ФГБОУ ВО «Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра математики, физики и информатики

Ракул Е.А.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СПЕЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Методические указания для бакалавров очной формы обучения направлений подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Брянская область 2018 г.

УДК 51 (076)
ББК 22.1
Р 19

Ракул, Е. А. **Задания для самостоятельной работы по дисциплине «Специальная математика»:** методические указания для бакалавров очной формы обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств / Е. А. Ракул. − Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2018. – 43 с.

Рецензенты:
Рыжик В.Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры математики, физики и информатики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования, протокол № 7 от 01.06.2018 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.. 4

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 5

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 23

Приложение 1 37

Приложение 2 41

ЛИТЕРАТУРА 42

ВВЕДЕНИЕ

Операционное (символическое) исчисление применяется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и интегральных уравнений типа свёртки, к которым приводятся задачи по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники. В учебно-методическом пособии приведены основные понятия операционного исчисления на основе преобразования Лапласа, показано его приложение при решении дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрены различные способы нахождения оригиналов для заданных изображений и способы нахождения изображений для заданных оригиналов. Подобраны 25 вариантов заданий для самостоятельного решения, которые помогут в отработке навыка нахождения оригиналов и изображений.

Правила выполнения и оформления работ

1. Каждая работа должна быть выполнена в отдельной тетради.
2. На титульном листе должны быть написаны фамилия, инициалы, номер варианта, название дисциплины, название учебного заведения.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, в строгом соответствии с вариантом. Номер варианта необходимо узнать у преподавателя.
4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания номеров задания, сохраняя номера задач.
5. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, делая необходимые чертежи.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1

Пользуясь свойством линейности найти изображение функции $f(t)$

1.1	$f(t)=5sh\,t-4\cos t$	**1.14**	$f(t)=3ch\,t+2sht$
1.2	$f(t)=5\cos t-7\sin t$	**1.15**	$f(t)=3+2e^{t}$
1.3	$f(t)=12+\frac{1}{3}\cos t$	**1.16**	$f(t)=3t-\frac{5}{7}\sin t$
1.4	$f(t)=3t-4\sin t$	**1.17**	$f(t)=5\cos t-1$
1.5	$f(t)=16+2\sin t$	**1.18**	$f(t)=-5t+14cht$
1.6	$f(t)=\frac{1}{2}(ch\,t+\cos t)$	**1.19**	$f(t)=\frac{1}{2}(ch\,t-\cos t)$
1.7	$f(t)=\frac{1}{2}(sh\,t+\sin t)$	**1.20**	$f(t)=\frac{1}{2}(sh\,t-\sin t)$
1.8	$f(t)=e^{t}+2sh\,t$	**1.21**	$f(t)=e^{t}-3t$
1.9	$f(t)=e^{t}+5\sin t$	**1.22**	$f(t)=15e^{t}-7$
1.10	$f(t)=12-\frac{2}{3}\sin t$	**1.23**	$f(t)=\frac{4}{5}(\cos t-2)$
1.11	$f(t)=3+2e^{4t}$	**1.24**	$f(t)=5ch\,t+1$
1.12	$f(t)=t^{2}-4\sin t$	**1.25**	$f(t)=2e^{t}-4ch\,t$
1.13	$f(t)=8(11\cos t-2)$		

Задание 2

Пользуясь теоремой подобия, найти изображение функции $f(t)$.

2.1	$f(t)=\sin 2t-\cos 3t$	**2.14**	$f(t)=5\sin 13t+ch\ 4t$
2.2	$f(t)=\sin 7t-2$	**2.15**	$f(t)=7\sin 9t+e^{t}$
2.3	$f(t)=\sin 23t-5\sin 2t$	**2.16**	$f(t)=\cos 5t+13$
2.4	$f(t)=4\cos 6t-33$	**2.17**	$f(t)=\cos\ 2t+12$
2.5	$f(t)=1-4\cos\ 4t$	**2.18**	$f(t)=-\cos\ 10t-10\cos\ 4t$
2.6	$f(t)=sh\,12t+5\cos\ 5t$	**2.19**	$f(t)=sh\ 7t-\cos\ 21t$
2.7	$f(t)=sh\ 4t+\cos\ 11t$	**2.20**	$f(t)=3\,ch\,13t+13\,ch3t$
2.8	$f(t)=\sin\ 14t+5\ sh\ 5t$	**2.21**	$f(t)=ch\,17t-7\,sh\ 7t$
2.9	$f(t)=-\frac{3}{4}\cos\ 4t+ch\ 12t$	**2.22**	$f(t)=\frac{12}{17}-\cos 11t$
2.10	$f(t)=ch\ 13t-\frac{5}{13}$	**2.23**	$f(t)=\frac{3}{5}\ sh\ 9t-17$
2.11	$f(t)=33\sin 5t-33$	**2.24**	$f(t)=11\,ch\ 5t+5\sin\ 5t$
2.12	$f(t)=-ch\ 4t-ch\ 14t$	**2.25**	$f(t)=\cos\ 3t+\sin\ 7t$
2.13	$f(t)=-sh\ 6t-\frac{6}{7}\sin\ t$		

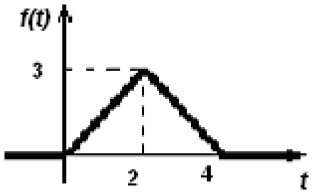
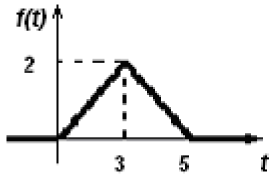
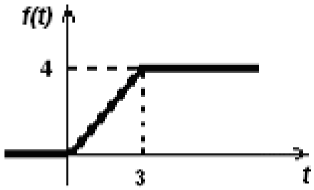
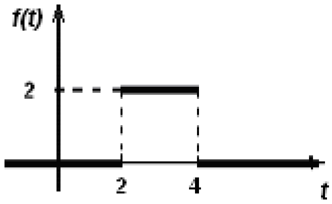
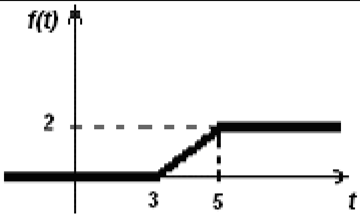
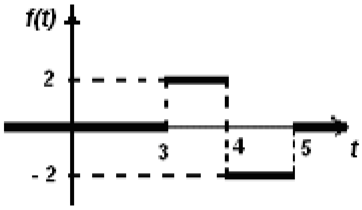
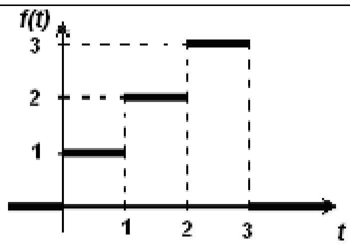
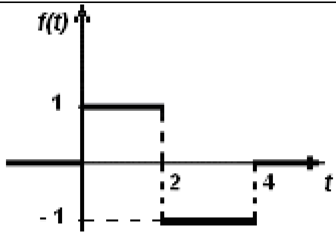
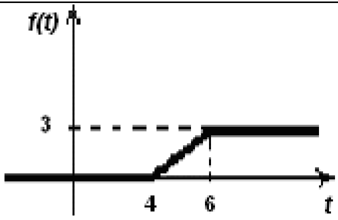
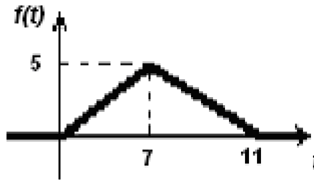
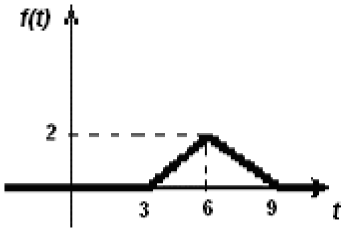
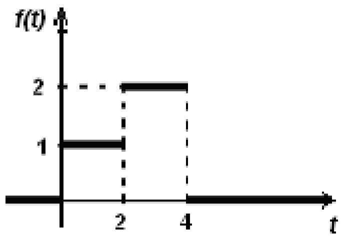
Задание 3

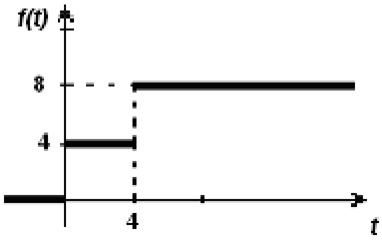
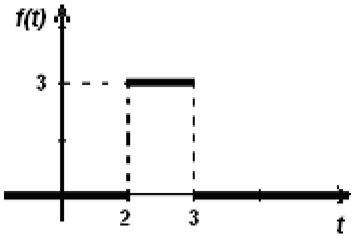
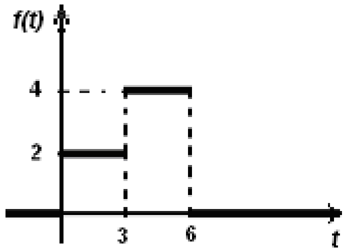
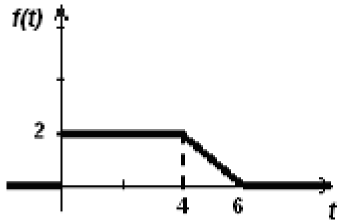
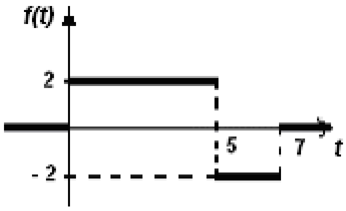
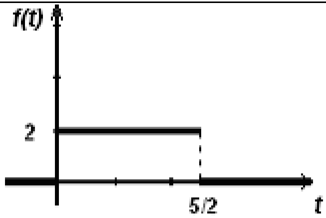
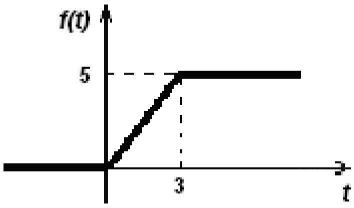
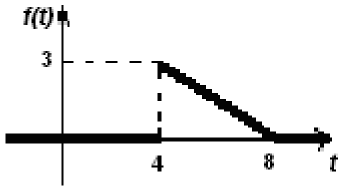
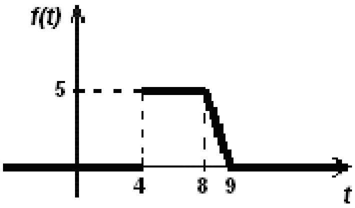
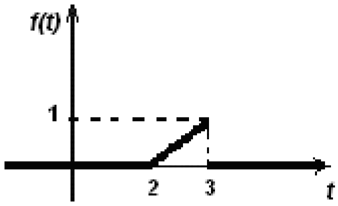
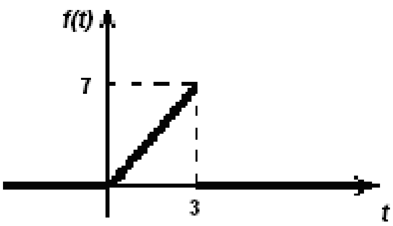
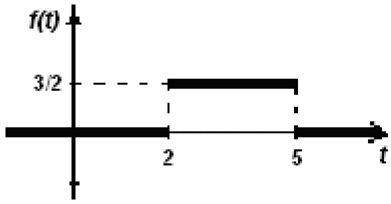
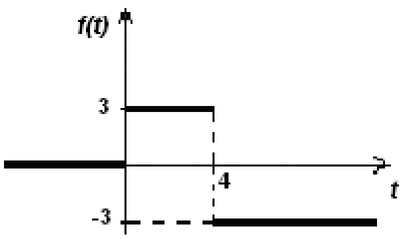
Пользуясь теоремой запаздывания найти изображение функции $f(t)$

3.1	$f(t) = \cos\ (3t - 4)$	**3.14**	$f(t) = \cos\ (2t + 3)$
3.2	$f(t) = 3\cos\left(\frac{1}{2}t - 7\right)$	**3.15**	$f(t) = \frac{2}{5}\cos\ (9t - 3)$
3.3	$f(t) = \sin\ (4t + 5)$	**3.16**	$f(t) = \sin\ (6t - 3)$
3.4	$f(t) = 7\sin\left(6 + \frac{1}{8}t\right)$	**3.17**	$f(t) = \frac{7}{10}\cos(10 - 7t)$
3.5	$f(t) = \frac{5}{9}\sin\left(\frac{9}{13}t - 11\right)$	**3.18**	$f(t) = \frac{7}{9}ch\ (8t + 3)$
3.6	$f(t) = -5\sin(2t + 12)$	**3.19**	$f(t) = ch\ (6t + 3)$
3.7	$f(t) = ch\ (8t - 3)$	**3.20**	$f(t) = ch\ (-12 + 3t)$
3.8	$f(t) = ch\left(\frac{6}{8}t + 22\right)$	**3.21**	$f(t) = \frac{4}{5}sh\left(\frac{1}{2}t + 4\right)$
3.9	$f(t) = sh\ (6 + 7t)$	**3.22**	$f(t) = 3sh\ (4t - 22)$
3.10	$f(t) = 3sh\ (16 + 7t)$	**3.23**	$f(t) = sh\ (4t - 16)$
3.11	$f(t) = \cos(2t - 5)$	**3.24**	$f(t) = -ch\ (13t - 8)$
3.12	$f(t) = -\sin(12 - 5t)$	**3.25**	$f(t) = ch\ (11t + 6)$
3.13	$f(t) = -\cos\ (2 + 12t)$		

Задание 4

Найти изображения кусочно-непрерывных функций,
пользуясь теоремой запаздывания

4.1		**4.14**	
4.2		**4.15**	
4.3		**4.16**	
4.4		**4.17**	
4.5		**4.18**	
4.6		**4.19**	

<table>
<tr><td>4.7</td><td>
</td><td>4.20</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.8</td><td>
</td><td>4.21</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.9</td><td>
</td><td>4.22</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.10</td><td>
</td><td>4.23</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.11</td><td>
</td><td>4.24</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.12</td><td>
</td><td>4.25</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.13</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Задание 5

Пользуясь теоремой смещения, найти изображение функции $f(t)$

5.1	$f(t)=e^{2t}\cos 4t$	**5.14**	$f(t)=e^{-t}\cos 3t$
5.2	$f(t)=e^{3t}\cos 7t-5$	**5.15**	$f(t)=-e^{-2t}\cdot\cos 13t$
5.3	$f(t)=-7\cos 2t\cdot e^{8t}$	**5.16**	$f(t)=-e^{4t}\cdot\sin 17t$
5.4	$f(t)=e^{t}\cdot\sin 12t$	**5.17**	$f(t)=-e^{-9t}\cdot\sin 9t$
5.5	$f(t)=e^{5t}\sin 2t$	**5.18**	$f(t)=e^{-13t}\sin 6t$
5.6	$f(t)=16e^{6t}\cdot 2t^{4}$	**5.19**	$f(t)=7t^{3}\cdot e^{-23t}$
5.7	$f(t)=12e^{6t}\cdot ch\,3t$	**5.20**	$f(t)=e^{16t}\cdot sh\,2t$
5.8	$f(t)=11e^{-5t}t^{3}$	**5.21**	$f(t)=16e^{-5t}\cdot ch\,4t$
5.9	$f(t)=e^{3t}ch 4t$	**5.22**	$f(t)=6ch\,7t\cdot e^{-t}$
5.10	$f(t)=-e^{-2t}\cos 15t$	**5.23**	$f(t)=e^{11t}\cos 5t$
5.11	$f(t)=ch\,7t\cdot e^{-3t}$	**5.24**	$f(t)=25ch\,11t\cdot e^{9t}$
5.12	$f(t)=ch 5t\cdot e^{-9t}$	**5.25**	$f(t)=e^{-4t}\sin 3t$
5.13	$f(t)=-e^{16t}sh\,11t$		

Задание 6

Найти свёртку функций $f(t) * g(t)$

6.1	$(2t+5) * \sin 4t$	**6.14**	$(4t-7) * \sin 3t$
6.2	$(2-81t) * \sin 7t$	**6.15**	$(9+4t) * \sin t$
6.3	$(t-11) * \cos 2t$	**6.16**	$(7t+13) * \cos 7t$
6.4	$(12-11t) * \cos t$	**6.17**	$(9t-3) * \cos 12t$
6.5	$(7t+41) * \cos 9t$	**6.18**	$\sin 11t * (9+4t)$
6.6	$\cos 7t * \sin 7t$	**6.19**	$\cos 13t * \sin 9t$
6.7	$\sin 15t * \cos t$	**6.20**	$\sin 3t * \cos 2t$
6.8	$\cos 19t * \sin t$	**6.21**	$\cos 7t * \cos t$
6.9	$\sin t * \sin 9t$	**6.22**	$(7t-5) * e^{7t}$
6.10	$(4t+9) * e^{-7t}$	**6.23**	$e^{13t} * (13+2t)$
6.11	$(12t+81) * e^{-11t}$	**6.24**	$e^{8t} * (11t+2)$
6.12	$(7t+8) * (8t+7)$	**6.25**	$(12-3t) * (12+3t)$
6.13	$(41+12t) * (t-41)$		

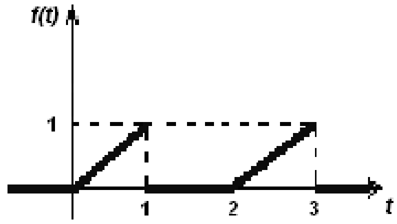
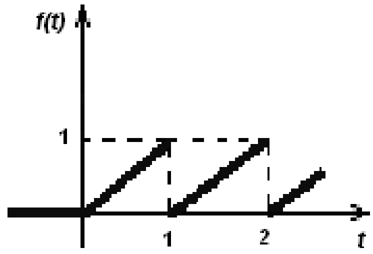
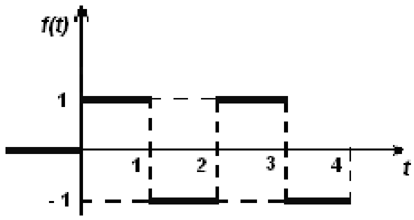
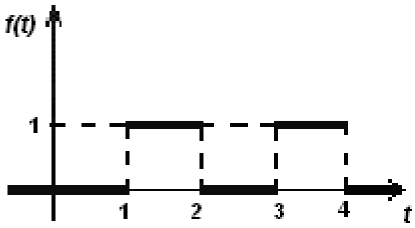
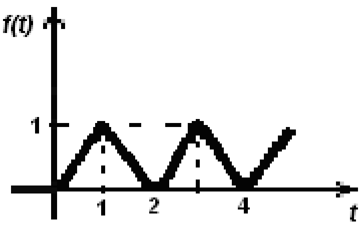
Задание 7

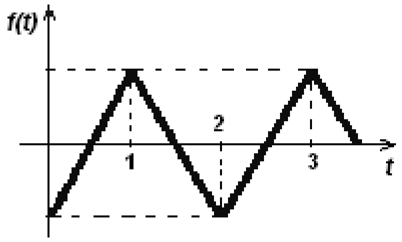
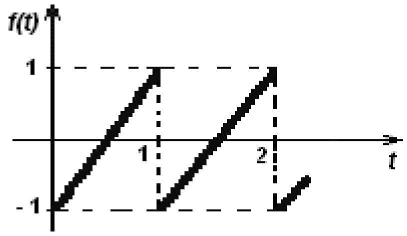
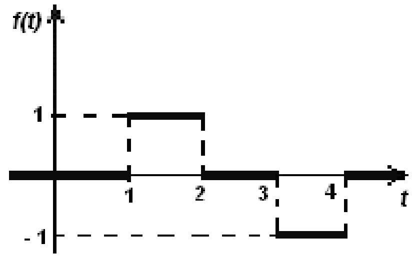
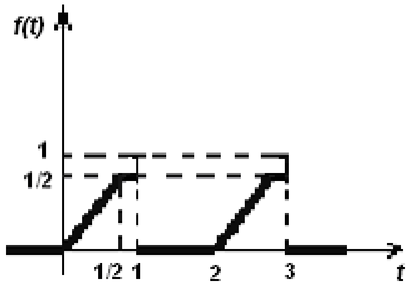
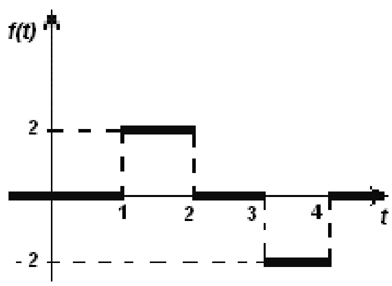
Пользуясь интегралом Дюамеля найти оригинал, соответствующий заданному изображению

7.1	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2+81)}$	**7.14**	$F(p)=\dfrac{p}{(p-3)(p-5)}$
7.2	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2+9)}$	**7.15**	$F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p-3)}$
7.3	$F(p)=\dfrac{p}{(p+2)(p-1)}$	**7.16**	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+2)(p^2+16)}$
7.4	$F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$	**7.17**	$F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+1)(p^2+9)}$
7.5	$F(p)=\dfrac{5p}{(p^2+25)(p^2+1)}$	**7.18**	$F(p)=\dfrac{4p}{(p^2+16)(p^2+1)}$
7.6	$F(p)=\dfrac{12p}{(144+p^2)(p^2+1)}$	**7.19**	$F(p)=\dfrac{9p}{(p^2+1)(p^2+81)}$
7.7	$F(p)=\dfrac{p}{(p-8)(p-6)}$	**7.20**	$F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p-5)}$
7.8	$F(p)=\dfrac{p}{(p-2)(p+1)}$	**7.21**	$F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p+2)}$
7.9	$F(p)=\dfrac{p}{(p+7)(p+9)}$	**7.22**	$F(p)=\dfrac{p}{(p-11)(p-12)}$
7.10	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2+16)}$	**7.23**	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2+3)}$
7.11	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+7)(p^2+8)}$	**7.24**	$F(p)=\dfrac{1}{p\cdot(p+1)}$
7.12	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+25)(p^2+1)}$	**7.25**	$F(p)=\dfrac{1}{p\cdot(p-2)}$
7.13	$F(p)=\dfrac{1}{p\cdot(p-8)}$		

Задание 8

Найти изображения периодических функций

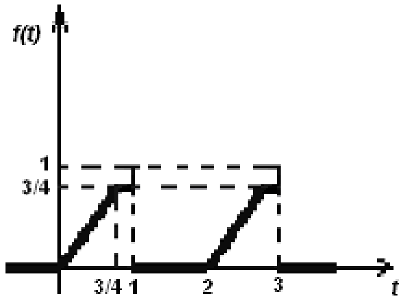
8.1	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} t-2n, & 2n<t<2n+1, \\ 0, & 2n+1<t<2n+2, \quad t<0. \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
8.2	$f(t)=f(t+1)=\begin{cases} t-n, & n<t<n+1, \\ 0, & t<0. \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
8.3	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} 1, & 2n<t<2n+1, \\ -1, & 2n+1<t<2n+2, \\ 0, & t<0. \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
8.4	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} 0, & 2n<t<2n+1, \quad t<0, \\ 1, & 2n+1<t<2n+2, \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
8.5	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} t-2n, & 2n<t<2n+1, \\ -t+2(n+1), & 2n+1<t<2n+2, \\ 0, & t<0. \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	

8.6	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases}2t-(4n+1), & 2n<t<2n+1,\\ -2t+4n+3, & 2n+1<t<2n+2,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ $n=0,1,2,...$	
8.7	$f(t)=f(t+1)=\begin{cases}2t-(2n+1), & n<t<n+1,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ $n=0,1,2,...$	
8.8	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases}0, & 2n<t<2n+1,\ t<0,\\ 1, & 4n+1<t<4n+2,\\ -1, & 4n+3<t<4n+4,\end{cases}$ $n=0,1,2,..$	
8.9	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases}t-2n, & 2n<t<2n+\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}, & 2n+\frac{1}{2}<t<2n+1,\\ 0, & 2n+1<t<2n+2,\ t<0,\end{cases}$ $n=0,1,2,...$	
8.10	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases}0, & 2n<t<2n+1,\ t<0,\\ 2, & 4n+1<t<4n+2,\\ -2, & 4n+3<t<4n+4,\end{cases}$ $n=0,1,2,..$	

<table>
<tr><td>8.11</td><td>

$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} t-2n, \quad 2n<t<2n+\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3}{4}, \quad 2n+\dfrac{3}{4}<t<2n+1, \\ 0, \quad 2n+1<t<2n+2, \quad t<0, \end{cases}$

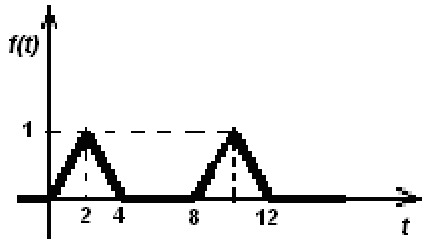
$n=0,1,2,...$



</td></tr>
<tr><td>8.12</td><td>

$f(t)=f(t+8)=\begin{cases} \dfrac{t}{2}-4n, \ 8n<t<(4n+1)\cdot 2, \\ -\dfrac{t}{2}+4n+2, \ (4n+1)\cdot 2<t<(4n+2)\cdot 2, \\ 0, \ (4n+2)\cdot 2<t<(4n+4)\cdot 2, \ t<0, \end{cases}$

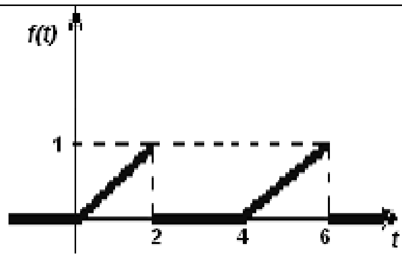
$n=0,1,2,...$



</td></tr>
<tr><td>8.13</td><td>

$f(t)=f(t+4)=\begin{cases} \dfrac{t}{2}-2n, \ 4n<t<(2n+1)\cdot 2, \\ 0, \ (2n+1)\cdot 2<t<(2n+2)\cdot 2, \ t<0. \end{cases}$

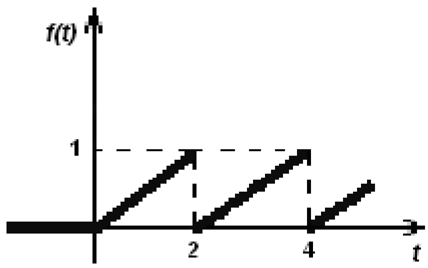
$n=0,1,2,...$



</td></tr>
<tr><td>8.14</td><td>

$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} \dfrac{t}{2}-n, \ 2n<t<(n+1)\cdot 2, \\ 0, \ t<0. \end{cases}$

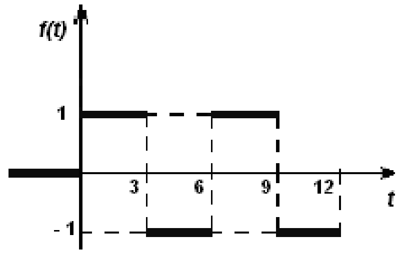
$n=0,1,2,...$



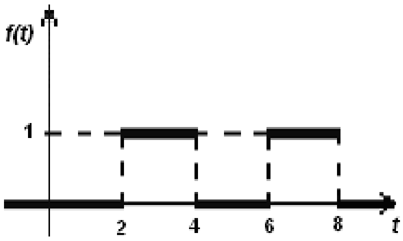
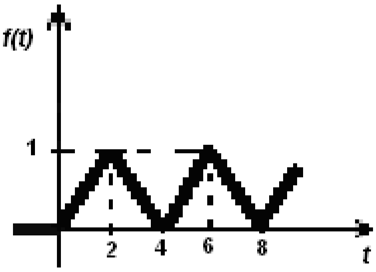
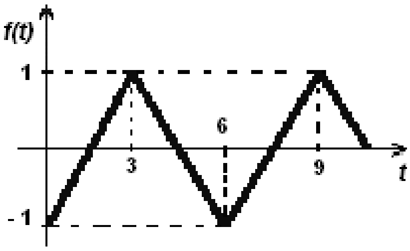
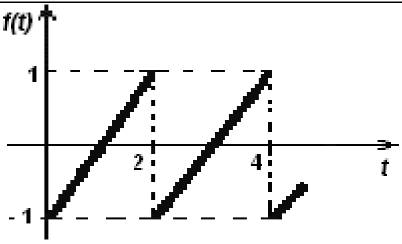
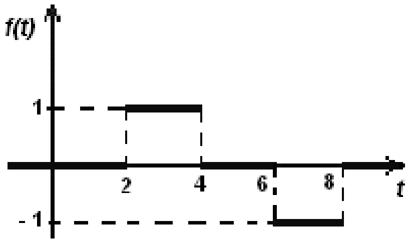
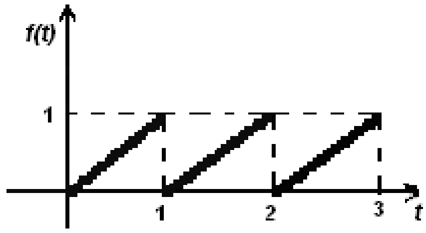
</td></tr>
<tr><td>8.15</td><td>

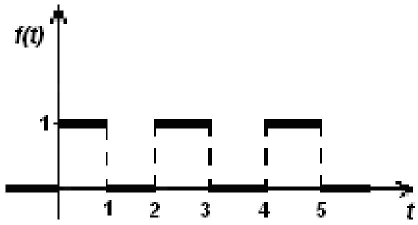
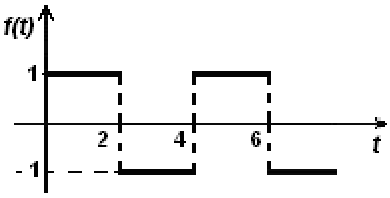
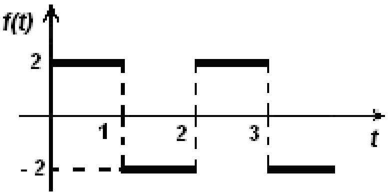
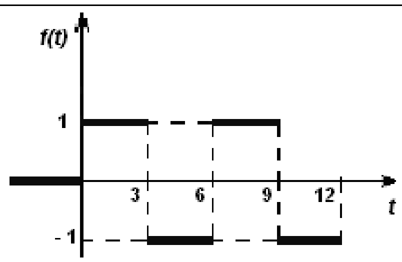
$f(t)=f(t+6)=\begin{cases} 1, \ 6n<t<(2n+1)\cdot 3, \\ -1, \ (2n+1)\cdot 3<t<(2n+2)\cdot 3, \\ 0, \ t<0. \end{cases}$

$n=0,1,2,...$



</td></tr>
</table>

8.16	$f(t) = f(t+4) = \begin{cases} 0,\ 4n < t < (2n+1)\cdot 2,\ t<0, \\ 1,\ (2n+1)\cdot 2 < t < (2n+2)\cdot 2, \end{cases}$ $n = 0,1,2,...$ 
8.17	$f(t) = f(t+4) = \begin{cases} \frac{t}{2} - 2n,\ 4n < t < (2n+1)\cdot 2, \\ -\frac{t}{2} + 2(n+1),\ (2n+1)\cdot 2 < t < (2n+2)\cdot 2, \\ 0,\ t<0. \end{cases}$ $n = 0,1,2,...$ 
8.18	$f(t) = f(t+6) = \begin{cases} \frac{2t}{3} - (4n+1),\ 6n < t < (2n+1)\cdot 3, \\ -\frac{2t}{3} + 4n + 3,\ (2n+1)\cdot 3 < t < (2n+2)\cdot 3, \\ 0,\ t<0, \end{cases}$ $n = 0,1,2,...$ 
8.19	$f(t) = f(t+2) = \begin{cases} t - (2n+1),\ 2n < t < (n+1)\cdot 2, \\ 0,\ t<0, \end{cases}$ $n = 0,1,2,...$ 
8.20	$f(t) = f(t+8) = \begin{cases} 0,\ 4n < t < (2n+1)\cdot 2,\ t<0, \\ 1,\ (4n+1)\cdot 2 < t < (4n+2)\cdot 2, \\ -1,\ (4n+3)\cdot 2 < t < (4n+4)\cdot 2, \end{cases}$ $n = 0,1,2,...$ 
8.21	$f(t) = f(t+1) = \begin{cases} t - n,\ n < t < n+1, \\ 0,\ t<0 \end{cases}$ $n = 0,1,2,...$ 

8.22	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases}1, & 2n<t<2n+1,\\ 0, & 2n+1<t<2n+2,\ t<0\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
8.23	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 4n<t<4n+2,\\ -1, & 4n+2<t<4n+4,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
8.24	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2, & 2n<t<2n+1,\\ -2, & 2n+1<t<2n+2,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
8.25	$f(t)=f(t+6)=\begin{cases}1, & 6n<t<(2n+1)\cdot 3,\\ -1, & (2n+1)\cdot 3<t<(2n+2)\cdot 3,\\ 0, & t<0.\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	

Задание 9

Решить дифференциальное уравнение
при заданных начальных условиях

9.1	$x'' + 3x' = e^{t}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$
9.2	$x'' - 2x' = e^{2t}$	$x(0) = x'(0) = 0$
9.3	$x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$
9.4	$x''' + x' = 1$	$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
9.5	$x'' + 2x' + x = \sin t$	$x(0) = 0,\ x'(0) = -1$
9.6	$x'' - 2x' + x = e^{t}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$
9.7	$x''' - x'' = \sin t$	$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
9.8	$x''' + x' = t$	$x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 0$
9.9	$x'' + x' = \cos t$	$x(0) = 2,\ x'(0) = 0$
9.10	$x'' + 2x' + x = t^{2}$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 0$
9.11	$x''' + x'' = \sin t$	$x(0) = x'(0) = 1,\ x''(0) = 0$
9.12	$x'' + x = \cos t$	$x(0) = -1,\ x'(0) = 1$
9.13	$x''' + x'' = t$	$x(0) = -3,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0$
9.14	$x'' + 2x' + 5x = 3$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 0$
9.15	$x'' + 2x' + 2x = 1$	$x(0) = x'(0) = 0$
9.16	$x'' + x = 1$	$x(0) = -1,\ x'(0) = 0$
9.17	$x''' + x'' = \cos t$	$x(0) = -2,\ x'(0) = x''(0) = 0$
9.18	$x''' + x' = e^{t}$	$x(0) = x''(0) = 0,\ x'(0) = 2$
9.19	$x'' + x' = \cos t$	$x(0) = 2,\ x'(0) = 0$
9.20	$x'' - x' = te^{t}$	$x(0) = x'(0) = 0$
9.21	$x'' - x = \sin t$	$x(0) = -1,\ x'(0) = 0$
9.22	$x'' + x = 2\sin t$	$x(0) = 1,\ x'(0) = -1$
9.23	$x''' - 2x'' + x' = 4$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -2$
9.24	$x'' - 3x' + 2x = e^{t}$	$x(0) = x'(0) = 0$
9.25	$x'' - x' = t^{2}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

Задание 10

Решить систему уравнений при заданных начальных условиях

10.1	$\begin{cases} x' - x - 2y = 2e^t, \\ y' - 2x - y = 0. \end{cases}$	$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$
10.2	$\begin{cases} x' + y' = 1, \\ x' = x - y. \end{cases}$	$x(0) = -1,\ y(0) = 0.$
10.3	$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2(x + y). \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 1.$
10.4	$\begin{cases} x'' + y' + x = e^t, \\ x' + y'' = 1. \end{cases}$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$
10.5	$\begin{cases} x' + y + z = 0, \\ x + y' + z = 0, \\ x + y + z' = 0 \end{cases}$	$x(0) = -1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1$
10.6	$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0. \end{cases}$	$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$
10.7	$\begin{cases} x'' = x - 2y, \\ y'' + x = 0. \end{cases}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$
10.8	$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0. \end{cases}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 2,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$
10.9	$\begin{cases} x' = y, \\ x' - y' = x + y. \end{cases}$	$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$
10.10	$\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1. \end{cases}$	$x(0) = -1,\ y(0) = 2.$
10.11	$\begin{cases} x' + x = 3y + 1, \\ y' = x + y. \end{cases}$	$x(0) = 1,\ y(0) = 2.$
10.12	$\begin{cases} x'' + y = 0, \\ 2x' - y' + 2y = 0. \end{cases}$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ y(0) = 1.$
10.13	$\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - 2. \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 0.$
10.14	$\begin{cases} x' + 2x - y = 0, \\ y' - 3x = 0. \end{cases}$	$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$
10.15	$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$	$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

10.16	$\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0. \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 1.$
10.17	$\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0. \end{cases}$	$x(0) = 3,\ y(0) = 15.$
10.18	$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t. \end{cases}$	$x(0) = 2,\ y(0) = 4.$
10.19	$\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t. \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 0.$
10.20	$\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^t, \\ y' - x + 6y = e^{-2t}. \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 0.$
10.21	$\begin{cases} x'' + y' + x = e^t, \\ x' + y'' = 1. \end{cases}$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$
10.22	$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t, \\ y' = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 0.$
10.23	$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$	$x(0) = y(0) = 1.$
10.24	$\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x - 3y = 0. \end{cases}$	$x(0) = -2,\ y(0) = 1.$
10.25	$\begin{cases} x' = 4x - 5y, \\ y' = x. \end{cases}$	$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

Задание 11

Найти оригинал для функции,
используя метод неопределённых коэффициентов

11.1	**a)** $F(p)=\dfrac{2p-13}{(2p-8)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{7-p}{p(p^2+6p-31)}$
11.2	**a)** $F(p)=\dfrac{4p-7}{p(p-1)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{7-6p}{p(p^2+8p-31)}$
11.3	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2-12p+11}{(p-3)(p+7)(p-1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{17-p}{p(p^2-8p-31)}$
11.4	**a)** $F(p)=\dfrac{12p+11}{(p+9)(p-1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{4p-15}{(p^2+p+2)(p-1)}$
11.5	**a)** $F(p)=\dfrac{p+16}{(p-1)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-15}{(p^2+p+2)(p+1)}$
11.6	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2+9}{(p-2)(p+12)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{2p-5}{(p^2-2p+7)(p-7)}$
11.7	**a)** $F(p)=\dfrac{p+1}{(5p-10)(p+11)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p+7}{p(p^2+6p+10)(p-1)}$
11.8	**a)** $F(p)=\dfrac{4p-13}{(p-1)(p+3)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-7}{(p^2+6p+10)(p-1)}$
11.9	**a)** $F(p)=\dfrac{2p+19}{(p-2)(p+15)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p^2-2p+7)(p+7)}$
11.10	**a)** $F(p)=\dfrac{2p+19}{(p-12)(p+1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{9+2p}{(p^2+3p-4)(p-1)}$
11.11	**a)** $F(p)=\dfrac{p+36}{(p-12)(p+9)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p+8}{(p+3)(p^2+p+2)}$
11.12	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2+11}{(p-3)(p+5)(p-1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2-7}{(p^2+p-2)(p+5)}$
11.13	**a)** $F(p)=\dfrac{4p+3}{(p-1)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{5p-13}{(p^2-p+2)(p+3)}$
11.14	**a)** $F(p)=\dfrac{p+3}{(p-5)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2+16}{(p-1)(p^2-3p+5)}$
11.15	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2-12p+11}{(p-3)(p+8)(p-1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2+6}{(p-1)(p^2-3p+4)}$
11.16	**a)** $F(p)=\dfrac{7p-3}{(p+6)(p-11)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-13}{(p^2-p+2)(p+13)}$

11.17	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2+2}{(p-1)(p+2)(p-3)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2-4}{(p^2+p-2)(p-5)}$
11.18	**a)** $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p-7)(p+6)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p+8}{(p+3)(p^2+p-2)}$
11.19	**a)** $F(p)=\dfrac{8p-9}{(p-5)(p+1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2+5p}{(p^2-4p+3)(p+2)}$
11.20	**a)** $F(p)=\dfrac{20p+11}{(p-7)(p+11)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{9+p}{(p^2+3p-4)(p+1)}$
11.21	**a)** $F(p)=\dfrac{p-19}{p(p-13)(p+3)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-4}{(p^2+3p-4)(p-1)}$
11.22	**a)** $F(p)=\dfrac{2p+17}{p(p-12)(p+1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-11}{p(p^2-3p+4)(p+7)}$
11.23	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2+4}{(p-6)(p+2)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{2(p-1)}{(p^2+p+2)(p+1)}$
11.24	**a)** $F(p)=\dfrac{7p+3}{(p-8)(p+9)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{7-p}{p^2+6p-16}$
11.25	**a)** $F(p)=\dfrac{12p+5}{(p-6)(p+3)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p-11)(p^2-2p+7)}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задание 1. Пользуясь свойством линейности найти изображение функции $f(t)$.

Пример 1.1. $f(t) = sht$

Решение.

Имеем $f(t) = sht = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, по таблице находим $e^t \to \dfrac{1}{p-1}$, $e^{-t} \to \dfrac{1}{p+1}$.

Пользуясь свойством однородности и линейности, получим искомое изображение:

$$sht = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \to \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p+1-p+1}{(p-1)(p+1)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{p^2-1^2}\right) = \frac{1}{p^2-1}.$$

Следовательно,

$$sht \to \frac{1}{p^2-1}.$$

Пример 1.2 $f(t) = 3\sin t + 5\cos t$

Решение.

По формулам (11) и (12) из таблицы оригиналов и изображений имеем, $\cos t \to \dfrac{p}{p^2+1}, \sin t \to \dfrac{1}{p^2+1}$, следовательно,

$$3\sin t + 5\cos t \to 3\cdot\frac{1}{p^2+1} + 5\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{3}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+1} = \frac{3+5p}{p^2+1}.$$

Пример 1.3 $f(t) = 11 - 2\cos t$

Решение.

Так как $11 \to 11\cdot\dfrac{1}{p}$ и $\cos t \to \dfrac{p}{p^2+1}$, применяя свойство линейности, получим

$$11 - 2\cos t \to \frac{11}{p} - 2\frac{p}{p^2+1} = \frac{11(p^2+1) - 2p^2}{p(p^2+1)} = \frac{9p^2+11}{p^3+p}.$$

Задание 2. Пользуясь теоремой подобия, найти изображение функции $f(t)$.

Пример 2.1 $f(t) = \sin 6t$

Решение.

Воспользуемся тем, что $\sin t \to \dfrac{1}{p^2+1}$, тогда по теореме подобия

$$\sin 6t \to \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{6}\right)^2 + 1} = \frac{1}{6 \cdot \left(\frac{p^2+6^2}{6^2}\right)} = \frac{6}{p^2+36},$$

следовательно,

$$\sin 6t \to \frac{6}{p^2+36}.$$

Пример 2.2 $f(t) = i^2 sh^2 at$

Решение.

Так как $i^2 sh^2 at = \sin^2 iat$ и $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \cos 2t$,

получаем

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2t \to \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+4} = \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2+4)} = \frac{p^2+4-p^2}{2p(p^2+4)} = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

Мы воспользовались формулой $\left(\dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2p}\right)$ и формулой $\left(\cos t \to \dfrac{p}{p^2+1}\right)$ из таблицы, теоремой подобия $\left(\cos 2t \to \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{p}{p^2+4}\right)$ и свойством линейности.

Получим, что $\sin^2 t \to \dfrac{2}{p(p^2+4)}$, тогда вновь применяя теорему подобия, находим

$$\sin^2 iat \to \frac{1}{ia}\cdot\frac{2}{\frac{p}{ia}\left(\left(\frac{p}{ia}\right)^2+4\right)}=\frac{2}{p\left(\frac{p^2}{(ia)^2}+4\right)}=\frac{2}{p\left(\frac{p^2+4(ia)^2}{(ia)^2}\right)}=\frac{2(ia)^2}{p(p^2+4(ia)^2)}=$$

$$\frac{-2a^2}{p(p^2-4a^2)}=-\frac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}.$$

В итоге получаем,

$$i^2\, sh^2\, at \to -\frac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}.$$

Задание 3. Пользуясь теоремой запаздывания найти изображение функции $f(t)$

Пример 3.1 $f(t)=\sin(2t-3)$

Решение.

По теореме подобия $\sin 2t \to \frac{2}{p^2+4}$, по теореме запаздывания

$$\sin(2t-3)=\sin 2\left(t-\frac{3}{2}\right)\to\frac{2}{p^2+4}\cdot e^{-\frac{3}{2}p}.$$

В итоге получим

$$\sin(2t-3)\to\frac{2}{p^2+4}\cdot e^{-\frac{3}{2}p}.$$

Задание 4. Найти изображения кусочно-непрерывных функций, пользуясь теоремой запаздывания**.**

Пример 4.1. Функция $f(t)$ задана графиком (рис. 1).

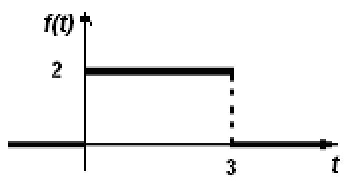


Рисунок 1 – График функции $f(t)$

Решение.

Зададим функцию аналитически $f(t)=\begin{cases} 2, & 0<t<3, \\ 0, & t<0, t>3 \end{cases}.$

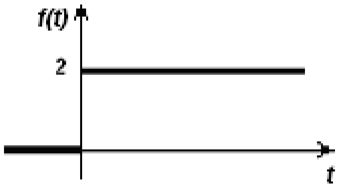


Рисунок 2 - График функции $2\eta(t)$

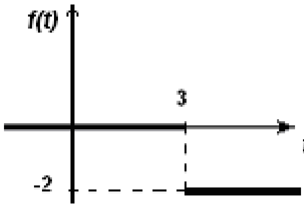


Рисунок 3 - График функции
$-2\eta(t-3)$

Функцию $f(t)$ можно представить как сумму единичных функций $2\eta(t)$ и $-2\eta(t-3)$ (рис. 2 и рис.3), то есть $f(t)=2\eta(t)-2\eta(t-3)=2\cdot[\eta(t)-\eta(t-3)]$.

Найдём изображение оригинала $f(t)$. По формуле 1 из таблицы, и теореме запаздывания имеем,

$$f(t)=2\cdot[\eta(t)-\eta(t-3)]\to 2\cdot\left(\frac{1}{p}-e^{-3p}\cdot\frac{1}{p}\right)=\frac{2}{p}(1-e^{-3p}).$$

Пример 4.2. Функция $f(t)$ задана графиком (рис. 4).

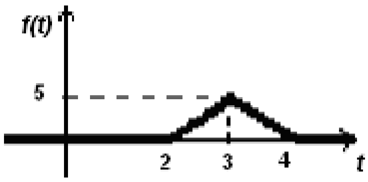


Рисунок 4 - График функции $f(t)$

Найдём уравнение прямой на отрезке $t\in[2,3]$, проходящей через две точки с координатами (2,0) и (3,5):

$$\frac{t-2}{3-2} = \frac{y-0}{5-0} \quad \Rightarrow \quad t-2 = \frac{y}{5} \quad \Rightarrow \quad y = 5t - 10.$$

Найдём уравнение прямой на отрезке $t \in [3,4]$, проходящей через точки с координатами (3,5) и (4,0):

$$\frac{t-3}{4-3} = \frac{y-5}{0-5} \Rightarrow t-3 = \frac{y-5}{-5} \Rightarrow -5 \cdot (t-3) = y-5 \Rightarrow -5t+15 = y-5 \Rightarrow y = 20-5t.$$

В результате имеем,

$$f(t) = \begin{cases} 5t-10, & 2 \le t < 3, \\ 20-5t, & 3 \le t < 4, \\ 0, & t \ge 4, t < 2. \end{cases}$$

Запишем функцию $f(t)$ через сумму обобщённых единичных функций.
График функции $(5t-10)\cdot\eta(t-2)$ имеет вид (рис. 5),

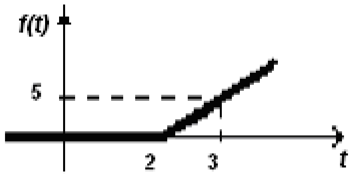


Рисунок 5 – График функции $(5t-10)\cdot\eta(t-2)$

а график функции $-(5t-10)\cdot\eta(t-3)$ имеет вид (рис. 6).

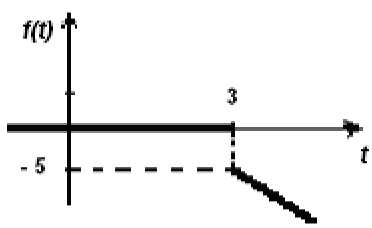


Рисунок 6 – График функции $-(5t-10)\cdot\eta(t-3)$

Складывая эти графики, получаем график функции $(5t-10)\cdot\eta(t-2)-(5t-10)\cdot\eta(t-3)$ (рис. 7).

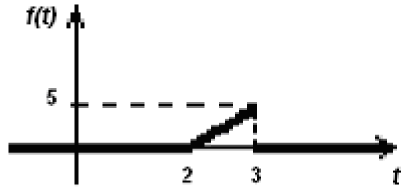


Рисунок 7 – График функции $(5t-10)\cdot\eta(t-2)-(5t-10)\cdot\eta(t-3)$

Рассуждая аналогично, получаем, что график функции $(20-5t)\cdot\eta(t-3)-(20-5t)\cdot\eta(t-4)$ имеет вид (рис. 8).

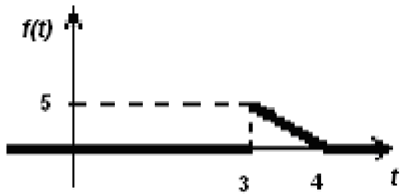


Рисунок 8 – График функции $(20-5t)\cdot\eta(t-3)-(20-5t)\cdot\eta(t-4)$

Таким образом

$$f(t)=(5t-10)\cdot\eta(t-2)-(5t-10)\cdot\eta(t-3)+(20-5t)\cdot\eta(t-3)-(20-5t)\cdot\eta(t-4).$$

Сгруппируем слагаемые, вынесем общий множитель за скобки

$$f(t)=5\cdot(t-2)\cdot\eta(t-2)+(-5t+10+20-5t)\cdot\eta(t-3)+5\cdot(t-4)\cdot\eta(t-4)=$$

$$=5\cdot(t-2)\cdot\eta(t-2)+(-10t+30)\cdot\eta(t-3)+5\cdot(t-4)\cdot\eta(t-4)=$$

$$=5\cdot(t-2)\cdot\eta(t-2)-10(t-3)\cdot\eta(t-3)+5\cdot(t-4)\cdot\eta(t-4)$$

Функция $f(t)$ представлена в виде суммы функций вида $(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0)$, изображение которых равно $(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0)\to\dfrac{e^{-pt_0}}{p^2}$.

В результате получаем

$$F(p)=5\cdot\frac{e^{-2p}}{p^2}-10\cdot\frac{e^{-3p}}{p^2}+5\cdot\frac{e^{-4p}}{p^2}=5\cdot\frac{e^{-2p}-2e^{-3p}+e^{-4p}}{p^2}.$$

Задание 5. Пользуясь теоремой смещения, найти изображение функции $f(t)$

Пример 5.1 $f(t)=e^{-at}\sin bt$.

Решение.

Так как $\sin bt \to \dfrac{b}{p^2+b^2}$, то по теореме смещения $e^{at}\cdot f(t) \to F(p-a)$ получаем

$$e^{-at}\sin bt \to \frac{b}{(p-(-a))^2+b^2} = \frac{b}{(p+a)^2+b^2}.$$

Пример 5.2 $f(t)=e^{-2t}ch\ 3t$.

Решение.

По формуле 23 из таблицы оригиналов и изображений $ch\,3t \to \dfrac{p}{p^2-9}$, тогда по теореме смещения получаем

$$e^{-2t}ch\ 3t \to \frac{p+2}{(p+2)^2-9} = \frac{p+2}{p^2+4p+4-9} = \frac{p+2}{p^2+4p-5}.$$

Задание 6. Найти свёртку функций $f(t)*g(t)$.

Пример 6.1 Найти свёртку функций $\varphi(t)=5t$ и $f(t)=e^{2t}$.

Решение.

Имеем

$$\varphi * f = 5t * e^{2t} = \int_0^t 5(t-\tau)\cdot e^{2\tau}\ d\tau = 5\int_0^t (te^{2\tau}-\tau e^{2\tau})\,d\tau = 5\int_0^t te^{2\tau}\ d\tau - 5\int_0^t \tau e^{2\tau}\ d\tau =$$

$$= 5t\int_0^t e^{2\tau}\ d\tau - 5\int_0^t \tau\cdot e^{2\tau}\ d\tau = \frac{5}{2}te^{2\tau}\Big|_0^t - 5\cdot\left(\frac{1}{2}te^{2t}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}te^{2t} - \frac{5}{2}t - \frac{5}{2}te^{2t} + \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{5}{2}t - \frac{5}{4}$$

Интеграл $\int_0^t \tau\cdot e^{2\tau}\ d\tau$ вычисляем по частям:

$$\int_0^t \tau\cdot e^{2\tau}\ d\tau = \begin{vmatrix} u=\tau & dv=e^{2\tau}d\tau \\ du=d\tau & v=\frac{1}{2}e^{2\tau} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\tau\cdot e^{2\tau}\Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}\ d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\tau\cdot e^{2\tau}\Big|_0^t - \frac{1}{4}e^{2\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}$$

Итак,

$$\varphi * f = 5t * e^{2t} = \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{5}{2}t - \frac{5}{4}.$$

Задание 7. Пользуясь интегралом Дюамеля найти оригинал, соответствующий заданному изображению**.**

Пример 7.1 $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p-2)}$**.**

Решение.

Представим изображение $F(p)$ в виде произведения элементарных дробей

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)(p-2)}=p\cdot\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p-2}=p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)$$

Пользуясь таблицей оригиналов и изображений, имеем

$$F_1(p)=\frac{1}{p-1} \quad \to \quad e^t = f_1(t),$$

$$F_2(p)=\frac{1}{p-2} \quad \to \quad e^{2t} = f_2(t).$$

Тогда, используя интеграл Дюамеля, получаем

$$f(t)=f_1(0)\cdot f_2(t)+f_1' * f_2 = f_1(0)\cdot f_2(t)+\int_0^t f_1'(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= e^0\cdot e^{2t}+\int_0^t e^{\tau}\cdot e^{2\cdot(t-\tau)}\,d\tau = e^{2t}+\int_0^t e^{\tau+2t-2\tau}\,d\tau = e^{2t}+\int_0^t e^{2t-\tau}\,d\tau = e^{2t}+\int_0^t \left(e^{2t}\cdot e^{-\tau}\right)d\tau =$$

$$= e^{2t}+e^{2t}\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau = e^{2t}-e^{2t}\cdot e^{-\tau}\Big|_0^t = e^{2t}-e^{2t}\cdot(e^{-t}-e^0)=e^{2t}-e^t+e^{2t}=2e^{2t}-e^t.$$

Пример 7.2 $F(p)=\dfrac{1}{p(p+7)}$**.**

Решение.

Представим изображение $F(p)$ в виде произведения

$$F(p)=\frac{1}{p(p-7)}=p\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-7}=p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)$$

По таблице оригиналов и изображений, имеем

$$F_1(p)=\frac{1}{p^2}\to t = f_1(t), \quad F_2(p)=\frac{1}{p-7}\to e^{7t} = f_2(t),$$

используя интеграл Дюамеля, получаем

$$f(t)= f_1(0)\cdot f_2(t)+ f_1' * f_2 = f_1(0)\cdot f_2(t)+\int_0^t f_1'(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau =$$

$$=0\cdot e^{7t}+\int_0^t \tau\cdot e^{7(t-\tau)}\,d\tau=\int_0^t \tau\cdot e^{7t-7\tau}\,d\tau=\int_0^t \tau\cdot e^{7t}\cdot e^{-7\tau}\,d\tau=e^{7t}\int_0^t \tau\cdot e^{-7\tau}\,d\tau=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\tau & dv=e^{-7\tau}d\tau \\ du=d\tau & v=-\frac{1}{7}e^{-7\tau}\end{vmatrix}=e^{7t}\left(-\frac{\tau}{7}e^{-7\tau}\Big|_0^t+\frac{1}{7}\int_0^t e^{-7\tau}d\tau\right)=e^{7t}\left(-\frac{t}{7}e^{-7t}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{49}e^{-7\tau}d\tau\Big|_0^t\right)=e^{7t}\left(-\frac{t}{7}e^{-7t}-\frac{1}{49}e^{-7t}+\frac{1}{49}\right).$$

Задание 8. Найти изображения периодических функций

Пример 8.1 $f(t)= f(t+4)=\begin{cases} t-4n, & 4n<t<4n+1, \\ -t+4n+2, & 4n+1<t<4n+2, \\ 0, \ 4n+2<t<4n+4, & t<0, \end{cases}$

$n=0,1,2,...$ (рис. 9)

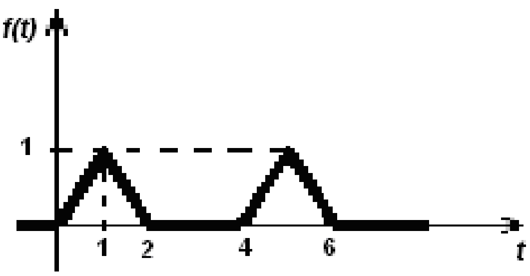


Рисунок 9 – График функции $f(t)$

По теореме 2.4, получаем

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-4p}}\int_0^4 e^{-pt}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[\int_0^1 e^{-pt}tdt+\int_1^2 e^{-pt}(2-t)dt\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=t & dv=e^{-pt}dt \\ du=dt & v=-e^{-pt}/p\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} u=2-t & dv=e^{-pt}dt \\ du=-dt & v=-e^{-pt}/p\end{matrix}\right|=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[-\frac{te^{-pt}}{p}\Bigg|_0^1+\frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt-\right.$$

$$\left.-\frac{(2-t)e^{-pt}}{p}\Bigg|_1^2-\frac{1}{p}\int_1^2 e^{-pt}dt\right]=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_0^1+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_1^2\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}\right]=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2(1-e^{-4p})}=\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}.$$

Задание 9. Решить дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях

Пример 9.1 $x''-3x'+2x=12e^{3t}, \quad x(0)=2, \quad x'(0)=6$

Решение.

I. Пользуясь свойством дифференцирования оригинала и формулой 9 из таблицы, перейдём от оригиналов к изображениям:

$$x(t)\to X(p),$$
$$x'\to pX-x(0)=pX-2,$$
$$x''\to p^2X-px(0)-x'(0)=p^2X-2p-6,$$
$$e^{3t}\to\frac{1}{p-3}.$$

II. Записываем операторное уравнение и решаем его:

$$p^2X-2p-6-3(pX-2)+2X=\frac{12}{p-3},$$

$$p^2X-2p-6-3pX+6+2X=\frac{12}{p-3},$$

$$p^2X-3pX+2X=\frac{12}{p-3}+2p,$$

$$(p^2-3p+2)X=\frac{12}{p-3}+2p,$$

$$X=\frac{12}{(p-3)(p^2-3p+2)}+\frac{2p}{p^2-3p+2},$$

$$X=\frac{12}{(p-3)(p-2)(p-1)}+\frac{2p}{(p-2)(p-1)}=X_1+X_2.$$

Применим метод неопределённых коэффициентов

$$X_1=\frac{12}{(p-3)(p-2)(p-1)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-1}=$$
$$=\frac{A(p-2)(p-1)+B(p-3)(p-1)+C(p-3)(p-2)}{(p-3)(p-2)(p-1)}.$$
$$12=A(p-2)(p-1)+B(p-3)(p-1)+C(p-3)(p-2),$$

при $p=1$ $\quad C\cdot(-2)\cdot(-1)=12 \;\Rightarrow\; 2C=12 \;\Rightarrow\; C=6$,

при $p=2$ $\quad B\cdot(-1)\cdot 1=12 \;\Rightarrow\; -B=12 \;\Rightarrow\; B=-12$,

при $p=3$ $\quad A\cdot 1\cdot 2=12 \;\Rightarrow\; 2A=12 \;\Rightarrow\; A=6$.

Получаем,

$$X_1=\frac{6}{p-3}-\frac{12}{p-2}+\frac{6}{p-1}=6\cdot\frac{1}{p-3}-12\cdot\frac{1}{p-2}+6\cdot\frac{1}{p-1}.$$

$$X_2=\frac{2p}{(p-2)(p-1)}=\frac{D}{p-2}+\frac{E}{p-1}=\frac{D(p-1)+E(p-2)}{(p-2)(p-1)}.$$
$$2p=D(p-1)+E(p-2),$$

при $p=1$ $\quad E\cdot(-1)=2 \;\Rightarrow\; -E=2 \;\Rightarrow\; E=-2$,

при $p=2$ $\quad D\cdot 1=4 \;\Rightarrow\; D=4$, Получаем,

$$X_2 = \frac{4}{p-2} - \frac{2}{p-1} = 4 \cdot \frac{1}{p-2} - 2 \cdot \frac{1}{p-1}.$$

В итоге,

$$X(p) = 6 \cdot \frac{1}{p-3} - 12 \cdot \frac{1}{p-2} + 6 \cdot \frac{1}{p-1} + 4 \cdot \frac{1}{p-2} - 2 \cdot \frac{1}{p-1} =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{p-3} - 8 \cdot \frac{1}{p-2} + 4 \cdot \frac{1}{p-1}.$$

III. Найдём оригинал для функции $X(p)$. По свойству линейности и формуле 9 из таблицы 4, получаем:

$$x(t) = 6e^{3t} - 8e^{2t} + 4e^{t}.$$

Задание 10. Решить систему уравнений при заданных начальных условиях

Пример 10.1. $\begin{cases} x' = -4(x+y), \\ x' + 4y' = -4y. \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

Решение.

I. Перейдём от оригиналов к изображениям:

$$x(t) \to X(p), \qquad y(y) \to Y(p),$$

$$x' \to pX - x(0) = pX - 1, \qquad y' \to pY - y(0) = pY.$$

II. Запишем систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX - 1 = -4(X+Y), \\ pX - 1 + 4pY = -4Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX + 4X + 4Y = 1, \\ pX + 4pY + 4Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4+p)X + 4Y = 1, \\ pX + (4p+4)Y = 1. \end{cases}$$

Это система линейных уравнений относительно $X(p)$ и $Y(p)$. Решим ее по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4+p & 4 \\ p & 4p+4 \end{vmatrix} = (4+p)(4p+4) - 4p = 4(p+2)^2,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4p+4 \end{vmatrix} = 4p, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4+p & 1 \\ p & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4p}{4(p+2)^2} = \frac{p}{(p+2)^2}, \qquad Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{4(p+2)^2} = \frac{1}{(p+2)^2}.$$

III. Перейдём к оригиналам, пользуясь формулами 10 и 33 из таблицы оригиналов и изображений:

$$\frac{p}{(p+2)^2} \to (1-2t)e^{-2t}, \qquad \frac{1}{(p+2)^2} \to te^{-2t}$$

Решение исходной системы $\begin{cases} x=(1-2t)e^{-2t}, \\ y=te^{-2t}. \end{cases}$

Задание 11. Найти оригинал для функции двумя способами, используя метод неопределённых коэффициентов и теорию вычетов

Пример 11.1. Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{p^2+4}{(p-1)(p+2)(p-3)}$.

Решение.

Представим $F(p)$ в виде

$$F(p)=\frac{p^2+4}{(p-1)(p+2)(p-3)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p-3}=$$
$$=\frac{A(p+2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p+2)}{(p-1)(p+2)(p-3)}=$$
$$=\frac{A(p^2-p-6)+B(p^2-4p+3)+C(p^2+p-2)}{(p-1)(p+2)(p-3)}=$$
$$=\frac{(A+B+C)p^2+(C-4B-A)p+(3B-6A-2C)}{(p-1)(p+2)(p-3)},$$

где A, B, C - неопределённые коэффициенты.

Отсюда следует равенство

$$p^2+4=(A+B+C)p^2+(C-4B-A)p+(3B-6A-2C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем систему уравнений для нахождения неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ C-4B-A=0, \\ 3B-6A-2C=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B-C, \\ A=C-4B, \\ 3B-6A-2C=4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\dfrac{3B+1}{2}, \\ A=\dfrac{1-5B}{2}, \\ 3B-6A-2C=4. \end{cases}$$

Подставляя в третье уравнение системы выражения для C и A, получаем:

$$3B-6\cdot\frac{1-5B}{2}-2\cdot\frac{3B+1}{2}=4,$$
$$3B-3(1-5B)-(3B+1)=4,$$
$$3B-3+15B-3B-1=4,$$
$$15B=8 \Rightarrow B=\frac{8}{15}.$$

Находим остальные коэффициенты:

$$\begin{cases} C=\dfrac{3B+1}{2}, \\ A=\dfrac{1-5B}{2}, \\ B=\dfrac{8}{15}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\dfrac{13}{10}, \\ A=-\dfrac{5}{6}, \\ B=\dfrac{8}{15}. \end{cases}$$

Следовательно, $F(p)$ имеет вид

$$F(p)=\frac{p^2+4}{(p-1)(p+2)(p-3)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p-3}=$$
$$=-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{13}{10}\cdot\frac{1}{p-3}=-\frac{5}{6}\cdot F_1(p)+\frac{8}{15}\cdot F_2(p)+\frac{13}{10}\cdot F_3(p).$$

По формулам 8 и 9 из таблицы оригиналов и изображений имеем:

$$F_1(p)=\frac{1}{p-1}\to e^t=f_1(t),$$
$$F_2(p)=\frac{1}{p+2}\to e^{-2t}=f_2(t),$$
$$F_3(p)=\frac{1}{p-3}\to e^{3t}=f_3(t).$$

Окончательно находим оригинал, пользуясь свойством линейности

$$f(t)=-\frac{5}{6}f_1(t)+\frac{8}{15}f_2(t)+\frac{13}{10}f_3(t)=-\frac{5}{6}e^t+\frac{8}{15}e^{-2t}+\frac{13}{10}e^{3t}.$$

Таблица оригиналов и изображений

Для нахождения изображения или оригинала требуется применить свойства преобразования Лапласа так, чтобы к функции или её составляющим можно было применить результаты, содержащиеся в таблице 1.

Таблица 1. Таблица оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-t_0)$	$\frac{e^{-pt_0}}{p}$
3	$(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0)$	$\frac{e^{-pt_0}}{p^2}$
4	C	$\frac{C}{p}$
5	t	$\frac{1}{p^2}$
6	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
7	$\delta(t)$	1
8	e^t	$\frac{1}{p-1}$
9	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
11	$\cos t$	$\frac{p}{p^2+1}$
12	$\sin t$	$\frac{1}{p^2+1}$
13	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
14	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$

Продолжение таблицы 1

№	$f(t)$	$F(p)$
15	$\cos^2 at$	$\frac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
16	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
17	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
18	$t\ \sin\ at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
19	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
20	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
21	$\frac{1}{a^2}(1-\cos\ at)$	$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$
22	$t-\frac{1}{a}\sin at$	$\frac{a^2}{p^2(p^2+a^2)}$
23	$ch\ at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
24	$sh\ at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
25	$sh^2\ at$	$\frac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
26	$ch^2\ at$	$\frac{p^2-2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
27	$e^{-at}sh\,bt$	$\frac{b}{(p+a)^2-b^2}$
28	$e^{-at}ch\,bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
29	$\frac{1}{a}sh\ at-1$	$\frac{a^2}{p^2(p^2-a^2)}$
30	$\frac{t\sin at}{2a}$	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$

Продолжение таблицы 1

№	$f(t)$	$F(p)$
31	$\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{1+ap}$
32	$\frac{1}{a}(e^{at}-1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$
33	$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
34	$(t+\frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$
35	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
36	$(1+2at+\frac{1}{2}a^2t^2)e^{at}$	$\frac{p^2}{(p-a)^3}$
37	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
38	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
39	$1-ch\ at+\frac{at}{2}sh\ at$	$\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$
40	$\frac{b\,sh\ at-a\,sh\ bt}{a^2-b^2}$	$\frac{ab}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
41	$\frac{ch\,at-ch\,bt}{a^2-b^2}$	$\frac{p}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
42	$\frac{a\,sh\ at-b\,sh\ bt}{a^2-b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
43	$\sin\frac{a}{\sqrt{2}}t\,sh\frac{a}{\sqrt{2}}t$	$\frac{a^2p}{p^4+a^4}$
44	$\cos\frac{a}{\sqrt{2}}t\,ch\frac{a}{\sqrt{2}}t$	$\frac{p^3}{p^4+a^4}$
45	$\frac{1}{2}(sh\ at-\sin at)$	$\frac{a^3}{p^4-a^4}$

Продолжение таблицы 1

№	$f(t)$	$F(p)$
46	$\frac{1}{2}(ch\ at - \cos at)$	$\frac{a^2 p}{p^4 - a^4}$
47	$\frac{1}{2}(sh\ at + \sin at)$	$\frac{ap^2}{p^4 - a^4}$
48	$\frac{1}{2}(ch\ at + \cos at)$	$\frac{p^3}{p^4 - a^4}$
49	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
50	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
51	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$
52	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$

Таблица основных свойств преобразования Лапласа

При нахождении изображений и оригиналов удобно пользоваться свойствами преобразования Лапласа, которые представлены в таблице 4. Обозначения: $f(t) \to F(p)$; $a, a_1, a_2, ..., a_n$, p_0 - комплексные числа, $t_0 > 0$, T - период.

Таблица 2. Таблица основных свойств преобразования Лапласа

1	Определение изображения ($p = s + i\sigma$, $s = \operatorname{Re} p, \sigma = \operatorname{Im} p$)	$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \quad \left(\int\limits_0^\infty = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_0^T \right)$
2	Единичная функция	$\eta(t) = \begin{cases} 0, t > 0, \\ 1, t < 0 \end{cases}$
3	Свойство однородности	$af(t) \to aF(p)$
4	Свойство сложения	$f(t) + \varphi(t) \to F(p) + \Phi(p)$
5	Свойство линейности	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + .. + a_n f_n(t) \to$ $\to a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p) + .. + a_n F_n(p)$
6	Теорема подобия	$f(bt) \to \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right)$
7	Теорема запаздывания	$f(t - t_0) \to e^{-pt_0} F(p)$
8	Теорема опережения	$f(t + t_0) \to e^{t_0 p} \left(F(p) - \int\limits_0^{t_0} e^{-pt} f(t)dt \right)$
9	Изображение периодического оригинала с периодом T	$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt$

ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович И.С., Лунц Г.Л., Эсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1969. 413 с.

2. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие. СПб.: Лань, 2015. 448 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/67463.

3. Рудкевич Е.А. Функции комплексного переменного и операционное исчисление (методы решения задач): учеб. пособие. Тула: Изд-во Тульского госуниверситета, 2004. Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/380/53380.

4. Панкова Е.А. Специальная математика. Элементы операционного исчисления: учебное пособие для бакалавров направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2017. 68 с.

5. Чудесенко В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики. М.: Высшая школа, 1999.

6. Заварзина И.Ф. Комплексные числа и операционное исчисление: справочный материал и методические указания для студентов и преподавателей. М.: "МАТИ" Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, 2004. Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/840/76840.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«СПЕЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Методические указания для бакалавров очной формы обучения
направлений подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 08.06.2018 г. Формат 60х84. 1/16.
Бумага печатная Усл.п.л. 2,49. Тираж 25 экз. Изд. № 6100.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ