

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра технических систем в агробизнесе, природообустройстве
и дорожном строительстве

Дьяченко А.В.

Моделирование в агроинженерии

методические указания для выполнения практических занятий
и самостоятельной работы
для обучающихся по направлению подготовки
35.04.06 – Агроинженерия

Брянская область 2018

УДК 004.94:631:62 (076)

ББК 30в6:4:30

Д 93

Дьяченко, А. В. Моделирование в агроинженерии: методические указания для выполнения практических занятий и самостоятельной работы для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06 – Агроинженерия / А. В. Дьяченко. - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2018. - 38 с.

Методические указания предназначены для выполнения практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Моделирование в агроинженерии» для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06 – Агроинженерия. Целью методических указаний является выполнение практических занятий по дисциплине студентами очной формы обучения, практических занятий и самостоятельной работы студентами заочной формы обучения.

Рецензент: к.э.н., доцент каф. ТОЖ и ПП Исаев Х.М.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-технологического института Брянского государственного аграрного университета, протокол № 10 от 28 мая 2018 года.

© Дьяченко А.В., 2018
© Брянский ГАУ, 2018

Предисловие

Целью освоения дисциплины «Моделирование в агроинженерии» является приобретение знаний и навыков студентов по современным методам применения математического моделирования при решении научно-исследовательских задач.

Достижения современной науки, технологий и техники в сельском хозяйстве предъявляют новые требования к высшему профессиональному образованию инженеров сельского хозяйства. Последние десятилетия моделирование как научная и учебная дисциплина стремительно развивается.

Возрастает роль методов моделирования при конструировании и эксплуатации технических средств и их комплексов. Без знания этих методов невозможно ни исследование и теоретическое обобщение эмпирических зависимостей реального производства, ни построение сколько-нибудь надежного прогноза в растениеводстве, животноводстве, энергетике, экономике и финансах сельскохозяйственного предприятия.

Методические указания содержат предисловие, двенадцать практических занятий, список литературы. Каждое практическое занятие включает необходимое теоретическое введение, расчетные формулы и пример решения.

Для большей наглядности в методических указания приводятся «скриншоты» экранов.

Данные методические указания предназначены для выполнения практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Моделирование в агроинженерии» для студентов как очной, так и заочной формы.

Для студентов, обучающихся по очной форме обучения рабочая программа дисциплины предусматривает выполнение всех приведенных в методических указания практических занятий аудиторно.

Для студентов, обучающихся по заочной форме обучения рабочая программа дисциплины предусматривает выполнение части приведенных в методических указания практических занятий аудиторно, остальной материал выносится на самостоятельное изучение.

Если матрицы зависят от времени, то

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u,$$

и эта система является линейной системой с переменными параметрами.

Приведем пример уравнений движения. Рассмотрим уравнения движения математического маятника:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + mg \sin x = u(t).$$

Первый член в этом уравнении характеризует силы инерции маятника, m - масса маятника; второй член характеризует силы сопротивления среды движению маятника, k - коэффициент сопротивления. Последнее слагаемое характеризует силы тяжести, g - ускорение свободного падения. В правой части уравнения движения математического маятника присутствует возмущающая сила $u(t)$, которая может быть и управлением, предназначенным для успокоения колебаний маятника. Подобной математической моделью описываются многие технические и физические процессы, начиная от модели подвески автомобиля и кончая процессами в электронных схемах. Для приведения уравнения движения математического маятника к стандартному виду - системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка - произведем замену переменных: x_1 - положение маятника, x_2 - скорость маятника:

$$x_1 = x, \quad x'_1 = \frac{dx_1}{dt} = x_2.$$

Теперь уравнение примет вид

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -\frac{k}{m}x_2 - g \sin x_1 + \frac{u(t)}{m}. \end{cases}$$

В данном случае

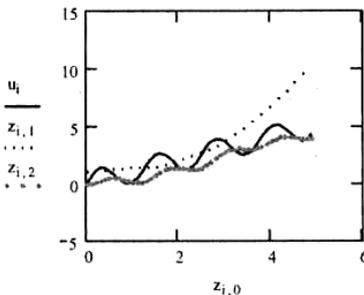
$$f_1 = x_2; \quad f_2 = -\frac{k}{m}x_2 - g \sin x_1 + \frac{u(t)}{m}.$$

Полученная система уравнений должна быть дополнена начальными условиями для выделения единственного решения: положением маятника и его скоростью в начальный момент времени

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0.$$

Уравнения (ОДУ) совместно с начальными условиями позволяют определить поведение системы для всех $t > 0$. Несмотря на простоту системы, она не интегрируется в квадратурах. Это обстоятельство является обычным при моделировании динамики сложных систем. Общим методом получения решения нелинейных ОДУ является метод численного интегрирования. Далее приведена программа в системе Mathcad (рис. 1.2), позволяющая получить та кое решение.

Параметры маятника	Число шагов	Конечное время	Шаг интегрирования
a := 5 b := 1 d := .4	N := 50	tk := 5	h := $\frac{tk}{N}$ h = 0.1
y := $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	начальное условие	u(t) := (t + sin(5·t))	входное воздействие
f(t, y) := $\begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{1}{a} \cdot (u(t) - b \cdot y_1 - d \cdot \sin(y_0)) \end{bmatrix}$		f – правые части исходного дифференциального уравнения	
z := rkfixed(y, 0, tk, N, f)		подпрограмма интегрирования ОДУ	
i := 0.. N - 1	u _i := u(i·h)		



Результаты интегрирования:
 u_i – входное воздействие;
 $z_{i,1}$ – положение;
 $z_{i,2}$ – скорость;
 $z_{i,0}$ – время

Рис. 1.2. Интегрирование системы уравнений методом Рунге - Кутта

В программе решена задача интегрирования движения маятника с управлением $u(t) = t + \sin 5 t$ и начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

Практическое занятие №2

Построение моделей математической физики методом сеток

В отличие от динамических моделей модели математической физики описывают поведение выходной переменной с несколькими независимыми переменными, например временем t и пространственной переменной x .

Аппаратом для построения таких моделей являются уравнения в частных производных. Ограничимся только примером таких моделей. Так, одномерное распространение тепла вдоль тонкого стержня описывается следующим уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

где $u(x, t)$ - температура стержня в точке с координатой x в момент времени t . Для выделения единственного решения необходимо задать начальные и граничные условия. Начальными условиями может быть известная температура стержня в начальный момент - функция $u(x, 0) = \varphi(x)$, граничными - известная температура на концах стержня $u(0, t) = f_1(t)$, $u(l, t) = f_2(t)$.

Модели математической физики имеют аналитическое решение в исключительных случаях. Обычно для численного расчета этих моделей применяют метод сеток и метод конечных элементов. Ниже представлен документ Mathcad (рис. 2.1), решающий уравнение теплопроводности методом сеток. Начальное распределение температуры по длине стержня задается функцией $\varphi(x) = 1 + \sin 5x^2$, граничные условия – функциями $f_1(t) = \varphi(0)$, $f_2 = \varphi(l)$.

$xk := 1 \quad x0 := 0 \quad f(x) := 1 + \sin(5 \cdot x^2)$	длина и начальная температура стержня
$tk := 0.25 \quad n := 10 \quad m := 60$	задание сетки
$h := \frac{xk - x0}{n} \quad p := \frac{tk}{m} \quad \lambda := \frac{p}{h^2} \quad \lambda = 0.417$	шаги по пространству и времени, проверка на устойчивость
$i := 0..n \quad j := 0..m + 1$	
$T_{0,j} := f(x0) \quad T_{n,j} := f(xk)$	граничные условия
$T_{i,0} := f(x0 + i \cdot h) \quad T_{i,m} := f(xk)$	начальные условия
$u(T) := \begin{cases} \text{for } j \in 0..m \\ \text{for } i \in 1..n - 1 \\ T_{i,j+1} \leftarrow \lambda \cdot T_{i+1,j} + (1 - 2 \cdot \lambda) \cdot T_{i,j} + \lambda \cdot T_{i-1,j} \end{cases}$	разностная схема
T	$T := u(T)$

Рис. 2.1. Уравнение теплопроводности

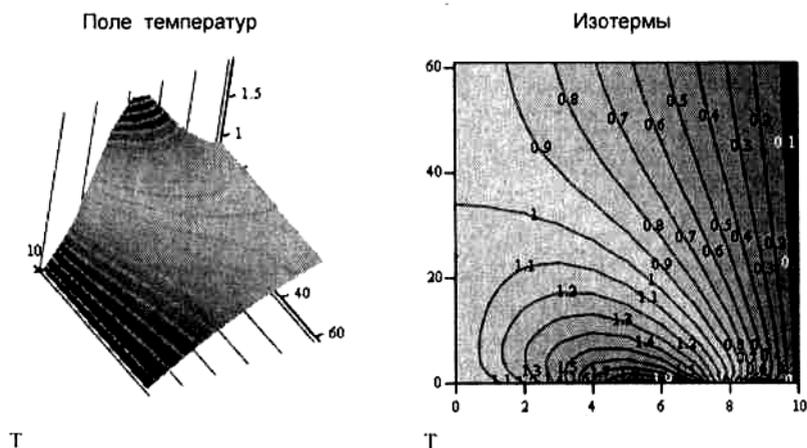


Рис. 2.2. Поле температур и изотермы

Практическое занятие №3

Моделирование случайного процесса

Предыдущие типы моделей используются для описания детерминированных процессов - физических, технических, экономических и др. Часто возникает задача моделирования случайных событий, имеющих вероятностный характер, таких, как поток заявок в

некоторую систему массового обслуживания (например, в телефонную или компьютерную сеть). Модели массового обслуживания позволяют определять вероятностные характеристики таких систем. В классических случаях для их анализа используются аппарат теории вероятностей, алгебраические и дифференциальные уравнения. В более сложных случаях приходится использовать аппарат имитационного моделирования. Приведенный ниже документ Mathcad (рис. 3.1) иллюстрирует моделирование случайного нахождения системы в трех состояниях. В документе принята матрица вероятностей с элементами $J_{i,k}$ - вероятностями перехода из состояния i в состояние k ; в начальный момент времени система находится в состоянии $i = 1$ с вероятностью 1. На графике изображено нахождение системы в трех различных состояниях на протяжении 20 шагов.

В практических занятиях 10-12 рассмотрены вопросы анализа систем массового обслуживания.

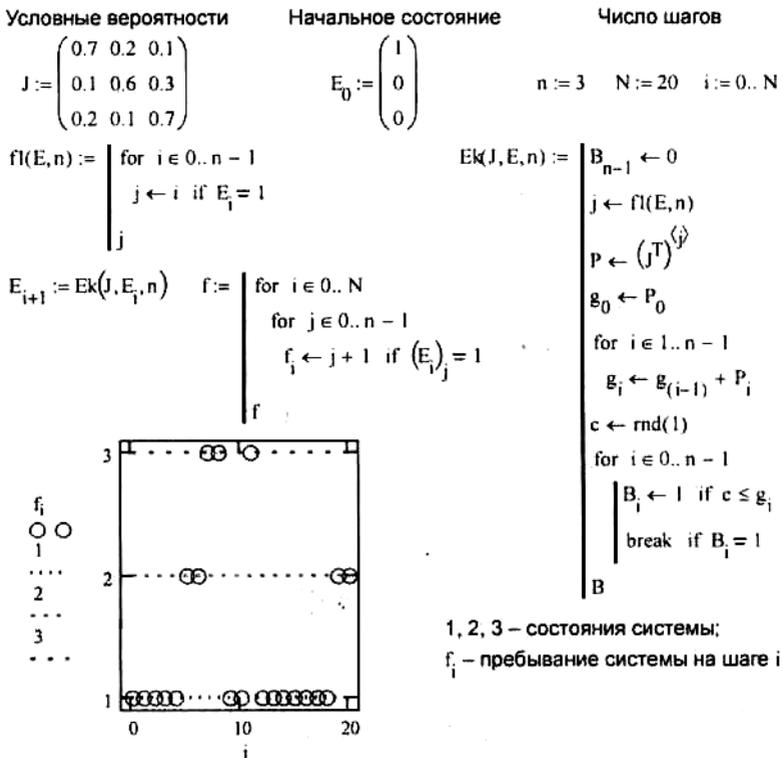


Рис. 3.1. Имитационное моделирование случайного процесса

Приведенные примеры моделей показывают, насколько широк класс математических методов, необходимых для их построения и анализа. Традиционный метод работы с математической моделью требовал выполнения следующих этапов: математическая формулировка задачи - разработка численного алгоритма - программирование и отладка программы - решение задачи и анализ полученных результатов. Для сложных систем это означало необходимость привлечения различных специалистов: технологов, математиков, программистов. Применение вычислительных сред типа Mathcad, Maple, Matlab и других делает возможным использование компьютерных технологий в моделировании для специалистов, не владеющих тонкостями математического анализа, численных методов или программирования.

Однако здесь есть и опасность при слепом применении вычислительных сред получить неверный результат из-за плохой сходимости или ошибок вычислений. Поэтому важно понимать суть применяемых алгоритмов и оценивать возможные источники ошибок вычислений.

Практическое занятие №4

Интерполяция экспериментальных данных

Часто теоретических знаний оказывается недостаточно для построения математической модели. В этих условиях можно воспользоваться данными эксперимента - наблюдениями за его функционированием.

Пусть известна математическая модель $y = f(x, c)$ с точностью до параметров $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$. Необходимо найти функцию, проходящую через точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ где n - число экспериментов (рис. 4.1).

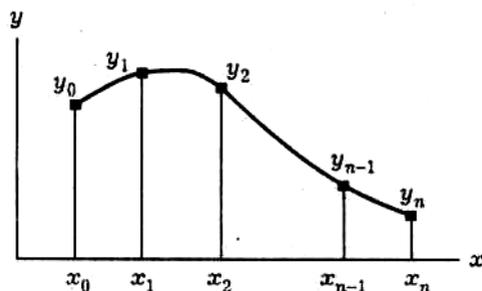


Рис. 4.1. Исходные данные в задаче интерполяции

Для этого должно выполняться условие Лагранжа:

$$\begin{cases} f(x_0, c) = y_0, \\ f(x_1, c) = y_1, \\ \dots \dots \dots \\ f(x_n, c) = y_n. \end{cases}$$

Если число параметров функции $c_i, i = 0, 1, \dots, m$, совпадает с числом узлов $x_j, j = 0, 1, \dots, n$, условия Лагранжа могут иметь решение - в этом случае говорят о задаче интерполяции.

Если $m > n$, число неизвестных в условиях Лагранжа больше числа уравнений, система недоопределена, и для получения единственного решения необходимо задание дополнительных условий, тогда можно поставить задачу сплайн-интерполяции.

Если же $m < n$, то условиях Лагранжа переопределена, точно-го выполнения условий Лагранжа добиться невозможно. В этом случае возникает задача аппроксимации.

Для целей интерполяции обычно используется полином

$$f(x, c) = P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = \sum c_i x^i.$$

Условие Лагранжа дает следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов интерполяции c :

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_0 + \dots + c_nx_0^n = y_0, \\ \dots \dots \dots \\ c_0 + c_1x_n + \dots + c_nx_n^n = y_n, \end{cases}$$

или $Ax = y$, где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ - вектор узлов интерполяции; $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ - вектор значений функции в узлах интерполяции

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \{x_i^j\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Решение системы дает значение коэффициентов c :

$$c = A^{-1}y.$$

Полученное уравнение кривой проходит точно через заданные точки. Вне узлов интерполяции математическая модель может иметь значительную погрешность. Ниже приведен документ Mathcad (рис. 4.2) с программой решения задачи интерполяции.

При большом числе узлов интерполяции приходится решать систему уравнений такой же размерности. Это может привести не только к эффекту волнистости, как на нижнем графике, но и к существенным ошибкам вычислений. В этом случае узлы интерполяции располагаются близко друг к другу, столбцы матрицы A различаются незначительно, что приводит к плохой обусловленности матрицы и к значительным ошибкам вычислений. Ниже приведен результат интерполяции по 40 узлам (рис. 4.3).

$x_0 := 0$ $x_k := 1$ $n := 6$ начало интервала, конец интервала и число узлов

$a := 1$ $b := 2$ $f(x) := \sin(a \cdot x) \cdot e^{-(b \cdot x)^{\frac{1}{2}}}$ исходная функция

$h := \frac{x_k - x_0}{n - 1}$ шаг интерполяции

$i := 0..n - 1$ $j := 0..n - 1$ формирование матрицы и вектора системы линейных уравнений

$x_i := x_0 + i \cdot h$ $g_i := f(x_i)$ $a_{i,j} := (x_i)^j$

$c := a^{-1} \cdot g$ $c^T = (0 \ 1.082 \ -1.444 \ -0.988 \ 2.448 \ -1.049)$ коэффициенты интерполяционного полинома

$f_1(x) := \sum_i c_i \cdot x^i$ интерполяционный полином

x

$h_1 := \frac{h}{10}$ $i_1 := 0..(n - 1) \cdot 10$

сравнение исходной $f(x_i)$ и интерполирующей $f_1(x_i)$ кривой, x_i – аргумент функции

$i_1 \cdot h_1$

ошибка интерполяции

Рис. 4.2. Программа решения задачи интерполяции

При росте числа узлов довольно быстро растет ошибка вычислений (нижний график на рис. 4.3). Если использовать кусочную интерполяцию, т. е. на разных участках использовать разные полиномы меньшей степени, чем число узлов, то возникает проблема негладкости интерполирующей функции в точках стыка участков. Проблема может быть решена использованием сплайн-интерполяции.

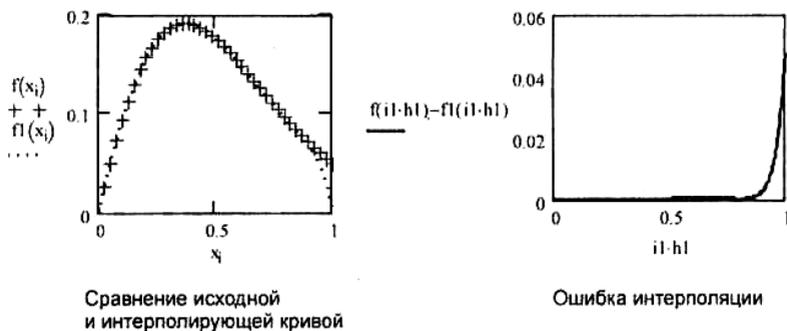


Рис. 4.3. Решение задачи интерполяции с 40 узлами

Практическое занятие №5

Сплайн-интерполяция

Сплайн означает «гибкая рейка». Метод сплайн-интерполяции является формализацией чертежного опыта. Уравнение гибкой рейки

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Данное дифференциальное уравнение решается с точностью до констант:

$$y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Опишем поведение интерполируемой функции на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \dots n$, сплайном

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3.$$

Нужно определить $4n$ коэффициентов у n сплайнов, а условий Лагранжа только $2n$:

$$\varphi_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad \varphi_i(x_i) = y_i.$$

Недостающие условия можно получить, наложив требования на равенство первых и вторых производных для сплайнов во внутренних узлах интерполяции

$$\varphi'_i(x_i) = \varphi'_{i+1}(x_i), \quad \varphi''_i(x_i) = \varphi''_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, N-1},$$

и на равенство нулю вторых производных в начальном и конечном узлах (незакрепленная рейка ведет себя как прямая линия):

$$\varphi''_1(x_0) = 0, \quad \varphi''_n(x_n) = 0.$$

Войдя в программу Mathcad, вы можете произвести сплайн-интерполяцию данных так, как это представлено на рис. 5.1.

$x_0 := 0$ $x_k := 1$ $n := 6$ начало интервала, конец интервала и число узлов

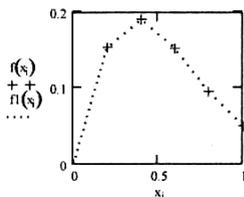
$a := 1$ $b := 2$ $f(x) := \sin(a \cdot x) \cdot e^{-\frac{1}{2}(b-x)^2}$ исходная функция

$h := \frac{x_k - x_0}{n - 1}$ шаг интерполяции

$i := 0..n - 1$ формирование исходных данных
 $x_i := x_0 + i \cdot h$ $g_i := f(x_i)$

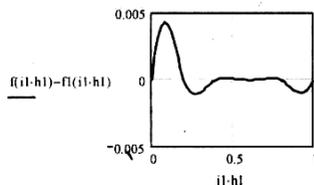
$v := \text{lspline}(x, g)$ определение коэффициентов сплайна

$f1(z) := \text{interp}(v, x, g, z)$ вычисление сплайна



$h1 := \frac{h}{10}$ $i1 := 0..(n - 1) \cdot 10$

сравнение исходной $f(x)$ и интерполирующей кривой $f1(x)$



ошибка сплайн-интерполяции

Рис. 5.1. Сплайн-интерполяция

На вставках (рис. 5.2) показаны результаты сплайн-интерполяции по 40 точкам, по которым интерполяция полиномами показала низкую точность.

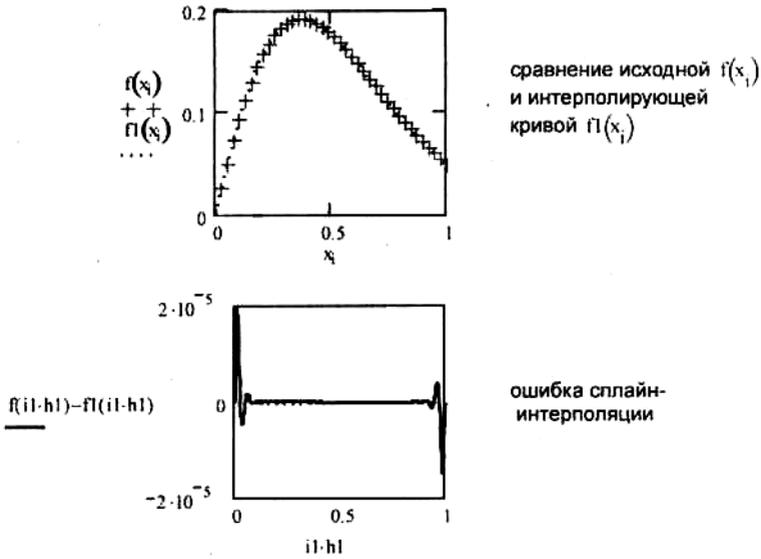


Рис. 5.2. Результаты сплайн-интерполяции с 40 узлами

Практическое занятие №6

Интерполяция и аппроксимация в задачах с помехами

При большом числе измерений и наличии помех задача интерполяции становится лишенной практического смысла, так как число параметров в интерполяционной функции равно числу измерений, а присутствие ошибок измерений может привести к разным значениям функции при одном и том же значении аргумента функции.

Далее будем предполагать известной математическую модель с точностью до констант c :

$$y = f(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m).$$

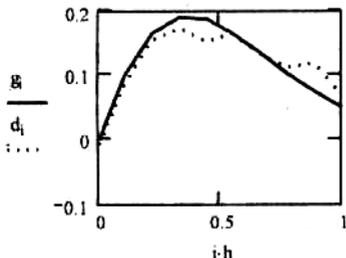
Пусть имеются данные эксперимента для входных переменных

$x_0 := 0$ $x_k := 1$ $n := 10$ начало интервала, конец интервала и число узлов

$a := 1$ $b := 2$ $f(x) := \sin(a \cdot x) \cdot e^{-\frac{3}{2}(b \cdot x)^2}$ $h := \frac{x_k - x_0}{n - 1}$ $i := 0..n - 1$ $D := 0.02$

$x_i := x_0 + i \cdot h$ $g_i := f(x_i)$ $d := g + \text{rnorm}(n, 0, D)$

искажение ошибками измерений
с нулевым математическим
ожиданием и дисперсией D



исходная и возмущенная кривые

$j := 0..n - 1$ $a_{i,j} := (x_i)^j$ $c := a^{-1} \cdot d$ $f_1(x) := \sum_i c_i \cdot x^i$ интерполяционный полином

$h_1 := \frac{h}{10}$ $i_1 := 0..(n - 1) \cdot 10$ $Q(a, b) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[d_i - \sin(a \cdot x_i) \cdot e^{-\frac{3}{2}(b \cdot x_i)^2} \right]^2$ функция невязки

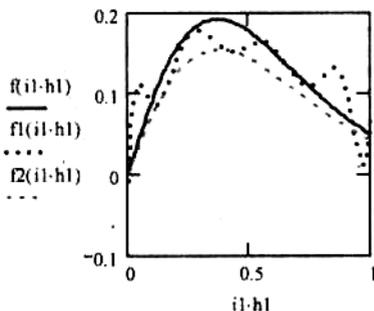
$a_1 := 1$ $b_1 := 2$

Given

$Q(a_1, b_1) = 0$ $a_1 = a_1$

$p := \text{Minerr}(a_1, b_1)$ $a_1 := p_0$ $a_2 := p_1$ $f_2(x) := \sin(a_1 \cdot x) \cdot e^{-\frac{3}{2}(a_2 \cdot x)^2}$ минимизация невязки

$p = \begin{pmatrix} 0.971 \\ 1.919 \end{pmatrix}$ новые значения коэффициентов



f – исходная кривая,
 f_1 – интерполирующая кривая,
 f_2 – аппроксимирующая кривая

Рис. 6.1. Аппроксимация и интерполяция в задаче с помехами

Практическое занятие №7

Интерполяция и аппроксимация в задачах с помехами

Для достаточно широкого класса задач минимизацию функции невязки можно осуществить аналитически. Такой класс составляют функции, линейные по параметрам c :

$$y(x) = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x).$$

Для такой модели функция невязки имеет следующий вид:

$$Q(c) = \sum_{i=1}^N \left(y^i - \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x^i) \right)^2.$$

Необходимые условия минимума этой функции

$$\frac{\partial Q}{\partial c_j} = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

приводят к определению параметров c с помощью решения системы уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^N \left(y^i - \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x^i) \right) \Phi_j(x^i) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Система имеет m уравнений для равенства нулю всех частных производных.

Раскрывая скобки и меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x^i) \Phi_j(x^i) = \sum_{i=1}^N y^i \Phi_j(x^i).$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega_j = \sum_{i=1}^N y^i \Phi_j(x^i), \quad j = \overline{1, m},$$
$$\varphi_{kj} = \sum_{i=1}^N \Phi_k(x^i) \Phi_j(x^i), \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда можно записать систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^m c_k \varphi_{kj} = \omega_j, \quad j = \overline{1, m},$$

или в векторном виде,

$$\Phi c = \Omega,$$

где $\Phi = \{\varphi_{kj}\}$ вектор правых частей размерности m . Видно, что матрица Φ является симметрической, $\Phi^T = \Phi$, и зависит только от значений входных переменных x^i .

Решение этой системы

$$c = \Phi^{-1} \Omega$$

дает искомые значения параметров модели.

Для случая линейной модели, зависящей от n переменных, имеем:

$$y = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=0}^n c_j x_j, \quad x_0 = 1,$$

$$\varphi_j = x_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \varphi_{00} = \sum_{i=1}^N 1 \cdot 1 = N,$$

$$\varphi_{01} = \sum_{i=1}^N 1 \cdot x_1^i = N \frac{\sum x_1^i}{N} = N \bar{x}_1,$$

где через \bar{x}_1 обозначено среднее значение x_1 по всем экспериментам. Продолжая вычисление элементов матрицы Φ подобным образом, получим для диагональных элементов матрицы

$$\varphi_{jj} = \sum_{i=1}^N x_j^2 = N \frac{\sum x_n^2}{N} = N \bar{x}_j^2,$$

и для произвольных элементов

$$\varphi_{jk} = \sum_{i=1}^N x_j x_k = N \bar{x}_j \bar{x}_k,$$

где через \bar{x} обозначено среднее значение величины x .

Тогда для линейной модели структура матрицы Φ будет следующей:

$$\Phi = N \begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_n \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \dots & \bar{x}_1 \bar{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n & \bar{x}_1 \bar{x}_n & \dots & \bar{x}_n^2 \end{pmatrix}.$$

Элементы вектора Ω : $\omega_0 = \sum_i 1 \cdot y^i = N\bar{y}$, $\omega_i = \sum_i x_j^i \cdot y^i = N\bar{x}_i\bar{y}$, а сам вектор

$$\Omega = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}_1\bar{y} \\ \text{K} \\ \bar{x}_n\bar{y} \end{pmatrix}$$

В частном случае для модели $y = c_1 + c_2x$ нужно провести прямую, наименьшим образом уклоняющуюся от точек с координатами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$. В этом случае

$$\Phi = N \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = N \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}\bar{y} \end{pmatrix}$$

и нужно решить систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}\bar{y} \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \begin{pmatrix} \bar{x}^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$c = \frac{1}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \begin{pmatrix} \bar{x}^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}\bar{y} \end{pmatrix}.$$

В случае аппроксимации исходных данных полиномом

$$y = \sum_{i=0}^m c_i x^i$$

имеем следующую структуру матрицы Φ и вектора Ω :

$$\Phi = \begin{pmatrix} N & \sum_i x^i & \dots & \sum_i (x^i)^m \\ \sum_i x^i & \sum_i (x^i)^2 & \dots & \sum_i (x^i)^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i (x^i)^m & \sum_i (x^i)^{m+1} & \dots & \sum_i (x^i)^{2m} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \sum_i y^i \\ \sum_i x^i y^i \\ \dots \\ \sum_i (x^i)^m y^i \end{pmatrix}.$$

Программа Mathcad, решающая задачу аппроксимации методом наименьших квадратов, для этого случая приведена на рис. 7.1.

$x_0 := 0$ $x_k := 1$ $n := 10$ начало интервала, конец интервала и число узлов

$a := 1$ $b := 2$ $f(x) := \sin(a \cdot x) \cdot e^{- (b \cdot x)^{\frac{3}{2}}}$ исходная функция

$h := \frac{x_k - x_0}{n - 1}$ $i := 0..n - 1$ $x_i := x_0 + i \cdot h$ $g_i := f(x_i)$

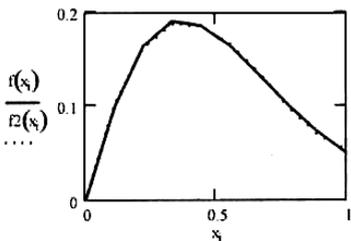
$m := 3$ порядок аппроксимирующего полинома

$p := 0..m$ $q := 0..m$

$\Phi_{p,q} := \sum_i (x_i)^p (x_i)^q$ $b_p := \sum_i (x_i)^p f(x_i)$ формирование матрицы и вектора системы линейных уравнений

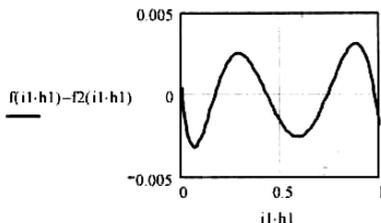
$d := \Phi^{-1} \cdot b$ $d^T = (-4.355 \times 10^{-4} \quad 1.138 \quad -2.037 \quad 0.952)$ коэффициенты аппроксимирующего полинома

$f_2(x) := \sum_p d_p \cdot x^p$ аппроксимирующий полином



сравнение исходной $f(x_i)$ и аппроксимирующей кривой $f_2(x_i)$

$h_1 := \frac{h}{10}$ $i_1 := 0..(n - 1) \cdot 10$



ошибка аппроксимации

Рис. 7.1. Аппроксимация полиномиальной функцией методом наименьших квадратов

Практическое занятие №8

Определение параметров модели

Рассмотрим простой пример аппроксимации многомерной (двухмерной) функции.

Пусть в результате экспериментов получены данные, объединенные в табл. 8.1, и нужно получить модель в виде функции

$$y(x_1, x_2) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 \sqrt{x_2}.$$

Таблица 8.1

Номер эксперимента i	Значения x_1^i	Значения x_2^i	Значения y^i	Значения по модели	Ошибка аппроксимации
1	0	0	0,5	0,391	0,109
2	0	1	1,2	1,318	-0,118
3	1	0	1,6	1,527	0,073
4	1	1	2,4	2,455	-0,055
5	2	1	3,4	3,591	-0,191
6	2	4	4,7	4,518	0,182

Поскольку $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x_1$, $\varphi_3(x) = \sqrt{x_2}$ Тогда имеем:

$$\varphi_{11} = \sum_{i=1}^6 \varphi_1(x^i) \varphi_1(x^i) = \sum_{i=1}^6 1 \cdot 1 = 6,$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \sum_{i=1}^6 \varphi_1(x^i) \varphi_2(x^i) = \sum_{i=1}^6 1 \cdot x_1^i = 6,$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{31} = \sum_{i=1}^6 \varphi_1(x^i) \varphi_3(x^i) = \sum_{i=1}^6 1 \cdot \sqrt{x_2^i} = 5,$$

$$\varphi_{22} = \sum_{i=1}^6 \varphi_2(x^i) \varphi_2(x^i) = \sum_{i=1}^6 (x_1^i)^2 = 10,$$

$$\varphi_{23} = \varphi_{32} = \sum_{i=1}^6 \varphi_2(x^i) \varphi_3(x^i) = \sum_{i=1}^6 x_1^i \sqrt{x_2^i} = 7,$$

$$\varphi_{33} = \sum_{i=1}^6 \varphi_3(x^i) \varphi_3(x^i) = \sum_{i=1}^6 x_2^i = 7.$$

Теперь матрица Φ имеет следующий вид :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 6 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вектор правых частей:

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^6 y^i = 13,8, \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^6 y^i x_1^i = 20,2,$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^6 y^i \sqrt{x_2^i} = 16,4, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 13,8 \\ 20,2 \\ 16,4 \end{pmatrix}$$

Алгоритм обработки данных для определения параметров модели приведен в следующем документе Mathcad на рис. 8.1.

вектора наблюдений, $x^{(k)}$ – фиктивный вектор

вектор-функция модели

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,2 \\ 1,6 \\ 2,4 \\ 3,4 \\ 4,7 \end{pmatrix} \quad \phi(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \sqrt{x_2} \end{pmatrix}$$

$m := \text{last}[\phi(x^{(0)})]$ $N := \text{last}(y)$ $k := 0..m$ $j := 0..m$ $i := 0..N$ размерность модели

$a_{i,j} := (x^{(j)})_i$ $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ преобразование входных векторов в матрицу

$\phi(x) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..m \\ \text{for } j \in 0..N \\ b^{(j)} \leftarrow \phi(x^{(j)}) \end{cases}$ $b := \phi(a)^T$ $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ преобразование в соответствии с функциями модели

коэффициенты модели

$\Phi_{k,j} := b^{(k)} \cdot b^{(j)}$ $\Omega_k := y \cdot b^{(k)}$ $c := \Phi^{-1} \cdot \Omega$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 6 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 13,8 \\ 20,2 \\ 16,4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0,391 \\ 1,136 \\ 0,927 \end{pmatrix}$$

Рис. 8.1. Алгоритм обработки данных для определения параметров модели

Проверка адекватности по критерию Фишера

В данном разделе будет рассмотрен вопрос о соответствии математической модели объективной реальности. Несоответствие может быть вызвано двумя причинами: или сама функция $f(x)$ не соответствует реальности, или случайные факторы исказили результаты экспериментов, вследствие чего коэффициенты в модели определены с ошибками, что сказывается на точности моделирования.

Пусть по данным N экспериментов определяется модель с m параметрами. Если $N = m$, то имеем задачу интерполяции, в которой модель проходит точно через экспериментальные точки, однако мы не располагаем ни одним дополнительным измерением для того, чтобы оценить адекватность модели. Если $N > m$, то данные $N - m$ экспериментов (число степеней свободы) можно использовать для оценки адекватности модели при помощи остаточной дисперсии:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^N (y^i - f(x^i))^2}{N - m}.$$

Эта величина может быть признана неудовлетворительной, что приводит к необходимости либо увеличить число экспериментов (увеличив тем самым величину знаменателя), либо уменьшить числитель, взяв другую функцию f , введя, например, поправочный член. Для того чтобы выбрать решение, необходимо оценить, чем вызвана неадекватность модели - плохой функцией f или ошибками в измерениях.

Рассмотрим случай, когда с ошибками измеряется выходная величина y . Пусть ошибки измерений e подчиняются нормальному закону с нулевым математическим ожиданием $M_e = 0$ (систематической ошибки нет) и дисперсией σ_y^2 . В этом случае необходимо проверить гипотезу о том, что ошибки моделирования с дисперсией S и измерений σ_y^2 взяты из одной выборки, тогда различия между этими величинами несущественны. Этот вопрос может быть разрешен с помощью отношения Фишера $F = S / \sigma_y^2$. Если $F > F_T(p, n, m)$, где p - уровень доверительной вероятности, n - число степеней свободы для большей дисперсии S , m - число степеней свободы (обычно равное

бесконечности) для σ_y^2 , то данная гипотеза должна быть отвергнута, и ошибку моделирования можно уменьшить за счет изменения функции модели. В противном случае ошибка моделирования с вероятностью P может быть обусловлена ошибками измерений, и никакого улучшения моделирования за счет функции f добиться не удастся. Тогда нужно улучшать условия эксперимента. Табличное значение критерия Фишера $F_T(p, n, m)$ можно найти в литературе по статистике. В Mathcad значение критерия вычисляется с помощью встроенной функции rF .

Документ Mathcad, позволяющий аппроксимировать набор данных полиномом с определением степени адекватности по критерию Фишера, приведен на рис. 9.2

При $n = 4$ отношение Фишера $F = 4,09$ еще больше его табличного значения $F = 2,67$ (рис. 9.1).

В приведенном документе соотношение вычисленного значения $F = 2,62$ и табличного $F = 2,74$ позволяет сделать вывод о том, что остаточная дисперсия сравнима с шумом измерений и дальнейшее улучшение модели за счет изменения функции бессмысленно.

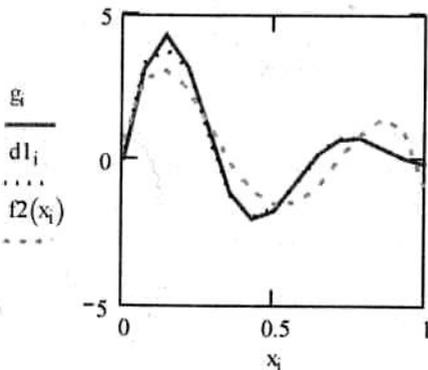


Рис. 9.1. Сравнение модели и эксперимента при $n = 4$

Генерация данных

$x_0 := 0$ $x_k := 1$ $n := 15$ начало интервала, конец интервала и число узлов

$a := 10$ $b := 2$ $f(x) := 5 \cdot \sin(a \cdot x) \cdot e^{-\frac{3}{2}(b \cdot x)}$ $h := \frac{x_k - x_0}{n - 1}$

$i := 0..n - 1$ $D := 0.08$

$x_i := x_0 + i \cdot h$ $g_i := f(x_i)$

искажение ошибками измерений
с нулевым математическим
ожиданием и дисперсией D

$d_{1_i} := g_i \cdot [1 + (\text{norm}(n, 0, D))_i]$

Аппроксимация

$m := 5$

порядок аппроксимирующего полинома

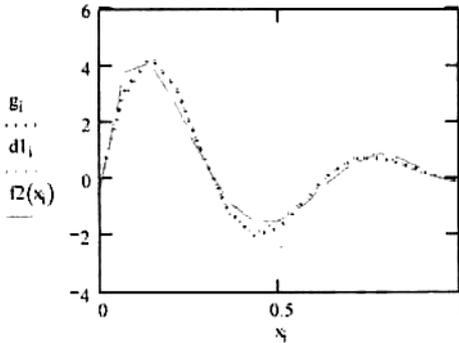
$p := 0..m$ $q := 0..m$

$\phi_{p,q} := \sum_i (x_i)^p \cdot (x_i)^q$ $b_p := \sum_i (x_i)^p \cdot d_{1_i}$

коэффициенты аппроксимирующего полинома

$d := \phi^{-1} \cdot b$ $d^T = (-0.351 \quad 98.727 \quad -658.679 \quad 1.511 \times 10^3 \quad -1.444 \times 10^3 \quad 493.056)$

$\Gamma_2(x) := \sum_p d_p \cdot x^p$



исходная g_i , искаженная d_{1_i}
и аппроксимирующая $\Gamma_2(x_i)$
функции

$S := \frac{\sum_i (d_{1_i} - \Gamma_2(x_i))^2}{n - m - 1}$

остаточная
дисперсия

$S = 0.21$

критерий Фишера

$F := \frac{S}{D}$ $F = 2.625$

$a := 1$ Given 0.995 = pF(a, n - m, 100) FT := Find(a) FT = 2.744

Рис. 9.2. Проверка адекватности по критерию Фишера

Практическое занятие №10

Моделирование одноканальной системы массового обслуживания с отказами

Реальные моделируемые процессы часто носят вероятностный характер. Такой характер имеет, например, время заявок на переговоры, поступающих в телефонную сеть. Такого рода вероятностные процессы описываются моделями систем массового обслуживания (СМО), в простейшем случае СМО, имеющими структуру, показанную на рис. 10.1.



Рис. 10.1. Структурная схема СМО

В этой схеме входной поток заявок представляет собой события (точки на временной оси). Заявки поступают на блок очереди (если она есть) и в соответствии с дисциплиной очереди (например, по времени поступления заявки) поступают на прибор обслуживания, где происходит его обработка, например ремонт. В состав СМО входят блок очереди и обслуживающий прибор. Примерами СМО могут служить бензозаправки, парикмахерские, переговорные пункты, компьютерные сети и множество других систем обслуживания. Во всех этих системах обращение в СМО носит случайный характер, такой же характер имеет и время обслуживания каждой заявки. Однако для оценки работы СМО необходимо иметь детерминированные характеристики. Ими могут быть вероятность обслуживания, среднее время обслуживания, средняя длина очереди и др. На основе таких оценок можно делать выводы о качестве СМО и давать рекомендации по улучшению их работы.

СМО принято классифицировать по ряду признаков. Прежде всего они разделяются на марковские и немарковские. Такое разделение аналогично разделению на линейные и нелинейные модели физических процессов. Для марковских процессов возможен их детальный анализ. Рассмотрением таких процессов мы ограничимся.

Данные системы подразделяются на СМО с потерями и без потерь. В первом случае заявка может покинуть систему, если она занята, во втором ожидает своей очереди.

В одноканальных СМО имеется один прибор обслуживания, многоканальные имеют несколько таких приборов.

В многофазных СМО заявка после обслуживания одним прибором поступает для дальнейшего обслуживания на прибор другого типа. Наконец, в сложных СМО могут присутствовать СМО различных типов, образуя сеть СМО.

Потоком событий называется последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k . В качестве событий могут выступать приезд машины на автозаправку, обращение в справочную систему и т.д.

Однородный поток событий требует одинаковой дисциплины очереди и свойств обслуживания каждой заявки, иначе поток не будет однородным, например поток пассажиров с VIP-персонами.

Регулярный поток представляет детерминированную последовательность событий, вычисляемых по некоторому правилу, например поток праздничных дней.

Для характеристики однородного вероятностного потока событий вводят в рассмотрение вероятность распределения числа событий n в заданном интервале времени τ : $P_n = P(n_\tau < n)$, где n_τ - число событий, появляющихся на интервале τ . Поток без последствия характеризуется тем, что для двух непересекающихся интервалов времени, следующих один за другим, вероятность появления события на втором интервале не зависит от вероятности появления события на первом интервале.

Поток называется *стационарным*, если вероятность появления события на интервале t зависит только от длины этого интервала и не зависит от его расположения на временной оси. Для стационарного потока среднее число событий в единицу времени является постоянным.

Ординарным называется такой поток, для которого вероятность появления двух и более событий на интервале t стремится к нулю с уменьшением t . Для него вероятность совпадения двух событий равна нулю.

Простейшим, или *пуассоновским*, называется поток событий, обладающий свойствами отсутствия последствия, стационарности и однородности. Найдем выражение для вероятности $P_n(\tau)$ появления n событий на интервале τ . Пусть $t \in (0, 1)$. Разделим этот интервал на n интервалов. Вероятность того, что на интервале длиной $1/n$ не появится ни одного события, равна $P_0(1/n)$. Так как простейший поток есть поток без последствия, то такие события независимы, и

$$P_0(1) = \left(P_0\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n.$$

Применим рассмотренный аппарат для анализа простейшей СМО. В одноканальной СМО с отказами имеется один прибор для обслуживания. Если он занят, заявка покидает систему. Примером такой СМО может служить справочная с одной телефонной линией. Обозначим интенсивность потока заявок (число заявок в единицу времени) через λ , интенсивность потока обслуживания через μ . Среднее время между заявками и среднее время обслуживания составят соответственно величины $1/\lambda$ и $1/\mu$. В графе состояний P_0 соответствует свободному каналу - отсутствию заявки, P_1 - занятому (рис. 10.2).

Уравнения Колмогорова имеют следующий вид:

$$\frac{dP_0}{dt} = \mu P_1 - \lambda P_0, \quad \frac{dP_1}{dt} = -\mu P_1 + \lambda P_0.$$

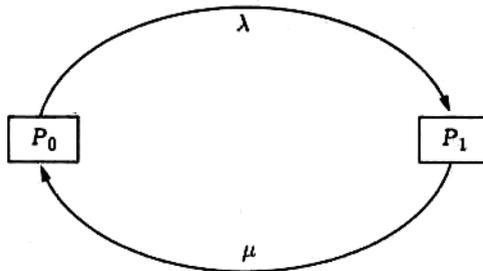


Рис. 10.2. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Используя равенство $P_0 + P_1 = 1$, получим одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_0}{dt} = \mu - (\lambda + \mu)P_0.$$

Решая его с начальным условием $P_0(0) = P_0^0$, получим выражение для вероятности свободного канала

$$P_0(t) = P_0^0 e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}).$$

При $t \rightarrow \infty$ получаем установившуюся вероятность, не зависящую от того, в каком состоянии была система в начальный момент времени:

$$P_0(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Этот же результат можно получить, не решая дифференциальных уравнений. Приравняв к нулю производные, получаем систему алгебраических линейных уравнений для установившегося состояния

$$\mu - (\lambda + \mu)P_0 = 0.$$

Ниже приведен документ Mathcad (рис. 10.3), иллюстрирующий изменение вероятностей в одноканальной системе с отказами.

В такой системе вероятность отказа составляет $P_1(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ и при

$\lambda \gg \mu$ будет близка к 1. Уменьшить эту вероятность можно, вводя дополнительные каналы обслуживания.

$\lambda := 5$ интенсивность заказов $\mu := 7$ интенсивность обслуживания $P_0 := 1$ начальная вероятность

$$P0(t) := \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[1 - e^{-(\lambda + \mu) \cdot t} \right] + P_0 \cdot e^{-(\lambda + \mu) \cdot t} \quad t := 0, 0.01.. 1 \quad P1(t) := 1 - P0(t)$$

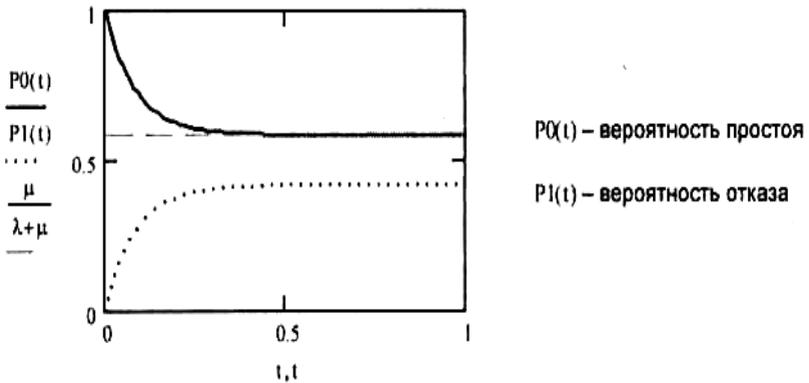


Рис. 10.3. Изменение вероятностей в одноканальной системе с отказами

Практическое занятие №11

Моделирование многоканальной системы массового обслуживания с отказами

В многоканальной СМО имеется s приборов для обслуживания заявок, что отражено в графе состояний такой системы (рис. 11.1).

Уравнения Колмогорова для многоканальной СМО с отказами будут следующими:

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \\ \frac{dP_i}{dt} = \lambda P_{i-1} - (\lambda + i\mu)P_i + (i+1)\mu P_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, s-1, \\ \frac{dP_s}{dt} = \lambda P_{s-1} - s\mu P_s. \end{cases}$$

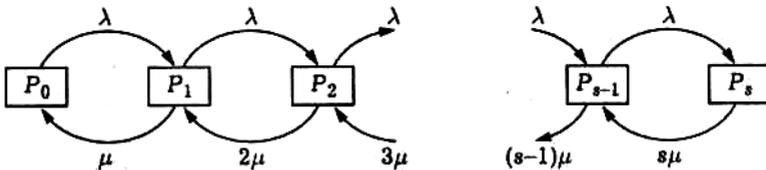


Рис. 11.1. Граф состояний для многоканальной СМО с отказами

На рис. 11.2, 11.3 приведены документы Mathcad, в котором проведено интегрирование системы уравнений Колмогорова для Многоканальной СМО с очередью. Для СМО с отказами нужно положить максимальную длину очереди $n = 0$.

В документе приведены результаты расчета для $s = 3$ с такими же параметрами интенсивности, что и в одноканальной СМО.

В установившемся режиме работы решение алгебраической системы уравнений дает следующие результаты:

$$P_i = P_0 \frac{\Psi^i}{i!}, \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\Psi^i}{i!}}, \quad \Psi = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Определим характеристики СМО:

1) вероятность проста (отсутствие заявки)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\Psi^i}{i!}};$$

2) вероятность отказа (в системе находится s заявок, все каналы заняты):

$$P_s = P_0 \frac{\Psi^s}{s!} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\Psi^i}{i!}} \frac{\Psi^s}{s!};$$

- 3) среднее число заявок, поступивших за время T , λT ;
- 4) среднее время обслуживания одной заявки $1 / \mu$;
- 5) среднее время обслуживания одним каналом заявок, поступивших за время T , $\frac{\lambda}{\mu} T = \psi T$;
- б) среднее число занятых каналов

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^s P_i.$$

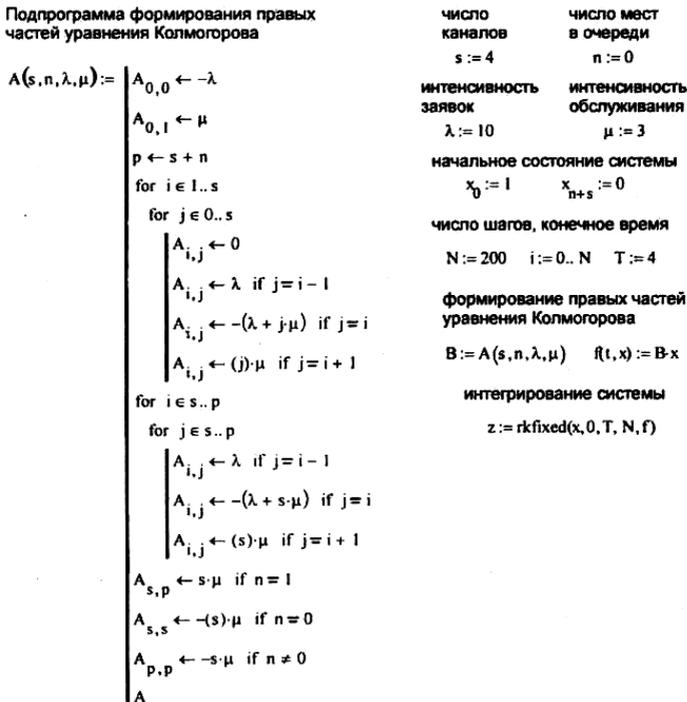


Рис. 11.2. Интегрирование системы уравнений Колмогорова для многоканальной СМО с очередью

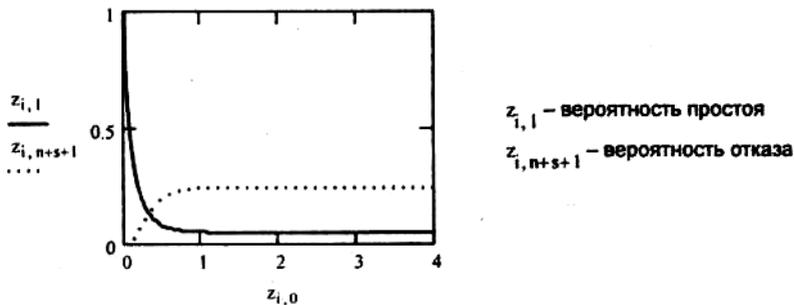


Рис. 11.3. Графики вероятностей простоя и отказа

Практическое занятие №12

Моделирование многоканальной системы массового обслуживания с очередью

В случае многоканальной СМО с очередью организуется очередь, рассчитанная на n заявок. Если число заявок превышает число каналов, следующая заявка ожидает своей очереди на обслуживание. Если число заявок в системе превышает + заявка покидает систему, граф состояний для такой СМО показан на рис. 12.1.

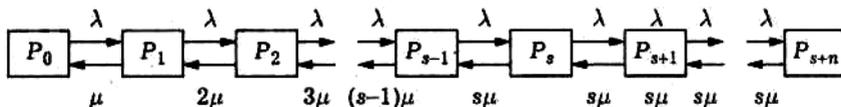


Рис. 12.1. Граф состояний для многоканальной системы с очередью

Уравнения Колмогорова для такой системы имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \\ \frac{dP_i}{dt} = \lambda P_{i-1} - (\lambda + i\mu)P_i + (i+1)\mu P_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ \frac{dP_i}{dt} = \lambda P_{i-1} - (\lambda + s\mu)P_i + s\mu P_{i+1}, \quad i = s+1, 2, \dots, s+n-1, \\ \frac{dP_{s+n}}{dt} = \lambda P_{s+n-1} - s\mu P_{s+n}. \end{array} \right.$$

Решение алгебраической системы в установившемся состоянии дает следующие соотношения:

$$\begin{cases} P_i = P_0 \frac{\Psi^i}{i!}, & 0 \leq i \leq s, \\ P_i = P_0 \left(\frac{\Psi}{s}\right)^i \frac{s^s}{s!}, & i > s, \\ P_0 = \frac{1}{\sum_{i=s}^{s+n} \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\Psi}{s}\right)^i + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\Psi^i}{i!}}, & \Psi = \frac{\lambda}{\mu}. \end{cases}$$

Для случая неограниченных мест в очереди последнее выражение записывается проще:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\Psi^s}{s! \left(1 - \frac{\Psi}{s}\right)} + \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\Psi^i}{i!}}.$$

В этих выражениях Ψ/s должно быть меньше 1, иначе приборы не успевают обработать поток заявок, и очередь неограниченно растет.

Можно выделить следующие, дополнительные по сравнению со СМО без очереди, характеристики системы:

1) среднее число заявок в очереди:

$$\bar{v} = \frac{\Psi^{s+1}}{(s-1)!(s-\Psi)^2} P_0;$$

2) общее число заявок в системе

$$\bar{n} = \bar{v} + \Psi;$$

3) среднее время ожидания заявки

$$\bar{t} = \frac{\bar{v}}{\lambda};$$

4) среднее время пребывания в системе

$$T = \frac{\bar{n}}{\lambda}$$

Произвести расчет динамики многоканальной СМО с очередью можно по программе расчета СМО, задавая параметр $n > 0$. Расчет представлен в следующем документе Mathcad (рис. 12.1).

На приведенном графике показаны результаты работы программы двухканальной СМО с тремя местами в очереди с прежними интенсивностями.

На рис. 12.2 приведена программа Mathcad для расчета основных характеристик СМО в установившемся режиме.

```

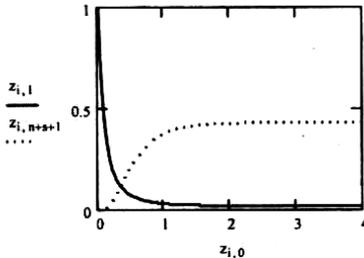
подпрограмма формирования правых
частей уравнения Колмогорова
A(s,n,λ,μ):=
  A0,0 ← -λ
  A0,1 ← μ
  p ← s + n
  for i ∈ 1..s
    for j ∈ 0..s
      Ai,j ← 0
      Ai,j ← λ if j = i - 1
      Ai,j ← -(λ + jμ) if j = i
      Ai,j ← (j)·μ if j = i + 1
  for i ∈ s..p
    for j ∈ s..p
      Ai,j ← λ if j = i - 1
      Ai,j ← -(λ + s·μ) if j = i
      Ai,j ← (s)·μ if j = i + 1
  As,p ← s·μ if n = 1
  As,s ← -(s)·μ if n = 0
  Ap,p ← -s·μ if n ≠ 0
  A

```

```

число каналов      число мест
s := 2             n := 3
интенсивность     интенсивность
заявок            обслуживания
λ := 10           μ := 3
начальное состояние системы
x0 := 1          xn+s := 0
число шагов, конечное время
N := 200          i := 0..N   T := 4
формирование правых частей
уравнения Колмогорова
B := A(s,n,λ,μ)   f(t,x) := B·x
интегрирование системы
z := rkfixed(x,0,T,N,f)

```



$z_{i,1}$ – вероятность простоя
 $z_{i,n+s+1}$ – вероятность отказа

Рис. 12.1. Расчет динамики многоканальной СМО с очередью

$s := 4$ $n := 2$ $\lambda := 15$ $\mu := 5$ $\psi := \frac{\lambda}{\mu}$ $\psi = 3$ **число каналов s должно быть >2 и > ψ**

$$P_0 := \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{s-1} \left[\frac{\psi^i}{i \prod_{k=1}^i k} + \sum_{i=s}^{s+n} \frac{s^s}{s \prod_{k=1}^s k} \left(\frac{\psi}{s} \right)^i \right]}$$

$$v := \frac{\psi^{s+1}}{(s-\psi)^2 \cdot \left(\prod_{i=1}^{s-1} i \right)} \cdot P_0$$

$i := 1..s$ $P_i := P_0 \cdot \frac{\psi^i}{i \prod_{k=1}^i k}$ $v1 := v + \psi$ $s1 := s - \psi$ $j := s + 1..s + n$

$t := \frac{v}{\lambda}$ $T := \frac{v1}{\lambda}$ $P_j := \frac{P_0 \cdot s^s}{j \prod_{k=1}^j k} \cdot \left(\frac{\psi}{s} \right)^j$

$$P = \begin{pmatrix} 0.027 \\ 0.082 \\ 0.124 \\ 0.124 \\ 0.093 \\ 0.014 \\ 1.738 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Интенсивность потока заявок	$\lambda = 15$ заявок/ч
Интенсивность обслуживания	$\mu = 5$ заявок/ч
Вероятность отказа	$P_{n+s} = 1.738 \times 10^{-3}$
Вероятность простоя	$P_0 = 0.027$
Среднее число заявок в очереди	$v = 1.112$
Общее число заявок в системе	$v1 = 4.112$
Среднее время пребывания	$T = 0.274$ ч
Среднее время ожидания	$t = 0.074$ ч

12.2. Расчет основных характеристик СМО

Литература

1. Гордеев А.С. Моделирование в агроинженерии: учебник. 2-е изд. М.: Лань, 2014. 379 с.
2. Охозрин В.А. Компьютерное моделирование в системе Mathcad: учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2006. 144 с.

Учебное издание

Дьяченко Антон Вячеславович

Моделирование в агроинженерии

методические указания для выполнения практических занятий
и самостоятельной работы
для обучающихся по направлению подготовки
35.04.06 – Агроинженерия

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 31.05.2018 г. Формат 60x84. 1/16.
Бумага офсетная. Усл. п. 2,20. Тираж 25 экз. Изд. № 6050.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365, Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ