(x)$  – непрерывная и четная на промежутке  $[-a; a]$  функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (5.9)$$

б) Если  $f(x)$  – непрерывная и нечетная на промежутке  $[-a; a]$  функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (5.10)$$

Доказательство. Рассмотрим рисунки 3.16 (а) и 3.16 (б), соответствующие случаям (а) и (б) соответственно.

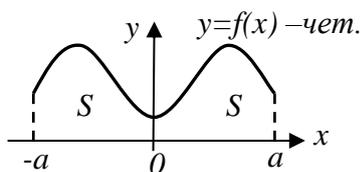


Рис. 3.16(а)

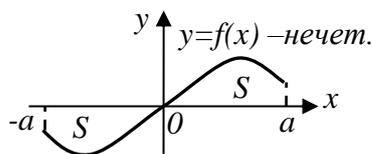


Рис. 3.16(б)

а) Если  $f(x)$  – четная на  $[-a; a]$  функция, то согласно рис. 3.16 (а) и формуле (4.3) получаем:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = S + S = 2S = 2 \int_0^a f(x)dx$$

б) Если  $f(x)$  – нечетная на  $[a; b]$  функция, то согласно рис. 3.16 (б) и формулам (4.3) и (4.5) получаем:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -S + S = 0.$$

Пример 3. Упростить, а затем и вычислить  $\int_{-2}^2 (6x^2 + 5x^3)dx$ .

Решение.

$$\int_{-2}^2 (6x^2 + 5x^3)dx = 6 \int_{-2}^2 x^2 dx + 5 \int_{-2}^2 x^3 dx = \left. \begin{array}{l} x^2 - \text{четная функция;} \\ x^3 - \text{нечетная функция;} \end{array} \right| = 6 \cdot 2 \int_0^2 x^2 dx + 5 \cdot 0 =$$

$$= 12 \int_0^2 x^2 dx = 12 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4x^3 \Big|_0^2 = 4 \cdot 2^3 - 0 = 32.$$

### Упражнения

1. Вычислить с помощью подходящих подстановок:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{xdx}{x+1}; \quad \text{б) } \int_0^4 \sqrt{16-x^2} \cdot xdx; \quad \text{в) } \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

Ответы: а)  $1 - \ln 2$ ; б)  $21\frac{1}{3}$ ; в)  $\frac{1}{3}$ .

2. Вычислить интегрированием по частям:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{\ln x dx}{x^2}; \quad \text{б) } \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad \text{в) } \int_0^\pi x^2 \sin x dx.$$

Ответы: а)  $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ ; б)  $1 - \frac{2}{e}$ ; в)  $\pi^2 - 4$ .

## Глава 6

# Основы математической статистики

Математическая статистика – это наука, изучающая большие совокупности однотипных объектов (предметов, живых существ, чисел и т.д.) *выборочно*. В 19-ом веке она выделилась из теории вероятностей и с тех пор считается самостоятельной наукой.

### §1. Генеральная совокупность и выборка. Числовые характеристики выборки

Пусть имеется большая совокупность однотипных объектов (зёрен в ворохе зерна, деревьев в лесу, жителей в стране, предметов массового производства, и т.д.), подлежащая изучению. При этом предметом изучения являются какие-то качественные или количественные параметры объектов, составляющих данную совокупность (скажем, пригодность объектов к использованию, их вес, сорт, размер, и т.д.).

Исходная совокупность объектов называется *генеральной совокупностью*, а число  $N$  объектов этой совокупности (обычно очень большое и точно не известное) называется *объёмом генеральной совокупности*.

Произвести сплошное обследование (обследование всех объектов) генеральной совокупности, в силу её огромного объёма, не представляется возможным. А если это обследование связано с порчей или даже уничтожением обследуемых объектов (скажем, нас интересует сила, при действии которой объект ломается), то оно и бессмысленно (исследовать все объекты генеральной совокупности – это значит все их переломать). Поэтому изучают только небольшую, случайно отобранную, часть этой совокупности (горсть зёрен из вороха, небольшую часть деревьев леса, случайно отобранных жителей страны, небольшую партию предметов массового производства, и т.д.).

Отобранная совокупность объектов называется *выборочной совокупностью* или, короче, *выборкой*. Количество  $n$  объектов, попавших в выборку, называется *объёмом выборки*. Как правило, объём  $n$  выборки много меньше объёма  $N$  генеральной совокупности ( $n \ll N$ ). Объекты выборки подвергаются сплошному обследованию, а затем, по результатам этого обследования, делаются определенные выводы и обо всей генеральной совокупности.

Естественно, что обследование объектов выборки не даст полной и точной информации о всей генеральной совокупности (ведь обследуется лишь часть объектов этой совокупности). Поэтому любые выводы, касающиеся генеральной совокупности, к которым мы придем на основании исследования выборки, чреваты неточностями и даже ошибками. Но эти ошибки, естественно, будут тем менее вероятны и тем меньше по величине, чем больше будет  $n$  – объём выборки. Как именно от объема выборки зависит точность и надежность получаемых выводов о генеральной совокупности – эти вопросы тоже рассматрива-

ются в математической статистике.

Кроме большого объема, для получения достаточно надежных и достоверных выводов о генеральной совокупности выборка должна еще адекватно представлять собой эту генеральную совокупность. Или, как ещё говорят, она должна быть *репрезентативной*. Это значит, что нельзя отбирать преимущественно лучшие или, наоборот, худшие объекты. Правильным (репрезентативным) будет такой отбор, при котором шансы быть отобранными у всех объектов генеральной совокупности будут одинаковыми. А это будет иметь место лишь в том случае, когда выборку объектов из генеральной совокупности осуществляют *случайно*.

Например, чтобы отбор гостя зерна из вороха зерна был произведён репрезентативно, следует взять по щепотке зёрен из разных мест этого вороха (с разных краёв, с поверхности, с глубины, и т.д.). А если этот ворох лежит давно и уже слежался (однородность вороха нарушилась), то перед осуществлением выборки ворох этот хорошо бы и тщательно перемешать.

В тех случаях, когда объекты генеральной совокупности пронумерованы (например, это автомобили, выпускаемые автозаводом, или отдельные части этих автомобилей – моторы, кузова, и т.д.), то для случайного отбора каких-то  $n$  объектов такой генеральной совокупности можно воспользоваться так называемой *таблицей случайных чисел*. Эту таблицу случайных чисел выдает, например, Excel, если задействовать в нем функцию СЛЧИС, содержащуюся в наборе функций «Математические».

После того, как выборка произведена, исследуют *каждый объект* этой выборки. То есть выясняют (измеряют, устанавливают) значения тех количественных или качественных признаков отобранных объектов, которые представляют исследовательский интерес в генеральной совокупности. Например, если исследуется выборочным путём ворох зерна, то качественным признаком каждого отобранного зерна может быть годность его к посеву или к использованию в мукомольной промышленности. А количественным признаком – вес зерна, количественно выраженная влажность, процентное содержание белка, клейковины и т.д. Другой пример: если генеральная совокупность представляет собой некоторые изделия массового производства, то качественным признаком каждого отобранного изделия может быть его стандартность, а количественным – контролируемый размер изделия, или его вес, или время его работоспособности, и т.д.

Будем пока считать, что у объектов генеральной совокупности исследуется лишь один признак  $X$ , и этот признак – *количественный* (то есть его можно выразить некоторым числом). Это может быть вес, сорт, размер, и т.д. Кстати, при необходимости и качественный признак объектов (например, их годность к своему назначению) можно сделать количественным, если считать, что этот признак  $X=1$ , если объект годен, и считать  $X=0$ , если объект не годен.

Итак, пусть из изучаемой генеральной совокупности сделана случайная выборка объёмом  $n$ . И пусть оказалось, что у  $n_1$  объектов, попавших в выборку, значение исследуемого признака  $X$  оказалось равным  $x_1$ , у  $n_2$  объектов – значение  $x_2$ , ..., у  $n_m$  объектов – значение  $x_m$ . Тогда таблица

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_m$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	$\dots$	$n_m$

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_m = n) \quad (1.1)$$

содержащая указанные данные, называется *статистическим распределением выборки*. При этом числа  $(x_1; x_2; \dots; x_m)$ , представляющие собой все встретившиеся в выборке значения исследуемого признака  $X$ , называются *вариантами*, а количества  $(n_1; n_2; \dots; n_m)$  объектов, имеющих соответствующие варианты, называются *частотами*.

Статистическое распределение выборки автоматически имеет вид (1.1), если исследуемый признак  $X$  является дискретной (прерывистой) величиной. Например, если исследуется экзаменационная оценка студентов по какому-либо предмету, то эта оценка  $X$  по своей природе является величиной дискретной (принимает лишь значения 2; 3; 4; 5). И если выборка составляет, например, 25 человек, то её статистическое распределение может быть, например, следующим:

$x_i$	2	3	4	5
$n_i$	2	8	10	5

$$(2+8+10+5=25) \quad (1.2)$$

Статистическое распределение выборки (1.1) для наглядности изображают графически – в виде так называемого *полигона частот*, представляющего собой ломаную линию с узлами в точках

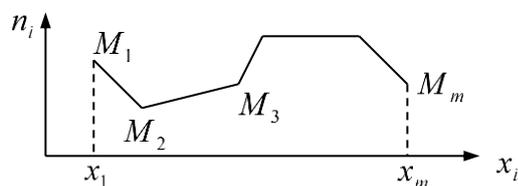


Рис. 3.1

с собой ломаную линию с узлами в точках  $M_i(x_i; n_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) - см. рис.3.1.

Если же исследуемый признак  $X$  является непрерывной величиной, то статистическое распределение выборки обычно оформляют в виде таблицы (1.3.):

$x_i$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$\dots$	$x_m - x_{m+1}$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	$\dots$	$n_m$

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_m = n) \quad (1.3)$$

Здесь  $(x_1 - x_2), (x_2 - x_3), \dots, (x_m - x_{m+1})$  – интервалы (обычно одинаковые по длине), на которые разбивают весь интервал  $(x_1; x_{m+1})$  значений признака  $X$  в выборке, а  $(n_1; n_2; \dots; n_m)$  – частоты для соответствующих интервалов. Например, если исследуется масса  $X$  (г) клубней картофеля, выращенного на некотором поле, то статистическое распределение выборки для 100 клубней, случайно отобранных из выращенного урожая, может быть таким:

$x_i$	0-40	40-80	80-120	120-160	160-200
$n_i$	12	20	28	25	15

$$(1.4)$$

Графически статистическое распределение выборки вида (1.3) изображается уже не полигоном, а так называемой *гистограммой частот* (рис.3.2.):

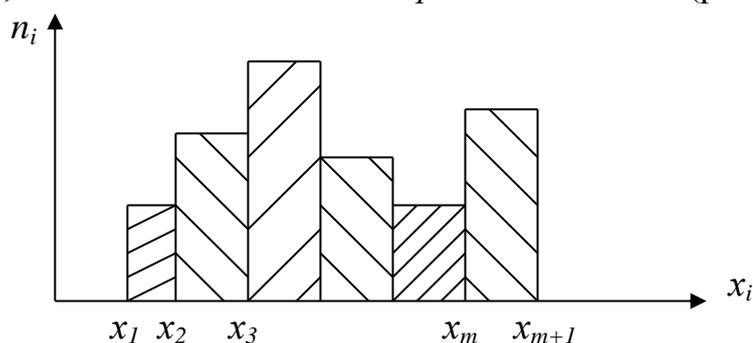


Рис.3.2

Отметим, что часто на оси ординат полигонов и гистограмм откладывают не частоты  $n_i$ , а *относительные частоты*  $\frac{n_i}{n}$ .

Перейдём теперь к основным числовым характеристикам статистического распределения выборки. Ими являются:

1. *Среднее значение признака X в выборке*, обозначаемое  $\bar{x}_e$  и называемое *выборочной средней*.

2. Величина  $D_e$ , которая характеризует *среднее значение квадратов отклонений вариант  $x_i$  от выборочной средней  $\bar{x}_e$* . Она называется *выборочной дисперсией*.

3. Величина  $\sigma_e$ , которая характеризует *среднее значение отклонения вариант  $x_i$  от выборочной средней  $\bar{x}_e$  без учёта знака этого отклонения*. Она называется *выборочным средним квадратическим отклонением*.

4. Величина  $V_e\%$ , называемая *выборочным коэффициентом вариации*. Этот коэффициент характеризует *долю в процентах, которую составляет  $\sigma_e$  (среднее отклонение от среднего) по отношению к самому среднему  $\bar{x}_e$* .

Все названные основные числовые характеристики выборки определяются по формулам:

$$\bar{x}_e = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n}; D_e = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_e)^2 n_i}{n}; \sigma_e = \sqrt{D_e}; V_e \% = \frac{\sigma_e}{\bar{x}_e} \cdot 100\% \quad (1.5)$$

Эти формулы можно использовать, если статистическое распределение выборки имеет вид (1.1), то есть является дискретным. А если оно имеет вид (1.3), то есть является непрерывным (интервальным), то его предварительно преобразуют в дискретное, в котором середины интервалов принимаются за его новые дискретные варианты.

Кстати, формулу для подсчёта выборочной дисперсии  $D_e$  можно упростить, если раскрыть в ней квадрат разности, сумму разбить на три суммы и привести затем подобные. В итоге получим следующую *упрощённую формулу для выборочной дисперсии* (выкладки проделайте самостоятельно):

$$D_{\epsilon} = \overline{x^2} - (\bar{x}_{\epsilon})^2 \quad (1.6)$$

Здесь

$$\bar{x}_{\epsilon} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n}; \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 n_i}{n} \quad (1.7)$$

То есть, согласно (1.6) и (1.7), получаем: *выборочная дисперсия равна средней из квадратов вариант выборки минус выборочная средняя в квадрате.*

Пример 1. Дано статистическое распределение выборки

$x_i$	1	2	3	4
$n_i$	20	15	10	5

(20+15+10+5=n= 50)

Найти её числовые характеристики  $\bar{x}_{\epsilon}$ ,  $D_{\epsilon}$ ,  $\sigma_{\epsilon}$ ,  $V_{\epsilon}\%$  и прокомментировать их смысл.

Решение. Используя приведённые выше формулы, получим:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\epsilon} &= \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{50} = \frac{100}{50} = 2 \\ \overline{x^2} &= \frac{1^2 \cdot 20 + 2^2 \cdot 15 + 3^2 \cdot 10 + 4^2 \cdot 5}{50} = \frac{250}{50} = 5 \\ D_{\epsilon} &= \overline{x^2} - (\bar{x}_{\epsilon})^2 = 5 - 2^2 = 1; \quad \sigma_{\epsilon} = \sqrt{D_{\epsilon}} = 1; \quad V_{\epsilon}\% = \frac{\sigma_{\epsilon}}{\bar{x}_{\epsilon}} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\% \end{aligned}$$

А теперь осмыслим полученные результаты.

1) Как оказалось,  $\bar{x}_{\epsilon}=2$ . То есть среднее значение исследуемого признака  $X$  в выборке равно 2. Найденное значение не совпадает со средним значением 2,5 вариант (1; 2; 3; 4) и оказалось ближе к 1, нежели к 4. Это произошло потому, что объектов с меньшими значениями признака  $X$  в выборке оказалось больше, чем с большими. Точно так же средний балл аттестата зрелости выпускника школы будет ближе к трем, чем к пяти, если в этом аттестате больше троек, чем пятёрок.

2) Выборочное среднее квадратическое отклонение  $\sigma_{\epsilon}$  признака  $X$  (его среднее отклонение от его среднего значения) оказалось равным 1. И это тоже хорошо объяснимо. Действительно, у признака  $X$  в выборке обнаружены 4 значения (1; 2; 3; 4). Отклонения этих значений от их среднего значения  $\bar{x}_{\epsilon}=2$  составляют (без учета знака отклонения) соответственно (1; 0; 1; 2). Из этих четырех отклонений средним оказалось  $\sigma_{\epsilon} = \sqrt{D_{\epsilon}} = 1$ . И это тоже совершенно естественно.

3) Величина  $V_{\epsilon}\%$  выборочного коэффициента вариации показывает, что

$\sigma_s=1$  (среднее отклонение от среднего) по отношению к  $\bar{x}_s=2$  (к самому среднему) для признака  $X$  в выборке составляет 50%.

Числовые характеристики выборки ( $\bar{x}_s, D_s, \sigma_s, V_s\%$ ), если они найдены, служат для оценки соответствующих числовых характеристик *генеральной совокупности*:  $\bar{x}_G$  - генеральной средней;  $D_G$  - генеральной дисперсии;  $\sigma_G$  - генерального среднего квадратического отклонения;  $V_G\%$  - генерального коэффициента вариации.

Отметим, что числовые характеристики генеральной совокупности ( $\bar{x}_G; D_G; \sigma_G; V_G\%$ ) – фиксированные, хотя и неизвестные, числа. А числовые характеристики выборки ( $\bar{x}_s, D_s, \sigma_s, V_s\%$ ) очевидным образом зависят от того, какие объекты генеральной совокупности попали в выборку. От выборки к выборке эти объекты меняются. А так как выборка объектов производится случайно, то и числовые характеристики выборки – *случайные величины*. А значит, возникают естественные вопросы о возможных значениях этих случайных величин, их числовых характеристиках, и т.д. Обо всём это пойдёт речь в следующем параграфе.

### Упражнения

1. В чём достоинства и в чём недостатки исследования всей генеральной совокупности и исследования выборки из неё?

2. Пусть  $X$  – месячная зарплата на сдельной работе одного рабочего на некотором предприятии. Она исследовалась по бухгалтерским ведомостям выборочно. Какой смысл в этом случае будут иметь величины ( $\bar{x}_s, D_s, \sigma_s, V_s\%$ )? И какой смысл будут иметь ( $\bar{x}_G, D_G, \sigma_G, V_G\%$ )?

3. Статистическое распределение выборки имеет следующий вид:

$x_i$	1-3	3-5	5-7	7-9
$n_i$	20	15	10	5

Найти числовые характеристики выборки.

Ответ:  $\bar{x}_s=4; D_s=4; \sigma_s=2; V_s\%=50\%$ .

## §2. Точечные и интервальные оценки числовых характеристик генеральной совокупности

Как отмечено в конце предыдущего параграфа, числовые характеристики выборки  $\bar{x}_s; D_s; \sigma_s; V_s\%$  являются случайными величинами. В связи с этим возникает естественный и важный для практики вопрос о числовых характери-

стиках этих случайных величин – об их средних значениях, о мере разброса возможных значений этих величин вокруг их средних значений, и т.д.

Ответы на все эти вопросы дает теория вероятностей. Мы здесь не можем, в силу краткости нашего курса, вникать в подробности соответствующего вероятностного исследования. Поэтому приведем лишь результаты этого исследования (подробнее см., например, [4]). Выборки предполагаются репрезентативные.

1) Математическое ожидание выборочной средней  $\bar{x}_g$  равно генеральной средней  $\bar{x}_r$ :

$$M(\bar{x}_g) = \bar{x}_r; \quad (2.1)$$

Математическое ожидание любой случайной величины – это наиболее ожидаемое (среднее) её значение. Вокруг него как вокруг центра группируются различные значения этой величины. Значит, в соответствии с (2.1), возможные значения выборочной средней  $\bar{x}_g$  группируются вокруг генеральной средней  $\bar{x}_r$ . Причем разброс возможных значений  $\bar{x}_g$  вокруг  $\bar{x}_r$  уменьшается с увеличением объема  $n$  выборки, ибо имеют место формулы:

$$D(\bar{x}_g) = \frac{D_r}{n}; \quad \sigma(\bar{x}_g) = \sqrt{\frac{D_r}{n}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}} \quad (2.2)$$

Таким образом, если нам нужно по выборке оценить неизвестную генеральную среднюю  $\bar{x}_r$ , то эта оценка будет такой:

$$\bar{x}_r \approx \bar{x}_g \quad (2.3)$$

Причем эта оценка будет тем точнее (надежнее), чем больше будет объем  $n$  выборки.

2) Математическое ожидание (среднее значение) выборочной дисперсии определяется формулой (2.4):

$$M(D_g) = \frac{n-1}{n} D_r. \quad (2.4)$$

Анализируя формулу (2.4), видим, что  $M(D_g) \neq D_r$ . То есть возможные значения выборочной дисперсии  $D_g$  (значения  $D_g$  для разных выборок) группируются не вокруг генеральной дисперсии  $D_r$ , а вокруг несколько меньшего числа  $\frac{n-1}{n} D_r$ . То есть  $D_g$  является *смещенной (в меньшую сторону) оценкой*  $D_r$ . Для устранения этого смещения вводят так называемую *исправленную выборочную дисперсию*  $s_g^2$ :

$$s_g^2 = \frac{n}{n-1} D_g = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_g)^2 n_i}{n-1}. \quad (2.5)$$

При этом  $s_e = \sqrt{s_e^2}$  называется *исправленным выборочным средним квадратическим отклонением*. Математическое ожидание (среднее значение)  $s_e^2$  уже равно  $D_\Gamma$ . Действительно:

$$M(s_e^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_e\right) = \frac{n}{n-1} M(D_e) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_\Gamma = D_\Gamma. \quad (2.6)$$

Таким образом, исправленная выборочная дисперсия  $s_e^2$  имеет среднее значение, равное генеральной дисперсии и, таким образом, является *несмещенной оценкой для генеральной дисперсии  $D_\Gamma$* :

$$D_\Gamma \approx s_e^2 \quad (2.7)$$

Замечание. Исправленная выборочная дисперсия  $s_e^2$ , согласно её выражению (2.5), является суммой квадратов отклонений вариант  $x_i$  выборки от их среднего значения  $\bar{x}_e$ , *рассчитанной на одну степень свободы этой суммы*.

Действительно, объём выборки равен  $n$ , значит, и всех вариант  $x_i$  в выборке тоже  $n$ . Будь в сумме

$$\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_e)^2 n_i \quad (2.8)$$

все эти варианты независимыми, эта сумма квадратов отклонений вариант  $x_i$  от выборочной средней  $\bar{x}_e$  имела бы  $n$  степеней свободы - по числу независимых вариант  $x_i$ , участвующих в формировании этой суммы. Однако эти варианты в сумме (2.8) не являются независимыми, ибо через них по первой из формул (1.5) вычисляется выборочная средняя  $\bar{x}_e$ , фигурирующая в этой сумме. Формула (1.5) представляет собой линейное соотношение

$$\sum_{i=1}^m x_i n_i = n \cdot \bar{x}_e, \quad (2.9)$$

связывающее варианты  $x_i$ . Из него одну из вариант  $x_i$  (любую) можно однозначно выразить через остальные  $n-1$  вариант. Так что в сумме (2.8) содержится только  $n-1$  независимых слагаемых, в силу чего она имеет не  $n$ , а  $n-1$  степеней свободы. Так что исправленная выборочная дисперсия  $s_e^2$  (несмещённая оценка генеральной дисперсии  $D_\Gamma$ ), согласно (2.5), действительно представляет собой сумму (2.8), рассчитанную на её одну степень свободы. Такое истолкование исправленной выборочной дисперсии (несмещённой оценки дисперсии генеральной), как и само понятие «число степеней свободы» повсеместно используется в математической статистике.

Исходя из оценок (2.3) и (2.7), можем получить еще две оценки для неиз-

вестных числовых характеристик генеральной совокупности:

$$\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}} \approx s_{\epsilon}; \quad V_{\Gamma} \% = \frac{\sigma_{\Gamma}}{\bar{x}_{\Gamma}} \cdot 100\% \approx \frac{s_{\epsilon}}{\bar{x}_{\epsilon}} \cdot 100\% \quad (2.10)$$

Оценки (2.3), (2.7) и (2.10) числовых характеристик  $\bar{x}_{\Gamma}, D_{\Gamma}, \sigma_{\Gamma}, V_{\Gamma} \%$  генеральной совокупности называются *точечными оценками*, ибо эти оценки осуществляются одним числом (точкой). Все эти оценки несмещённые, и они тем точнее (надёжнее), чем больше объём  $n$  выборки.

Кроме точечных оценок числовых характеристик генеральной совокупности, вводятся также и их *интервальные оценки*.

Пусть, например,  $y_{\epsilon}$  - некоторая из выборочных числовых характеристик ( $\bar{x}_{\epsilon}$ , или  $s_{\epsilon}^2$ , или  $s_{\epsilon}$ , и т.д.), а  $y_{\Gamma}$  - соответствующая ей генеральная характеристика. И пусть  $M(y_{\epsilon}) = y_{\Gamma}$ , так что мы имеем точечную несмещённую оценку  $y_{\Gamma} \approx y_{\epsilon}$ . Нас, естественно, интересует точность этой оценки, то есть разность  $y_{\epsilon} - y_{\Gamma}$ . Но так как по выборочным данным вычисляется лишь  $y_{\epsilon}$ , а  $y_{\Gamma}$  неизвестна, то разность эту точно найти нельзя. Её можно лишь попытаться оценить. А именно, можно лишь поставить вопрос: с какой вероятностью  $\gamma$  можно утверждать, что  $|y_{\epsilon} - y_{\Gamma}| < \delta$ , где  $\delta$  - некоторое заданное положительное число? Или, что одно и то же, какова вероятность  $\gamma$  того, что  $y_{\epsilon} - \delta < y_{\Gamma} < y_{\epsilon} + \delta$ ?

Интервал  $(y_{\epsilon} - \delta; y_{\epsilon} + \delta)$  называется *доверительным интервалом* для оценки  $y_{\Gamma}$ ; число  $\delta$  называется *точностью интервальной оценки*  $y_{\Gamma}$ ; вероятность  $\gamma$  называется *надёжностью интервальной оценки*  $y_{\Gamma}$ . Все эти понятия связываются в следующем равенстве:

$$p(|y_{\epsilon} - y_{\Gamma}| < \delta) = p(y_{\epsilon} - \delta < y_{\Gamma} < y_{\epsilon} + \delta) = \gamma \quad (2.11)$$

Геометрическая иллюстрация этого равенства изображена на рис. 3.3. Этот рисунок иллюстрирует смысл равенства (2.11):

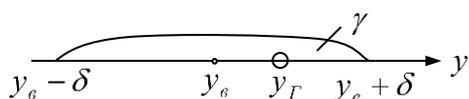


Рис. 3.3

с вероятностью  $\gamma$  неизвестная  $y_{\Gamma}$  содержится в своем доверительном интервале  $(y_{\epsilon} - \delta; y_{\epsilon} + \delta)$ .

Очевидно, чем шире доверительный интервал (то есть чем больше  $\delta$ ), тем больше надёжность (вероятность)  $\gamma$  того, что  $y_{\Gamma}$  принадлежит этому интервалу. И наоборот, чем уже доверительный интервал (меньше  $\delta$ ), тем меньше вероятность  $\gamma$  того, что  $y_{\Gamma}$  содержится в этом интервале. Заметим, что широкий доверительный интервал означает малую точность оценки величины  $y_{\Gamma}$ , а узкий – наоборот, высокую. Таким образом, чем выше точность оценки  $y_{\Gamma}$ , тем меньше её надёжность, а чем ниже точность – тем больше надёжность, что вполне естественно.

Нас, естественно, должна интересовать конкретная математическая связь

между шириной доверительного интервала  $(y_{\bar{e}} - \delta; y_{\bar{e}} + \delta)$  и вероятностью  $\gamma$  того, что  $y_{\Gamma}$  содержится в этом интервале. Очевидно, что наиболее важно ответить на этот вопрос, когда  $y_{\Gamma} = \bar{x}_{\Gamma}$ . Этим мы и ограничимся.

Если объем  $n$  достаточно большой (условно  $n > 30$ ), то интервальная оценка генеральной средней  $\bar{x}_{\Gamma}$  имеет вид:

$$p(\bar{x}_{\bar{e}} - \delta < \bar{x}_{\Gamma} < \bar{x}_{\bar{e}} + \delta) = 2\Phi(t_{\gamma}) = \gamma, \text{ где } t_{\gamma} = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_{\Gamma}}, \quad (2.12)$$

а

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.13)$$

Функция  $\Phi(x)$  принадлежит к числу важнейших функций теории вероятностей и математической статистики и называется *интегралом вероятностей*. График этой функции изображен на рисунке 3.4. В любом пособии по теории вероятностей и математической статистике имеются таблицы значений интеграла вероятностей  $\Phi(x)$ . Приведена эта таблица и в данном пособии (см. Приложение, таблица 1). Функция  $\Phi(x)$  содержится и в списке статистических функций Excel – её значения для любого  $x$  можно получить и там. Приведем небольшой фрагмент значений этой функции:

$x$	0	1	2	3	4	5
$\Phi(x)$	0	0,3413	0,4772	0,49865	0,499968	0,499997

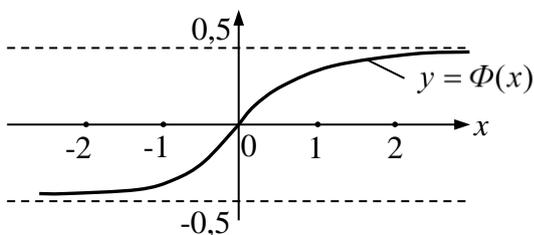


Рис. 3.4

Для всех  $x > 5$  можно считать  $\Phi(x) = 0,5$ .

Для  $x < 0$  следует использовать нечетность функции  $\Phi(x)$ :  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .

Таким образом, согласно (2.13), точность  $\delta$ , определяющая ширину доверительного интервала  $(\bar{x}_{\bar{e}} - \delta; \bar{x}_{\bar{e}} + \delta)$  для оценки генеральной средней  $\bar{x}_{\Gamma}$ , и надёжность

$\gamma$  этой оценки для больших выборок связаны друг с другом равенством:

Урожайность	Площадь	(2.16)
-------------	---------	--------

$$\delta = t_{\gamma} \frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}, \text{ где } 2\Phi(t_{\gamma}) = \gamma \quad (2.14)$$

Формула (2.14) содержит неизвестное среднее квадратическое отклонение  $\sigma_{\Gamma}$  генеральной совокупности. Его можно, в соответствии с (2.10), заменить его точечной оценкой  $s_{\bar{e}}$ . И тогда получим:

$$\delta = t_\gamma \frac{s_g}{\sqrt{n}}, \text{ где } 2\Phi(t_\gamma) = \gamma \quad (2.15)$$

(ц/га)	(га)
12-14	18
14-16	57
16-18	109
18-20	136
20-22	83
22-24	66
24-26	31
Итого	500

Однако эта замена будет достаточно точной, а, значит, и оправданной лишь при большом объеме  $n$  выборки (при  $n > 30$ ).

*Пример 1.* Выборочным путём были получены следующие данные об урожайности ржи в некотором зерновом регионе (таблица 2.16). Найти вероятность того, что средняя урожайность ржи, полученная в выборке, отличается в ту или в другую сторону (то есть по абсолютной величине) от средней урожайности на всей площади региона, занятой под рожь, не более чем на 0,2 ц/га.

*Решение.* Площадь региона, занятая рожью, нам неизвестна. Но она нам и не нужна. Важно лишь, чтобы она была намного больше тех 500 га, которые попали в выборку, что мы и будем предполагать. В соответствии с условием задачи нам требуется найти вероятность (надёжность)  $\gamma$  того, что  $|\bar{x}_g - \bar{x}_r| < 0,2$ , где  $\bar{x}_g$  - средняя урожайность ржи в выборке, а  $\bar{x}_r$  - средняя урожайность ржи во всем регионе. Эту надёжность  $\gamma$  найдем по формуле (2.15):

$$\gamma = 2\Phi(t_\gamma), \text{ где } t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{s_g} = \frac{0,2 \cdot \sqrt{500}}{s_g} \quad (2.17)$$

Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение  $s_g$  найдем из статистического распределения выборки (2.16). Для этого сначала приведем его к дискретному виду:

$x_i$ (урожайность в ц/га)	13	15	17	19	21	23	25	(2.18)
$n_i$ (площадь в га)	18	57	109	136	83	66	31	

Применяя затем формулы (1.5), получим:

$$\bar{x}_g = 19,124; \quad D_g = 8,985$$

А тогда, согласно (2.5), получаем:

$$s_g^2 = \frac{500}{499} \cdot 8,985 \approx 9,00; \quad s_g \approx 3.$$

Подставляя найденное значение  $s_g$  в (2.17), получим искомую вероятность (надёжность)  $\gamma$ :

$$t_\gamma = 1,49; \gamma = 2\Phi(1,49) = 2 \cdot 0,4319 \approx 0,86$$

Итак, с надежностью  $\gamma = 0,86$  (с 86%-ой надежностью) можем утверждать, что средняя урожайность ржи  $\bar{x}_r$  во всем регионе отличается от средней урожайности  $\bar{x}_g \approx 19,1$  ц/га на обследованных выборочно 500 га по абсолютной величине не более, чем на 0,2 ц/га. Или, что одно и то же, с 86%-ой надежностью можем утверждать, что  $\bar{x}_r$  находится в следующем доверительном интервале:  $18,9 \text{ ц/га} < \bar{x}_r < 19,3 \text{ ц/га}$ .

Если объем выборки небольшой ( $n < 30$ ), то пользоваться формулой (2.14), просто заменив в ней  $\sigma_r$  на  $s_g$ , не рекомендуется, ибо  $s_g$  может значительно отличаться от  $\sigma_r$ , а значит, могут получаться слишком грубые результаты. В этом случае (при малых объемах  $n$  выборки) для интервальной оценки генеральной средней  $\bar{x}_r$  опять используют равенства

$$p(\bar{x}_g - \delta < \bar{x}_r < \bar{x}_g + \delta) = \gamma, \text{ где } \delta = t_\gamma \frac{s_g}{\sqrt{n}}, \quad (2.19)$$

только величина  $t_\gamma$  связана с  $\gamma$  не интегралом вероятностей, а другой функцией – функцией английского статистика Госсета, который публиковал свои работы под псевдонимом *Стьюдент*. Имеется специальная таблица (см. таблицу 2 Приложения) – так называемая таблица критических точек распределения Стьюдента, позволяющая по числу степеней свободы  $k = n - 1$  распределения Стьюдента и вероятности  $\gamma$  находить  $t_\gamma$ . А значит, в соответствии с (2.19), находить величину  $\delta$ , определяющую доверительный интервал  $(\bar{x}_g - \delta; \bar{x}_g + \delta)$  для оценки генеральной средней  $\bar{x}_r$  с надежностью (вероятностью)  $\gamma$ . Заметим, что при больших  $n$  (при  $n > 30$ ) указанный доверительный интервал, найденный посредством вычисления  $\delta$  как по формуле (2.15), так и по формуле (2.19), оказывается практически одинаковым.

Пример 2. Девять независимых повторных измерений некоторой величины  $a$  дали следующие результаты:

$$1,24; 1,26; 1,25; 1,23; 1,25; 1,24; 1,24; 1,25; 1,24$$

Оценить с помощью доверительного интервала истинное значение  $a$  измеряемой величины с надежностью  $\gamma = 0,95$  (с 95%-ой надежностью).

Решение. Будем рассматривать результаты всех девяти повторных измерений величины  $a$  как выборочные значения случайной величины  $X$  – результата отдельного измерения этой величины. Тогда статистическое распределение выборки будет иметь вид:

$x_i$	1,23	1,24	1,25	1,26
$n_i$	1	4	3	1

$$(n=1+4+3+1=9) \quad (2.20)$$

А генеральной совокупностью в данном случае будет, очевидно, бесконечное множество всех возможных значений одного измерения ( $N=\infty$ ). Генеральной средней  $\bar{x}_r$  здесь будет истинное значение  $a$  измеряемой величины, ибо если измерение производится без систематических ошибок (то есть могут иметь место лишь ошибки случайные), то именно вокруг истинного значения  $a$  измеряемой величины группируются измеренные её значения. А  $\sigma_r$  - это среднее отклонение результата измерения от истинного значения  $a$  измеряемой величины. То есть  $\sigma_r$  - это точность измерения (данным измерителем и данным прибором).

Так как объём  $n$  выборки невелик ( $n=9$ ), то для интервальной оценки  $\bar{x}_r = a$  следует использовать равенства (2.19).

Исходя из статистического распределения выборки (2.20), найдём  $\bar{x}_g$  и  $s_g$ :

$$\begin{aligned}\bar{x}_g &= \frac{1,23 \cdot 1 + 1,24 \cdot 4 + 1,25 \cdot 3 + 1,26 \cdot 1}{9} = 1,2444 \\ \overline{x_g^2} &= \frac{1,23^2 \cdot 1 + 1,24^2 \cdot 4 + 1,25^2 \cdot 3 + 1,26^2 \cdot 1}{9} = 1,5487 \\ D_g &= \overline{x_g^2} - (\bar{x}_g)^2 = 1,5487 - (1,2444)^2 = 0,0001687 \\ s_g^2 &= \frac{9}{9-1} \cdot 0,0001687 = 0,0001897; \quad s_g = \sqrt{0,0001897} = 0,0138\end{aligned}$$

Далее по заданным  $\gamma=0,95$  и  $k = n-1=9-1=8$  с помощью таблицы 2 Приложения найдём значение  $t_\gamma$ , входящие в выражение (2.19):  $t_\gamma = 2,31$ . Таким образом,

$$\delta = t_\gamma \frac{s_g}{\sqrt{n}} = 2,31 \cdot \frac{0,0138}{\sqrt{9}} = 0,0106.$$

Следовательно, искомый доверительный интервал  $(\bar{x}_g - \delta; \bar{x}_g + \delta)$ , содержащий с надёжностью  $\gamma=0,95$  (с 95%-ой надёжностью) истинное значение  $a = \bar{x}_r$  измеряемой величины, будет таким: (1,234; 1,255).

В заключении этого параграфа рассмотрим следующий важный для практики вопрос: каков минимальный объём  $n$  выборки, обеспечивающий оценку неизвестной генеральной средней  $\bar{x}_r$  с заданной точностью  $\delta$  при заданной надёжности  $\gamma$ ?

Очевидно, что искомое минимальное значение  $n_{\min}$  объёма выборки при не слишком широком доверительном интервале  $(\bar{x}_g - \delta; \bar{x}_g + \delta)$ , то есть при не слишком большом  $\delta$  и при не слишком малой надёжности  $\gamma$  того, что  $\bar{x}_r$  будет содержаться в этом интервале, следует ожидать достаточно большим. И это  $n_{\min}$  будет тем больше, чем меньше будет  $\delta$  (точнее оценка) и чем больше будет  $\gamma$  (надежнее оценка) генеральной средней  $\bar{x}_r$ . Поэтому для нахождения этого значения  $n = n_{\min}$  первоначально следует использовать формулы (2.15), применяемые при  $n > 30$ , из которых следует:

$$n = n_{\min} = \left( \frac{t_{\gamma} \cdot s_{\sigma}}{\delta} \right)^2, \text{ где } 2\Phi(t_{\gamma}) = \gamma \quad (2.21)$$

Но если найденное значение  $n_{\min}$  окажется небольшим ( $n_{\min} < 30$ ), то тогда для его уточнения следует использовать последнее равенство (2.19), приводящее, кстати, к тому же выражению для  $n_{\min}$ , что и (2.21). Только  $t_{\gamma}$  следует находить не из равенства  $2\Phi(t_{\gamma}) = \gamma$ , то есть не из таблицы интеграла вероятности  $\Phi(x)$ , а подбирать из таблицы 2 Приложения для критических точек распределения Стьюдента.

Пример 3. Выборочным путем исследуется зерно, свезённое с убранных поля на элеватор. Требуется определить минимальный объём выборки, проводимой с целью определения средней массы одного зерна, чтобы с вероятностью 0,99 ошибка в определении этой средней массы не превысила по абсолютной величине 0,002 г. По данным предыдущих выборок установлено, что  $s_{\sigma} \approx 0,014$  г.

Решение. По таблице функции  $\Phi(x)$  (по таблице 1 Приложения) из равенства  $2\Phi(t_{\gamma}) = \gamma = 0,99$  находим  $t_{\gamma}$ :

$$\Phi(t_{\gamma}) = 0,495 \rightarrow t_{\gamma} = 2,58$$

Теперь по формуле (2.21) находим искомый минимальный объём выборки:

$$n_{\min} = \left( \frac{2,58 \cdot 0,014}{0,002} \right)^2 \approx 326$$

### Упражнения

1. С целью исследования размера  $X$  некоторых однотипных изделий, выпускаемых заводом, было случайным образом отобрано 50 изделий. Их распределение по размеру (статистическое распределение выборки) имеет вид:

$x_i$ (см)	107,8- -108,0	108,0- -108,2	108,2- -108,4	108,4- -108,6	108,6- -108,8	108,8- -109,0
$n_i$	1	4	16	18	8	3

Найти доверительный интервал, оценивающий с надёжностью  $\gamma = 0,95$  средний размер изделий, выпускаемых заводом.

Ответ: (108,39; 108,51).

2. При определении экспериментальным путём значения некоторой величины  $a$  проведено 5 повторных опытов, которые дали следующие результаты:

$$0,640; 0,652; 0,656; 0,664; 0,670.$$

а) Какова вероятность того, что истинное значение  $a$  измеряемой величины отличается от среднего результата проведённых измерений не более, чем на 0,01?

б) В каком доверительном интервале  $(\bar{x}_g - \delta; \bar{x}_g + \delta)$  с надёжностью  $\gamma = 0,99$  находится искомое значение  $a$ ?

Ответ: а)  $\gamma \approx 0,87$ ; б) (0,633; 0,680)

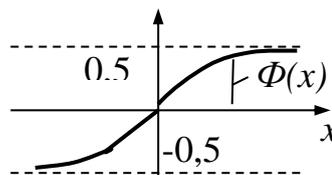
3. Проверку качества большой партии изделий проводят выборочным путём. Каков должен быть минимальный объём выборки, чтобы с надёжностью  $\gamma = 0,99$  можно было утверждать, что отклонение среднего срока службы изделия в выборке отличается от среднего срока службы во всей исследуемой партии не более, чем на 3 часа (в ту или в другую сторону)? По результатам предварительной (пробной) выборки получено  $s_g = 10$  час.

Ответ: 74.

## ПРИЛОЖЕНИЕ (таблицы)

**Таблица 1**

Значения функции  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$



x	$\Phi(x)$										
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790	1,56	0,4406	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810	1,57	0,4418	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1,19	0,3830	1,58	0,4429	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910	1,20	0,3849	1,59	0,4441	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869	1,60	0,4452	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883	1,61	0,4463	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907	1,62	0,4474	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925	1,63	0,4484	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944	1,64	0,4495	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3078	1,26	0,3962	1,65	0,4505	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980	1,66	0,4515	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3997	1,67	0,4525	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015	1,68	0,4535	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032	1,69	0,4545	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049	1,70	0,4554	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,54	0,2054	0,93	0,3238	1,32	0,4066	1,71	0,4564	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082	1,72	0,4573	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099	1,73	0,4582	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115	1,74	0,4591	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,4131	1,75	0,4599	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0,4147	1,76	0,4608	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0,99	0,3389	1,38	0,4162	1,77	0,4616	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177	1,78	0,4625	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192	1,79	0,4633	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461	1,41	0,4207	1,80	0,4641	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1,42	0,4222	1,81	0,4649	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508	1,43	0,4236	1,82	0,4656	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251	1,83	0,4664	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265	1,84	0,4671	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279	1,85	0,4678	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292	1,86	0,4686	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4319	1,88	0,4699	2,70	0,4965
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665	1,50	0,4332	1,89	0,4706	2,80	0,4974
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4345	1,90	0,4713	2,90	0,4981
0,35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357	1,91	0,4719	3,00	0,4986
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,53	0,4370	1,92	0,4726	3,50	0,4997
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3749	1,54	0,4382	1,93	0,4732	4,00	0,4999
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394	1,94	0,4738	5,00	0,5

**Таблица 2**Критические точки  $t_\gamma = t_\gamma(\gamma; k = n - 1)$  распределения Стьюдента

$k$	$\gamma$			$k$	$\gamma$		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
1	6,31	12,71	63,66	9	1,83	2,26	3,25
2	2,92	4,30	9,92	10	1,81	2,23	3,17
3	2,35	3,18	5,84	15	1,75	2,13	2,95
4	2,13	2,78	4,60	20	1,72	2,09	2,85
5	2,02	2,57	4,03	30	1,70	2,04	2,75
6	1,94	2,45	3,71	60	1,67	2,00	2,66
7	1,89	2,36	3,50	120	1,66	1,98	2,62
8	1,86	2,31	3,36	$\infty$	1,64	1,96	2,58

## Литература

1. Богомолов Н.В. Математика: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2016. 396 с.
2. Григорьев С.Г. Математика: учебник для вузов. М.: Академия, 2012. 416 с.
3. Зайцев А.И. Высшая математика: учебник для вузов. М.: Дрофа, 2004. 400 с.
4. Комогорцев В.Ф. Лекции по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие. Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2009. 178 с.
5. Назаров А.И. Курс математики: для нематематических специальностей и направлений бакалавриата. СПб.: Лань, 2011. 576 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2018. 608 с.
7. Попов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2014. 440 с.
8. Шипачев В.С. Начала высшей математики: учебное пособие. М.: Дрофа, 2004. 384 с.

Учебное издание

Комогорцев Владимир Филиппович

**МАТЕМАТИКА**  
**И**  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**  
**СТАТИСТИКА**

Учебное пособие

для бакалавров по направлениям  
подготовки 35.03.03, 35.03.04, 35.03.07

Редактор Лебедева Е.М.

---

Подписано к печати 21.05.2019 г. Формат 60x84. 1/16.  
Бумага печатная Усл.п.л. 9,53. Тираж 25 экз. Изд. №6390.

---

Издательство Брянского государственного аграрного университета  
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ