Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

***Учебно-методическое пособие
по дисциплине
«Высшая математика»***

Брянская область 2020

УДК 517.373 (07)
ББК 22.161.1
Р 19

Ракул, Е. А. Криволинейные интегралы: учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2020. – 28 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 20.03.02 Природообустройство и водопользование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 35.03.06 Агроинженерия. Учебно-методическое пособие может быть использовано как для аудиторной работы, так и для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Высшая математика».

Рецензенты:
Панов М.В., к.т.н., доцент кафедры автоматики, физики и математики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 28.09.2020 г., протокол № 1.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги) 4

1.1 Определение и физический смысл криволинейного интеграла первого рода, его свойства 4

1.2 Вычисление криволинейного интеграла первого рода 5

1.3 Некоторые применения криволинейного интеграла первого рода 7

2 Криволинейный интеграл второго рода (по координатам) 9

2.1 Определение криволинейного интеграла второго рода 9

2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода 11

2.3 Формула Грина 15

2.4 Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования 16

Практикум по теме «Криволинейные интегралы» 17

Задания для самостоятельной работы 26

Литература 27

1 Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги)

1.1 Определение и физический смысл криволинейного интеграла первого рода, его свойства

Определение. Кривая линия L называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная прямая, непрерывно меняющаяся вдоль кривой линии. *Кусочно-гладкой кривой* называется непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких кусков кривой линии.

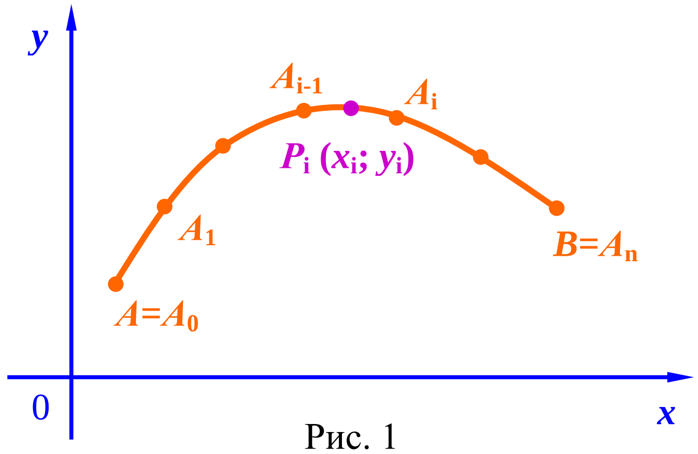

Рис. 1

Пусть на кусочно-гладкой кривой L взята дуга AB (Рис. 1), вдоль которой определена функция $f(P)=f(x,y)$. Разобьем дугу AB произвольным образом на n элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ $(i=1,...,n)$, длины которых обозначим через ΔL_i. Пусть $\max \Delta L_i$ - наибольшая из длин всех элементарных дуг. На элементарной дуге $A_{i-1}A_i$ выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$, вычислим значение функции в этой точке и умножим его на длину ΔL_i - меру элементарной дуги $A_{i-1}A_i$. Составим сумму таких произведений по всем элементарным дугам

$$S_n = f(P_1)\Delta L_1 + f(P_2)\Delta L_2 + ... + f(P_n)\Delta L_n. \tag{1}$$

Сумму S_n называют интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по дуге AB. Каждому способу разбиения дуги на элементарные части и выбору в них точек P_i отвечает определенная интегральная сумма S_n.

Определение. Если существует конечный предел при $\Delta L_i \to 0$ $(n \to \infty)$ интегральной суммы (1), который не зависит ни от способа разбиения дуги AB на элементарные части, ни от выбора точки P_i в них, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y)$ по дуге AB и обозначается символом

$$\int\limits_{AB} f(P)dL \text{ или } \int\limits_{AB} f(x, y)dL.$$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)dL = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{2}$$

Криволинейный интеграл первого рода называют также *криволинейным интегралом по длине дуги*.

Следует иметь в виду, что в выражении $\int\limits_{AB} f(x,\ y)dL$ переменные x и y не независимы, а связаны условием: точка $(x,\ y)$ лежит на кривой AB.

Интеграл (2) в задачах физики и механики численно выражает массу материальной кривой AB, которая распределена вдоль нее с линейной плотностью $\rho = f(x,\ y)$. Следовательно,

$$m = \int\limits_{AB} f(x,\ y)dL. \tag{3}$$

Свойства криволинейных интегралов аналогичны свойствам определенных интегралов. Вместе с тем следует выделить особое свойство.

Теорема. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не меняет своего значения, т.е.

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)dL = \int\limits_{BA} f(x,\ y)dL.$$

1.2 Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла, если воспользоваться выведенными в дифференциальном исчислении формулами для дифференциала длины дуги в декартовых координатах (на плоскости)

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Если кривая AB задана в пространстве, то дифференциала длины дуги имеет вид

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}\,.$$

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода пользуются одной из следующих формул:

$\boxed{1.}$ Если гладкая кривая AB задана на плоскости параметрическими уравнениями вида $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$, то $dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt$, тогда дифференциала длины дуги $dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$. Поэтому

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)dL = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),\ y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,. \qquad (4)$$

$\boxed{2.}$ Если гладкая кривая AB задана на плоскости уравнением $y = \varphi(x)$, где $a \le x \le b$, то $dL = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx$, и криволинейный интеграл равен

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)dL = \int\limits_{a}^{b} f(x,\ \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx\,. \qquad (5)$$

$\boxed{3.}$ Если гладкая кривая AB задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, то $dL = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$. Так как формулы связи декартовой системы координат и полярной имеют вид: $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$, то криволинейный интеграл равен

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)dL = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi\,. \qquad (6)$$

Сведение криволинейного интеграла к определенному интегралу по идее близко к замене переменной в определенном интеграле. Однако следует иметь в виду одно отличие. После замены переменной в определенном интеграле может случиться, что нижний предел интегрирования оказывается больше верхнего. При вычислении же криволинейного интеграла *всегда нижний предел должен быть меньше верхнего*. Если линия AB кусочно-гладкая, то ее нужно разбить на отдельные части и интеграл вычислить, как сумму интегралов, взятых по этим частям кривой.

Аналогично определяется и физически интерпретируется криволинейный интеграл первого рода от функции $f(P) = f(x, y, z)$, заданной вдоль пространственной кусочно-гладкой линии AB. Если гладкая кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta,$$

то $dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt,\ dz = z'(t)dt$ и $dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$. Тогда

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dL = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt. \qquad (7)$$

1.3 Некоторые применения криволинейного интеграла первого рода

Криволинейные интегралы, как и все другие определенные интегралы, служат для вычисления различных геометрических и физических величин.

1. *Длина дуги* AB плоской или пространственной линии:

$$L = \int\limits_{AB} dL.$$

2. *Масса* материальной дуги AB с линейной плотностью вещества в каждой точке дуги $\rho(x, y)$

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x, y)dL.$$

3. Вычисление *координат центра тяжести* материальной кривой.

Тогда координаты центра тяжести $C(x_c; y_c; z_c)$ кривой AB определяются формулами:

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} x\rho(x, y, z)dL,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\rho(x, y, z)dL,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} z\rho(x, y, z)dL,$$

где m – масса кривой AB.

4. Вычисление *моментов инерции* материальной кривой.

Пусть масса m распределена вдоль кривой AB с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$.

Моменты инерции кривой AB относительно координатных плоскостей:

$$I_{xy} = \int\limits_{AB} z^2 \rho(x, y, z) dL, \quad I_{xz} = \int\limits_{AB} y^2 \rho(x, y, z) dL, \quad I_{yz} = \int\limits_{AB} x^2 \rho(x, y, z) dL.$$

Моменты инерции кривой AB относительно осей координат:

$$I_x = \int\limits_{AB} \left(y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dL,$$
$$I_y = \int\limits_{AB} \left(x^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dL,$$
$$I_z = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y, z) dL.$$

Момент инерции кривой AB относительно начала координат:

$$I_0 = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) dL.$$

2 Криволинейный интеграл второго рода (по координатам)

2.1 Определение криволинейного интеграла второго рода

Пусть на плоскости задана гладкая кривая линия *MN*, установим на ней определенное направление движения, которое происходит от *M* к *N*. Кривую с установленным на ней направлением движения назовем *ориентированной кривой*.

Пусть на кривой *MN* заданы две функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, иначе говоря, задана вектор-функция $\overline{F} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$. Разобьем произвольным образом дугу *MN* на n малых дуг точками $M_0 = M < M_1 < M_2 < \ldots < M_{n-1} < M_n = N$, длины которых обозначим ΔL_i $(i = 1,\ldots, n)$. На каждой дуге выберем по произвольной точке $K_i(\eta_i;\ \xi_i)$. Значения функции в точках K_i будем умножать теперь не на длины частичных дуг ΔL_i $(i = 1,\ldots, n)$, а на их проекции на координатные оси: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ (Рис. 2).

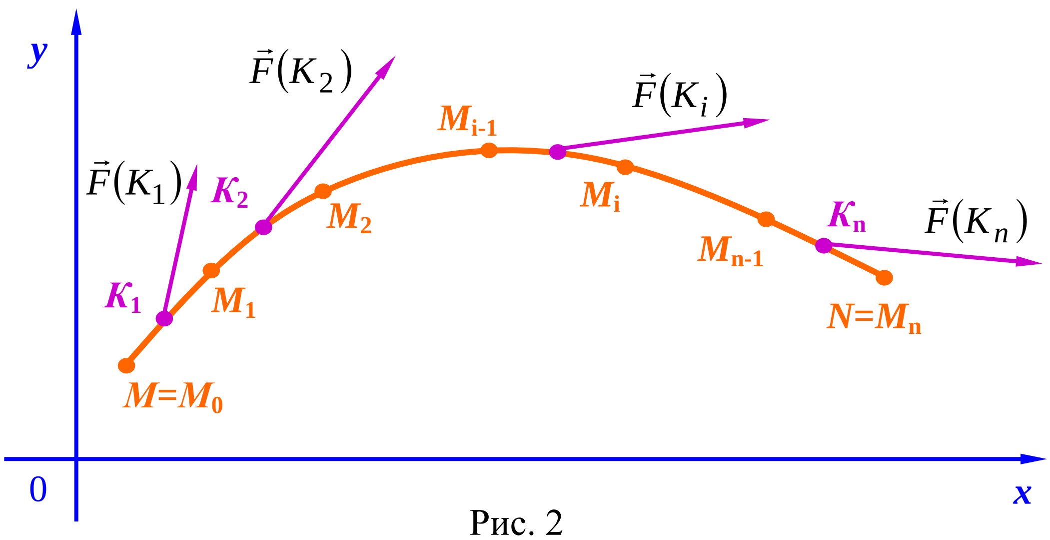

Рис. 2

Составим сумму вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left[P(\eta_i;\ \xi_i)\Delta x_i + Q(\eta_i;\ \xi_i)\Delta y_i \right] \qquad (1)$$

Сумму (1) называют *интегральной суммой* для вектор-функции $\overline{F}(x,\ y)$ по кривой *MN*.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (1) при $n \to \infty$, не зависящий ни от способа разбиения дуги *MN* на элементарные части, ни от выбора в каждой из них точки K_i, то этот предел называют *криволинейным интегралом второго рода* от вектор-функции $\overline{F}(x,\ y)$ по кривой *MN* и обозначают символом $\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Итак, по определению

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} S_n. \qquad (2)$$

Линия *MN* называется *линией* или *контуром интегрирования*, точка *M* – *начальной*, точка *N* – *конечной* точкой интегрирования.

Замечание 1. По традиции для выражения, стоящего слева, скобки не пишутся и предполагается, что интеграл относится ко всей сумме.

Замечание 2. Если кривая $L = MN$ замкнутая, то для обозначения интеграла используют символ $\oint\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Определение. Если $Q(x,y) \equiv 0$, то интеграл принимает вид $\int\limits_{MN} P(x,y)dx$ и называется криволинейным интегралом по координате x. Если $P(x,y) \equiv 0$, то интеграл принимает вид $\int\limits_{MN} Q(x,y)dy$ и криволинейным интегралом по координате y.

Таким образом, интеграл (2) может быть записан в виде суммы двух криволинейных интегралов

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{MN} P(x,y)dx + \int\limits_{MN} Q(x,y)dy.$$

Поэтому его называют еще *составным криволинейным интегралом по координатам*.

Подынтегральное выражение в левой части последнего равенства есть скалярное произведение вектора $\overline{F} = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ и дифференциала $\overline{dr} = dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j}$ радиуса-вектора $\overline{r}$ переменной точки *K* кривой *MN*. Поэтому криволинейный интеграл от вектор-функции $\overline{F}$ по кривой *MN* можно записать в векторной форме: $\int\limits_{MN} \overline{F} \cdot \overline{dr}$. Этот интеграл называют также криволинейным интегралом вектора $\overline{F}(\overline{r})$.

Определение. Пусть L – замкнутая кривая, тогда криволинейный интеграл $\oint\limits_{L} \overline{F} \cdot \overline{dr}$ называют *циркуляцией* вектора $\overline{F}$ по замкнутому контуру.

Если вектор $\overline{F}(x, y)$ задает силовое поле, то криволинейный интеграл второго рода выражает работу этого поля вдоль кривой *MN*:

$$A = \int\limits_{MN} P(x, y)dx + Q(x, y)dy\,. \tag{3}$$

В этом состоит простейший *физический смысл* криволинейного интеграла второго рода.

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода для вектор-функции $\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\,\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$, заданной вдоль пространственной кривой *MN*, который аналитически записывают так:

$$\int\limits_{MN} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int\limits_{MN} \overline{F} \cdot \overline{dr}\,.$$

2.2 Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема. Пусть кривая *MN* задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, причем функции $x(t),\ y(t)$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка на отрезке $[\alpha; \beta]$, где $\alpha = t_M$ и $\beta = t_N$ - значения параметра *t*, соответствующие точкам *M* и *N*. Тогда для всякой вектор-функции $\overline{F} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ непрерывной вдоль кривой *MN*, существует криволинейный интеграл и имеет место равенство

$$\int\limits_{MN} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)]dt\,. \tag{4}$$

Сформулированная теорема обобщается аналогичным образом на пространственный случай, когда линия *MN* задана уравнениями

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ \alpha \le t \le \beta\,.$$

В этом случае имеет место равенство

$$\int\limits_{MN} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\right]dt$$

Рассмотрим частные случаи формулы (4):

$\boxed{1.}$ Пусть кривая MN задана уравнением $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, причем $a = x_M$, $b = x_N$. Тогда $dy = y'(x)dx$, и формула (4) приобретает вид

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)\right]dx. \qquad (5)$$

$\boxed{2.}$ Пусть кривая MN задана уравнением $x = x(y)$, где $c \le y \le d$, причем $c = y_M$, $d = y_N$. Тогда $dx = x'(y)dy$, и формула (4) приобретает вид

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} \left[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\right]dy. \qquad (6)$$

Замечание 1. Определенный интеграл является частным случаем криволинейного интеграла по координате, у которого линией интегрирования служит прямолинейный отрезок оси координат.

Замечание 2. В случае замкнутого контура интегрирования в формулах (4), (5), (6) условимся брать направление движения по кривой L так, чтобы область, ограниченная этой кривой, оставалась слева (Рис. 3). Такое направление интегрирования называют *положительным*. Перемещение в противоположном направлении называют *отрицательным*.

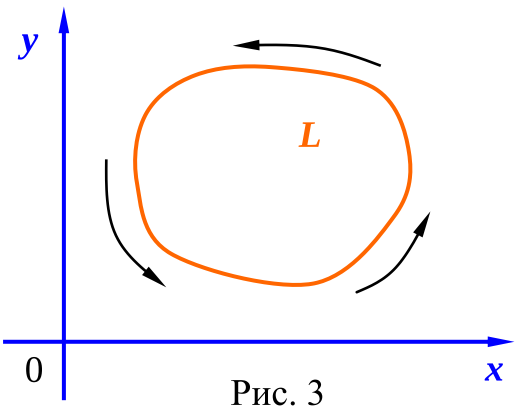

Рис. 3

Криволинейный интеграл второго рода, наряду с теми свойствами, которые аналогичны свойствам интеграла первого рода, обладает следующим отличительным свойством: *при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл изменяет свой знак на противоположный*, т.е.

$$\int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{NM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

$$\oint\limits_{L+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\oint\limits_{L-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

(здесь $L+$ замкнутый контур, обходимый в положительном направлении, $L-$ контур, обходимый в отрицательном направлении).

Пример 2.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2dx + xydy$, где AB – четверть эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Так как $x'(t) = -a\sin t,\ \ y'(t) = b\cos t$, то по формуле (4) получаем:

$$\int\limits_{AB} x^2dx + xydy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a^2\cos^2 t(-a\sin t) + a\cos t \cdot b\sin t \cdot b\cos t\right]dt =$$

$$= \left(ab^2 - a^3\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin tdt = \left| \begin{array}{l} u = \cos t \\ du = -\sin tdt \\ \sin tdt = -du \\ \alpha = \cos 0 = 1 \\ \beta = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = \left(ab^2 - a^3\right)\int\limits_1^0 u^2(-du) =$$

$$= \left(ab^2 - a^3\right)\int\limits_0^1 u^2du = \left(ab^2 - a^3\right)\frac{u^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(ab^2 - a^3\right)$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} 3x^2ydx + \left(x^3 + 1\right)dy$, где кривая AB:

1) AB – прямая $y = x$, соединяющая точки $A(0;0)$ и $B(1;\ 1)$;

2) AB – парабола $y = x^2$, соединяющая те же точки;

3) AB – ломаная, проходящая через точки $(0;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 1)$ (Рис. 4).

Решение.

1) Так как $y' = x'dx = dx$, то

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy = \int\limits_0^1 (3x^3 + x^3 + 1)dx = \int\limits_0^1 (4x^3+1)dx = 4\int\limits_0^1 x^3 dx + \int\limits_0^1 dx =$$

$$= 4 \cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + x\Big|_0^1 = 1 + 1 = 2.$$

2) Так как $y' = \left(x^2\right)' dx = 2xdx$, то

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy = \int\limits_0^1 \left(3x^2 \cdot x^2 + (x^3+1)\cdot 2x\right)dx = \int\limits_0^1 (5x^4 + 2x)dx =$$

$$= 5\int\limits_0^1 x^4 dx + 2\int\limits_0^1 xdx = 5 \cdot \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 + 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1 + 1 = 2.$$

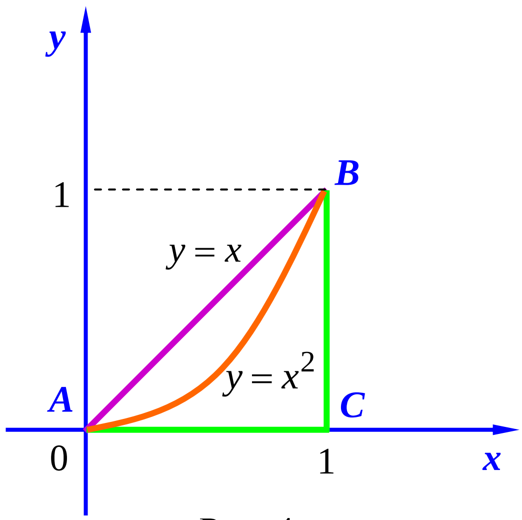

Рис. 4

3) Согласно свойству криволинейного интеграла, получим:

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy = \int\limits_{AC} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy +$$

$$+ \int\limits_{CB} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy$$

Участок ломаной AC: $y = 0$, $0 \le x \le 1$, тогда $dy = 0$, и

$$\int\limits_{AC} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy = \int\limits_0^1 3x^2 \cdot 0dx + (x^3+1)\cdot 0 = 0$$

Участок ломаной CB: $x = 1$, $0 \le y \le 1$, тогда $dx = 0$, и

$$\int\limits_{CB} \left(3y \cdot 0 + (1^3+1)\right)dy = \int\limits_0^1 2dy = 2y\Big|_0^1 = 2.$$

$$\int\limits_{AB} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy = \int\limits_{AC} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy + \int\limits_{CB} 3x^2 y dx + (x^3+1)dy = 0 + 2 = 2.$$

2.3 Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по некоторой плоской области D и криволинейным интегралом по границе C этой области. Рассмотрим эту формулу для ограниченной замкнутой области, граница которой пересекается с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках. Для краткости будем называть такие области *правильными*. Линию, ограничивающую область, будем предполагать *гладкой* или *кусочно-гладкой*.

***Теорема*.** Пусть D – правильная ограниченная замкнутая область и пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в данной области. Тогда имеет место *формула Грина*:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C Pdx + Qdy, \qquad (7)$$

где C – граничный контур области D, который обходится в положительном направлении.

Замечание. Формула Грина остается справедливой для всякой ограниченной замкнутой области D, которую можно разбить проведением дополнительных линий на конечное число правильных областей. Более того, можно доказать, что формула Грина справедлива для области D, ограниченной произвольной гладкой или кусочно-гладкой кривой C.

Пример 2.3. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy$, где C – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение.

Функции $P(x,y) = x - y$, $Q(x,y) = x + y$ и их производные $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ непрерывны в замкнутом круге D: $x^2 + y^2 \le R^2$. Следовательно, применима формула Грина, согласно которой имеем:

$$\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy = \iint_D [1-(-1)]dxdy = 2\iint_D dxdy = 2S = 2\pi R^2,$$

где S – площадь круга D: $x^2 + y^2 \le R^2$, т.е. $S = \pi R^2$.

2.4 Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть задана плоская область D и в ней определены непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Выясним, при каких условиях криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad (8)$$

при произвольно фиксированных точках $A \in D$ и $B \in D$ не зависит от выбора кривой AB, соединяющей эти точки и лежащей в области D.

Лемма. Для того чтобы интеграл (8) не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\oint\limits_{L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (9)$$

где L – произвольный замкнутый контур, лежащий в области D.

Лемма дает необходимое и достаточное условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, но это условие трудно проверяемо. Если сузить класс рассматриваемых областей, то можно получить более простой и эффективный критерий.

***Определение*.** Плоская область D называется *односвязной*, если каков бы ни был замкнутый контур $L \subset D$, ограниченная этим контуром часть плоскости целиком принадлежит области D.

***Теорема*.** Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области D. Для того чтобы криволинейный интеграл (9) при произвольно фиксированных точках $A \in D$ и $B \in D$ не зависел от пути интегрирования $AB \subset D$, необходимо, а если область D односвязная, то и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

ПРАКТИКУМ ПО ТЕМЕ «КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

Задача 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy^2 dL$, где $L-$ отрезок прямой между точками A (0,0), B(4,3).

Решение.

Составим уравнение прямой AB по двум точкам: $\dfrac{x-0}{4-0}=\dfrac{y-0}{3-0}$; $y=\dfrac{3}{4}x$.

Так как $y'=\left(\dfrac{3}{4}x\right)'=\dfrac{3}{4}$, то $dL=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}\,dx=\sqrt{\dfrac{25}{16}}dx=\dfrac{5}{4}dx$.

Тогда для исходного интеграла получим:

$$\int\limits_L xy^2 dL=\int\limits_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2\frac{5}{4}dx=\frac{45}{64}\int\limits_0^4 x^3dx=\frac{45}{64}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^4=\frac{45}{64}\cdot 64=45.$$

Задача 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}dL$, где $L-$дуга кривой $x=\ln y$ между точками, для которых $y=1$, $y=4$.

Решение.

Так как кривая задана уравнением $x=\varphi(y)$, то дифференциал ее дуги выражается формулой $dL=\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy$. Так как $x'=(\ln y)'\,dy=\dfrac{1}{y}dy$, то $dL=\sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}}dy=\dfrac{1}{y}\sqrt{y^2+1}dy$. Тогда для исходного интеграла получим:

$$\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}dL=\int\limits_1^4 y\sqrt{y^2+1}\cdot\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}\,dy=\int\limits_1^4\left(y^2+1\right)dy=\frac{y^3}{3}\Bigg|_1^4+y\Big|_1^4=$$

$$=\frac{1}{3}(64-1)+(4-1)=21+3=24.$$

Задача 3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x+y)dL$, где L – лепесток лемнискаты $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенный в первой координатной четверти.

Решение.

Линия L задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой $dL = \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$. Так как $\rho'(\varphi) = a \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot \cos 2\varphi \cdot 2 = \dfrac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, то

$$dL = \sqrt{a^2 \sin 2\varphi + \frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{\frac{a^2(\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi)}{\sin 2\varphi}}\, d\varphi = \frac{a\, d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{a^2 d\varphi}{\rho}.$$

Заметим, что $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ (т.к. задана первая координатная четверть), и $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. Тогда для исходного интеграла получим

$$\int\limits_L (x+y)dL = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\cdot\frac{a^2 d\varphi}{\rho} = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi +$$

$$+ a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = a^2 \sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - a^2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) =$$

$$= a^2 + a^2 = 2a^2$$

Задача 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy\, dL$, где L – контур прямоугольника с вершинами $O(0;0),\ A(5;\ 0),\ B(5;\ 3),\ C(0;\ 3)$.

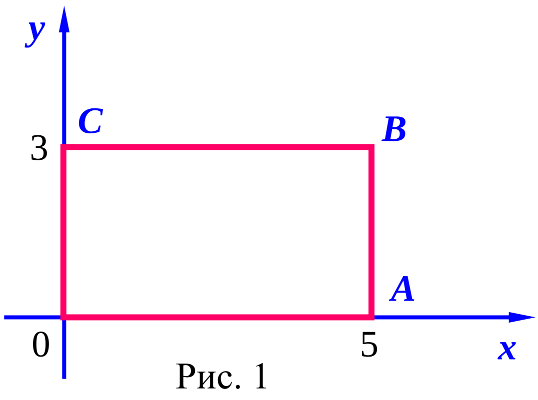

Рис. 1

Решение.

Вычислим интеграл по каждому из отрезков $OA,\ AB,\ BC,\ OC$.

а) OA: $y = 0,\ \ 0 \le x \le 5,\ \ y' = 0$ и $dL = \sqrt{1+0}dx = dx$. Тогда

$$I_{OA} = \int\limits_0^5 x \cdot 0\, dx = 0.$$

б) AB: $x=5,\ 0\le y\le 3,\ \ x'=0$ и $dL=\sqrt{1+0}\,dy=dy$. Тогда

$$I_{AB}=\int_0^3 5y\,dy=5\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^3=\frac{45}{2}.$$

в) BC: $y=3,\ 0\le x\le 5,\ \ y'=0$ и $dL=\sqrt{1+0}\,dx=dx$. Тогда

$$I_{BC}=\int_0^5 3x\,dx=3\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5=\frac{75}{2}.$$

г) OC: $x=0,\ 0\le y\le 3,\ \ x'=0$ и $dL=\sqrt{1+0}\,dy=dy$. Тогда

$$I_{OC}=\int_0^3 0\cdot y\,dy=0.$$

Тогда для исходного интеграла получим:

$$\int_L xy\,dL=I_{OA}+I_{AB}+I_{BC}+I_{OC}=\frac{45}{2}+\frac{75}{2}=60.$$

Задача 5. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)dL$, где L – часть винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi$.

Решение.

Так как $x'(t)=-a\sin t,\ \ y'(t)=a\cos t,\ \ z'(t)=b$, тогда дифференциал дуги

$$dL=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

Тогда для исходного интеграла получим:

$$\int_L\left(x^2+y^2+z^2\right)dL=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)dt=a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}dt+b^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}t^2dt=$$

$$=a^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot t\Big|_0^{2\pi}+b^2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{2\pi}=2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}+\frac{8b^2\pi^3}{3}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Задача 6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, где AB – дуга параболы $y=x^2$, пробегаемая от точки $A(-1;\,1)$ до точки $B(1;\,1)$.

Решение.

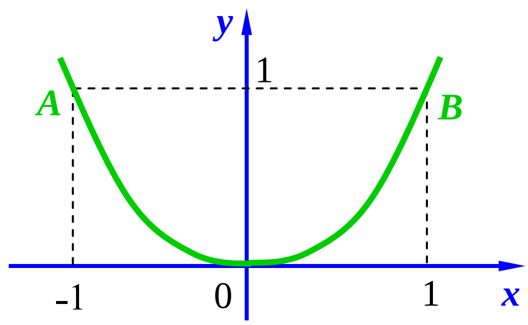

Рис. 2

Выполним чертеж (Рис. 2). Так как $dy=\left(x^2\right)'dx=2xdx$, то для исходного интеграла получим:

$$\int\limits_{AB}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2x\cdot x^2+\left(\left(x^2\right)^2-2x\cdot x^2\right)\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}x^2dx-2\int\limits_{-1}^{1}x^3dx+2\int\limits_{-1}^{1}x^5dx-4\int\limits_{-1}^{1}x^4dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}-2\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1}+2\cdot\frac{x^6}{6}\Bigg|_{-1}^{1}-4\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}(1+1)-\frac{1}{2}(1-1)+\frac{1}{3}(1-1)-\frac{4}{5}(1+1)=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{8}{5}=-\frac{14}{15}.$$

Задача 7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L}(x^3+y)dx+(x+y^3)dy$, где L – ломаная ABC, соединяющая точки $A(1;\,1)$, $B(3;\,1)$, $C(3;\,5)$.

Решение.

Выполним чертеж ломаной (Рис. 3).

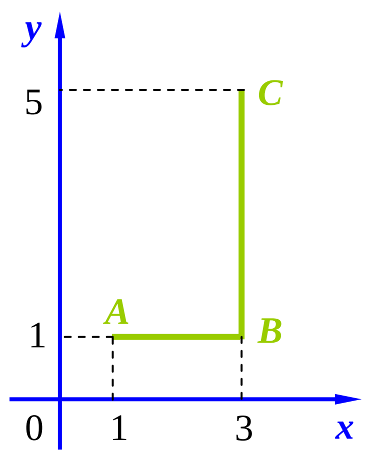

Рис. 3

Так как контур интегрирования L состоит из отрезков AB и BC, то по свойству криволинейного интеграла имеем:

$$\int\limits_L \left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy=$$
$$=\int\limits_{AB}\left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy+$$
$$+\int\limits_{BC}\left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy$$

Отрезок AB: $y=1,\quad 1\le x\le 3$, тогда $dy=0$.

$$\int\limits_{AB}\left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy=\int\limits_1^3\left(x^3+1\right)dx=\int\limits_1^3 x^3dx+\int\limits_1^3 dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3+\left.x\right|_1^3=$$
$$=\frac{1}{4}(81-1)+(3-1)=22.$$

Отрезок BC: $x=3,\ 1\le y\le 5$, тогда $dx=0$.

$$\int\limits_{BC}\left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy=\int\limits_1^5\left(3+y^3\right)dy=3\int\limits_1^5 dy+\int\limits_1^5 y^3dy=\left.3y\right|_1^5+\left.\frac{y^4}{4}\right|_1^5=$$
$$=3(5-1)+\frac{1}{4}(625-1)=12+156=168.$$

Тогда $\int\limits_L\left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy=22+168=190$.

Задача 8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L y\,dx+xdy$, где $L-$дуга астроиды $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

Астроида изображена на рисунке 4. Интегрирование ведется по её участку от точки *A* до точки *B*.

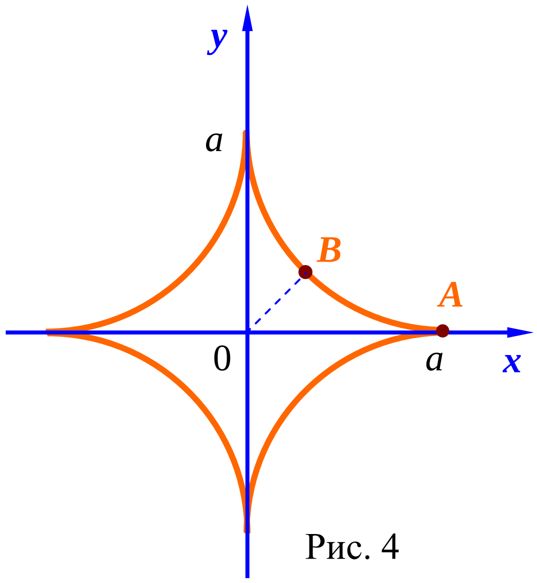

Рис. 4

Из параметрических уравнений астроиды находим:

$$dx = \left(a\cos^3 t\right)' dt = -3a\cos^2 t \sin t\, dt\,,$$
$$dy = \left(a\sin^3 t\right)' dt = 3a\sin^2 t \cos t\, dt\,.$$

Следовательно, для исходного криволинейного интеграла получим:

$$\int\limits_L y\,dx + xdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a\sin^3 t\cdot\left(-3a\cos^2 t\sin t\right) + a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t\right)dt =$$

$$= 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^4 t\sin^2 t - \sin^4 t\cos^2 t\right)dt = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)dt =$$

$$= 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\cos 2t\,dt = \frac{3a^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\cos 2t\,dt = \left|\begin{array}{l} u = \sin 2t \\ du = 2\cos 2t\,dt \\ \cos 2tdt = \frac{1}{2}du \\ \alpha = \sin 0 = 0 \\ \beta = \sin 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{3a^2}{4}\int\limits_0^1 u^2\cdot\frac{1}{2}du = \frac{3a^2}{8}\cdot\left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{a^2}{8}.$$

Задача 9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L y^2dx + \left(x^2 + z\right)dy + \left(x + y + z^2\right)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;\ 0;\ 2)$ до точки $B(3;\ 1;\ 4)$.

Решение.

Составим параметрические уравнения прямой AB в пространстве: $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{4-2}=t$, откуда $x=1+2t,\quad y=t,\quad z=2+2t$. Из этих уравнений следует, что точке A соответствует значение параметра $t_1=0$, а точке B – значение $t_2=1$.

Далее находим $dx=2dt,\ dy=dt,\ dz=2dt$. Тогда для исходного интеграла получим:

$$\int\limits_L y^2dx+\left(x^2+z\right)dy+\left(x+y+z^2\right)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 t^2\cdot 2dt+\left((1+2t)^2+2+2t\right)dt+\left(1+2t+t+(2+2t)^2\right)\cdot 2dt=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2t^2+1+4t+4t^2+2+2t+2+6t+8+16t+8t^2\right)dt=\int\limits_0^1\left(14t^2+28t+13\right)dt=$$

$$=14\int\limits_0^1 t^2dt+28\int\limits_0^1 tdt+13\int\limits_0^1 dt=14\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1+28\cdot\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1+13t\Big|_0^1=\frac{14}{3}+14+13=\frac{95}{3}.$$

Задача 10. Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл $\oint\limits_L\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, где L – окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, пробегаемая против часовой стрелки.

Решение.

Пусть $P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$. Проверим выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Имеем: $\frac{\partial P}{\partial y}=x\cdot\left(-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot 2y=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

$\frac{\partial Q}{\partial x}=y\cdot\left(-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot 2x=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. Равенство $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется, значит, $\oint\limits_L\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=0$.

Задача 11. Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл $\oint\limits_L \left(e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2\right)dx + \left(\sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}\right)dy$, где L – контур, ограничивающий область $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2$, пробегаемый в положительном направлении.

Решение.

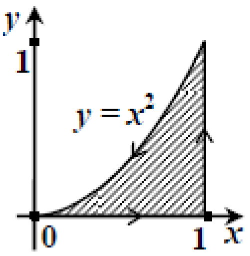

Рис. 5

Построим контур L (Рис. 5).
Пусть

$$P(x,\ y) = e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2,$$
$$Q(x,\ y) = \sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}.$$

Проверим выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = -10y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x$, условие не выполняется. Применим формулу Грина:

$$\oint\limits_L \left(e^{x^2} - 5y^2 - 7\sin x^2\right)dx + \left(\sin y^2 + 2x^2 - \sqrt[3]{1+2y^2}\right)dy = \iint\limits_D (4x + 10y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (4x + 10y)dy = \int_0^1 dx \left(4x\int_0^{x^2} dy + 10\int_0^{x^2} ydy\right) = \int_0^1 dx \left(4x \cdot y\Big|_0^{x^2} + 10 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(4x^3 + 5x^4\right)dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + 5 \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = 1 + 1 = 2.$$

Задача 12. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L 2\left(x^2 + y^2\right)dx + (x+y)^2\, dy$, где L – контур треугольника ΔABC с вершинами в точках $A(1;\ 1),\ B(2;\ 2),\ C(1;\ 3)$.

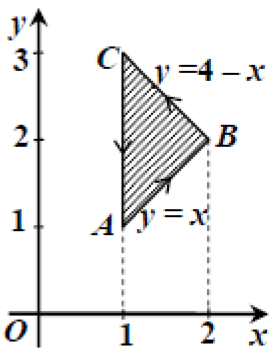

Рис. 6

Решение.

Построим треугольник ΔABC (Рис. 6). Запишем уравнения сторон треугольника: $y = x$ - сторона AB, $y = 4 - x$ - сторона BC.

Пусть $P(x, y) = 2\left(x^2 + y^2\right),\ Q(x, y) = (x+y)^2$, тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y).$$

Применим формулу Грина:

$$\oint_L 2\left(x^2 + y^2\right)dx + (x+y)^2\, dy = \iint_D \left(2(x+y) - 4y\right)dxdy = \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (2x - 2y)dy =$$

$$= \int_1^2 dx \left(2x \int_x^{4-x} dy - 2 \int_x^{4-x} ydy \right) = \int_1^2 dx \left(2x \cdot y\Big|_x^{4-x} - 2 \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{4-x} \right) =$$

$$= \int_1^2 \left(2x(4-x-x) - \left((4-x)^2 - x^2\right)\right)dx = 4\int_1^2 \left(4x - x^2 - 4\right)dx = 16\int_1^2 xdx - 4\int_1^2 x^2 dx -$$

$$-16\int_1^2 dx = 16 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 - 4 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 - 16 \cdot x\Big|_1^2 = 8(4-1) - \frac{4}{3}(8-1) - 16(2-1) = 24 - \frac{28}{3} - 16 =$$

$$= -\frac{4}{3}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

1) $\int\limits_L \frac{dL}{\sqrt{5}(x-y)}$, где L – отрезок прямой, заключенный между точками $A(0;\ 4)$ и $B(4;\ 0)$.

2) $\int\limits_L y dL$, где L – дуга параболы $y^2 = 8x$ между точками $O(0;0)$ и $A(2;4)$.

3) $\int\limits_L y dL$, где L – дуга астроиды $x = \cos^3 t,\ \ y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

4) $\int\limits_L arctg \frac{y}{x} dL$, где L – дуга кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

5) $\int\limits_L y dL$, где L – контур прямоугольника с вершинами $0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2$.

6) $\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dL$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2y$.

2. Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

1) $\int\limits_L (x^2 - y^2)dx + xydy$, где L – отрезок прямой между точками $A(1;\ 1),\ B(3;\ 4)$.

2) $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где L – дуга параболы $x^2 = 4y$ от точки $A(2;\ 1)$ до точки $B(4;\ 4)$.

3) $\int\limits_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, где L – четверть окружности $x^2 + y^2 = 16$, лежащая в III координатной четверти, пробегаемая против часовой стрелки.

4) $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, где L – ломаная ABC, соединяющая точки $A(1;\ 2),\ B(3;\ 2),\ C(3;\ 5)$.

5) $\int\limits_L xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, где L – отрезок прямой, заключенной между точками $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$.

6) $\oint\limits_L xdy$, где L – контур треугольника, образованного прямыми $y = x$, $x = 2$, $y = 0$ (интегрирование вести в положительном направлении).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бермант А.Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов. СПб.: Лань, 2010. 736 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1985. 384 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. В 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 253 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437223
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник: учеб. пособие для академического бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 192 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/433433
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1990. 624 с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Физматлит, 2003. 336 с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров / под ред. А.Н. Тихонова. М.: Юрайт, 2012. 607 с.
8. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2003. 304 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

Криволинейные интегралы

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Высшая математика»

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к 20.11.2020 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 1,63. Тираж 25 экз. Изд. № 6755.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ