МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

для бакалавров очной и заочной форм обучения
направлений подготовки

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств
35.03.06 Агроинженерия

Брянская область 2019

УДК 519.21 (07)
ББК 22.171
Р 19

Ракул, Е. А. **Теория вероятностей:** учебно-методическое пособие для бакалавров очной и заочной форм обучения направлений подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 35.03.06 «Агроинженерия» / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2019. – 56 с.

Рецензенты:
Рыжик В.Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры автоматики, физики и математики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования,   протокол № 1 от 01.10.2019 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1 Основные понятия

Определение. *Событием* называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. То есть в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие A может произойти совместно с событием B, в другом – нет.

Определение. События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение. *Полной группой событий* называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. *Достоверным событием* называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется *невозможным,* если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Исходя из этих общих понятий, можно дать определение вероятности.

Определение. *Вероятностью* события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события A равна отношению числа, благоприятствующих событию A исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию A, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события A.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример 1. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

❍ Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие A, появление зеленого – событие B, появление белого – событие C.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10}. \bullet$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Определение. *Относительной частотой* события A называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие A к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Вообще говоря, классическое определение вероятности – довольно относительное.

Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

К примеру, при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие *геометрической вероятности*, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины 1, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l / L.

1.2 Операции над событиями

Определение. События A и B называются *равными*, если осуществление события A влечет за собой осуществление события B и наоборот.

Определение. *Объединением* или *суммой* событий A_k называется событие A, которое означает появление *хотя бы одного* из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

Определение. *Пересечением* или *произведением* событий A_k называется событие A, которое заключается в осуществлении *всех* событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение. *Разностью* событий A и B называется событие C, которое означает, что происходит событие A, но не происходит событие B.

$$C = A \setminus B$$

Определение. *Дополнительным* к событию A называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие A *не происходит*.

Определение. *Элементарными исходами* опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие A, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется *пространством элементарных событий*.

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие 1: *Если события* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

Определение. *Противоположными* называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Определение. Событие A называется *независимым* от события B, вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется *зависимым* от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Определение. Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место событие A, называется *условной вероятностью* события B.

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

Теорема. (Умножение вероятностей). *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$

Также можно записать:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения условной вероятности.

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A)=1-q_1q_2...q_n$$

Здесь событие A обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$.

Пример 2. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

❍ Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие A, появление хотя бы одной червонной карты – событие B. Таким образом нам надо определить вероятность события $C=A+B$.

Кроме того, события A и B – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$. ●

Пример 3. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

❍ Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$. ●

1.3 Вероятность появления только одного события

Пример 4. Пусть даны три независимых события A_1, A_2, A_3, их вероятности соответственно равны p_1, p_2, и p_3. Найти вероятность появления только одного события.

❍ Пусть:

событие B_1 - появилось только событие A_1 (A_2 и A_3 не появились)

$B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$

событие B_2 - появилось только событие A_2 (A_1 и A_3 не появились)

$B_2 = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$

событие B_3 - появилось только событие A_3 (A_1 и A_2 не появились)

$B_3 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3, будем искать вероятность

$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$ так как события B_1, B_2, B_3 несовместны.

События A_1, A_2, A_3 - независимы $\Rightarrow$ $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ - независимы.

Обозначим $P(\overline{A_1})=q_1$, $P(\overline{A_2})=q_2$, $P(\overline{A_3})=q_3$.

Тогда $P(B_1+B_2+B_3)=p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot q_2\cdot p_3$, т.е.

P (появления только одного события) $=p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot q_2\cdot p_3$.●

1.4 Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1,H_2,...,H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1),P(H_2),...,P(H_n)$ и условные вероятности наступления события A при наступлении события H_i :

$$P(A/H_1),P(A/H_2),...,P(A/H_n).$$

Теорема. *Вероятность события* A*, которое может произойти вместе с одним из событий* $H_1,H_2,...,H_n$*, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события* A.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

Пример 5. В двух ящиках содержатся по 20 деталей, причем в первом 17 стандартных деталей, а во втором 15 стандартных деталей. Из второго ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из первого ящика, окажется стандартной.

○ Опыт можно разбить на два этапа: первый - перекладывание детали, второй - выбор детали (Рис. 1).

Гипотезы:

H_1 - переложена стандартная деталь;

H_2 - переложена нестандартная деталь.

$P(H_1)=\frac{15}{20}$, $P(H_2)=\frac{5}{20}$.

$P_{H_1}(A)=\frac{18}{21}$, $P_{H_2}(A)=\frac{17}{21}$.

$P(A)=\frac{15}{20}\cdot\frac{18}{21}+\frac{17}{21}\cdot\frac{5}{20}=\frac{71}{84}\approx 0{,}8452$. ●

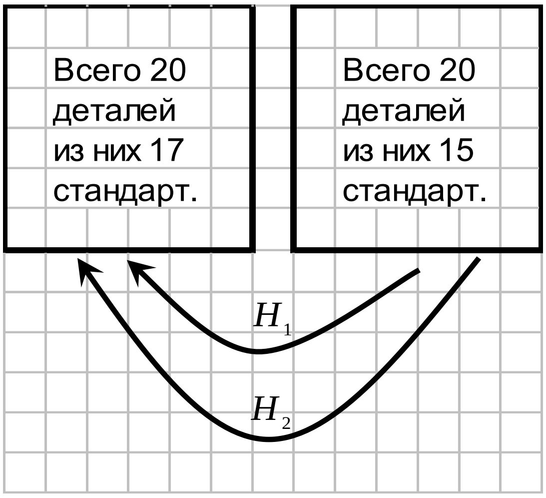


Рис. 1

Пример 6. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

❍ Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16;$
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36;$
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64;$

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}. \bullet$$

1.5 Формула Байеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие A, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ относительно события A, то есть условные вероятности $P(H_i / A)$.

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется *формулой Байеса.*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Пример 7. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру равна 0,6, ко второму равна 0,4. Вероятность того, что деталь будет признана стандартной первым контролером равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что ее проверил первый контролер.

❍ Гипотезы: H_1 - деталь проверил первый контролер;

H_2 - деталь проверил второй контролер.

Событие A- деталь признана стандартной.

$$P(H_1) = 0{,}6 \qquad P(H_2) = 0{,}4$$

$$P_{H_1}(A) = 0{,}94 \qquad P_{H_2}(A) = 0{,}98$$

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94 + 0{,}4\cdot 0{,}98} \approx 0{,}59$$

Как видно до испытания $P(H_1) = 0{,}6$, а после $P_\text{A}(H_1) = 0{,}59$. ●

1.6 Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются *независимыми относительно события* A.

Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью

$P(A) = p$. Определим вероятность $P_n(k) = 0{,}6$ того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно k раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям.

Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\bar{A}$ с вероятностью $P(\bar{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события A в испытании с номером i. Так как условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие A наступает ровно k раз, то остальные $n-k$ раз это событие не наступает. Событие A может появиться k раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по k. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем *формулу Бернулли:*

$$P_n(k) = \frac{k!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, то есть того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Пример 8. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

❍ Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Так как выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в k испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_5(5) = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_5(3) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744. \bullet$$

1.7 Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Пусть $k = k_0$ - число появления события A в n испытаниях, при котором $P_n(k)$ - наибольшая.

Тогда k_0 определяется из двойного неравенства:

$np - q \le k_0 < np + q$

Если $(np - q)$ - дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0; $k_0 + 1$.

Если $(np - q)$ - целое, то существует два наивероятнейших числа k_0.

Если np - целое, то $k_0 = np$.

Например,

1) $n = 15$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$.

$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 < 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \qquad 13{,}4 \le k_0 < 14{,}4 \qquad k_0 = 14.$

2) $n=24$, $p=0{,}6$, $q=0{,}4$.

$$24\cdot 0{,}6-0{,}4\le k_0<24\cdot 0{,}6+0{,}4 \qquad 14\le k_0<15 \qquad k_0=14; \quad k_0=15.$$

3) $n=25$, $p=0{,}08$, $q=0{,}02$.

$$2-0{,}02\le k_0<2+0{,}08 \qquad k_0=2.$$

При больших значениях n и k в повторных испытаниях с помощью формулы Бернулли получить более или менее точный результат практически невозможно.

В этом случае, для вычисления искомой вероятности применяют асимптотические формулы.

1.8 Локальная теорема Муавра-Лапласа

Теорема. (Локальная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то $P_n(k)$ того, что событие A в n независимых испытаниях появится ровно k раз, приближенно равна (чем больше n, тем точнее):

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \text{ , где } \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ - функция Гаусса}$$

Значения $\varphi(x)$ находим по таблице, при $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Учитываем ,что функция $\varphi(x)$ четная, то есть $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Пример 9. Найти вероятность того, что событие A (переключение передач) наступит 70 раз на 243 – километровой трассе, если вероятность переключения на каждом километре равна 0,25.

○ $n=243$, $k=70$, $p=0{,}25$, $q=0{,}75$.

1) $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{70-243\cdot 0{,}25}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}=\dfrac{9{,}25}{6{,}75}=1{,}37$.

2) $\varphi(1{,}37)=0{,}1661$

3) $P_{243}(70)=\dfrac{1}{1{,}75}\cdot 0{,}1561=0{,}0231$.●

1.9 Интегральная теорема Лапласа

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Чтобы вычислить вероятность $P(k_1,k_2)$, того, что событие A появится не менее k_1 не более k_2 раз, ($k_1 \le k \le k_2$), используем интегральную теорему Лапласа.

Теорема 7. (Интегральная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единице, то вероятность $P(k_1,k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу:

$$P(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}} dz, \text{ где } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Так как $\int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ не выражается через элементарные функции, то его значение находим в таблице значений функции Лапласа $\Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Учитываем, что функция $\Phi(x)$ нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
(для $x > 5$ принимаем $\Phi(x) = 0{,}5$).
Таким образом,
$P(k_1,k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$.■

Пример 10. Вероятность выпуска нестандартной лампы $p = 0{,}1$. Чему равна вероятность того, что в партии из 2000 ламп число стандартных не менее 1790 штук.
○ $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, $n = 2000$, $k_1 = 1790$, $k_2 = 2000$.

$$x'' = \frac{2000 - 2000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 14{,}9, \quad x' = \frac{1790 - 2000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = -0{,}75$$

$$P_{2000}(1790 \le k \le 2000) = \Phi(14{,}9) - \Phi(-0{,}75) = 0{,}5 + 0{,}273 = 0{,}773. \bullet$$

1.10 Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

С помощью функции Лапласа можно найти вероятность отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p в n независимых испытаниях. Имеет место формула:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $\varepsilon>0$ - некоторое число.

Пример 11. Проверкой качества радиоламп установлено, что 95% из них служит не менее гарантируемого срока. Определить вероятность того, что в партии из 500 ламп, доля ламп, со сроком службы менее гарантируемого срока, будет отличаться от вероятности изготовления не более, чем на 0,02.

○ $p=0{,}05$, $q=0{,}95$, $n=500$, $\varepsilon=0{,}02$.

$$P\left(\left|\frac{m}{500}-0{,}05\right|<0{,}02\right)=2\Phi\left(0{,}02\cdot\sqrt{\frac{500}{0{,}95\cdot 0{,}05}}\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}02\cdot 500}{\sqrt{500\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}}\right)=$$

$$=2\Phi\left(\frac{10}{5}\cdot 1{,}025\right)=2\Phi(2{,}05)=0{,}959.$$ ●

Пример 12. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,4. Случайным образом отбирается 500 механизмов. Установить величину наибольшего отклонения изготовленных механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую модно гарантировать с вероятностью 0,9973.

○ $p=0{,}4$, $q=0{,}6$, $n=500$, $P=0{,}9973$.

$$P\left(\left|\frac{m}{500}-0{,}4\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{500}{0{,}4\cdot 0{,}6}}\right)=0{,}9973$$

По таблице для Φ находим, что $\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{500}{0{,}4\cdot 0{,}6}}$, откуда $\varepsilon=0{,}066$. ●

1.11 Формула Пуассона

Если $n\to\infty$, а вероятность появления события A равна $p<0{,}1$, так, что $np=\lambda$ остается постоянным и $\lambda\in[0{,}1;\,9]$, то вероятность $P_n(k)$ вычисляем, используя формулу Пуассона:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Пример 13. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определенная микросхема. Вероятность ее отказа в течение 1 часа работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 1000 часов работы устройства придется 5 раз менять микросхему.

○ $p=0{,}004,\quad n=1000.$

$\lambda=np=1000\cdot 0{,}04=4<10.$

По формуле Пуассона: $P_{1000}(5)=\dfrac{4^5\cdot e^{-4}}{5!}\approx 0{,}1563.$ ●

2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Определение. *Случайной величиной* называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Определение. *Дискретной случайной величиной* называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Определение. *Непрерывной случайной величиной* называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

2.1 Закон распределения дискретной случайной величины

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется *законом распределения дискретной* случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется *рядом распределения*.

Графическое представление этой таблицы называется *многоугольником распределения.* При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

Пример 14. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

❍ Вероятности пяти попаданий из пяти возможных, четырех из пяти и трех из пяти были найдены выше по формуле Бернулли и равны соответственно:

$$P_{5,5} = 0{,}01024, \quad P_{4,5} = 0{,}0768, \quad P_{3,5} = 0{,}2304$$

Аналогично найдем:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456$$

$$P_{1,5} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0!\cdot 5!} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}6^5 = 0{,}0778. \bullet$$

Представим графически зависимость числа попаданий от их вероятностей (Рис. 2).

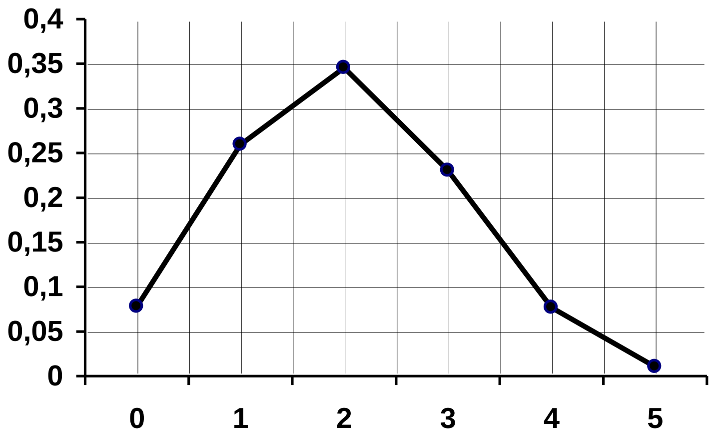


Рис. 2

При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

2.2 Биноминальное распределение

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину X .

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k=0,1,2,...$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется *биноминальным*.

Пример 15. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

❍ Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0)=\frac{4!}{0!\cdot 4!}0{,}1^0\cdot 0{,}9^4=0{,}6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1)=\frac{4!}{1!\cdot 3!}0{,}1^1\cdot 0{,}9^3=0{,}2916$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}1^2\cdot 0{,}9^2=0{,}0486$$

4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3)=\frac{4!}{3!\cdot 1!}0{,}1^3\cdot 0{,}9^1=0{,}0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4)=\frac{4!}{4!\cdot 0!}0{,}1^4\cdot 0{,}9^0=0{,}0001$$

Построим многоугольник распределения (Рис. 3).

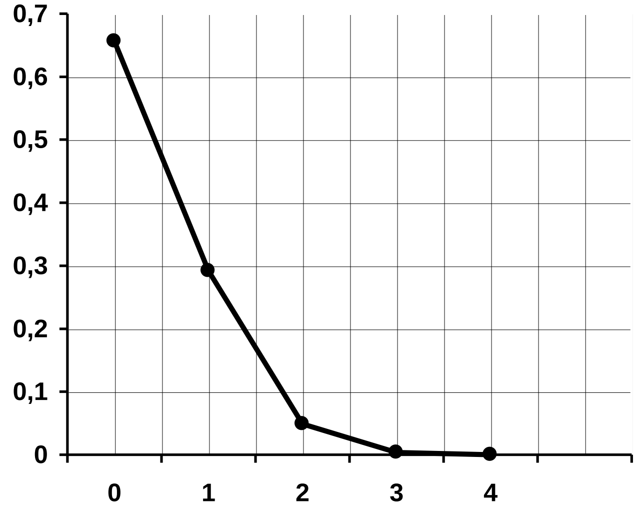


Рис. 3.

Пример 16. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

❍ Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5.

Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25.

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна:

$$P_2(2)=\frac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^2\cdot 0{,}75^0=0{,}0625$$

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях:

$$P_2(1)=\frac{2!}{1!\cdot 1!}0{,}25^1\cdot 0{,}75^1=0{,}375$$

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпаде четного числа очков на обеих костях:

$$P_2(0)=\frac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^0\cdot 0{,}75^2=0{,}5625.$$ ●

2.3 Распределение Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события A имеет вероятность p. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события A в каждом испытании мало $(p \le 0{,}1)$, то для нахождения вероятности появления события A k раз находится следующим образом.

Сделаем важное допущение – произведение np сохраняет постоянное значение:

$$np = \lambda$$

Практически это допущение означает, что среднее число появления события в различных сериях испытаний (при разном n) остается неизменным.

По формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Найдем предел этой вероятности при $n \to \infty$.

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P_n(k) \cong \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

Получаем формулу *распределения Пуассона:*

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Если известны числа λ и k, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

2.4 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Определение. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x)$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y) + M(X) + M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пусть производится n независимых испытаний, вероятность появления события A в которых равна p.

Теорема. *Математическое ожидание* $M(X)$ *числа появления события* A *в* n *независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании*.

$$M(X) = np$$

Однако, математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

Определение. *Дисперсией (рассеиванием)* дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

Пример 17. Для рассмотренного выше примера закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

❍ Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$\left[x_1 - M(X)\right]^2 = (0 - 1{,}5)^2 = 2{,}25$$

$$\left[x_2 - M(X)\right]^2 = (1 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

$$\left[x_3 - M(X)\right]^2 = (2 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

Тогда

$[X - M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна:

$$D(X) = 2{,}25 \cdot 0{,}0625 + 0{,}25 \cdot 0{,}375 + 0{,}25 \cdot 0{,}5625 = 0{,}375. \bullet$$

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, так как приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям.

Поэтому применяется другой способ.

Вычисление дисперсии

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Доказательство. С учетом того, что математическое ожидание $M(X)$ и квадрат математического ожидания $M^2(X)$ – величины постоянные, можно записать:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M\left[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right] =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$
$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625$$

$$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C)=0$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX)=C^2D(X)$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

Теорема. *Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в каждом испытании.*

$$D(X)=npq$$

Среднее квадратическое отклонение

Определение. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Теорема. *Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.*

$$\sigma(X_1+X_2+...+X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+...+\sigma^2(X_n)}$$

Пример 18. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть X – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

❍ Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна $p = 0{,}96$.

Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным.

$$M(X) = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$$

$$D(X) = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4; \bullet$$

Пример 19. Найти дисперсию дискретной случайной величины A – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что $M(X) = 0{,}9$.

❍ Так как случайная величина X распределена по биноминальному закону, то

$$M(X) = np = 2p = 0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}45;$$

$$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}495. \bullet$$

2.5 Функция распределения

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако, такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Даже в случае, когда это сделать можно, зачастую задача решается чрезвычайно сложно. Рассмотренный только что пример даже при относительно простом условии (приборов только четыре) приводит к достаточно неудобным вычислениям, а если в задаче будет несколько сотен приборов?

Поэтому встает задача по возможности отказаться от индивидуального подхода к каждой задаче и найти по возможности наиболее общий способ задания любых типов случайных величин.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, то есть $X > x$, обозначим через $F(x)$.

Определение. *Функцией распределения* называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют *интегральной функцией*.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Пример 20. Задана интегральная функция распределения (Рис. 4):

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; x \le 1, \\ 0{,}3 \;\; при \;\; 1 < x \le 4, \\ 0{,}4 \;\; при \;\; 4 < x \le 8, \\ 1 \;\; при \;\; x > 8. \end{cases}$$

Построить ее график.

❍

x	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

●

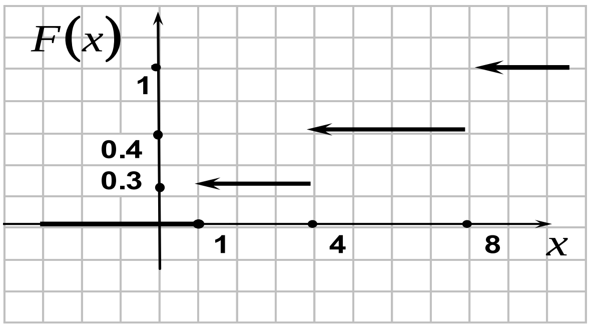


Рис. 4

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 \ge x_1$$

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

4. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Пример 21. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le -1, \\ \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4} \quad при \quad -1 < x \le 3, \\ 1 \quad при \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение принадлежащее интервалу $(0; 2)$.

○ $P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \left(\frac{1}{4}2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. ●

2.6 Плотность распределения

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

Определение. *Плотностью распределения* вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения $F(x)$.

$$f(x)=F'(x).$$

Плотность распределения также называют *дифференциальной функцией*. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает, как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки *x* при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

Определение. Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей оси Ox, а плотность распределения $f(x)$ существует везде, за исключением может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.*

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу *(a, b),* равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x)\geq 0$$

2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от - ∞ до ∞ равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

Пример 22. Случайная величина подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x, & при \quad 0\leq x\leq \pi \\ 0, & при \quad x<0 \quad или \quad x>\pi \end{cases}$$

Требуется найти коэффициент *a*, определить вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

❍ 1) Для нахождения коэффициента *a* воспользуемся свойством $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\pi} a\sin xdx+\int_{\pi}^{\infty} 0dx=a\int_{0}^{\pi} \sin xdx=-a\cos x\Big|_{0}^{\pi}=2a=1;$$

$$a=\frac{1}{2}.$$

2) Находим вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. $P\left(0\leq X\leq \frac{\pi}{4}\right)=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin x\,dx=\left(-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\approx 0{,}15.$

●

2.7 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *f(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a*,*b*].

Определение. *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Определение. *Дисперсией* непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

Определение. *Средним квадратичным отклонением* называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Пример 23. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ x^2, & при\ \ 0<x\le 1,\\ 1, & при\ \ x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) дифференциальную функцию (плотность вероятностей);
2) математическое ожидание.

❍ $$f(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ 2x, & при\ \ 0<x\le 1,\\ 0, & при\ \ x>1.\end{cases}$$

$$M(x)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\left(2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)=\frac{2}{3}.$$ ●

2.8 Законы распределения непрерывных случайных величин

При решении практических задач зачастую точно найти закон распределения случайной величины довольно сложно. Однако, все происходящие процессы, связанные со случайными величинами, можно разделить на несколько типов, каждому из которых можно поставить в соответствие какой – либо закон распределения.

Выше были рассмотрены некоторые типы распределений дискретной случайной величины такие как биноминальное распределение и распределение Пуассона.

Рассмотрим теперь некоторые типы законов распределения для непрерывной случайной величины.

Равномерное распределение

Определение. Непрерывная случайная величина имеет *равномерное* распределение на отрезке [*a*, *b*], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю (Рис. 5).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Постоянная величина C может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.

Получаем $C = \dfrac{1}{b-a}$.

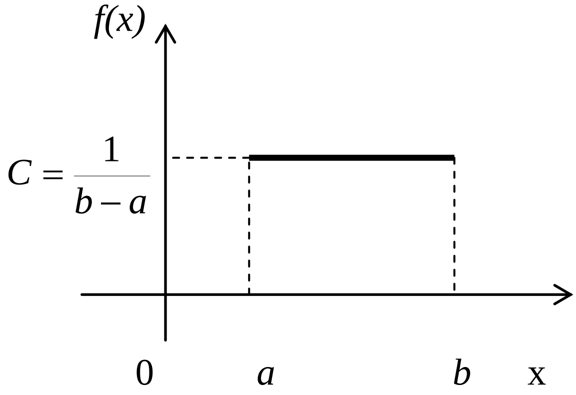


Рис. 5

Найдем функцию распределения *F(x)* на отрезке [*a*,*b*].

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a\le x\le b\\ 1, & при \quad x>b\end{cases}$$

График этой функции представлен на рисунке 6.

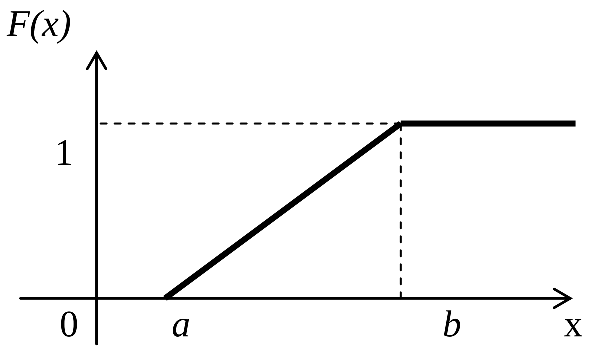


Рис. 6

Для того, чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_{a}^{b}=\frac{a+b}{2}.$$

$$M\left(X^2\right)=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_{a}^{b}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=$$

$$=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Пример 24. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого значения. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04, б) большая 0,05.

○ $f(x)=\dfrac{1}{0{,}2-0}=\dfrac{1}{0{,}5}=5$

а)

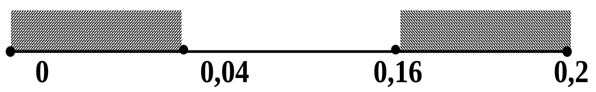


Рис. 7

$$P(0<x<0{,}04)=\int\limits_{0}^{0{,}04}5\,dx=5\cdot 0{,}04=0{,}2$$

$$P(0{,}16<x<0{,}2)=\int\limits_{0{,}16}^{0{,}2}5\,dx=5\cdot(0{,}2-0{,}16)=5\cdot 0{,}04=0{,}2$$

Ответ: $0{,}2+0{,}2=0{,}4$

б)

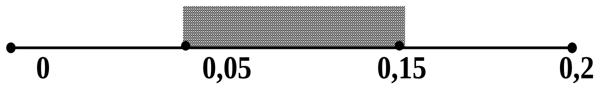


Рис. 8

$$P(0{,}5 < x < 0{,}15) = \int\limits_{0{,}05}^{0{,}15} 5\,dx = 5\cdot(0{,}15 - 0{,}05) = 5\cdot 0{,}1 = 0{,}5$$

Ответ: $0{,}5$

Пример 25. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ждать автобус менее 3 минут.

○ $f(x) = \dfrac{1}{5-0} = \dfrac{1}{5}.$

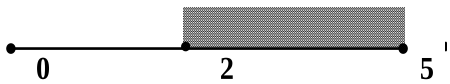


Рис. 9

$$P(2 < x < 5) = \int\limits_{2}^{5} \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}\cdot(5-2) = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Ответ: $0{,}6$ ●

Показательное распределение

Определение. *Показательным (экспоненциальным)* называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x \geq 0 \end{cases}$$

где λ - положительное число.

Найдем закон распределения.

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\lambda\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x\geq 0\end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности распределения представлены на рисунке 10.

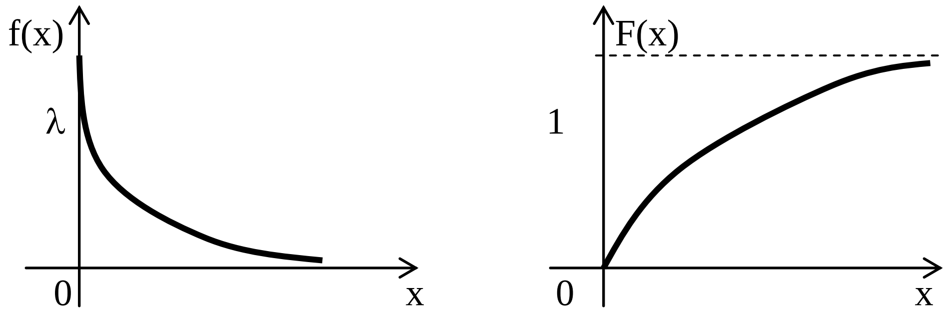


Рис. 10

Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{matrix}u=x; & e^{-\lambda x}dx=dv;\\ du=dx; & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}=v;\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx=-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}$$

Результат получен с использованием того факта, что

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}-0=\left\{\begin{matrix}По & правилу\\ Лопиталя & \end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}}=0.$$

Для нахождения дисперсии найдем величину $M\left(X^2\right)$.

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_{0}^{\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим:

$$M(X^2)=\frac{2}{\lambda^2};$$

Тогда $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{1}{\lambda^2}$.

Таким образом, $M(X)=\frac{1}{\lambda}$; $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma_x=\frac{1}{\lambda}$.

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал.

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Пример 26. Математическое ожидание показательной случайной величины X равно 5. Найдите вероятность $p=P(X<5)$.

○ Так как $M(X)=5 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{5}$.

Тогда $F(x)=1-e^{-\frac{1}{5}\cdot 5}$ $\quad p=P(X<5)=F(5)=1-e^{-1}=0{,}6321$. ●

Показательному закону обычно подчиняется величина срока службы различных устройств и времени безотказной работы некоторых элементов этих устройств при определенных условиях. Другими словами, величина промежутка времени между появлениями двух последовательных редких событий.

2.9 Нормальный закон распределения

Определение. *Нормальным* называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma = \sigma(x)$, $a = M(X)$

Нормальный закон распределения также называется *законом Гаусса.*

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры a и σ, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X .

Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{(x-a)}{\sigma},$$

где $\sigma = \sigma(X)$, $a = M(X)$

График плотности нормального распределения называется *нормальной кривой или кривой Гаусса.*

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1. Функция определена на всей числовой оси.

2. При всех x функция распределения принимает только положительные значения.

3. Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, так как при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента x, значение функции стремится к нулю.

4. Найдем экстремум функции.

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0; \qquad x = a;$$

Так как при $y' > 0$ при $x < a$ и $y' < 0$ при $x > a$, то в точке $x = a$ функция имеет максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5. Функция является симметричной относительно прямой $x = a$, так как разность $(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате.

6. Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right]$$

При $x = a+\sigma$ и $x = a-\sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, то есть в этих точках функция имеет перегиб.

В этих точках значение функции равно $\dfrac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Построим график функции плотности распределения (Рис. 11).

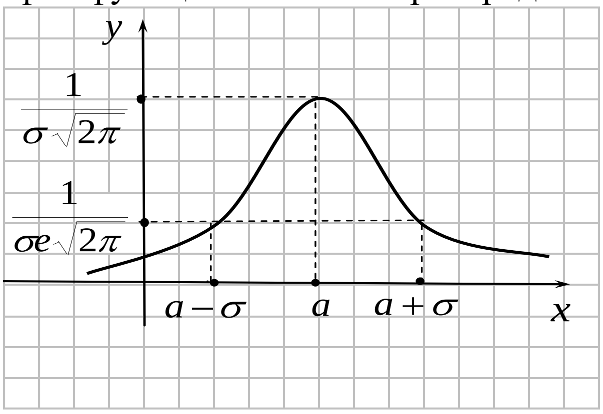
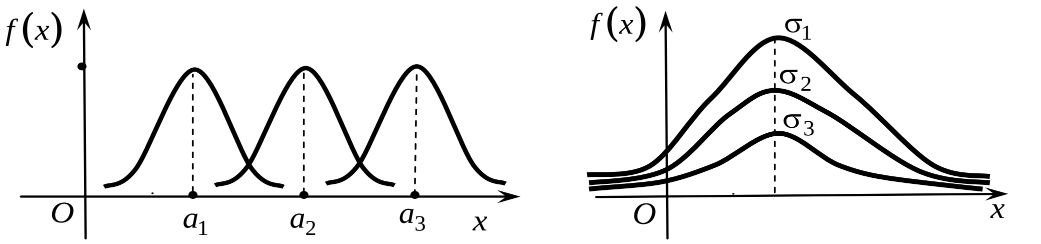


Рис. 11

Графики $f(x)$ при различных значениях a и σ изображены на рисунке 11.



$\sigma = const \quad a_1 < a_2 < a_3$ $\qquad a = const$

Рис. 11

Параметр a характеризует положение кривой, а параметр σ - форму кривой нормального распределения.

При $a = 0$ $\sigma = 1$ распределение называется *стандартным нормальным*, а график называется *нормированной кривой* (Рис. 12).

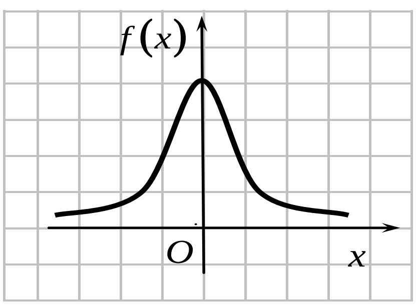


Рис. 12

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-x^2}{\sigma^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi(x).$$

Если случайная величина распределена по нормальному закону, то

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от математического ожидания по модулю меньше заданного числа δ равна $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

2.10 Правило трех сигм

Если случайная величина распределена по нормальному закону, то модуль ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

$$P(|X - a| < 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) = 0{,}9973.$$

На практике это правило используют так: если распределение случайной величины X не известно, но правило трех σ выполняется, то есть основание предполагать, что случайная величина X распределена нормально.

Нормальному закону распределения подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, рост человека, колебание курса акций и т.д.

Пример 27. Случайная величина X распределена по нормальному закону $a = 10$, а вероятность ее попадания в интервал $(5;15)$ равна 0,8. Найти вероятность попадания в интервал $(9;10)$.

$$P(5 < X < 15) = \Phi\left(\frac{15-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{5-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}8$$

$$2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}8 \;;\quad \frac{5}{\sigma} = 1{,}29 \;;\quad \sigma = 3{,}876$$

$$P(9 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-10}{3{,}876}\right) - \Phi\left(\frac{9-10}{3{,}876}\right) = \Phi(0) + \Phi(0{,}258) = 0{,}1018$$

3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1 Случайные события

1. Брошены две игральные кости. Сколько всего исходов имеет данный опыт? Найти вероятности следующих событий: 1) на каждой кости появилось четное число очков; 2) хотя бы на одной кости появилось три очка; 3) сумма очков на костях – нечетное число; 4) сумма очков на костях равна 9; 5) сумма очков делится на 3; 6) сумма выпавших очков больше их произведения; 7) на обеих костях появится одинаковое число очков; 8) сумма выпавших очков не больше 6; 9) произведение выпавших очков равно 12; 10) произведение выпавших очков не меньше 12. Какие из событий 1)-4) являются несовместными? Какие из событий 7)-10) являются несовместными? Какие из событий 1)-10) являются равновозможными?

2. Куплено два лотерейных билета. Найти вероятности следующих событий: 1) выиграют два билета; 2) выиграет хотя бы один билет; 3) выиграет только один лотерейный билет; 4) не выиграет ни один билет. Какие из этих событий являются несовместными? Какие из этих событий являются элементарными исходами данного опыта? Какие из этих событий являются равновозможными?

3. Бросаем одну монету три раза. Сколько всего элементарных исходов имеет данный опыт? Отличаются ли эти исходы от исходов опыта, в котором одновременно подбрасываются три монеты? 1) Записать все возможные исходы (события), если учитывается число выпадений герба. Составляют ли данные события полную группу? Совместны ли они? Какие из этих событий являются равновозможными? 2) Записать все возможные исходы (события), если учитывается какой стороной монета большее число раз выпала вверх. Составляют ли данные события полную группу? Совместны ли они? Какие из этих событий являются равновозможными?

4. Какова вероятность правильно набрать номер телефона, если: 1) забыта последняя цифра; 2) забыта первая цифра; 3) забыты две цифры, одна из которых – четная; 4) забыты две различные цифры и первая из них не 0?

5. Из букв разрезной азбуки составлено слово. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него получится исходное слово: 1) книга; 2) мама; 3) атака; 4) машина?

6. На отдельных одинаковых карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Карточки перемешивают, после чего наугад берут четыре карточки и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность получить при этом: 1) четырехзначное четное число; 2) число 1234; 3) четырехзначное число, в котором последующая цифра больше предыдущей. Как изменятся вероятности 1)-3), если добавить карточку с цифрой 0?

7. Игровой автомат выдает комбинации из трех цифр, причем появление любой из этих комбинаций считается равновозможной. Какова вероятность выигрыша, если для этого требуется: 1) выпадение трех одинаковых цифр, за исключением 000; 2) чтобы хотя бы две любые из выпавших цифр были одинаковыми.

8. Какова вероятность того, что в январе наудачу выбранного года окажется пять воскресений?

9. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца?

10. В «черном» ящике лежат 15 одинаковых на ощупь шаров, 10 из них – белые, остальные – красные. Найти вероятность того, что последовательно вынутые три шара окажутся 1) белыми; 2) красными?

11. В магазине имеется 20 пар обуви одной модели, из них 7 пар 41 размера. Найти вероятность того, что четырем покупателям подряд понадобится именно 41 размер данной модели?

12. Бросаются три игральных кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпадет: 1) одинаковое количество очков; 2) разное число очков?

13. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании трех костей сумму очков, большую 10. Какова вероятность выигрыша?

14. Мишень представляет собой три концентрические окружности с радиусами 1, 2 и 3 соответственно. Попадание в центральный круг дает 10 очков, в кольцо, ограниченное окружностями радиусов 1 и 2 – 5 очков, во внешнее кольцо – 2 очка. В мишень случайным образом бросается точка. Определить вероятность набрать при одном броске 2, 5 или 10 очков. Каковы должны быть радиусы концентрических окружностей мишени, чтобы 2, 5 или 10 очков можно было набрать с равными вероятностями?

15. У квадратного трехчлена x^2+px+q коэффициенты p и q выбраны наудачу из отрезка [-1;1]. Какова вероятность, что квадратный член имеет действительные корни?

16. Противотанковые мины поставлены на прямой через 15 метров. Танк шириной 3 метра идет перпендикулярно этой прямой. Какова вероятность, что он подорвется?

3.2 Операции над событиями

1. Для перечисленных ниже событий сформулировать противоположные события и найти их вероятности: 1) A – выпадение двух гербов при бросании двух монет; 2) B – вынуть белый шар из урны, в которой находятся 2 белых, 3 черных и 4 красных шара; 3) C – три попадания при трех выстрелах, вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,8; 4) D – хотя бы одно попадание при пяти выстрелах, попадание и промах при каждом выстреле равновероятны.

2. Из колоды в 52 карты наудачу вынимается одна. Какие из перечисленных ниже событий будут независимы, а какие несовместны (рассмотреть все возможные пары событий): 1) A – появление туза; 2) B – появление красной масти; 3) C – появление бубнового туза; 4) D – появление десятки.

3. Бросаются две монеты. Найти вероятность суммы следующих событий: A – на первой монете выпал герб, B – на второй монете выпал герб двумя способами: 1) по теореме сложения; 2) используя вероятность противоположного события.

4. Из колоды в 52 карты вынимается четыре карты. Найти вероятность

суммы следующих событий: А – среди вынутых карт хотя бы одна бубновая, В – среди вынутых карт хотя бы одна червонная.

5. Брошены две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на 5.

6. Из урны, в которой лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 белых и 8 черных, один за другим вынимаются два шара. С помощью теоремы умножения найти вероятность того, что 1) оба шара белые; 2) оба шара черные. Сравнить вероятности вынуть два разноцветных шара при условии, что 1) первый шар не возвращается в урну; 2) первый шар возвращается в урну.

7. Из урны, в которой лежат 4 красных и 6 черных шаров, один за другим вынимаются два шара. Найти вероятность того, что 1) оба шара одного цвета; 2) вынуты шары разных цветов; 3) второй вынутый шар – черный.

8. В коробке 12 карандашей трех цветов, по 4 карандаша каждого цвета. Наудачу вынимают три карандаша. Найти вероятность того, что все карандаши окажутся разного цвета при условии: 1) карандаши не возвращают в коробку; 2) вынутый карандаш возвращают в коробку.

9. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка 0,8, а для второго 0,6. Найти вероятности следующих событий: 1) оба попали; 2) в мишень попал один стрелок; 3) в мишень попал хотя бы один стрелок.

10. Вероятность поражения мишени для первого стрелка 0,6. Найти вероятность поражения мишени для второго стрелка, если вероятность того, что мишень поражена два раза 0,3.

11. Вероятность одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий равна 0,44.Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

12. Вероятность попадания в цель при стрельбе для каждого орудия равна 0,6. Производится одновременно по одному выстрелу из трех орудий. Цель считается пораженной, если в нее попало не менее двух снарядов. Найти вероятность того, что 1) цель поражена; 2) два орудия промахнулись.

13. Три студента сдают экзамен. Вероятность получить «отлично» для первого студента равна 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: 1) только одним из студентов; 2) двумя студентами; 3) хотя бы одним студентом; 4) ни одним из студентов.

14. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,784. Найти вероятность одного промаха при трех выстрелах.

15. Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью 0,9 хотя бы один раз выпало не менее 4 очков.

Формула полной вероятности *(задачи 16 – 18)*.

16. В первой урне находится 10 шаров: 8 белых и 2 черных. Во второй 6 шаров: 5 белых и 1 черный. Из второй урны переложили в первую один шар. Какова вероятность того, что шар, извлеченный после этого из второй урны, окажется черным? Какова вероятность того, что шар, извлеченный после этого

из первой урны, окажется белым?

17. Имеются две урны. В первой – 6 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 5 черных шара. Из первой урны переложили во вторую один шар, затем, перемешав шары, из второй урны в первую переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первой урны, окажется белым.

18. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, а 2 нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки – 0,6, а из не пристрелянной – 0,4. Какова вероятность, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадет в цель при одном выстреле?

Формула Байеса *(задачи 19 – 21)***.**

19. Из 25 студентов группы 5 студентов знают все 30 вопросов программы, 10 студентов выучили по 25 вопросов, 7 студентов по 20 вопросов, 3 студентов по 10 вопросов. Случайно вызванный студент ответил на два заданных вопроса. Какова вероятность, что это один из трех студентов, которые подготовили 10 вопросов.

20. Запасная деталь может находиться в одной из трех партий с вероятностями: 0,2; 0,5; 0,3. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Определить вероятность того, что деталь, проработавшая положенное время, взята из второй или третьей партии.

21. 24 человека обучаются заочно на экономическом факультете, из них 6 по специальности маркетинг, 12 по специальности менеджмент и 6 по специальности прикладная информатика. Вероятность успешно сдать все экзамены на предстоящей сессии для специальности маркетинг – 0,8; для менеджмента – 0,76; для прикладной информатики – 0,6. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно все экзамены, окажется студентом - маркетологом.

3.3 Повторение событий

1. Найти вероятность того, что при четырех подбрасываниях игральной кости 5 очков появятся: 1) два раза; 2) хотя бы один раз.

2. Вероятность выбора отличника на факультете равна 1/7. Из 28 студентов группы наудачу выбираются три студента. Определить вероятности всех возможных значений числа отличников, которые могут оказаться среди трех выбранных студентов.

3. В семье 5 детей. Считая вероятности рождений мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что в семье: 1) два мальчика; 2) не более двух мальчиков; 3) более двух мальчиков; 4) не менее двух и не более трех мальчиков.

4. Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадения 6 очков было равно 50.

5. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее вы-

играть для каждого из них: 1) одну партию из двух или две из четырех; 2) не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти. Ничьи во внимание не принимаются.

6. Бланк программированного опроса состоит из пяти вопросов. На каждый даны три ответа, один из которых правильный. Какова вероятность, что методом угадывания студенту удастся выбрать, по крайней мере, 4 правильных ответа?

7. При выпуске некоторой продукции бывает в среднем 0,5% брака. Определить вероятность того, что в партии из 800 изделий будет не более 3-х бракованных изделий.

8. Вероятность того, что купюра фальшивая, равна 0,01. Найти вероятность того, что из 100 купюр: а) хотя бы одна фальшивая; б) не менее трех фальшивых.

9. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 2000 собранных приборов окажется не более трех собранных неточно.

10. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,99. Найти наиболее вероятное число случаев неправильной работы автомата и вероятность этого числа, если в автомат опущено 200 монет.

11. Установлено, что виноградник поражен вредителями в среднем на 10%. Определить вероятность того, что из 10 проверенных кустов винограда один будет поражен. Вычисления провести по формулам Бернулли, Лапласа, Пуассона. Сравнить результаты, сделать выводы.

12. На факультете 900 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Найти вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

13. Вероятность получения отличной оценки на экзамене равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отличных оценок и вероятность этого числа, если экзамен сдают 75 студентов.

14. В партии семян в среднем 10% невсхожих семян. Найти вероятность того, что в партии из 2500 семян окажется от 2200 до 2350 (включительно) всхожих.

15. Вероятность погашения кредита в срок равна 0,75. Найти вероятность того, что из 200 кредитов выданных банком будет погашено в срок: а) 175 кредитов, б) не менее 140 кредитов.

16. Спортсмен попадает в цель с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что: а) на тренировке из ста выстрелов промахов будет не более десяти, б) на соревнованиях у этого спортсмена из десяти выстрелов будет не менее девяти попаданий.

17. Известно, что в среднем 80% кредитов, выданных банком, погашаются в срок. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9545 будет находиться доля кредитов погашенных в срок из ста выданных.

18. В среднем 60% посетителей магазина делают в нем покупки. Найти вероятность того, в наудачу выбранный день из 200 посетителей доля, не сделавших покупок будет менее 20%.

19. Спортсмен попадает в цель с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что на тренировке из ста выстрелов промахов будет менее сорока.

20. В среднем продается 70% билетов на 300 мест зрительного зала театра. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 будет находиться число проданных билетов в наудачу выбранный день.

21. Сколько раз следует подбросить монету, чтобы частота выпадения герба отличалась от вероятности не более чем на 0,01 с вероятностью 0,9545.

22. Какое количество повторных независимых испытаний следует провести, чтобы вероятность события отличалась от его частоты не более чем на 0,05 с вероятностью 0,9973 .

23. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения относительной частоты от постоянной вероятности не превысила ε.

24. Вероятность того, что человек в период страхования будет травмирован, равна 0,006. Компанией застраховано 1000 человек. Годовой взнос с одного человека составляет 150 рублей. В случае получения травмы застраховавшийся получает 12000 рублей. Какова вероятность того, что выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?

3.4 Дискретная случайная величина

1. Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X - числа комбайнов, работавших безотказно. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

2. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X - числа мальчиков в семьях, имеющих четырех детей. Построить график распределения вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3. Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине 0,4. Составить закон распределения случайной величины X - числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Построить график распределения вероятностей.

4. В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3 спортсмена. Составить закон распределения случайной величины X - числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

5. Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X - числа выстрелов, сделанных стрелком. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,7. Найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

6. Покупатель посещает магазины до момента приобретения нужного това-

ра. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины X - числа магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных. Построить график распределения. Найти наиболее вероятное число магазинов, которые посетит покупатель.

7. Игрок поочередно покупает билеты двух разных лотерей до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету первой лотереи составляет 0,2, а второй - 0,3. Игрок вначале покупает билет первой лотереи. Составить закон распределения и найти математическое ожидание случайной величины X - числа купленных билетов, если игрок имеет возможность купить; а) только 5 билетов; б)* неограниченное число билетов.

8. На конноспортивных соревнованиях необходимо преодолеть четыре препятствии с вероятностями, равными соответственно 0,9; 0,8; 0,7; 0,6. При первой неудаче спортсмен в дальнейших состязаниях не участвует. Составить закон распределения случайной величины X - числа взятых препятствий. Найти математическое ожидание случайной величины X.

9. В игре спортивной лотереи угадывается 5 номеров из 36. Игрок получает выигрыш, если угадает 5,4 или 3 номера. За 5 угаданных номеров выигрыш составляет 10 тыс. руб. Сумма выигрыша по одной карточке за 4 правильно угаданных номера в 10 раз больше, чем за 3. Составить закон распределения случайной величины X-числа правильно угаданных номеров. Определить среднюю величину выигрыша, если известно; что карточек было выпущено 1 млн. шт. Стоимость одной карточки 1 руб. Выигрыши составляют 50 % общей суммы тиража.

10. Бросают 12 игральных костей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X - суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

11. Математическое ожидание случайной величины X равно 8. Найти математическое ожидание случайных величин: а) X-4; б) X+6; в) 3X-4; г) 4X+3.

12. Дисперсия случайной величины X равна 8. Найти дисперсию следующих величин: а) X-2; б) X+6; в) 3X-2; г) 2X+7.

13. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) Z=4X-2Y; б) Z=2X-4Y; в) Z=3X+5Y; если M(X)=5, M(Y)=3, D(X)=4, D(Y)=6. Случайные величины X и Y независимы.

14. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин:а) Z=4X+2Y; б) Z= 5X-3Y; в) Z=3X-Y, если M(X)=6, M(Y)=5, D(X)=5, D(Y)=4. Случайные величины X и Y независимы.

15. Вероятность изготовления бракованной детали автоматом равна 0,002. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X - числа бракованных деталей, если деталей изготовлено 1000. Определить вероятность того, что из 1000 деталей будет изготовлено: а) не более двух бракованных; б) хотя бы одна бракованная.

16. Независимые случайные величины X и Y имеют следующие распределения:

i			
i	**,3**	**,5**	**,2**

i		
i	**,4**	**,6**

Составить закон распределения случайных величин: а) Z=X+Y; б) V=XY. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин Z и V.

17. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: x_1=1 с вероятностью p_1=0,2; x_3=5 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью p_2. Найти x_2 и p_2, если известно, что M (X)=3.

18. Вероятность сдать экзамен студентом на «отлично» равна 0,3, на «хорошо» - 0,4. Определить вероятности получения других оценок (2; 3), если известно, что M(X)=3,9.

19. Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,02. Найти M(X) и σ(X) числа выигранных билетов, если их было приобретено 100.

20. По одному тиражу лотереи куплено 100 билетов. Среднее квадратическое отклонение числа выигранных билетов равно трем. Найти вероятность выигрыша по одному билету лотереи.

21. Подброшены две игральные кости. Найти M(X), где X - случайная величина - сумма числа очков, которые могут появиться на двух выпавших гранях.

3.5 Непрерывная случайная величина

1. По данным задач 1, 3, 4, 8 пункта 3.4 составить интегральную функцию случайной величины X и начертить ее график.

2. Найти интегральную функцию распределения случайной величины X - числа попаданий в цель, если произведено три выстрела с вероятностью попадания в цель при каждом выстреле 0,8.

3. Вероятность сдачи первого экзамена студентом составляет 0,7, второго 0,6 и третьего 0,8. Найти интегральную функцию случайной величины X - числа экзаменов, сданных студентом. Определить M(X).

4. Случайная величина X задана интегральной функцией F(x):

$$\begin{cases} 0 & при \quad x \le -2 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} & при \quad -2 < x \le 2 \\ 1 & при \quad x > 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение: а) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1; г) заключенное в интервале (0;2).

5. Дана интегральная функция случайной величины X F(x):

$$\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^6}{4} & при \quad 0 < x \le \sqrt[3]{2} \\ 1 & при \quad x > \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате шести испытаний случайная величина X два раза примет значение, принадлежащее интервалу (0;1).

6. Случайная величина X задана интегральной функцией F(x):

$$\begin{cases} 0 & при \quad x \le 1 \\ \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{1}{8} & при \quad 1 < x \le 3 \\ 1 & при \quad x > 3 \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины X; б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2).

7. Дана функция распределения случайной величины X F(x):

$$\begin{cases} 0 & при \quad x \le -2a \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{a}{2} & при \quad -2a < x \le (4-2a) \\ 1 & при \quad x > (4-2a) \end{cases}$$

а) Определить вероятность попадания случайной величины в интервал (-*a*;*a*). б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

8. Случайная величина X задана интегральной функцией F(x):

$$\begin{cases} 0 & при \quad x \le A \\ \dfrac{x^3}{8} & при \quad A < x \le B \\ 1 & при \quad x > B \end{cases}$$

Найти значения *A* и *B*, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

9. Случайная величина X задана интегральной функцией F(x). Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины X; б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина X хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1;1,5); в) начертить графики функций.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} & при \quad 1 < x \le 2 \\ 1 & при \quad x > 2 \end{cases}$$

10. Случайная величина X задана дифференциальной функцией f(x). Найти: а) интегральную функцию; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (а/6;а/3).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ \dfrac{4a-2x}{3a^2} & при \quad 0 < x \le a \\ 0 & при \quad x > a \end{cases}$$

11. Случайная величина X задана дифференциальной функцией f(x). Найти: а) интегральную функцию случайной величины X и начертить её график; б) вероятность попадания случайной величины X в интервал (-1;1/3); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при\, x < 0 \\ 3e^{-3x} & при\, x \ge 0 \end{cases}$$

12. Случайная величина X задана дифференциальной функцией f(x). Найти: а) постоянную С; б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1 \\ \dfrac{3x^2-2x}{C} & при \quad 1 < x \le 4 \\ 0 & при \quad x > 4 \end{cases}$$

13. Случайная величина X задана дифференциальной функцией f(x). Найти: постоянную С.

$$f(x) = \frac{2C}{e^x + e^{-x}} \, при \quad -\infty < x < +\infty$$

14. НСВ X имеет плотность вероятности (закон Коши): $f(x) = C/(1+x^2)$. Найти: а) постоянную С; б) функцию распределения F(x); в) вероятности попадания в интервалы (-1 ; 1); ($-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$); г) построить графики f(x), F(X).

Равномерный закон распределения *(задачи 15 – 17).*

15. Случайная величина X равномерно распределена в интервале (-2;N). Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины X; б) интегральную функцию; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (-1;N/2); г) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

16. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале: а) (5, 11); б) (-3; 5). Начертить графики этих функций.

17. Равномерно распределенная случайная величина X задана плотностью распределения f(x) = 0,125 в интервале (а-4; а+4), вне его f(x) = 0. Найти М(X), Д(X), σ(X).

Показательный закон распределения *(задачи 18 – 24).*

18. Написать дифференциальную и интегральную функции распределения показательного закона, если: а) параметр λ=2; б) λ=5; в) λ=0,5.

19. Случайная величина X распределена по показательному закону, причем λ=2. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал: а) (0; 1); б) (2; 4).

20. Найти M(X), D(X), σ(X) показательного закона распределения случайной величины X заданной функцией F(x):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & при\, x \ge 0 \end{cases}$$

Если: а) λ=0,4; б) λ=3; в) λ=4.

21. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,1t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$•. Найти вероятность того, что за время длительностью 20 часов: а) оба элемента будут работать; б) откажет только один элемент; в) откажет хотя бы один элемент; г) оба элемента откажут.

22. Вероятность того, что оба независимых элемента будут работать в течение 10 суток равна 0,64. Определить функцию надежности для каждого элемента, если функции одинаковы.

23. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы равно 2. Найти вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает: а) 4 ошибки; б) не менее двух ошибок; в) хотя бы одну ошибку.

24. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) 4 вызова; б) не менее трех вызовов.

Нормальный закон распределения *(задачи 25 – 33)*

25. Для исследования продуктивности определенной породы домашней птицы измеряют диаметр яиц. Наибольший поперечный диаметр яиц представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону со средним значением 5 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти вероятность того, что: а) диаметр взятого наудачу яйца будет заключен в границах от 4,7 до 6,2 см; б) отклонение диаметра от среднего не превзойдет по абсолютной величине 0,6 см.

26. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 150 г и математическим ожиданием a = 1000 г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет: а) от 900 до 1300 г; б) не более 1500 г; в) не менее 800 г; г) отличаться от среднего веса по модулю не более чем на 200 г; д) начертить график дифференциальной функции случайной величины X.

27. Урожайность озимой пшеницы по совокупности участков распределяется по нормальному закону с параметрами: a = 50 ц/га, σ = 10 ц/га. Определить: а) какой процент участков будет иметь урожайность свыше 40 ц/га; б)

процент участков с урожайностью от 45 до 60 ц/га.

28. Выборочным методом измеряется засоренность зерна, случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 0,2 г и математическим ожиданием а = 0. Найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 0,3 г.

29. Количество зерна, собранного с каждой делянки опытного поля, есть нормально распределенная случайная величина X, имеющая математическое ожидание m = 60 кг и среднее квадратическое отклонение равно 1,5 кг. Найти симметричный относительно m интервал, в котором с вероятностью 0,9906 будет заключена величина X. Написать дифференциальную функцию этой случайной величины.

30. С вероятностью 0,9973 было установлено, что абсолютное отклонение живого веса случайно взятой головы крупного рогатого скота от среднего веса животного по всему стаду не превосходит 30 кг. Найти среднее квадратическое отклонение живого веса скота, считая, что распределение скота по живому весу подчиняется нормальному закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. М.: Дашков и К, 2016. 472 с.

2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: КД Либроком, 2018. 656 с.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2007. 491 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата. Люберцы: Юрайт, 2016. 479 с.

5. Гусак А.А. Теория вероятностей: справочное пособие к решению задач. Минск: ТетраСистемс, 2009. 288 с.

6. Ковалев Е.А., Медведев Г.А. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. Люберцы: Юрайт, 2016. 284 с.

7. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях: учебное пособие. М.: Форум, 2011. 480 с.

8. Петрушко И.М. Курс высшей математики. Теория вероятностей. Лекции и практикум: учебное пособие. СПб.: Лань, 2008. 352 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

для бакалавров очной и заочной форм обучения
направлений подготовки

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств
35.03.06 Агроинженерия

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 09.10.2019 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 3,25. Тираж 25 экз. Изд. № 6490.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ