МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

факультет среднего профессионального
образования

Дьяченко О.В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «Математика» для студентов специальностей 23.02.03 (Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта), 35.02.08 (Электрификация и автоматизация сельского хозяйства)

Брянск, 2015

Содержание

Лекция 1. Действительные числа и действия над ними

1. Понятие действительного числа.
2. Действия с действительными числами
3. Числовые множества
4. Взаимно-однозначное соответствие между числами и координатной осью

Понятие числа является основным в математике. Различают следующие множества чисел.

N – множество натуральных чисел; (числа 1, 2, 3, …n,…)

Z – множество целых чисел; (числа 0. ±1, ±2, ±…, ±n,…)

Q – множество рациональных чисел или дробей. Это числа, имеющие основную форму записи вида $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа (например, $\frac{2}{3}$, $\frac{20}{7}$, - $\frac{5}{4}$,…). Кроме основной формы $\frac{5}{4}$, рациональные числа при необходимости записывают также в виде смешанных дробей (например, $\frac{5}{4}$ = - 1$\frac{1}{4}$ = - 1,25).

J – множество иррациональных (не рациональных чисел, то есть множество таких чисел, которые не могут быть представлены в виде дробей $\frac{m}{n}$ (например, π; $\sqrt{2}$ и т. д.).

R – множество действительных (или вещественных) чисел. Множество R представляет собой объединение множеств Q и J (рац. и п Q р.). Множество R содержит в себе, таким образом, все остальные числовые множества.

Действительные числа удобно изображать геометрически.

Арифметические действия с числами: сложение, вычитаний, умножение, деление на нуль.

Действия с нулем и единицей:

a+0=a,

a–0=a,

a 0=0,

0 a=0,

a 1=1 a=a,

$\frac{0}{2}$=0,

$\frac{a}{1} =$ a

Правила знаков

Если четное количество минусов, то в результате +, а если нечетное, то в результате «-».

Сумма противоположных чисел равна нулю.

НОК и НОД

Наибольшим общим делителем чисел a и b - называется наибольшее натуральное число, которое делит числа a и b без остатка.

Чтобы найти НОД чисел нужно:

1) разложить их на простые множители;
2) выписать общие множители;
3) перемножить их.

Числа у которых нет НОД называются *взаимно-простыми*.

Наименьшим общим кратным чисел a и b - называется наименьшее натуральное число, которое делиться на a и b без остатка.

Чтобы найти НОК чисел нужно:

1) разложить на простые множители;
2) выписать множители первого числа;
3) добавить недостающие множители из второго числа;
4) найти произведение получившихся множителей.

Простыми называются числа, которые имеют только два делителя: 1 и само число.

Выпишем кратные большего числа. Почему большего ?

К (12) = □12 , 24 , 36 , 48 , 60 , …□ Проверим являются ли эти числа кратными 8. Начнем с наименьшего кратного .

12 не делиться на 8 ; 24 делиться на 8

НОК(8;12) = 24

Чему равно произведение НОД и НОК этих чисел ? 4 • 24 = 96

Пример. Найдите НОД и НОК чисел 252 и 264 методом разложения на простые множители .

Решение:

252 2 264 2 Признак делимости на 2.

126 2 132 2 Признак делимости на 3.

63 3 66 2

21 3 33 3

7 7 11 11

1 1

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$

НОД(252; 264) = $2^2 \cdot 3$ = 12. С какими показателями мы берем степени? С наименьшими.

НОК(252;264) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ = 5544. С какими показателями мы берем степени? С наибольшими.

Контрольные вопросы:

1) Определение действительного числа.
2) Перечислите основные действия с действительными числами.
3) Назовите известные Вам числовые множества.

Лекция 2. Дроби. Действия с дробями

1. Действия с дробями. НОЗ
2. Свойства равенств и неравенств

Основное свойство дроби

$\frac{m}{n}=\frac{m\cdot k}{n\cdot k}$, и обратно $\frac{m\cdot k}{n\cdot k}=\frac{m}{n}$ (к $\neq 0$, n $\in$ z), т. е. [числитель и знаменатель можно умножать или делить (сокращать) на одно и то же число, отличное от нуля, – дробь не измениться].

При сложении и вычитании дробей с одинаковыми знаменателями надо сложить (вычесть) числители и записать общий знаменатель ($\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{6-2}{7}=\frac{4}{7}$).

При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями, надо привести их к наименьшему общему знаменателю ($\frac{3}{8}-\frac{7}{12}=\frac{9-14}{24}=\frac{5}{24}$).

Умножение дробей производится по правилу: $\frac{m}{n}\bullet\frac{p}{q}=\frac{m\bullet p}{n\bullet q}$

(по возможности необходимо сокращать $\frac{2}{3}\bullet\frac{7}{8}=\frac{7}{12}$).

Деление дробей производится по правилу: $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$

При выполнении действий над дробями надо заменить неправильную дробь в смешанное число ($\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$) и наоборот: ($3\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2}{5}=\frac{17}{5}$)

Для самоконтроля осуществить следующие арифметические действия.

1) [10-(3*4-32)]:5= (Ответ: 6)

2) $2\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}=$ (Ответ: $1\frac{3}{4}=1{,}75$)

3) $-2\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=$ (Ответ: $\frac{3}{8}$)

4) $-2\frac{1}{3}*6{,}9=$ (Ответ: -16,1)

5) (15,6-3$\frac{1}{4}$):0,25= (Ответ: 49,4)

6) (100-84.5*1,2):0,07= (Ответ: -20)

Равенство и неравенство чисел

Для любых двух действительных числен a и b возможно лишь три случая соотношений между ними:1) a = b; 2) a > b; 3) a < b.

Основные свойства равенства и неравенства чисел очевидным образом следует из смысла этих понятий:

1. Если a = b , то a – b = 0 и b – a = 0 и обратно, если a – b = 0 или b – a = 0, то a = b.

На числовой оси равные числа изображаются одной и той же точкой, например $\frac{9}{15}$ и 0,6.

2. если a = b, то a ± c = b ± c (c – любое число)

3. если a = b, то a · c = b · c (c – любое число)

4. если a = b, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (c ≠ 0)

Основные свойства неравенств:

1. Если a > b , то a – b > 0 и b – a < 0 и обратно, если a – b > 0 или b – a < 0, то a > b (или, что то же, b < a)

Неравные числа изображаются разными точками числовой оси. При этом большему числу соответствует точка, стоящая правее, а меньшему – левее. В частности любое отрицательное числа меньше любого положительного.

2. Если a > b и c > 0, то $\frac{a}{c} \rangle \frac{b}{c}$; a > b и c < 0, то $\frac{a}{c} \langle \frac{b}{c}$

3. Если a > b, то a ± c > b ± c (c – любое число)

4. Если a > b и c > 0, то a · c > b · c, а если a > b и c < 0, то a · c > b · c

Основные свойства равенств и неравенств чисел являются основой для выполнения математических преобразований в уравнениях и неравенствах.

Рассмотрим несколько соответствующих примеров.

1. Сравнить числа:

а) 0,8 и $\frac{7}{9}$; б) $\frac{9}{15}$ и 0,6; в) $1\frac{1}{6}$ и – 3,5

Решение:

а) $0{,}8-\frac{7}{9}=\frac{8^{9}}{9}-\frac{7^{10}}{9}=\frac{72-70}{90}=\frac{2}{90}\triangleright 0$, следовательно, $0{,}8\triangleright\frac{7}{9}$.

б) $\frac{9}{15}-0{,}6=\frac{3}{5}-0{,}6=0{,}6-0{,}6=0$. Следовательно, $\frac{9}{15}=0{,}6$

в)$1\frac{1}{6}\triangleright -3{,}5$ (очевидно)

2. Решить уравнения (Уравнение – равенство содержащее неизвестное. Решить уравнение, значит, найти такое значение неизвестного, которое обращает его в верное числовое равенство, т. е. тождество).

а) 4 – x = 5x – 8; б) $\frac{2x+1}{-5}=-3$

Решение:

а) 4 – x = 5x – 8; -x - 5x = -8 – 4; -6x = -12; x = 2 б) $\frac{2x+1}{-5} = -3$; 2x + 1 = (-3) · (-5); 2x + 1 = 15; 2x = 15 – 1; 2x = 14; x = 7

3. Решить неравенство:

а) 4 – x < 5x – 8; б) $\frac{2x+1}{-5} \rangle -3$

Решение:

а) 4 – x < 5x – 8; -x - 5x < -8 – 4; -6x < -12; x > 2

б) $\frac{2x+1}{-5} \rangle -3$; 2x + 1 < (-3) · (-5); 2x + 1 < 15; 2x <15 – 1; 2x < 14; x < 7

Контрольные вопросы:

1) Основное свойство дробей
2) Перечислите свойства дробей

Лекция 3. Понятие степени. Корень. Действия со степенями и корнями

1. Степени с натуральным целым показателем
2. Степени с рациональным показателем
3. Корни
4. Правила действия со степенями и корнями
5. Проценты

Возведение в целую степень

Степенью числа a с показателем n, где n $\in$N, a $\in$R, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a$ $(2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8)$. В частности $1^n = 1$, $0^{n=0}$

В выражении a^n число a называется основанием степени, а число n – показатель степени.

$a^1 = a$ $(2^1 = 2)$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8})$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ $(2^0 = 1; (\frac{1}{5})^0 = 1; \pi^0 = 1$

Извлечение корня. Арифметическое значение корня.

Пусть a $\in$R, n $\in$N. Тогда по определению: $\sqrt[n]{a} = b$, если $b^n = a$

(корень энной степени из a равен, если b степени n дает a).

a – подкоренное число, n – показатель корня

Пример: $\sqrt[3]{8} = 2$, т. к. $2^3 = 8$

В частности, согласно определения корня, имеет: $\sqrt[n]{0} = 0$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$ $(n \in N)$

Если показатель корня n = 2, то корень называется квадратным и показатель корня не пишется: $\sqrt{9 = 3}$.

При n нечетном $\sqrt[n]{a}$ существует при любом $a \in R$ и всегда имеет единственное значение. Например: $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$

При n четном $\sqrt[n]{a}$ существует лишь $a \geq 0$, но имеет при этом для всех $a > 0$ два значения.

Например: $\sqrt{4} = 2$ $(2^2 = 4)$ $\sqrt{4} = -2$ $((-2^2) = 4$

Чтобы не было путаницы, условились в таких случаях когда корня два, признавать за корень лишь его положительное значение, которое назвали арифметическим значением корня.

В частности, в соответствии с указанным правилом:

$\sqrt{x}^{\,2} =$ x, если $x \geq 0$

-x, если $x < 0$ = /x/

(/x/ - модуль, или абсолютная величина, числа x)

Возведение в дробную степень:

Пусть $a \in R,$ $\frac{m}{n} \in G$.Тогда, по определению, – $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64^1} = 4$ $\sqrt[3]{4^3} = 4$

Основные правила действий со степенями и корнями.

Пусть $a; b; \alpha; \beta \in R$, причем $a \triangleright 0, b \triangleright 0, \alpha$ и β - любые. Для указанных чисел доказаны следующие правила действий со степенями:

1) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ 3) $((a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}$

5) $(\frac{a}{b})^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

2) $\frac{a^{\alpha}}{b^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ 4) $(a \cdot b)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha}$

Правила действий с корнями ($a > 0, b > 0, n \in N$)

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ 2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Формулы сокращенного умножения.

1) (а+в)^2=а^2+2ав+в^2 5) а^2-в^2=(а-в)*(а+в)

2) (а-в)^2=а^2-2ав+в^2 6) а^2+в^2=? (на множители не разлагается)

3) (а+в)^3=а^3+3а^{2}в+3ав^2+в^3 7) а^3-в^3=(а-в)*(а^2+ав+в^2)

4) (а-в)^3=а^3-3а^{2}в+3ав^2-в^3 8) а^3+в^3=(а+в)*(а^2-ав+в^2)

Проценты

Пусть а (ед.) - некоторое положительное действительное число, определяющее количество чего-нибудь. Тогда сотая доля величины а называется **процентом** величины а.

Например, если а=150 кг, то 1% от 150 кг будет составлять 150/100=1,5(кг).А 20% от а=150 кг будет равно 20 ·1,5=30(кг). Обратно, пусть требуется найти, сколько процентов составляет часть в 18 кг от целого в 150 кг? Так как 1% от 150 кг составляет 150\100=1,5 кг, то 18 кг составляют от 150 кг 18\1,5=12%.

Задачи на проценты удобно решать, записав условие в виде пропорции, т.е. в виде двух строчек, в которых слева представлены величины, а справа- их выражения в процентах.

Пример: сколько кг составляют 20% от 150 кг?

Решение: записывая данные в виде пропорции и решая её, находим:

150 кг - 100%

x кг -   20%

$$x = \frac{150 \bullet 20}{100} = 30 \text{ кг}$$

Пример: Сколько процентов составляют 18 кг от 150 кг?

Решение: 150 кг - 100%

18 кг -   x%

$$x = \frac{18 \bullet 100}{150} = 12\%$$

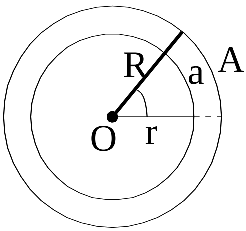
При этом мы использовали известное правило решения пропорций: чтобы найти из пропорции неизвестную величину, нужно разделить на число, стоящее на той же диагонали пропорции, где стоит неизвестное произведение чисел, стоящих на другой диагонали.

Контрольные вопросы:

Лекция 4. Тригонометрические функции числового аргумента. Формулы приведения

1. Понятие угла
2. Тригонометрические функции
3. Единичная окружность
4. Формулы приведения

Любой угол измеряется либо в градусной мере измерения (единица измерения – градус) либо в радианной (единица измерения – радиан). Один дуговой градус – это $\frac{1}{360}$ часть окружности. Один угловой градус – это центральный угол, опирающийся на дуговой градус. Радианная мера угла – это отношение длины дуги к радиусу этой дуги. Радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, равную длине радиуса этой дуги. Окружность содержит 2π радиан.



$\frac{\cup A}{R} = \frac{\cup a}{r} ... = const$ – радианная мера угла

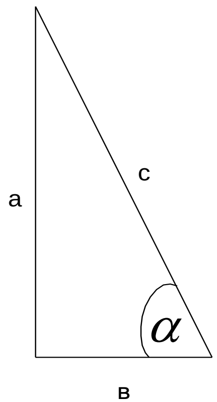
$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ радиан

1 рад $= 57^\circ 17' 45'' \approx 57^\circ 18' \approx 57{,}3^\circ$

Для перехода от градусной меры измерения угла к радианной и наоборот можно пользоваться формулами:

$$\begin{matrix} 360^\circ - 2\pi \\ A^\circ - \alpha \text{ рад} \end{matrix} \Rightarrow A^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}; \ \alpha = \frac{A^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

В прямоугольном треугольнике

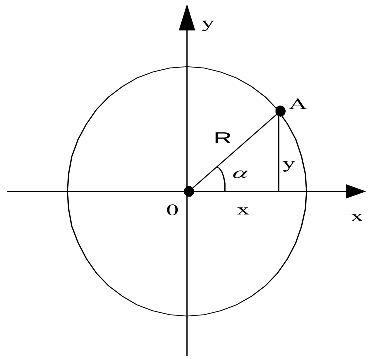


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}$$



$$R = 1; \quad \cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x}; \quad ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \ \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

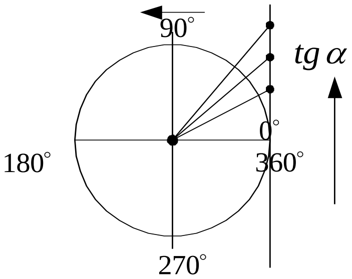
Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec$
$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$	$1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	$\dfrac{1}{\sin\alpha} = \cos$

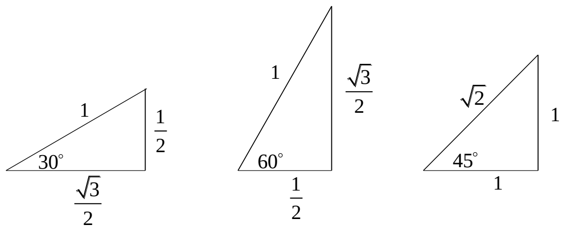
Из определения:

$|\sin\alpha| \le 1$ $\qquad |\sec\alpha| \ge 1$ $\qquad$ любые

$|\cos\alpha| \le 1$ $\qquad |\mathrm{cosec}\,\alpha| \ge 1$ $\qquad$ значения функции ограниченные



Золотые углы



		0°	30°	45°	60°	90°	[illegible]	270°	360°
in				$\frac{\sqrt{2}}{2}$			1		
os				$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1			
g			$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{3}$				

tg			$\sqrt{3}$					

Решить: 1) $$\frac{4-2tg^2 45^\circ + ctg^4 60^\circ}{3\sin^3 90^\circ - 4\cos^2 60^\circ + 4ctg^2 45^\circ}$$

(совместно устно)

Самостоятельно: 2) $$\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3 - \left(ctg\frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\sin 0^\circ\right)^2}{\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos^2\frac{\pi}{4}}$$

Решение:

1)

$$\frac{4-2\cdot 1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4}{3\cdot 1^3 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot 1^2} = \frac{4-2+\frac{9}{81}}{3-1+4} = \frac{2+\frac{1}{9}}{6} = \frac{19}{9\cdot 6} = \frac{19}{54};$$

2) $$\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1^3 + 0}{0+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}-1}{1+1} = \frac{-\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$$

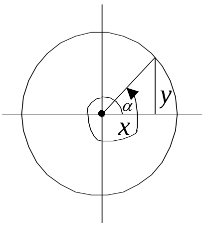
Знаки функций по четвертям

		I	II	V

$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				
$tg\,\alpha$				
$ctg\,\alpha$				

Периодичность:

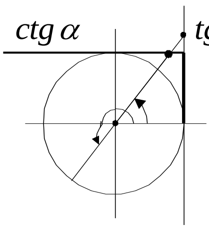
$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\alpha+360^\circ\right)&=\sin\alpha\\ \cos\left(\alpha+360^\circ\right)&=\cos\alpha\end{aligned}\right]T=360^\circ -$$



период

$$\left.\begin{aligned}\sec\left(\alpha+360^\circ\right)&=\sec\alpha\\ \mathrm{cosec}\left(\alpha+360^\circ\right)&=\mathrm{cosec}\,\alpha\end{aligned}\right]T=360^\circ$$

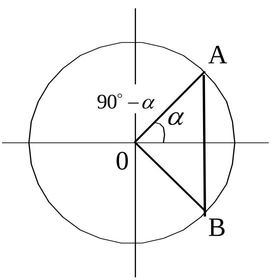
$ctg\,\alpha$ $tg\,\alpha$ – период



$$\left.\begin{aligned}tg\left(\alpha+180^\circ\right)&=tg\alpha\\ ctg\left(\alpha+180^\circ\right)&=ctg\,\alpha\end{aligned}\right]T=180^\circ -$$

период

<u>Формулы приведения</u>:



$$\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

1) Знак результата берется по знаку данной функции в зависимости от четверти.

2) Если острый угол берется при горизонтальном диаметре, т.е. $\left(180^\circ \pm \alpha\right)$ и $\left(360^\circ \pm \alpha\right)$, то название функции не изменяется; если при вертикальном, т.е. $\left(90^\circ \pm \alpha\right)$ и $\left(270^\circ \pm \alpha\right)$, то название функции изменяется на сходную.

Например:

$\sin\left(180^\circ+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin\left(270^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\cos\left(90^\circ+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(360^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha$

$tg\left(180^\circ-\alpha\right)=-tg\,\alpha$ $\qquad$ $ctg\left(90^\circ+\alpha\right)=-tg\,\alpha$

Упростить:

1)

$$\frac{\sin\left(180^\circ-\alpha\right)\cdot\cos\left(90^\circ+\alpha\right)}{\cos\left(360^\circ-\alpha\right)\cdot\sin\left(270^\circ-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)}=\frac{-\sin^2\alpha}{-\cos^2\alpha}=tg^2\alpha$$

Самостоятельно:

Упростить:

1) $$\frac{\sin\left(\alpha-\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{ctg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-tg\left(\pi+\alpha\right)}=\cos\alpha$$

2)

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+ctg\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=tg\,\alpha$$

Контрольные вопросы:

1. Определения тригонометрических функций острого угла.
2. Что называется синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом числового аргумента?
3. Знаки функций по четвертям.
4. Перечислить чётные тригонометрические функции.

5. Перечислить нечётные тригонометрические функции.

6. Какие функции имеют период $2\pi,\ \pi$?

7. Формулы приведения.

Лекция 5. Формулы сложения и их следствия. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

1. Формулы сложения, разности
2. Основные правила

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\,\alpha\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}}$$

При α = β имеем

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

Имеем: $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha$$

И тогда $\boxed{1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\ \boxed{1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}\ \text{или}\ \boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Решение примеров:

1) Вычислить:

$\cos 43^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ$ не применяя МК.

Применяем формулу $\cos(\alpha+\beta)$ и тогда

$$\cos 43^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ=\cos\left(43^\circ+17^\circ\right)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

Аналогично:

$$\sin 57^\circ\cdot\cos 12^\circ-\cos 57^\circ\cdot\sin 12^\circ=\sin\left(57^\circ-12^\circ\right)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Доказать:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos a\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=tg(\alpha+\beta)$$

Действительно:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos a\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta+2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$$

(использовали формулы $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$)

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=tg(\alpha+\beta)$$

3) Доказать:

$$\sin 2\alpha\cdot\cos^3 2\alpha-\sin^3 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 8\alpha$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos^3 2\alpha-\sin^3 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot c$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{4}\sin 8\alpha$$

при решении использованы формулы $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$; $\quad 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$

4) Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$\cos\beta = -\frac{3}{4} \quad 180^\circ < \beta < 270^\circ$

Найти: $\sin(\alpha+\beta)$; $\cos(\alpha+\beta)$

Решение:

Запишем формулы:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Видим, что надо найти функции $\cos\alpha$ и $\sin\beta$. Используя, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ имеем

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$; $\quad \cos\alpha = -\frac{4}{5}$, т.к. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (II четверть)

Аналогично: $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$

$\sin^2\beta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$; $\quad \sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, т.к. $180^\circ < \beta < 270^\circ$ (III четверть)

и тогда:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{9}{20} + \frac{4\sqrt{7}}{20} = -\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{12}{20} + \frac{3\sqrt{7}}{20} = \frac{12+3\sqrt{7}}{20}$$

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{a-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$ctg\,\alpha-ctg\,\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Например:

1) $\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=2\sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha-5\alpha}{2}=2\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha$

2) $\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=ctg^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ 3) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=ctg\alpha\cdot ctg$

Преобразовать в сумму или разность:

$$\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ = \frac{1}{2}\left(\sin 90^\circ - \sin 60^\circ\right)$$

$$\sin 7\alpha \cdot \cos 3\alpha = \frac{1}{2}\left(\sin 10\alpha + \sin 4\alpha\right)$$

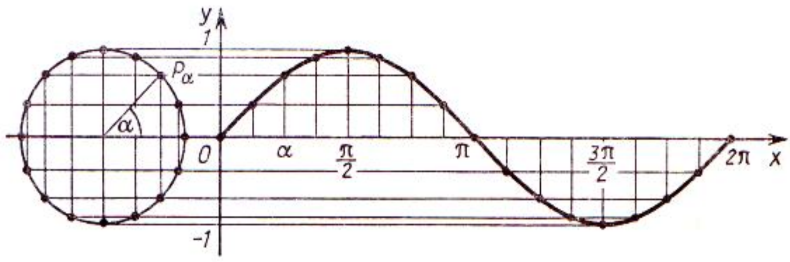
$$\cos 2x \cdot \cos 6x = \frac{1}{2}\left(\cos 8x + \cos 4x\right)$$

$$\sin 5\beta \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos 7\beta - \cos 3\beta\right)$$

Лекция 6. Графики и свойства тригонометрических функций. Простейшие преобразования графиков тригонометрических функций.

1. График функции y=sin x
2. График функции y=cos x
3. Графики функций y=tg x и y=ctg x

На рисунке показано построение графика синуса на отрезке $\left[0;\ 2\pi\right]$.



Рассмотрим основные свойства функции y=sinx:

1) Область определения функции - множество всех действительных чисел $D(f)$: R

2) Множеством значений функции является промежуток $E(f)$: $\left[-1;\ 1\right]$

3) Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат (0;0).

4) Функция периодическая. Наименьший положительный период равен $T_0 = 2\pi$

5) График функции пересекает ось Ох (нули функции) в точках $(\pi k;\ 0),\ k \in Z$

6) График функции пересекает ось Оу в точке *(0; 0)*.

7) Функция принимает положительные значения на промежутках $(2\pi k;\ \pi + 2\pi k),\ k \in Z$

8) Функция принимает отрицательные значения на промежутках $(-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k),\ k \in Z$

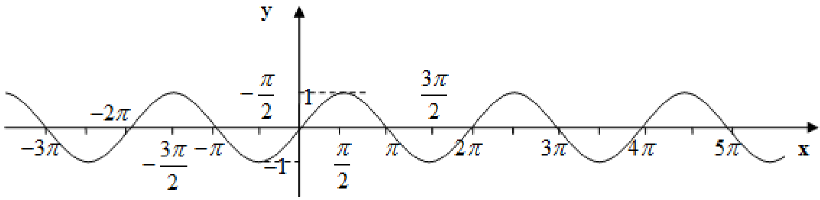
9) Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z$

10) Функция убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z$

11) Точки минимума: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ -1\right),\ k \in Z$

12) Точки максимума: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 1\right),\ k \in Z$

13) Графиком функции является синусоида



Функция косинуса

График косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние $\frac{\pi}{2}$ влево.

Основные свойства функции y=cosx:

1) Область определения функции - множество всех действительных чисел $D(f):\ R$

2) Множеством значений функции является промежуток $E(f):\ [-1;\ 1]$

3) Функция является четной, график симметричен относительно оси Oy.

4) Функция периодическая. Наименьший положительный период равен $T_0 = 2\pi$

5) График функции пересекает ось Ох (нули функции) в точках $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ 0\right),\ k \in Z$

6) График функции пересекает ось Оу в точке *(0; 1)*.

7) Функция принимает положительные значения на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k \in Z$

8) Функция принимает отрицательные значения на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k \in Z$

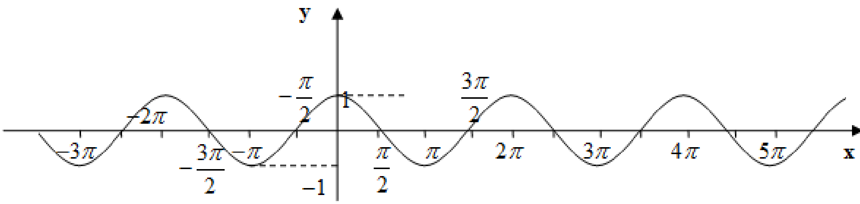
9) Функция возрастает на промежутках $\left[-\pi+2\pi k;\ 2\pi k\right],\ k \in Z$

10) Функция убывает на промежутках $\left[2\pi k;\ \pi+2\pi k\right],\ k \in Z$

11) Точки минимума: $\left(\pi+2\pi k;\ -1\right),\ k \in Z$

12) Точки максимума: $\left(2\pi k;\ 1\right),\ k \in Z$

13) Графиком функции является косинусоида



Функция тангенса

$$y = tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Основные свойства функции y=tgx:

1) Область определения функции: $D(y):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

2) Множеством значений функции: $E(y): R$

3) Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат (0;0).

4) Функция периодическая. Наименьший положительный период равен π

5) График функции пересекает ось Ox (нули функции) в точках $x = \pi k, k \in Z$

6) График функции пересекает ось Oy в точке *(0; 0)*.

7) Функция принимает положительные значения на промежутках $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in Z$

8) Функция принимает отрицательные значения на промежутках $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k \right), k \in Z$

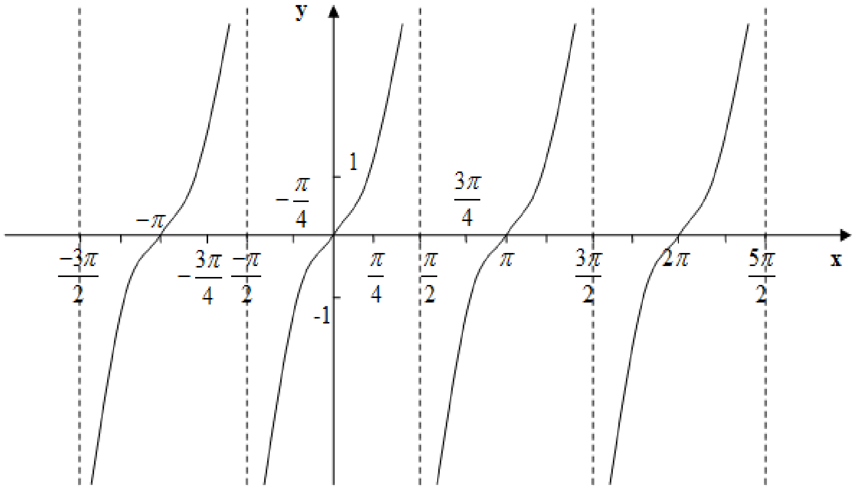
9) Функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in Z$

10) Промежутки убывания отсутствуют.

11) Точек минимума нет.

12) Точек максимума нет.

13) Графиком функции является тангенсоида:



Функция котангенса

$$y = ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sin x \neq 0, x \neq \pi n, n \in Z$$

Основные свойства функции y=ctgx:

1) Область определения функции: $D(y): \ x \neq \pi k, k \in Z$

2) Множеством значений функции: $E(y): \ R$

3) Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат (0;0).

4) Функция периодическая. Наименьший положительный период равен π

5) График функции пересекает ось Ох (нули функции) в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

6) Функции не пересекает ось Оу.

7) Функция принимает положительные значения на промежутках $x\in\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$

8) Функция принимает отрицательные значения на промежутках $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi k\right), k\in Z$

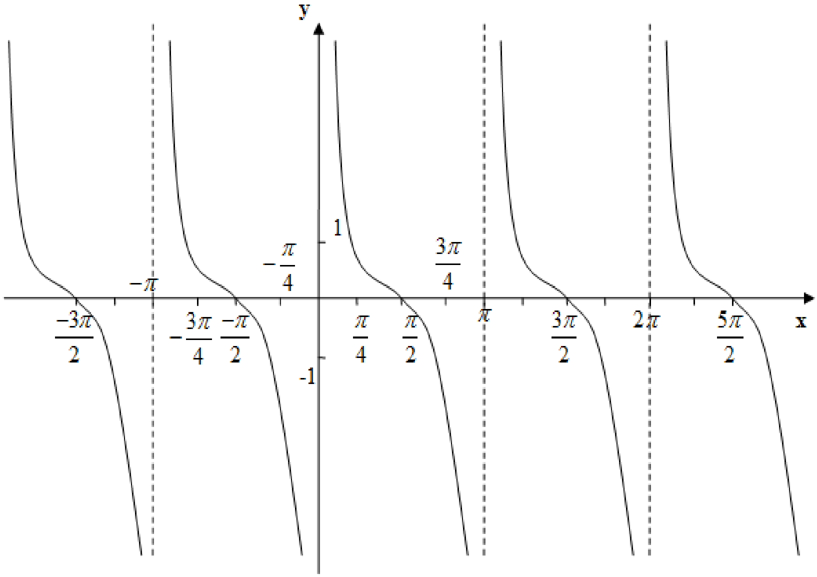
9) Функция не имеет промежутков возрастания.

10) Промежутки убывания: $x\in\left(\pi k;\ \pi+\pi k\right), k\in Z$

11) Точек минимума нет.

12) Точек максимума нет.

13) Графиком функции является котангенсоида:



Контрольные вопросы:

1. Свойства функции $y = \sin x$.
2. Свойства функции $y = \cos x$.
3. Свойства функции $y = tg\, x$.
4. Свойства функции $y = ctg\, x$.

Лекция 7. Функции, их свойства и графики

1. Числовая функция, способы задания, область определения, множество значений.
2. Основные свойства функции: монотонность, ограниченность, периодичность, четность – нечетность
3. Понятие об обратной функции.

Числовая функция: основные понятия и определения

Понятие функции является центральным понятием математики и не только математического анализа. Вспомним школьное определение функции.

O_1 Если каждому элементу x множества D ставится в соответствие единственный элемент y множества E, то говорят, что на множестве D задана функция $y = f(x)$.

x – аргумент – независимая переменная; y – зависимая; она находится по закону: f.

O_2 Множество D называется областью определения функции, множество E называется множеством значений функции.

Множество значений аргумента – Ваши личности, множество значений функции – Ваши фамилии. Вот так мы продемонстрировали понятие функции: каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, человек не может иметь две фамилии.

Можно дать и такое определение числовой функции: числовая функция – это множество пар (x,y), среди которых нет пар с одинаковым первым элементом.

Как определяется, задается функция? Прежде всего формулой, по которой по заданному x находится y. Например: $f(x) = x^2 + x + 3$. Подставим x = 2 получим y = 9

Функция может задаваться не одним аналитическим выражением, а несколькими, например:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ } если\ x < 0; \\ x, \text{ } если\ x \geq 0 \end{cases}$$

Очень часто зависимость одной переменной величины от другой невозможно выразить аналитически, но такая зависимость существует о определяется она в виде таблицы.

	3	1						1	3
	5	2	2		4		3	5	4

В таком случае говорят о таблично заданной функции, общепринятая аббревиатура: ТЗФ Обратите внимание, что среди заданных пар чисел (х;у) нет пар с одинаковым первым элементом, в таком случае ТЗФ не являлись бы функцией.

Запишите еще определение числовой функции.

О$_3$ числовая функция – множество пар (х;у), среди которых нет пар с одинаковым первым элементом.

И, наконец, когда не удается найти аналитического выражения для $y = f(x)$, найти множество пар (х;у), то функцию можно задать графически, т.е. ее графиком. Вспомните свою кардиограмму, перо самописцев в самых различных приборах.

Рассмотрим понятия, выражающие т.н. *общие свойства* функций.

Монотонность. Если для x_1, x_2 , принадлежащих интервалу (a;b) и удовлетворяющих условию x_1, < x_2

следует $f(x_1) < f(x_2)$, то, говорят, что на $(a;b)$ эта функция возрастает. Или, как говорили в школе, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция возрастает. Самостоятельно сформулируйте определение убывающей функции. Если функция только возрастает или только убывает в области определения, то о такой функции говорят, что она *монотонна.* Так линейная функция, степенная с нечетным показателем являются монотонными, а популярная $y = x^2$ монотонной не является, т.к. при $x < 0$ она убывает, а при $x > 0$ она возрастает.

Ограниченность. Пусть на D задана функция $y = f(x)$. Если существуют такие числа m и M, что для всех $x \in D$, что $m \le f(x) \le M$, то говорят, что функция ограничена в области определения. Различают и такие понятия, как ограниченность снизу и ограниченность сверху. Так, $y = x^3$ – неограниченная функция, $y = x^2$ – ограничена снизу, т.к. она неотрицательна в области определения. $y = \sin x$ и $y = \cos x$ – ограниченные функции, т.к. они принимают значения только из отрезка $[-1; 1]$ – это их множество значений

Четность и нечётность. Функция называется четной, если ее область определения симметрична относительно $x = 0$ и $f(-x) = f(x)$;

Функция называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно $x = 0$ и $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной – относительно начала координат.

Яркие «представители» четных функций: $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \frac{1}{x^2}$, нечетных $y = x^3$, y = sinx, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$. Для многих функций нет смысла говорить об их четности – нечетности. Так функция $y = \sqrt{x}$ не относится ни к четным, ни к нечетным, потому как ее область определения несимметрична относительно нуля. Такие функции называют функциями общего вида.

Какова методика определения четности – нечетности функции? Рассмотрим примеры.

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; Подставим в функцию вместо x -x, будем иметь:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$$

Получили определение нечетной функции, вывод: функция нечетная.

$f(x) = \dfrac{Cosx}{x^4+1}$; Подставим в функцию вместо x -x, будем иметь:

$f(-x) = \dfrac{Cos(-x)}{(-x)^4+1} = \dfrac{Cosx}{x^4+1} = \dfrac{Cosx}{x^4+1} = f(x)$ Получили определение четной функции, вывод: функция четная.

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, что для всех x из области определения выполняется равенство: $f(x+T) = f(x),\ где\ T \neq 0$

Очевидно, что если существует такое число T, называемое периодом, то число nT, где n – целое число, также является периодом этой функции. Важнейшие представители периодических функций – тригонометрические функции.

Рассмотрим практические задачи на отыскание области определения некоторых функций. Заметим, что многочлен определен на всем множестве действительных чисел: D = R. Так для функции $y = x^2 + 6x - 7$ D = R. Дробно – рациональная функция определена для всех x, при которых ее знаменатель отличен от нуля. Например:

$y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}$ областью определения будет все множество действительных чисел, отличных от -1 и 1. На языке интервалов $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

Рассмотрим другие примеры. Найти область определения функций.

$y = \dfrac{1}{\sqrt{12 - x - x^2}}$ Очевидно, что функция существует только для тех значений x, которые удовлетворяют неравенству: $12 - x - x^2 > 0$ $\Rightarrow\ x^2 + x - 12 < 0\ \Rightarrow\ (x-3)(x+4) < 0$

Ответ: D=(-4;3).

Воспользовались методом интервалов, изученным в прошлой теме.

$y = \dfrac{\sqrt{x+5}}{x-1}$ Очевидно, что функция существует только для тех значений x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

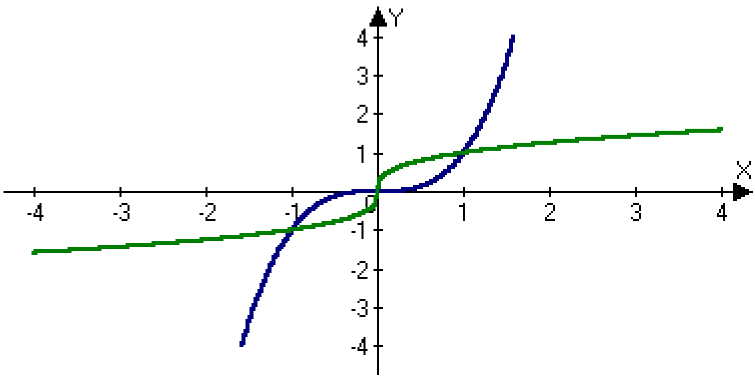
Откуда $x \geq -5$ и $x \neq 1$ Объединяя эти неравенства, имеем ответ: D = [-5; 1) $\cup$ (1; ∞).

Понятие об обратной функции. Очень важное и глубокое понятие. Будьте внимательны.

Пусть дана функция у = x^3 Вспомним, что она монотонная: каждому значению аргумента соответствует единственное значение аргумента и наоборот: *каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента* (только для монотонных функций!). Будем далее считать независимой переменной у, а х – его функцией, выразим х через у.

$x = \sqrt[3]{y}$ и заменим, как то принято обозначать аргумент и функцию, х на у и у на х, получим

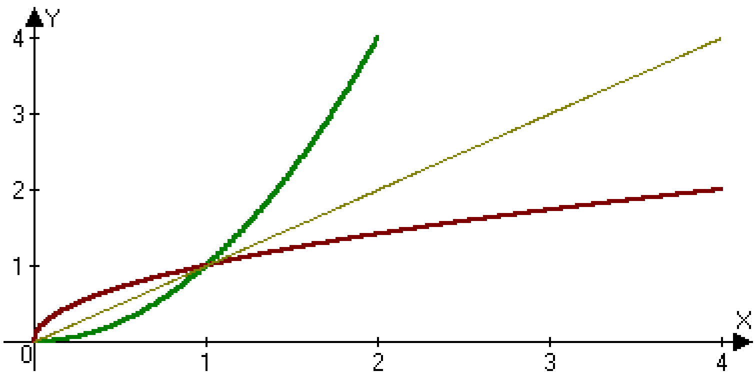
$y = \sqrt[3]{x}$.



Вот эти две функции у = x^3 , $y = \sqrt[3]{x}$ и называются *взаимно обратными*.

Построим графики этих функций и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов. Запомните это свойство графиков всех взаимно обратных функций. В дальнейшем Вы будете строить обратные функции по мере их изучения.

Но как быть, если функция, для которой надо построить обратную не является монотонной? Например, необходимо построить обратную для y = x^2, которая немонотонна. Для этого необходимо так задать область определения исходной функции, на которой она стала бы монотонной. Если для функции y = x^2 положить D = [0; ∞), то на этом луче она монотонно возрастает, а значит имеет обратную. Очевидно, это $y = \sqrt{x}$ Построим их графики и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов.



Постройте обратную функцию для монотонной линейной функции y = 3x, постройте их графики.

Определив функцию $y = \dfrac{1}{x^2}$ на

D = [0; ∞), постройте для нее обратную функцию.

Контрольные вопросы

1) Дать определение функции.
2) Что такое область определения?

3) Что означает понятие «ограниченность функции»?

4) Какие функции называются монотонными?

5) Что можно сказать о симметричности графиков чётных и нечётных функций?

6) Какова методика определения четности – нечетности функции?

7) Какие функции периодические и как это записать?

9) Для каких функций возможно построить обратную?

10) Сформулировать алгоритм построения обратной функции.

Лекция 8. Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики

1. Арксинус
2. Арккосинус
3. Арктангенс и арккотангенс

1) $\underline{y = \arcsin x}$

Функция $y = \sin x$, где $x \in (-\infty; +\infty)$ не является монотонной на этом промежутке. Поэтому, чтобы говорить об обратной функции, надо выделить участок монотонности. Для функции $y = \arcsin x$ является отрезок $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Итак: $y = \sin x$ $\quad x = \arcsin y$ $\quad \underline{y = \arcsin x}$

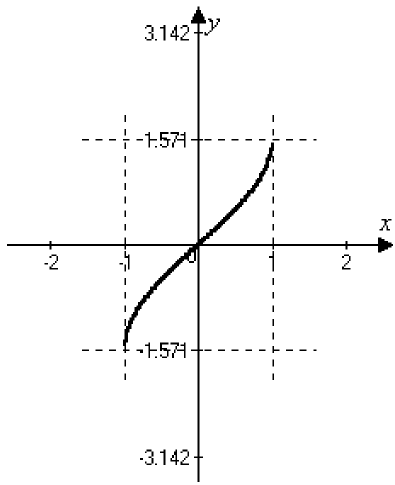
Свойства функции $y = \arcsin x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

4) Функция монотонно возрастает $[-1;1]$



Например:

$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 30^\circ = \arcsin \dfrac{1}{2}$

$\sin 90^\circ = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 90^\circ = \arcsin 1$

$\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ или $\dfrac{\pi}{4}$

$\arcsin 0 = 0$

$\arcsin 0,72 = 46^\circ 03'$

$\arcsin 0,236 = 13^\circ 39'$

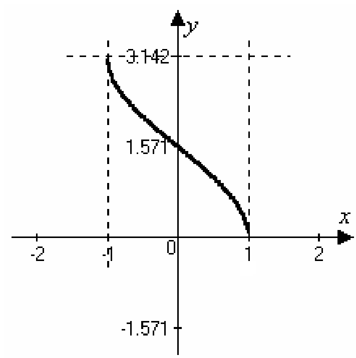
2) $\underline{y = \arccos x}$

$y = \cos x$

$x = \arccos y$ Промежуток

$y = \arccos x$

монотонности $0 \le x \le \pi$



Свойства функции $y = \arccos x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in [0;\pi]$

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4) Функция монотонно убывает $[-1;1]$

Например:

$\arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$

$\arccos(-1) = 180^\circ$ или π

$\arccos 0 = 90^\circ$ или $\frac{\pi}{2}$

$\arccos 0,708 = 44^\circ 55'$

$\arccos 0,112 = 83^\circ 34'$

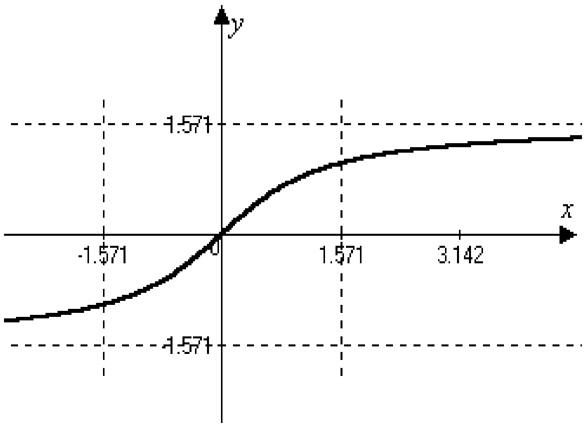
3) $\underline{y = arctgx}$

Промежуток монотонности $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$y = tgx$

$x = arctgy$

$\underline{y = arctgx}$



Свойства функции $\underline{y = arctgx}$

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

3) $arctg(-x) = -arctgx$

4) Функция монотонно возрастает $(-\infty; +\infty)$

Например:

$arctg 1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\quad arctg 2 = 63^\circ 26'$

$arctg\sqrt{3} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$ $\quad arctg 14,7 = 86^\circ 11'$

4)

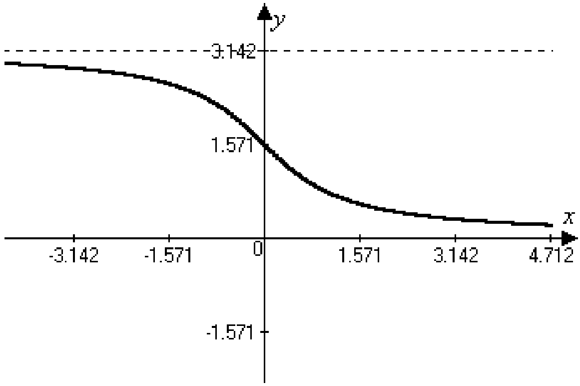
$y = arcctgx$

Промежуток монотонности $0 < x < \pi$

$y = ctgx$

$x = arcctgy$

<u>$y = arcctgx$</u>



Свойства функции <u>$y = arcctgx$</u>

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in (0; \pi)$

3) $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$

4) Функция монотонно убывает $(-\infty; +\infty)$

Например:

$arcctg 1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\quad arcctg 4,7 = 12^\circ$

$arcctg\sqrt{3} = 30^\circ$ или $\frac{\pi}{6}$ $\quad arcctg 10,8 = 5^\circ 17'$

Используя свойства обратных функций, найдем углы:

$$tg\left(arctgx\right)=x \qquad ctg\left(arcctgx\right)=x$$

$$tg\left(\arcsin x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad ctg\left(\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$tg\left(\arccos x\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad ctg\left(\arccos x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$tg\left(arcctgx\right)=\frac{1}{x} \qquad ctg\left(arctgx\right)=\frac{1}{x}$$

$\arcsin 0,264$ $\arccos 0,314$ $arctg\left(-0,308\right)$

$\arcsin\left(-0,812\right)$ $\arccos\left(-0,768\right)$ $arctg17,8$

Выполнение простейших тригонометрических операций над arc-функциями может быть определена формулами:

$$\sin\left(\arcsin x\right)=x \qquad \cos\left(\arccos x\right)=x$$

$$\sin\left(\arccos x\right)=\sqrt{1-x^2} \qquad \cos\left(\arcsin x\right)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin\left(arctgx\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos\left(arctgx\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin\left(arcctgx\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos\left(arcctgx\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Между arc-функциями существуют основные соотношения:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$$

$\arcsin(-0,389)$ $\arccos(-0,618)$

$arctg7,24$ $arcctg0,608$

Контрольные вопросы:

1) Чему равны углы:

$\arcsin\frac{1}{2}$ $arctg\sqrt{3}$ $\arcsin(-0,76)$ $arctg(-2)$

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ $arcctg1$ $\arccos(-0,326)$ $arcctg(-0,45)$

2) Область определения функций:

Лекция 9. Простейшие тригонометрические уравнения, их решение

Уравнения вида $\sin x = a$; $\cos x = a$; $tgx = a$; $ctgx = a$ называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

$1)\sin x = a \qquad |a| \le 1$

$2)\cos x = a \qquad |a| \le 1$

$180^\circ - x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$x = \arccos a + 2\pi n$

$-x = \arccos a + 2\pi n$

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n; n \in Z}$$

отсюда

$x = 180^\circ - \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z}$$

Например:

$\cos 4x = -0,712$

$4x = \pm\arccos(-0,72) + 2\pi \cdot n, n \in Z$

$4x = \pm 135^\circ 24' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

Например:

$\sin x = 0,437$

$x = (-1)^n \arcsin 0,437 + \pi n; n \in Z$

$x = (-1)^n 25^\circ 54' + 180^\circ \cdot n; n \in Z$

3) $tgx = a$; а – любое значение

4) $ctgx = a$; a – любое значение

Например:

$$tg\frac{x}{2} = 4$$

$$\frac{x}{2} = arctg4 + \pi n, n \in Z$$

$$\frac{x}{2} = 75^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$$

Решить уравнения:

1) $\sin 2x = -0,72$ 2) $ctg\left(\frac{x}{2} + 20^\circ\right) = 0,34$ 3) $\cos\frac{x}{4} = -0,31$

4) $tg\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right) = 1$ 5) $\cos(2x - 3,4) = 0,112$

Решения уравнений:

1) $2x = (-1)^n \arcsin(-0,72) + \pi n, n \in Z$

$$2x = (-1)^n \arcsin\left(-46^\circ 03'\right) + 180^\circ \cdot n, n \in Z$$

$$2x = (-1)^{n+1} \cdot 46^\circ 03' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$$

$$x = (-1)^{n+1} \cdot 23^\circ 02' + 90^\circ \cdot n\ n \in Z$$

Контрольные вопросы:

Запишите формулы решений уравнений вида:

1) $\sin x = a$

2) $\cos x = a$

3) $tgx = a$

4) $ctgx = a$

5) $\cos x = 0$

6) $\sin x = 1$

7) $\sin x = -1$

8) $tgx = 0$

9) $ctgx = 1$

10) $\cos x = -1$

11) $\cos x = 1$

12) $\sin x = 0$

13) $ctgx = 0$

14) $tgx = 1$

Лекция 10. Решение тригонометрических неравенств.

1. Решение тригонометрических неравенств

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$\sin x < m \quad \cos x < m \quad tgx < m \quad ctgx < m$

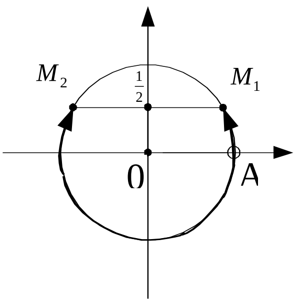
$\sin x > m \quad \cos x > m \quad tgx > m \quad ctgx > m$

где m – данное число

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Рассмотрим на примерах

1) $\sin x < \frac{1}{2}$, т.к. $|\sin x| \le 1$, то данное неравенство можно записать $-1 \le \sin x \le \frac{1}{2}$



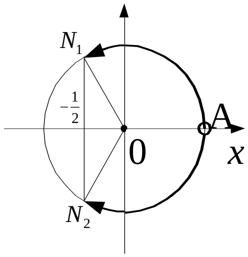
$\cup AM_1 = \frac{\pi}{6}$

$\cup AM_2 = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7}{6}\pi$

и значит, неравенству $\sin x < \frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6}$. Т.к. функция $\sin\alpha$ имеет период 2π, то решение этого неравенства будет промежуток $-\frac{7}{6}\pi + 2\pi k \le x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

2) $\cos x > -\frac{1}{2}$

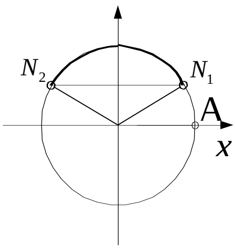
Перепишем неравенство в силу того, что $|\cos x| \le 1$



$$-\frac{1}{2} < \cos x \le 1$$

неравенству $\cos x > -\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{2}{3}\pi < x \le \frac{2}{3}\pi$. Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$.

3) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, аналогично для $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет



$$\frac{\pi}{4} < x < \pi - \frac{\pi}{4}$$

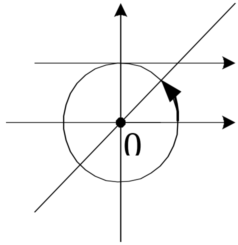
$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

4) $tgx > \sqrt{3}$, т.е. можно записать $\sqrt{3} < tgx < \infty$, т.к. функция tg неограниченная. Это неравенство выполняется при $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$; период функции тангенса равен π, значит $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$

$0 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$



Общее решение: $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$

Таким образом, решение неравенств удобно решать аналитически с помощью следующих формул:

$\sin x > a \quad arcsina + 2\pi n < x < \pi - arcsina + 2\pi n$

$\sin x < a \quad -\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n$

$\cos x > a \quad - arccosa + 2\pi n < x < arccosa + 2\pi n$

$\cos x < a \quad arccosa + 2\pi n < x < 2\pi - arccosa + 2\pi n$

$\operatorname{tg} x > a \quad arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\operatorname{tg} x < a \quad -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n$

$\operatorname{ctg} x > a \quad \pi n < x < arcctga + \pi n$

$\operatorname{ctg} x < a \quad arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n$

Контрольные вопросы

1. Опишите способы решения тригонометрических неравенств графически
2. Опишите способы решения тригонометрических неравенств с помощью формул

Лекция 11. Решение сложных тригонометрических уравнений

Решение тригонометрических уравнений:

1) $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$

уравнение содержит функции одинакового угла, можно привести к квадратному уравнению, если заменить $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$2\left(1-\cos^2 x\right) + 5\cos x = 4$$

$$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$$

$$-2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$2t^2 - 5t + 2 = 0$ $\qquad D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{4}$; $\quad t_1 = 2 \quad t_2 = \dfrac{1}{2}$ и тогда имеем два простейших уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ и $\sin x = 2$

решаем их, применяя формулу решения уравнения $\sin x = a$

$\sin x \neq 2$ уравнение не имеет решения, т.к. $\lvert\sin x\rvert \le 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$x=(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$$

И тогда, ответ: $x=(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

2) $2\sin^2 x+5\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-2=0$

функции имеют разные углы, приведем к одному углу, используя формулы приведения:

$2\sin^2 x-5\cos x-2=0$, т.к. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\cos x$

учитывая, что $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, имеем:

$$2\left(1-\cos^2 x\right)-5\cos x-2=0$$

$$2-2\cos^2 x-5\cos x-2=0$$

$$2\cos^2 x+5\cos x=0$$

$$\cos x\left(2\cos x+5\right)=0$$

произведение равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0, имеем

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

и

$$2\cos x+5=0$$

$$\cos x\neq-\frac{5}{2}$$

– уравнение не имеет решения, т.к. $|\cos x|\leq 1$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

3) $tg^3x=tgx$

$tg^3x - tgx = 0$

$tgx\left(tg^2x - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$tgx = 0$

$x = \pi n, n \in Z$ и $tg^2x - 1 = 0; tg^2x = 1$ и тогда $tgx = \pm 1$

$x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$

4) Рассмотрим уравнение $\sin^2 x - 10\sin x \cdot \cos x + 21\cos^2 x = 0$

Замечаем, что левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть равна нулю.

Такие уравнения называются однородными тригонометрическими уравнениями. Для их решения надо каждый член уравнения разделить на $\cos x$ или $\sin x$ в той степени, какова степень уравнения:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{10\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{21\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$tg^2x - 10tgx + 21 = 0,$

решаем квадратное уравнение относительно функции tgx.

Пусть $tgx = t$, тогда

$t^2 - 10t + 21 = 0$

$D = 100 - 84 = 16$

$t_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2}; \quad t_1 = 7; \quad t_2 = 3$

тогда $tgx = 7 \quad tgx = 3$

$x = arctg7 + \pi n, n \in Z \quad x = arctg3 + \pi n, n \in Z$

5) $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$

Данное уравнение приводится к однородному тригонометрическому уравнению; для этого представим $2=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$.

Имеем:

$$3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x-2\sin^2 x-2\cos^2 x=0$$

$$\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=0$$

разделим на $\cos^2 x$

$$tg^2x-4tgx+3=0$$

$$tgx=t;\quad t^2-4t+3=0$$

$$D=16-12=4$$

$$t_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2};\quad t_1=3;t_2=1$$

$$tgx=3$$

$$x=arctg3+\pi n, n\in Z$$

$$tgx=1$$

Итак, мы рассмотрели уравнения, приводимые к одному аргументу, квадратному уравнению; левая часть которых разлагается на множители, а правая равна нулю – однородные тригонометрические уравнения.

6) $2\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+3\cos\left(\pi-x\right)-2=0$

ещё раз вспомним, как решать такие уравнения. Применим формулы приведения

$$2\sin^2 x-3\cos x-2=0$$

приведем к одинаковой функции $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ из значит

$$2\left(1-\cos^2 x\right)-3\cos x-2=0 \qquad 2\cos^2 x+3\cos x=0$$

$$2-2\cos^2 x-3\cos x-2=0 \qquad \cos x\left(2\cos x+3\right)=0$$

отсюда

$\cos x=0$ и $2\cos x+3=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\quad \cos x=-\dfrac{3}{2}$, как видим это уравнение не имеет решения, т.к. $\left|-\dfrac{3}{2}\right|>1$, а $\left|\cos x\right|\le 1$

поэтому ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

Мы рассмотрели решения различных уравнений и видим, что в каждом случае надо творчески подходить к нахождению метода решения, что возможно при хорошем знании формул тригонометрии, алгебраических преобразованиях.

Лекция 12. Предел функции, понятие непрерывности

1. Понятие предела
2. Непрерывность функции
3. Точки разрыва

Предел переменной

Пусть х- переменная величина, то есть величина, меняющая свои значения (переменная). Переменная х считается заданной, если задана последовательность её значений: $\{x_n\}=\{x_1;x_2;x_3;\ldots\}$

Здесь x_1- первое значение переменной х

x_2-второе значение переменной х и т.д.

Может оказаться, что переменная х меняет свои значения не хаотически, а целенаправленно, то есть значения x_n переменной х с увеличением его номера n неограниченно приближается к некоторому числу a. Такое число a, если оно существует, называется предел<u>ом переменной</u> х. Записывается это так:

х$\to a$ (читается - х стремится к a)

или: $\lim\limits_{x-\infty} x_n = a$, где x_n - n-ое значение переменной величины х n - номер этого значения.

Если переменная х неограниченно возрастает, то считают, что $x \to +\infty$. А если х неограниченно убывает (возрастая по абсолютной величине), то $x \to -\infty$.

Если переменная x в процессе своего изменения ни к чему конкретно не стремится, то говорят, что у неё нет предела. Переменная x, имеющая пределом 0, называется бесконечно малой, а переменная x, неограниченно возрастающая по абсолютной величине, называется бесконечно большой.

Рассмотрим несколько примеров определения предела переменной x при различных последовательностях её значений.

Пример 1. Пусть- переменная величина, а последовательность её значений

$\{x_n\}=\{1,9;1,99;1,999;1,9999;\ldots\}$. Очевидно, что $x\to 2$ (два - предел переменной x)

Пример 2. $\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\}=\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\}$.Очевидно, что $x\to 0$, то есть x-бесконечно малая величина.

Пример 3. $\{x_n\}=\{1^2;2^2;3^2;\ldots\}$. Очевидно, что $x\to+\infty$, то есть x- бесконечно большая величина.

Пример 4. $\{x_n\}=\{1;-1;1;-1;\ldots\}$. Очевидно, что x предела не имеет.

Предел переменной x обычно неочевиден. И его требуется найти (основная задача).

Пример 5. $\{x_n\}=\{\frac{2n-3}{n}\}=\{-1;\frac{1}{2};1;\frac{5}{4};\ldots\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right) = 2-0=2$$

. Итак x→2.

Пусть y=f(x)- некоторая функция и x_0- некоторая внутренняя или граничная точка области её определения.

Например, если отрезок $[a;b]$ или интервал $(a;b)$- область определения функции

y=f(x), то $a \prec x_0 \succ b$ или $x_0=a$ или $x_0=b$. Пусть $x\to x_0$, принимает значения некоторой последовательности значений $\{x^n\}=\{x_1;x_2;x_3;\ldots\}$.при этом функция y=f(x) будет принимать значения последовательности значений $\{y_n\}=\{f(x_n)\}=\{f(x_1);f(x_2);f(x_3);\ldots\}$.Если при этом $y\to y_0$, то y_0 называется пределом функции y=f(x) при $x\to x_0$, и обозначается это так: $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

Определение. Функция называется бесконечно большой величиной, если предел функции при $x\to a$ или $x\to\infty$ равен ∞, тогда функция имеет бесконечный предел.

Например. $\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}=\infty$, то функция $y=\frac{x-1}{x+1}$ является бесконечно большой при

$x\to -1$. Решение: $\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0} = -2\cdot\frac{1}{0} = -2\cdot\infty = -\infty$.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией, если при x→a (или x→∞) предел функции равен 0.

Например: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}$=0, то функция $y=\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при x→±∞.

($y=\sin x, y=tqx$ при x→0 также являются бесконечно малыми).

Существует теорема о связи бесконечно больших и бесконечно малых величин.

1) если функция f(x)- бесконечно большая величина, то $\frac{1}{f(x)}=\alpha(x)$ - бесконечно малая величина.

2) если функция $\alpha(x)$- бесконечно малая величина, то $\frac{1}{\alpha(x)}=f(x)$ - бесконечно_большая величина. Символика 1) $\frac{1}{\pm\infty}=0$; 2) $\frac{1}{\pm 0}=\pm\infty$

Замечание: не всякая функция имеет предел:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ - не существует, т. к. функция $y=\cos x$ изменяется в пределах [-1;1].(не стремится к какому-то числу).

Теоремы о пределах

1.О единственности предела: если функция f(x) имеет предел при x→a, то этот предел единственный.

2.Если существует предел функции y=f(x) при x→a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то функция

$f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая величина. при x→a и наоборот.

3.Рассмотрим функции: u=u(x) и v=v(x). При этом известно, что $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ и

$\lim\limits_{x\to a} v(x) = c$ (т.е. существуют), тогда $\lim\limits_{x\to a}(u(x) \pm v(x)) = \lim\limits_{x\to a} u(x) \pm \lim\limits_{x\to a} v(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a}(u(x) \cdot v(x)) = \lim\limits_{x\to a} u(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} v(x)$

В частности: если v(x)=const=A, тогда limAu(x)=Alimu(x) т.е. постоянную величину можно выносить за знак предела.

5. $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} v(x) \neq 0$

Важные практические формулы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ это значит: всюду, где функция определена предел функции можно вычислить простой подстановкой вместо x x=a.

Пример: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3}{x+1}=\dfrac{2\cdot 1^2+3}{1+1}=\dfrac{5}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)}$

Пример:

$\lim\limits_{x\to 3}(x-1)^{x^2}=\lim\limits_{x\to 3}(x-1)^{\lim\limits_{x\to 3}x^2}=2^9=2^6\cdot 2^3=512$ - число.

Если при вычислении предела имеет место неопределённость $(\dfrac{0}{0};\dfrac{\infty}{\infty};\infty-\infty;\text{è.äð.})$, то её требуется раскрыть, т.е. преобразовать функцию, стоящую под знаком предела таким образом, чтобы неопределённость исчезла.

Правило 1. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, следует и числитель и знаменатель дроби разделить почленно на x в высшей степени.

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3}{2x+5}=(\dfrac{\infty}{\infty})=?=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}}{2+\dfrac{5}{x}}=\dfrac{1-0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$.

Правило 2. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$, нужно числитель и знаменатель дроби разложить на множители и скобку (x-a) сократить.

Пример: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=(\frac{0}{0})=?$

Разложение квадратного трёхчлена на множители- $\alpha x^2+bx+c=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

а) $x^2-5x+6=0$ $\qquad$ $x^2+px+q=0$

Первый способ $x_1=2$ $\qquad$ $x_1+x_2=-p$

$x_2=3$ $\qquad$ $x_1x_2=q$

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

б) x^2-2x-$x(x-2)$ Тогда имеем: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$

Второй способ разделить уголком на (x-a) x^2-$5x+6 \llcorner x-2=x-3$

Из алгебры известно (для второго способа). Если $P_n(a)=0 \Rightarrow x=a$- корень многочлена. Если известен хотя бы один корень многочлена, то многочлен делится без остатка на выражение (x-a).

Правило 3.Чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{0}{0}$ при вычислении предела иррациональной функции (корни есть), нужно числитель и знаменатель дроби умножить на сопряжённые выражения. И затем воспользоваться формулой:

$a^2-в^2=(a-в)\cdot(a+в)$.

Пример:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=(\frac{0}{0})=?=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

Неопределённость вида (∞-∞) нужно свести к виду $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Вычислению многих пределов помогает использование двух так называемых <u>замечательных пределов.</u>

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ или $\lim_{x\to\infty}=\frac{x}{\sin x}=1$ (раскрывается неопред-сть вида $\frac{0}{0}$)

2) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ где e≈2,72

или $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})x=e$ (раскрывается неопределенность вида 1^{∞})

Пример 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}=(\frac{0}{0})=?=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot x}{3\cdot\sin 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

Пример 2:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{3n}=1^{\infty}=?=\lim_{x\to\infty}(\left[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{2}{n}})^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}\right]^{6}=e^{6}$$

.

При вычислении пределов, в частности при раскрытии неопределённости вида $\frac{0}{0}$, применяется таблица эквивалентности.

Определение. Две бесконечно малые величины называются эквивалентными, если при x→a (или x→∞) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

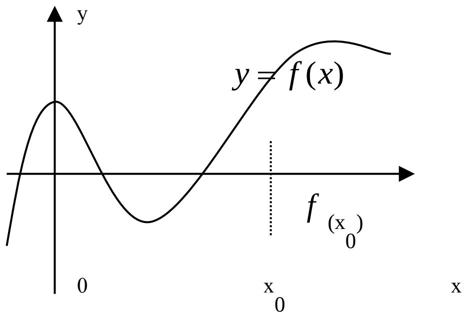
Таблица

$\sin x \sim x$	$\alpha^{x}-1\approx x\ln\alpha$
$tqx\approx x$	$e^{x}-1\approx x$
$\sin mx\approx mx$	$e^{mx}-1\approx mx$
$arctqx\approx x$	$\ln(1-x)\approx x$
$arq\sin x\approx x$	$\ln(1+mx)\approx mx$

и так далее.

Непрерывность функции

Функция называется <u>непрерывной</u>, если её график можно изобразить, не отрывая руки от чертежа.



Функция $y = f(x)$ -непрерывна всюду.

Определение 1: пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности. Если при $x \to x_0$ существует предел функции и он равен значению функции в т. x_0, то точка x_0 называется непрерывности функции $f(x)$.а функция называется непрерывной в точке x_0.

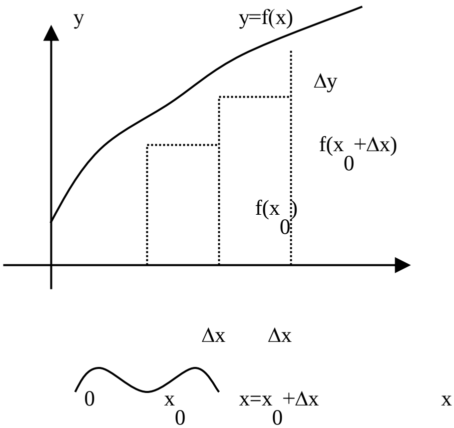
$$\lim_{x \to x_0} = f(x_0) \qquad (1)$$

Определение 2:введём понятие «приращение аргумента» и «приращение функции».

Зафиксируем т. x_0. Функция определена в точке x_0, значит существует $y(x_0)=f(x_0)$.

Возьмём т. $x \in$ окрестности т.x_0, тогда <u>$x-x_0=\Delta x$</u>- приращение аргумента, <u>Δx</u>- бесконечно малая величина.

Тогда $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ -приращение функции.



Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (2), то функция $f(x)$ - является непрерывна в точке x_0. Читается так: если б/м приращению аргумента соответствует б/м приращение функции, то такая функция непрерывна в этой точке. Очевидно, что определение 2 и определение 1 равносильны.

Введём понятие предел <u>справа</u> и предел <u>слева</u>.

Пусть $x \to x_0$, и при этом $x > x_0$ тогда $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ - предел справа

Пусть $x \to x_0$, и при этом $x < x_0$ тогда $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ - предел слева.

Если существует предел функции слева и справа и они равны, и равны значению функции в этой точке, то функция непрерывна в точке x_0.

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$$ -

необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке.

Функция называется непрерывной на промежутке (а;в), если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Классификация точек разрыва.

1). Если функция не определена в точке x_0, но существует предел слева и предел справа, и они равны $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ -то точка x_0-точка устранимого разрыва.

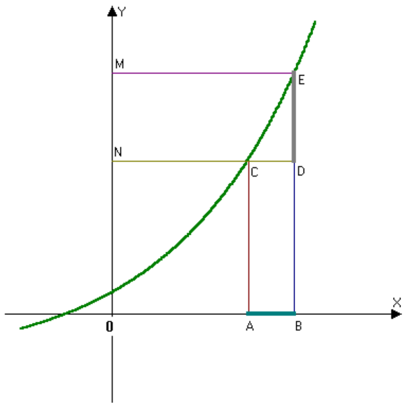
2). Если функция не определена точке в x_0, но существует предел слева и предел справа, но они не равны $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ -то точка x_0-точка разрыва 1 рода (скачок).

3). Если функция не определена точке в x_0, но односторонние пределы существуют и один из них равен ∞ (или оба),то x_0 называется точкой разрыва 2 рода (если оба равны ∞) то точка x_0- точка бесконечного разрыва.

Лекция 13. Понятие производной

1. Приращение аргумента, приращение функции
2. Понятие производной

Пусть задана функция $y = f(x)$. При x = x_0 она принимает значение $y_0 = f(x_0)$.



x_0 - на оси ОХ в точке А, y_0 – на оси ОУ в точке N. Дадим x приращение Δx = AB, получим новое приращенное значение аргумента (в точке В) x = $x_0 + \Delta x$

Вычислим приращенное значение функции $y = f(x_0 + \Delta x)$ на оси ОУ – точка М, т.е. длина отрезка BE.

Естественно, что отрезок DE и будет являться *приращением функции в точке x_0, если приращение аргумента равно Δx*.

Т.е. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Итак, приращение функции есть разность между приращенным значением функции и первоначальным (отрезок DE).

Обратите внимание, что для возрастающей функции DE > 0, а для убывающей функции AC будет больше DE, поэтому разность DE – AC < 0 и $\Delta f(x_0) < 0$.

Сделайте самостоятельно схематический чертеж убывающей функции и укажите $\Delta f(x_0)$.

Вычислим приращение функции $f(x) = x^2 + 2x + 5$ при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0,1$ $x_0 + \Delta x = 2,1$

По формуле $\Delta f(x_0) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(2,1\right) - f\left(2\right) =$

$2,1^2 + 2*2,1 + 5 - (2^2 + 2*2 + 5) = 0,61$

Поставим задачу отыскать приращение функции не в конкретной точке x_0, а в произвольной x, т.е. выведем формулу приращения в общем виде:

$\Delta f(x) = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 5 - x^2 - 2x - 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x\,\Delta x + 5 - x^2 - 2x - 5 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\,\Delta x = 2x\,\Delta x + 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$ – это и есть приращение функции в общем виде: $\Delta f(x) = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$. Подставим $x = 2$, $\Delta x = 0,1$ получим $\Delta f(x) = 0,61$ – все верно.

Понятие производной

Пусть $y = f(x)$ - некоторая функция, определённая на некотором множестве точек оси ОХ (т.е. непрерывная). Зафиксируем некоторое значение аргумента x_0. Ему соответствует $f(x_0) = y(x_0)$. Добавим теперь к x_0 некоторое приращение Δx (+ или -), т.е. перейдём от x_0 к $x = x_0 + \Delta x$. Тогда соответствующее значение функции будет $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$. Приращение функции Δy равно: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ и

называется производной функции $y = f(x)$

в точке x_0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'$

Процесс нахождения производной называется дифференцирование функции, а раздел математики, изучающий производную. называется дифференциальное исчисление.

Функция называется дифференцируемой в точке x_0, если в этой точке существует производная функция.

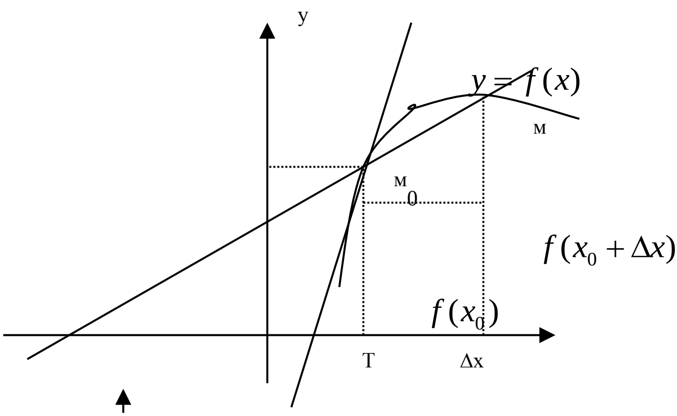
Функция называется дифференцируемой на промежутке, если в каждой точке этого промежутка существуют производные.

Теорема: Если функции $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0,то она в этой точке непрерывна.

То есть: если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Обратное утверждение неверно.

2.Геометрический смысл производной.



x

0 x_0 $x=x_0+\Delta x$

Проведём секущую M_0M и касательную M_0T.Тогда касательная M_0T образует угол с положительным направлением оси OX, аналогично, секущая M_0M образует угол.

Следовательно: $к_{кас}=tq\alpha$, $к_{сек}= tq\alpha$.

Пусть $x\to x_0$, $\Delta x\to 0$, точка $M(x;y)$ стремится по графику кривой к точке $M_0(x_0;y_0)$, тогда секущая стремится занять положение касательной.

При этом $tq\varphi \to tq\alpha$.Из рисунка видно, что $tq\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Значит $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tq\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tq\alpha$.

т.е. $f'(x_0) = tq\alpha =$ $к_{кас}$.

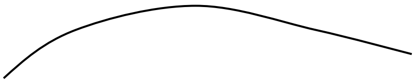
<u>Производная функции, вычисленная в т. x_0 численно равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в т. x_0.</u>

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в т. x_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда $M\to M_0$.

3.<u>Механический смысл производной.</u>

(Физический)-скорость изменения какого-нибудь процесса.

Пусть функция $y = f(x)$ представляет собой закон движения некоторой материальной точки по некоторой траектории (у- путь, т. е. расстояние от начальной точки траектории, х-время)



Δу- путь, пройденный точкой за время Δх. Тогда $\frac{\Delta \acute{o}}{\Delta \tilde{o}}$ $=\nu_{ср}$-средняя скорость за промежуток времени Δх. Следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \nu_{\tilde{n}\eth} = \nu(\tilde{o})$ - мгновенная скорость в момент времени х.

4. <u>Нахождение производных функций.</u>

Нахождение производных основывается на определении производной функции

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Найдём для примера производные некоторых простых функций:

1). у=с (с- константа)

Δу=0 значит $\frac{\Delta \acute{o}}{\Delta \tilde{o}}=0 \Rightarrow \acute{o}' = 0$ (с')=0

2). у=х, Δу=(х+Δх)-х=Δх, $\acute{o}' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \tilde{o}}{\Delta x} = 1$

(х)'=1

3). $y=x^2$, $f(x)=x^2$, $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$,

$\Delta y= x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$,

$$ó' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x,$$

$(x^2)'=2x$.

Таким образом, можно получить производные и других элементарных функций.

<u>Таблица производных основных элементарных функций.</u>

1. $c'=0$	7. $(\ln x)'=\frac{1}{õ}$	13. $(arctqx)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $x'=1$	8. $(\log_a x)'=\frac{1}{xlqa}$	14. $(arccosx)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(x^2)'=2x$	9. $(\sin x)'=\cos x$	15. $(arctqx)'=\frac{1}{1+x^2}$
4. $(x)'=nx^{n-1}$	10. $(\cos x)'=-\sin x$	16. $(arcctqx)'=-\frac{1}{1+x^2}$
5. $(a^x)'\cdot \ln a$	11. $(tqx)'=\frac{1}{cos^2 x}$	17. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $(e^x)'=e^x$	12. $(ctqx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	18. $(\dfrac{1}{x})=-\dfrac{1}{x^2}$

Для нахождения производных остальных функций используются правила дифференцирования. Перечислим основные из них без вывода:

Пусть u=u(x) и ν=ν(x)- некоторые дифференцируемые функции, c-постоянная. Тогда:

1. $(u+\nu)'=u'+\nu'$
2. $(u-\nu)'=u'-\nu'$
3. $(u\cdot\nu)'=u'\nu+u\nu'$
4. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$
5. $(\dfrac{u}{v})=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

В 4 номере постоянную выносим за знак производной.

<u>Правило дифференцирования сложных функций.</u>

Рассмотрим сложную функцию: y=F[u(x)], где F- внешняя функция; u(x)- промежуточная функция Тогда: $y'_x=F'(u)\cdot u'(x)$

<u>Производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.</u>

Например: y=sin2x, F(u)=sinu, u(x)=2x$\Rightarrow$ y'=cos2x·2=2cos2x,

<u>Дифференцирование неявной функции</u>.

(т. е. когда уравнение не разрешено от-но у)

Правило: следует продифференцировать всё уравнение слева направо, учитывая, что

$y = f(x)$. Затем выразить у'.

Например: x^2+sinx-3=0 (функция у задана неявно)

2x+cosy·y'=0

cosy·y'=-2x

$y' = \frac{-2x}{\cos y}$ cosy≠0

Рассмотрим несколько примеров нахождения производных функций.

1. $y=2x^2-4x+5$, $y'=(2x^2-4x+5)'==(2x^2)'-(4x)'+(5)'=2\cdot3x^2-4\cdot1+0=6x^2-4$.

2. $y=x^2\cdot e^x$, $y'=(x^2\cdot e^x)'==(x^2)'\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2+x)$.

3. y=lnsinx, y'=(lnsinx)'=[(lnu)'= $\frac{1}{u}\cdot u'$]= $\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} ctqx$.

Пусть $y = f(x)$ - некоторая функция. Тогда:

<u>Дифференциал функции</u>

Рассмотрим функцию, дифференцируемую в точке х и в окрестности этой точки. Тогда известно, что производная функции в точке х равна:

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

По теореме о пределах имеем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина. Тогда $\Rightarrow (A) \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$, приращение функции представляет собой сумму двух слагаемых: $y' \cdot \Delta x$ - главная часть приращения, линейная относительно Δx.

$\alpha(x) \cdot \Delta x$ - произведение двух б/малых величин есть б/малая величина.

Итак: дифференциалом функции называется главная часть приращения функции:

$dx = y' \cdot \Delta x$ (1) Найдём $dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x \rightarrow dx = \Delta x$ (2), т.е. дифференциал независимой переменной х равен приращению независимой переменной. Подставим (2) в (1),

получим: правило нахождения дифференциала

$dy = y'dx$

<u>Свойства дифференциала.</u>

1. $dc = c'dx = 0dx$; 2. $d[cf(x)] = cf'(x)dx = cdf(x)$;

3. $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

4. $d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = (u'v + uv')dx = u'vdx + uv'dx = vdu + udv$;

5. $d(\frac{u}{v}) = (\frac{u}{v})'dx = (\frac{u'v - uv'}{v^2})dx = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x_0 получает приращение Δx.

Применение дифференциала к приближённым вычислениям

Вернёмся функции $(A) \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$ = $dy + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \Delta y \approx dy$

т.е. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, т.е. зная $f(x_0)$ - значение функции в точке x_0, можно найти следующее значение функции.

Например. Вычислить $\sqrt[3]{28}$ $y = f(x)$ = $\sqrt[3]{\tilde{o}}$ - функция в общем виде.

$\sqrt[3]{27+1} \rightarrow$ x_0=27, Δx=x-x_0=28-27=1, f(x_0)= $\sqrt[3]{27}$ =3

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot (27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot (3^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27} \cdot 1 = 3 + \frac{1}{27} = 3\frac{1}{27} \approx 3{,}037.$$

Правило Лопиталя. (французский математик).

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{\infty}{\infty} = ?\frac{0}{0} = ?) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{(\sin 2x)'}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2\cos 2x}=\dfrac{1}{2\cos 0}=\dfrac{1}{2\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}=?=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}=?=$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{e^x}=\dfrac{2}{e^\infty}=\dfrac{2}{\infty}=2\cdot 0=0$

(правило Лопиталя применили дважды) его можно применять до тех пор, пока предел не вычислится).

Лекция 14. Исследование функций с помощью производной.

1. Интервалы возрастания и убывания функций.
2. Точки экстремума функции.
3. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции.
4. Полная схема исследования функции:

Функция $y = f(x)$,заданная на некотором интервале (а;в) числовой оси ОХ, называется <u>возрастающей</u> на этом интервале, если на нём с ростом х растёт и у. Если же на

интервале (а;в) функция у убывает с ростом х, то она называется <u>убывающей</u> на этом интервале.

Функция $y = f(x)$ называется монотонной на интервале (а;в),если она на этом интервале возрастает или убывает. Интервал (а;в)- интервал монотонности.

Учитывая геометрический смысл производной функции для возрастающей функции видим, что $y^{/} = f'(x) = tq\alpha \succ 0$ (т.к. α - острый угол). Для убывающей функции: $y^{/} = f'(x) = tq\alpha \prec 0$ (т.к. α - тупой угол).Очевидно и обратное: если для любого х$\in$(а;в) имеем $y^{/} = f'(x) \succ 0$,то функция $y = f(x)$ возрастает на интервале (а;в).А если имеем

$y' = f'(x) \prec 0$ то функция $y = f(x)$ убывает на интервале (а;в).

Точки экстремума функции

А теперь рассмотрим функция $y = f(x)$ у которой есть и интервалы возрастания и интервалы убывания, а следовательно есть и вершины и впадины на её графике.

Точки экстремума разделяют интервалы возрастания и убывания. А именно, точки максимума функции являются точками перехода от возрастания функции к убыванию, т.е. знак производной при переходе через точку максимума меняется с (+) на (-). Точки минимума являются точками перехода от убывания функции к возрастанию, т.е. производная меняет знак функции с(-) на (+).В самих же точках экстремума производная функции либо равна нулю, либо не существует. (необходимое условие существование экстремума). Точке экстремума соответствует гладкая вершина или впадина с горизонтальной касательной. Точки оси ОХ, в которых производная функции равна 0 или не существует (необходимое условие экстремума), являются лишь подозрительными на экстремум. Те из них, в которых производная меняет знак, являются точками экстремума (достаточное условие существования экстремума функции). При этом если с (+) на (-), то критическая точка 1 рода (подозрительная на экстремум) является точкой максимума; а если с (-) на (+), то- точкой минимума.

Если же слева и справа от подозреваемой точки производная функции имеет один и тот же знак, то эта точка не является точкой экстремума.

Из всего сказанного вытекает следующая схема исследования функции $y = f(x)$ на интервалы монотонности и точки экстремума:

1. Находим область определения функции.
2. Находим. $y' = f'(x)$.
3. Находим точки, подозрительные на экстремум;

   а). $y' = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \{x_1; x_2; ....\}$

   б). $y' - \textit{не.существует} \Rightarrow \{x_1; x_2; ....\}$.

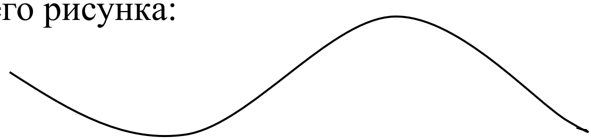
4. Наносим все найденные подозрительные на экстремум точки на область определения функции, отмечаем интервалы между этими точками. В каждом интервале устанавливаем знак производной с помощью пробных точек. По найденным знакам производной устанавливаем интервалы возрастания-убывания и находим точки экстремума функции.

5. В найденных точках максимума и минимума функции находим максимальное ($y_{\max}$) и минимальное ($y_{\min}$) значение функции.

6. Строим график функции.

Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции.

Понятие выпуклости, вогнутости и точек перегиба графика функции $y = f(x)$ дадим, исходя из следующего рисунка:



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, выпуклой на интервале (а;с) и вогнутой на интервале (с;в). Точка С, разделяющая интервалы выпуклости и вогнутости , есть абсцисса точки перегиба. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале (а;с), если он расположен ниже касательной, проведённой в любой точке этого интервала.

При этом с увеличением аргумента х касательная поворачивается по часовой стрелке. Значит, угол α наклона к оси ОХ касательная, а следовательно и её угловой коэффициент к=tqα уменьшается. Значит с ростом х уменьшается производная функции (т.к. f'(x)=tqα=$к_{кас.}$- геометрический смысл производной). А это значит, что её производная (f'(x))'=f''(x)<0.

График функции называется вогнутым на интервале (с;в), если он расположен выше касательной, проведённой к графику функции в любой точке этого интервала.

Рассуждение аналогичное предыдущему, приводит к выводу, что на интервале вогнутости для любого х этого интервала будет f''(x)>0. Точками же перегиба графика функции могут быть естественно, лишь те точки, где производная функции второго порядка $y'' = f''(x)$ равна нулю или не существует- это есть необходимое условие существования точек перегиба, т.е. рассматривая это условие, находят точки, подозрительные на перегиб (критические точки 2-го рода).

Достаточным же условием существования точек перегиба является смена знака производной второго порядка. Из сказанного вытекает схема исследования функции $y = f(x)$ на интервале выпуклости- вогнутости и точки перегиба.

1. Н
аходим область определения функции.
2. Н
аходим производную второго порядка $y'' = f''(x) = (f'(x))'$.
3. Н
аходим подозрительные на перегиб точки: (критические точки 2-го рода). Для этого воспользуемся необходимое условие существования точек перегиба, т.е. а) $y'' = 0 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow \{\tilde{o}_1; \tilde{o}_2; \cdots \}$ б) $\acute{o}''$ - не сущ.$\Rightarrow \{\tilde{o}_1; \tilde{o}_2; \cdots \}$
4. Н
аносим все найденные критические точки 2-го рода на область определения функции и отмечаем дугами интервалы, на которые она разбивается этими

точками. Исследуем знак у'' с помощью пробных точек в каждом интервале. По найденным знакам (- выпуклость, + вогнутость) устанавливаем интервалы выпуклости- вогнутости и абсциссы точки перегиба графика исследуемой функции.

5. В

ычисляем ординаты точек перегиба.

Пример. Исследовать функцию $у=х^3-3х^2$ на выпуклость- вогнутость и точки перегиба.

Решение.

1. т.к. функция целая разд-ная (кубический двучлен), то D(у)=R, т.к. $\tilde{o}\in(-\infty;+\infty)$.

2. $\acute{o}''=(\acute{o}')'$

$у'=(х^3-3х^2)'=3х^2-6х$; $у'''=(3х^2-6х)'=6х-6=6(х-1)$.

3. а) $y''=0 \Rightarrow 6(\tilde{o}-1)=0 \Rightarrow \tilde{o}=1$ б) $\acute{o}''$ - не сущ. $\Rightarrow$ таких точек нет.

4. $(-\infty;1)$: х=0; у''(0)=-6<0,- график выпуклый.

$(1;+\infty)$; х=2, у''(2)=6>0,- график вогнутый.

$\Rightarrow$х=1- абсцисса точки перегиба.

5. у

$(1)=1^3-3*1^2=-2$ (т.е. найдено перегибное значение х

Итак, т.С (1;2)- точки перегиба графика функции.

Полная схема исследования функции:

1. Найти область определения функции. Записать интервалы непрерывности и указать (если они имеются) точки разрыва. (Если, есть то надо исследовать поведение функции в окрестности точек разрыва. Сделать вывод о вертикальных асимптотах). $\lim\limits_{x \to a-0} = \infty$ то имеется вертикальная асимптота.

2. Исследовать функцию на чётность - нечётность.

f(-x)=f(x)- чётная, f(-x)=-f(x)- нечётная.

3. Исследовать функцию на периодичность.

4. Найти точки пересечения с осями координат.

5. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума (y').

6. Найти интервалы выпуклости-вогнутости и точки перегиба графика исследуемой функции (y'').

7. Найти асимптоты (наклонные, вертикальные) по формулам y=кх+в уравнение наклонной асимптоты.

к= $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\qquad b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right].$

поведение на бесконечность.

8. Построение графика.

Пример: Построить график функции $y=x^3-6x^2+9x-3$, предварительно исследовать функцию по полной схеме.

1.Областью определения данной функции является вся числовая ось- все действительные числа $D(y) \cup x \in (-\infty;+\infty)$,т.е. функция непрерывна всюду при любом x и её график не имеет вертикальных асимптот.

2.$y(-x)=(-x)^3-6(-x)^2+9(-x)-3=-x^3-6x^2-9x-3 \neq y(x)$

$y(-x)=-(x^3-6x^2+9x-3) \neq -y(x) \Rightarrow$ функция общего вида.

3. Непериодическая.

4. Точки пересечения с осями координат.

а) С осью ОХ: точки пересечения найти трудно.

б) С осью ОУ $x=0$, тогда $y(0)=-3$

5. $y'=(x^3-6x^2+9x-3)'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$, $3x^2-12x+9=0$, $x^2-4x+3=0$. $x_1=3$, $x_2=1$.

$(-\infty;1)$: $y'(0)=9>0$- функция <u>возрастает</u>.

$(1;3)$: $y'(2)=-3<0$- функция <u>убывает</u>.

$(3;+\infty)$: $y'(4)=9>0$- функция <u>возрастает</u>.

Следовательно, точка $x=1$- точка max. $x=3$- точка min.

Ординаты этих точек $y_{\max}(1)=1-6+9-3=1$

т. А(1;1)-<u>гладкая</u> <u>вершина</u>.

$y_{\min}(3)=27-54+27-3=-3$

т. В(3;-3)-<u>гладкая</u> <u>впадина</u>.

6. y''=$(3x^2$-12x+9)'=6x-12=6(x-2)

y''=0, 6(x-2)=0, x=2- критическая точка 2-го рода.

(-∞;2): y''(0)=-12<0- выпуклый.

(2;+∞): y''(3)=6>0- вогнутый. Т. x=2- абсцисса точки перегиба

y(2)=8-24+18-3=-1

т C(2;-1)- точка перегиба.

7. y=кx+в к= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$.

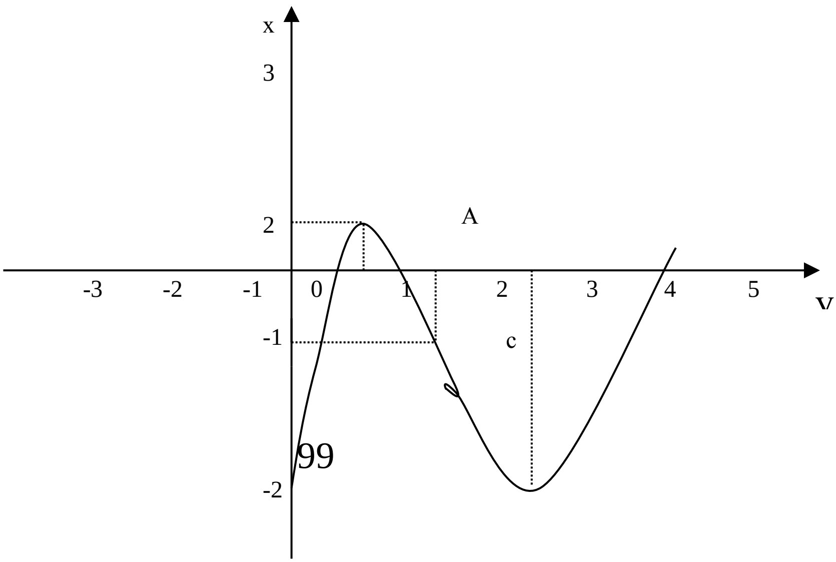
к= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\tilde{o}^3-6\tilde{o}^2+9\tilde{o}-3}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-6x+9)=\infty$ - наклонной асимптоты нет.

8. Точки пересечения с осями координат

с осью OX y=0 $x^3-6x^2+9x-3=0$

с осью OY x=0 $x^3-6x^2+9x-3=y$, y=-т. Д(0;-3)- точка пересечения.

9. Построить график:



Д В

Лекция 15. Первообразная. Неопределенный интеграл

1. Определение первообразной
2. Неопределенный интеграл

O_1. Функция F(x) называется <u>первообразной</u> для функции f(x), если F'(x)=f(x).

Рассмотрим примеры: Функция $F(x)=x^3$- первообразная для функции $f(x)=3x^2$, так как выполнив проверку получаем $(x^3+6)'=3x^2$.

И вообще, очевидно, что если функция F(x)- первообразная для функции f(x), то и функция F(x)+C, где C- любая константа, тоже первообразная для функции f(x).

Теорема: Две любые первообразные для одной и той функции, определённой в некотором промежутке, могут отличаться друг от друга в этом промежутке лишь на постоянное слагаемое (доказательство опускаем). Из теоремы следует вывод: Если функция f(x) имеет первообразную F(x), то она имеет бесконечное множество первообразных, причём <u>все</u> первообразные <u>содержатся</u> в выражении F(x)+C где C- любая константа

(т.е.$-\infty < C < +\infty$).

При изучении первообразной будем опираться на следующее утверждение. Признак постоянства функции: Если на промежутке J производная Ψ(x)

функции равна 0, то на этом промежутке функция Ψ(x) постоянна.

Итак, функция f(x)=c постоянна на промежутке J, если f`(x)=0 на этом промежутке.

Действительно, для произвольного x_1 и x_2 из промежутка J по теореме о среднем значении функции можно записать:

$f(x_2)- f(x_1)=f`(c)\ (x_2- x_1)$, т.к.

$f`(c)=0$, то $f(x_2)= f(x_1)$

T_1: (Основное свойство первообразной функции)

Если F(x) одна из первообразных для функции f(x) на промежутке J, то множество всех первообразных этой функции имеет вид: F(x)+C, где C – любое действительное число.

T_2 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные для функции f(x) на некотором интервале X, то найдется такое число C, что справедливо равенство:

$$F_2(x) = F_1(x) + C,$$

Или можно сказать так, две первообразные для одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

О. Совокупность всех первообразных для функции f(x) на интервале X называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается $\int$ f(x)dx, где $\int$ - знак интеграла, f(x) – подинтегральная функция, f(x)dx – подинтегральное выражение. Таким образом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

F(x) – некоторая первообразная для f(x), C – произвольная постоянная. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием этой функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. $(\int (f(x)dx)` = f(x).$ Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.
2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению.

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

$\int d(F(x)) = F(x) + C.$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где к - число

5. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций

$\int (f(x) + \varphi(x))dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$

Для вычисления неопределенных интегралов от функций используют таблицу неопределенных интегралов, которая приводиться ниже.

Таблица неопределенных интегралов.

1. $\int x^{\alpha} dx = [x^{\alpha+1} / (\alpha +1)] +C,$ $\alpha \neq -1, \alpha \in R$
2. $\int dx/x = \ln|x| +C$
3. $\int a^{x} = (a^{x}/\ln a)+C, \int e^{x}dx = e^{x}+C$
4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
6. $\int dx/(\cos x)^2 = tgx + C$
7. $\int dx/(\sin x)^2 = -ctgx + C$
8. $\int dx / \sqrt{(a^{2}-x^2)} = (\arcsin x/a) + C$

9. $\int dx / \sqrt{(a^2 - x^2)} = (-\arccos x/a) + C$

10. $\int dx / a^2 + x^2 = 1/a \operatorname{arctg} x/a + C$

11. $\int dx / a^2 + x^2 = - 1/a \operatorname{arcctg} x/a + C$

12. $\int dx / a^2 - x^2 = 1/2a \ln |x+a/x-a| + C$

13. $\int dx / \sqrt{(a^2 + x^2)} = \ln |x+\sqrt{(a^2+x^2)}| + C.$

Пример 1. Вычислить $\int (2x^2 - 3\sqrt{x} - 1)dx$.

Решение. Воспользуемся свойствами 4 и 5 неопределенных интегралов и первой табличной формулой. $\int (2x^2 - 3\sqrt{x} - 1)dx = 2\int x^2\, dx - 3\int x^{1/2}\, dx - \int dx =$

$= 2(x^2/2) - 3[(x^{3/2} * 2)/3] - x + C = x^2 - 2\sqrt{x}^3 - x + C.$

Пример 2. $\int (2/\sqrt{x} - 1/x + 4\sin x)dx = \int 2x^{-1/2}dx - \ln |x| - 4\cos x + C =$

$= 2[(x^{1/2} * 2)/1] - \ln |x| - 4 \cos x + C = 4\sqrt{x} - \ln|x| - 4\cos x + C.$

Для вычисления неопределенных интегралов применяют следующие методы: метод непосредственного интегрирования, метод подстановки(метод замены переменной), метод интегрирования по частям.

Существуют элементарные функции первообразные которых элементарными функциями не являются. По этой причине соответствующие неопределенные интегралы называются «неберущимися» в элементарных функциях, а сами функции не интегрируемыми в элементарных функциях.

Например, $\int e^{-x\wedge 2}\, dx$, $\int \sin x^2\, dx$, $\int \cos x^2\, dx$, $\int \sin x/x\, dx$, $\int \cos x/x\, dx$, $\int dx/\ln x$ – «неберущиеся» интегралы , т.е. не существует такой элементарной функции, что $F`(x) = e^{-x\wedge 2}$, $F`(x) = \sin x^2$ и т.д.

Лекция 16. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона - Лейбница. Понятие интегральной суммы.

Пусть на отрезке [а, в] задана функция у = f(x). Разобьем отрезок на п элементарных отрезков точками деления а = x_0, x_1, x_2, …, $x_п$ = в. На каждом элементарном отрезке [x_{i-1}, x_i] выберем произвольную точку C_i и положим

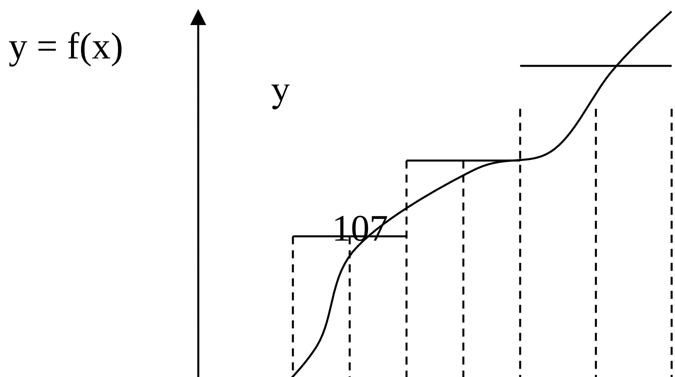
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где i = 1,2,…,п, в каждой точке C_i найдем значение функции $f(C_i)$, составим произведения $f(C_1)\Delta x_1$, $f(C_2)\Delta x_2$, …, $f(C_i)\Delta x_i$, …, $f(C_n)\Delta x_n$, рассмотрим сумму этих произведений:

$f(C_1)\Delta x_1 + f(C_2)\Delta x_2 + \ldots + f(C_i)\Delta x_i + \ldots + f(C_n)\Delta x_n = \sum_{I=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$.

Эту сумму будем называть интегральной суммой для функции y=f(x) на отрезке [а, в]. Интегральная сумма зависит как от способа разбиения отрезка [а, в] на п частей так и от выбора точек C_1, C_2, …, $C_п$ на каждом элементарном отрезке разбиения.

Геометрический смысл интегральной суммы.

Пусть у = f(x) неотрицательна на отрезке [а, в]. Рис.1



S_1 S_2 S_3

0 $a=x_0$ $в_1$ x_1 c_2 x_2 c_3

$x_3=в$ x

Рис.1

Пусть п=3, тогда $a = x_0, x_1, x_2, x_3=в$.

C_1, C_2, C_3 точки, выбранные произвольно на каждом элементарном отрезке.

$S_1 = f_1(C_1)\ \Delta x_1$ – площадь прямоугольника, построенного на первом отрезке разбиения, $\Delta x_1 = x_1 - x_0$,

$S_2 = f_2(C_2)\ \Delta x_2$ – площадь прямоугольника, построенного на втором отрезке разбиения. $\Delta x_2 = x_2 - x_1$,

$S_3 = f_3(C_3)\ \Delta x_3$ – площадь прямоугольника, построенного на третьем отрезке разбиения. $\Delta x_3 = x_3 - x_2$,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = f_1(C_1)\Delta x_1 + f_2(C_2)\Delta x_2 + f_3(C_3)\Delta x_3 = \sum_{I=1}^{3} f(C_i)\Delta x_i.$$

Это площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников.

Понятие определенного интеграла.

Обозначим длину наибольшего из отрезков разбиения через $\max \Delta x_i$, где $i=1,2,\ldots п$

Определение. Пусть предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$ при стремлении $\max \Delta x_i$ к нулю существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка

[а, в] на части и от выбора точек C_1, C_2, …, $C_п$. Тогда этот предел называется определенным интегралом от функции у = f(x) на [а, в] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, т.е $\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$ при

$\max \Delta x_i \to 0$

Число а называется нижним пределом, b – верхним пределом, f(x) – подинтегральной функцией, f(x)dx – подинтегральным выражением.

Некоторые свойства определенного интеграла.

1^0 . Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \text{ и т.д.}$$

2^0. $\int_a^b f(x)dx$ есть число.

3^0. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, a<b

4^0. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int_a^b mf(x)dx = \mathrm{m}\int_a^b f(x)dx, \text{ где m – const.}$$

5^0. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов.

$$\int_a^b (f(x)+\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$$

6^0. Если отрезок интегрирования разбит на части (a < c < b), то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов на каждой из частей.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx,$$

Существует еще ряд важных свойств определенного интеграла, которые подводят нас к формуле для вычисления определенного интеграла. Эта формула **называется формулой Ньютона – Лейбница** для f(x) непрерывной на [a; b].

$\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a), где F(x) некоторая первообразная для функции f(x).

Например, $\int_0^1 x^2 dx$ - вычислить.

1) Находим первообразную для функции x^2, т.е. неопределенный

1

интеграл от x^2, произвольную постоянную С приравняем к нулю.

$$\int_0^1 x^2dx = x^3/3 \Big|_0^1 = 1/3 - 0/3 = 1/3$$

2) Подставим в первообразную $x^3/3$ вначале значение верхнего предела, равного 1, затем значение нижнего предела, равного 0 вместо x.

Пример 1. Вычислить $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi/2} =$ $\sin \pi/2 - \sin \pi/6 = 1 - ½ = 1/2$

Пример 2. Вычислить $\int_{-1}^{2} (2x - x^3)dx = (\frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}) \Big| = 2^2 - 2^4/4 - [(-1)^2 -$ $((-1)^4/4)] =$

$= 4 - 4 - (1- (1/4)) = -3/4.$

Лекция 17. Степень с произвольным действительным показателем, её свойства. Степенная функция, её свойства, графики.

1. Вспомнить свойства степени с рациональным показателем.

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$ для натурального n

a^n – степень; а – основание степени; n – показатель степени.

Для степени с рациональным показателем n:

$a > 0 \quad a^n > 0$ $\qquad (abc)^n = a^n b^n c^n$

$a < 0 \begin{cases} n - \text{четн.} & a^n > 0 \\ n - \text{нечет.} & a^n < 0 \end{cases}$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^0 = 1$ $\qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad a^m : a^n = a^{m-n}$

(прочесть свойства словами, а также справа налево)

2. Обобщим понятие степени

Определение: Пусть действительное число α записано в виде бесконечной десятичной дроби, и пусть α_n, $n \in N$, последовательность его десятичных приближений. Тогда для любого действительного числа а > 0 степень a^α определяется равенством $a^\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} a^{\alpha_n}$

а) Пусть а > 1 и $\alpha > 0$, например $10^{\sqrt{2}}$. Степень $10^{\sqrt{2}}$ означает такое число, которое больше всякой степени 10^{α_1}, но меньше всякой степени 10^{α_2}, где α_1 и α_2 – любые рациональные приближённые значения числа $\sqrt{2}$, взятые с недостатком и избытком.

С недостатком $10^{1,4}; 10^{1,41}; 10^{1,414}; 10^{1,4142} \cdots$

С избытком $10^{1,5}; 10^{1,42}; 10^{1,415}; 10^{1,4143} \cdots$

б) Пусть а < 1, но $\alpha > 0$, например $0,5^{\sqrt{2}}$. Тогда под степенью a^{α} разумеют такое число, которое меньше всякой степени a^{α_1}, но не больше всякой степени a^{α_2}. Т. е. $0,5^{\sqrt{2}}$ есть число, меньшее каждого из чисел ряда $0,5^{1,4}; 0,5^{1,41}; 0,5^{1,414}; 0,5^{1,4142} \cdots$, но большее каждого из чисел ряда $0,5^{1,5}; 0,5^{1,42}; 0,5^{1,415}; 0,5^{1,4143} \cdots$. Таким образом, если иррациональное число α заключено между двумя рациональными числами α_1 и α_2, то степень a^{α} заключена между степенями a^{α_1} и a^{α_2} и тогда, когда а > 1, и тогда, когда а < 1.

в) Пусть а > 1, а < 1 и $\alpha < 0$, например $10^{-\sqrt{2}}; 0,5^{-\sqrt{2}}$.

Тогда выражению a^{α} придают тот же смысл, какой имеют степени с отрицательным рациональным показателем

$$10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}}; \qquad 0,5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{0,5^{\sqrt{2}}}$$

Таким образом можно сказать, что все свойства показателей рациональных применимы и к показателям иррациональным

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}; \ \left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}$$

И значит записанные выше свойства степени с рациональным показателем справедливы для степени с любым действительным показателем (прочесть свойства словами ещё раз).

Вычислить

1) $3^{\sqrt{45}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{20}} - \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\right)^{-0,25} \cdot 36^{\frac{1}{2}} \cdot 0,1^{-1} =$

воспользуемся свойствами степени

$$= 3^{3\sqrt{5}} \cdot 3^{-2\sqrt{5}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5} \cdot \left(6^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 10 = 3^{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}} - 4^{0,5} \cdot 6 \cdot 10 = 3^{\sqrt{5}} - 2 \cdot 6 \cdot 10$$

2) $6^{-\sqrt{8}} \cdot 6^{\sqrt{18}} - (-5)^{0} \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^{2} + \sqrt[-5]{0,00032}$

Решение:

$$6^{-2\sqrt{2}} \cdot 6^{3\sqrt{2}} - (-1) \cdot 16 \cdot 2 + \left(\frac{32}{100000}\right)^{-\frac{1}{5}} = 6^{\sqrt{2}} + 32 + \left(\left(\frac{2}{10}\right)^{5}\right)^{-\frac{1}{5}} = 6^{\sqrt{2}} + 32 + \left(\frac{1}{5}\right.$$

Функция вида $y = x^{n}$ называется степенной функцией.

x – аргумент (основание степени)

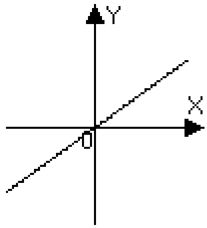
n – показатель степени.

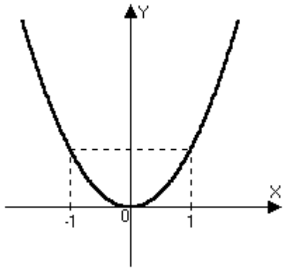
Рассмотрим графики функций при $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}$

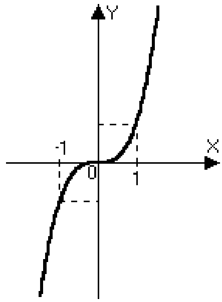
При n > 0

$n = 1 \quad y = x$

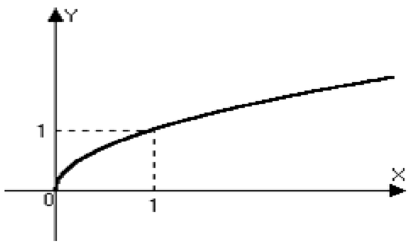
$n = 2 \quad y = x^{2}$ $\qquad$ $n = 3 \quad y = x^{3}$







$n=\frac{1}{2}$ $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$; $x\geq 0$ $n=\frac{1}{3}$ $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$; $x\in R$ $n=\frac{2}{3}$

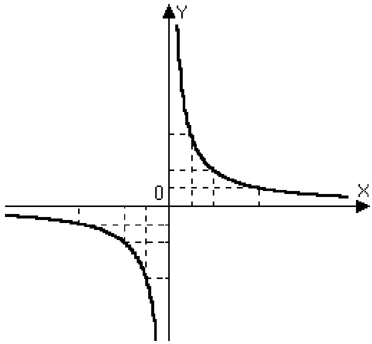


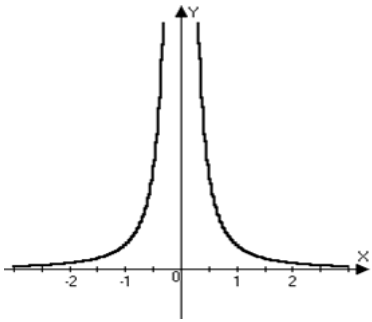
<u>При n < 0</u>

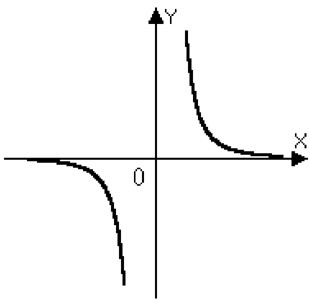
$$n = -1;\; y = x^{-1} = \frac{1}{x}; \quad x \neq 0$$

$$n = -2;\; y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}; \quad x \neq 0$$

$$n = -3;\; y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}; \quad x \neq 0$$

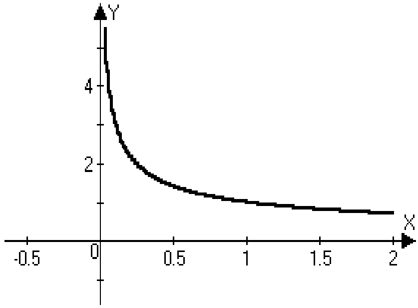


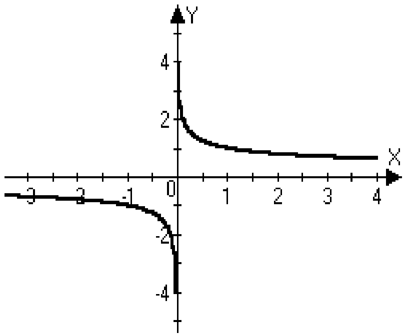


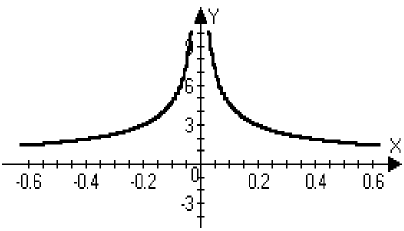


$$n = -\frac{1}{2}; \quad y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad x > 0$$

$n =$







Отметим свойства общие для степенных функций:

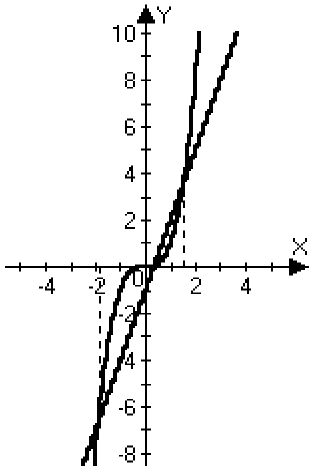
1) при $n > 0$ $x > 0$ функция возрастающая

2) при $n<0$ $x>0$ функция убывающая

Применение: используя графики степенных функций можно графически решать некоторые алгебраические уравнения.

Например $x^3-3x+1=0;$ $x^3=3x-1$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=3x-1 \end{cases}$$



$x_1=-1.88$

$x_2=0.35$

$x_3=1.53$

Корни приближённые, но другим способом это уравнение решить нельзя!

Построить схематически графики функций:

1) $y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$

2) $y=2x^{\frac{2}{3}}$

3) $y=x^{\frac{2}{3}}+2$

Лекция 18. Иррациональные уравнения

1. Иррациональные уравнения и способы их решения

О. Иррациональным называется уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня.

Решаются такие уравнения возведением обеих частей в степень. При возведении в четную степень возможно расширение области определения заданного уравнения. Поэтому при решении таких иррациональных уравнений обязательны проверка или нахождение области допустимых значений уравнений. При возведении в нечетную степень обеих частей иррационального уравнения область определения не меняется.

Иррациональные уравнения стандартного вида можно решить пользуясь следующим правилом:

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Решение иррациональных уравнений стандартного вида:

а) Решить уравнение $\sqrt{2x-1}$ = x – 2,

Решение.

$\sqrt{2x-1}$ = x – 2,

2x – 1 = x^2 – 4x + 4,

Проверка:

x^2 – 6x + 5 = 0, x = 5,

$\sqrt{2\times5-1}$ = 5 – 2,

x_1 = 5, 3 = 3

x_2 = 1 – постор. корень x = 1,

$\sqrt{2\times1-1} \neq 1-2$,

Ответ: 5 пост. к.

1 $\neq$-1.

б) Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}$ = x + 4,

Решение.

$\sqrt{6-4x-x^2}$ = x + 4,

$$\begin{cases} 6-4x-x^2 = x^2+8x+16, \\ x+4 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+12x+10=0, \\ x \geq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+6x+5=0, \\ x \geq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=-5-\textit{пост.к.} \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: -1

в) Решить уравнение $x - 1 = \sqrt[3]{x^2-x-1}$,

Решение.

$x - 1 = \sqrt[3]{x^2-x-1}$,

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1$,

$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$,

$x(x^2 - 4x + 4) = 0$,

$x = 0$ или $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$(x - 2)^2 = 0$,

$x = 2$

Ответ: 0; 2.

г) Решить уравнение $x - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0$,

Решение.

$x - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0$,

$x + 4 = 5\sqrt{x-2}$, Проверка:

$x^2 + 8x + 16 = 25x - 50$, $x = 11$, $11 - 5\sqrt{11-2} + 4 = 0$,

$x^2 - 17x + 66 = 0$, $0 = 0$

$x_1 = 11,$ $x = 6,$ $6 - 5\sqrt{6-2} + 4 = 0,$

x_2 $0 = 0.$

Ответ: 6; 11.

Иррациональное уравнение, содержащее иррациональность четной степени:

д) Решить уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$

Решение.

$\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1,$ возведем обе части уравнения в квадрат

$3x - 5 - 2\sqrt{(3x-5)(4-x)} + 4 - x = 1,$

$2x - 2 = 2\sqrt{(3x-5)(4-x)},$

$x - 1 = \sqrt{(3x-5)(4-x)},$

$x^2 - 2x + 1 = (3x-5)(4-x),$

Проверка:

$x^2 - 2x + 1 - 12x + 3x^2 + 20 - 5x = 0,$ $x = 3,$ $\sqrt{9-5} - \sqrt{4-3} = 1,$

$4x^2 - 19x + 21 = 0,$ $1 = 1.$

$x=3$ $x = 1,75$ $\sqrt{4,75-5} - \sqrt{4-1,75} \neq 1,$

Ответ: 3.

Лекция 19. Показательная функция, её график, свойства. Логарифмическая функция, её график, свойства.

1. Показательная функция
2. Логарифмическая функция

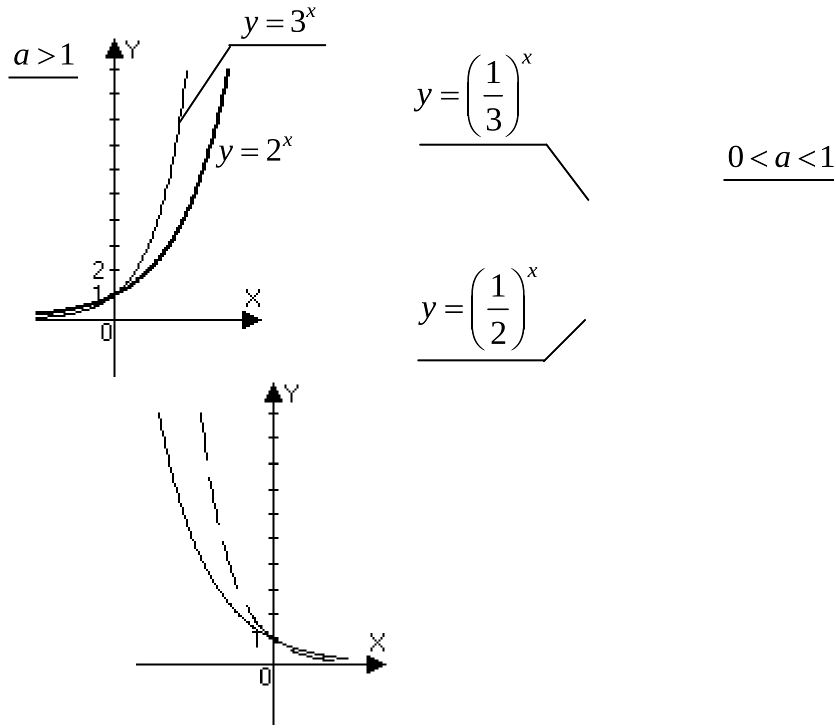
<u>Определение</u>. Функция вида $y = a^x$, где $a \neq 1$ и $a > 0$ называется показательной.

Рассмотрим функции.

$y = 2^x;\qquad y = 3^x\qquad (a > 1)$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x;\quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x\qquad (a < 1)$

построим их графики прочтём свойства функций.



Свойства

1. Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Множество значений функции: $y \in (0; +\infty)$

называются общими свойствами показательной функции и не зависят от основания, какое оно больше 1 или меньше 1.

$\underline{a > 1}$	$a < 1$
3. Функция возрастающая	4. Функция убывающая
4. при $x < 0$ $y < 1$; $x > 0$ $y > 1$	5. при $x < 0$ $y > 1$; $x > 0$ $y < 1$
5. $x \to \infty$, $y \to \infty$	6. $x \to \infty$, $y \to 0$
та степень больше показатель которой больше	та степень больше, показатель которой меньше

При решении учитывается основание (какое оно больше 1 или меньше 1) и знак показателя степени.

б) Сравнить показатели степени, если:

<u>Условие</u>: <u>Ответы</u>:

$0,4^m < 0,4^n$ $\qquad m > n$

$2,7^m < 2,7^n$ $\qquad m < n$

$5,2^m > 5,2^n$ $\qquad m > n$

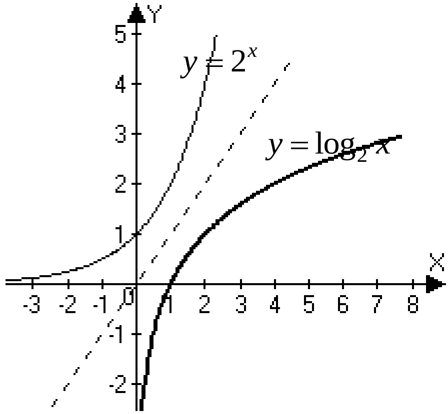
$\left(\frac{4}{9}\right)^m > \left(\frac{4}{9}\right)^n$ $\qquad m < n$

$\left(\frac{5}{2}\right)^m < \left(\frac{5}{2}\right)^n$ $\qquad m < n$

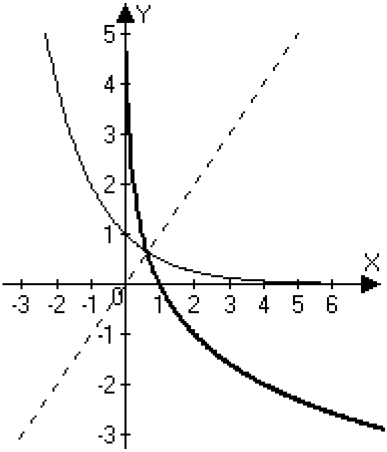
При решении обращается внимание на основание (какое оно больше 1 или меньше 1) и учитывается 6-ое свойство показательной функции

Функция, обратная показательной, называется *логарифмической* $y = a^x$, $a \neq 1$ и $a > 0$ – показательная функция $x = \log_a y$, поменяем местами x и y, получаем $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$ – это и есть логарифмическая функция.

Знаем, что графики обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Воспользовавшись этим свойством изобразим графики логарифмической функции при a > 1 и a < 1



$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$



Свойства

1. $D(y)$: $x\in(0;+\infty)$
2. $E(y)$: $y\in(-\infty;+\infty)$
3. при $x=1$ $y=0$

Свойства (1 – 3) являются общими свойствами логарифмических функций и не зависят от основания (больше 1 или меньше 1).

Остальные свойства рассматриваются в зависимости от основания

$a > 1$	$0 < a < 1$
Функция монотонно возрастающая	Функция монотонно убывающая
При	При
$0 < x < 1$ $\quad y < 0$	$0 < x < 1$ $\quad y > 0$
$x > 1$ $\quad y > 0$	$x > 1$ $\quad y < 0$
При $x \to \infty$ $\quad y \to \infty$	При $x \to \infty$ $\quad y \to -\infty$
большему числу соответствует и больший логарифм	большему числу соответствует меньший логарифм

Используя свойства логарифмической функции (свойства логарифмов), определите знак числа

1. $\log_2 3$
2. $\log_{1,4} 0,72$
3. $\log_{0,34} 14,7$
4. $\log_{0,29} 0,786$

Ответы:

1. > 0
2. < 0
3. < 0
4. > 0

Лекция 20. Показательные уравнения и неравенства, способы их решения

Уравнения, содержащие переменную в показателе степени, называются показательными.

Например: $2^{2x-1}-4=2^x$; $5^{\sqrt{x}}=1$ и т.д.

При решении показательных уравнений применяются разные методы решения, которые мы рассмотрим на конкретных примерах.

1. $2^{3x-8}=64$, т.к. $64=8\cdot 8=2^3\cdot 2^3=2^6$, то $2^{3x-8}=2^6$, мы привели обе части уравнения к одинаковому основанию, а так как степени равны, равны их основания, то равны и показатели степеней, т.е

$$3x-8=6; \quad \Rightarrow \quad 3x=14 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$$

Ответ: $4\frac{2}{3}$

Показатель степени может быть любым числом, поэтому проверку делать не надо.

Ответ: $4\frac{2}{3}$

2. $0{,}1^{2x}\cdot 10^{3x-2}=100$ В левой части $0{,}1=10^{-1}$ и тогда $\left(10^{-1}\right)^{2x}\cdot 10^{3x-2}=10^2$, так как при умножении степеней с одинаковым основанием их показатели складываются, при возведении степени в степень показатели перемножаются, то $10^{-2x+3x-2}=10^{-2} \quad \Rightarrow \quad -2x+3x-2=-2 \quad x=0$, это и есть решение уравнения. Ответ: $x=0$.

Оба уравнения решались методом сведения обеих частей уравнения к одинаковому основанию. А если нельзя свести к одинаковому основанию?

$2,76^{3x-1}=0,713$ Что делать?

Как решить?

Теперь применим только метод логарифмирования. Прологарифмируем обе части уравнения, например по основанию 10, т.е найдём от обеих частей десятичный логарифм

$$\lg 2,76^{3x-1}=\lg 0,713$$

$$(3x-1)\lg 2,76=\lg 0,713$$

$$3x-1=\frac{\lg 0,713}{\lg 2,76}$$

$$3x-1=-0,137$$

$$3x=1-0,137$$

$$3x=0,863$$

$x\approx 0,288$, результат не изменится, если взять логарифм натуральный, то есть берём тот логарифм который можно найти, используя МК.

4. $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$ используя свойства степени, имеем $3^{2x}-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-2}=1$ в левой части каждое слагаемое содержит общий множитель 3^{2x}. Вынесем 3^{2x} за скобки, получим: $3^{2x}\left(1-2\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{-2}\right)=1;$ $3^{2x}\left(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)=1;$ $3^{2x}\cdot\frac{9-6-2}{9}=1$

$3^{2x} \cdot \frac{1}{9} = 1 \qquad 3^{2x} = 9 \qquad 3^{2x} = 3^2$

$2x = 2 \qquad x = 1$

Ответ: $x = 1$. Этот метод так и называется – метод вынесения общего множителя за скобки.

5. $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$ так как $4^{2x} = \left(4^x\right)^2$, то уравнение $2 \cdot \left(4^x\right)^2 - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$ представляет квадратное уравнение относительно 4^x. Пусть $4^x = t$, тогд $2 \cdot t^2 - 17t + 8 = 0$ решаем квадратное уравнение относительно переменной *t*.

$Д = 17^2 - 4 \cdot 8 \cdot 2 = 289 - 64 = 225$

$t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{4}; \quad t_1 = 8; \quad t_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Подставим значения *t* в равенство $4^x = t$

$4^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} = 2^3; \quad 2x = 3; \quad x = \frac{3}{2} = 1,5$

$4^x = \frac{1}{2}; \quad 2^{2x} = 2^{-1}; \quad 2x = -1; \quad x = -\frac{1}{2}$

Ответ: $x = 1,5; \quad x = -0,5$. При решении уравнения применим первоначально сведения к квадратному уравнению. В следующих примерах постараемся самостоятельно определять метод решения и затем с подсказкой преподавателя выполнять решение этого уравнения.

1.4. $\sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}$; приведем к одинаковому основанию «3»

$$3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{3}{2}$$

$x = -3$. Ответ: $x = -3$

1.9. $2^x \cdot 5^x = 1000$; $10^x = 10^3$; $x = 3$. Ответ: $x = 3$

1.19. $0,096^{4-2x} = 5,17$

свести к одинаковому основанию нельзя, прологарифмируем обе части уравнения:

$$(4-2x)\cdot \ln 0,096 = \ln 5,17; \quad 4-2x = \frac{\ln 5,17}{\ln 0,096};$$

$$4-2x = -0,0408; \quad -2x = -4-0,0408; \quad -2x = -4,0408$$

$$x = 2,0204$$

$x \approx 2,02$ Ответ: $x \approx 2,02$

1.38.

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2}$$

$$3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 = 7^x + 7^x \cdot 7 + 7^x \cdot 7^2$$

$$3^x(1+3+9) = 7^x(1+7+49)$$

$3^x \cdot 13 = 7^x \cdot 57; 3^x \neq 0$ и $7^x \neq 0$ можно разделить обе части уравнения на 3^x или 7^x, получим:

$$\frac{3^x}{7^x}=\frac{57}{13} \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^x=\frac{57}{13}$$

$$x\cdot\lg\frac{3}{7}=\lg\frac{57}{13}$$

$$x=\frac{\lg\frac{57}{13}}{\lg\frac{3}{7}}=-1,74.$$ Ответ: $x=-1,74$

<u>1.45.</u>

$$4+2^x=2^{2x-1} \qquad 4+2^x=2^{2x}\cdot 2^{-1} \qquad 2^{2x}\cdot\frac{1}{2}-2^x-4=0$$

$$\left(2^x\right)^2\cdot\frac{1}{2}-2^x-4=0$$

Пусть $2^x=t$, тогда $\frac{1}{2}t^2-t-4=0$

$t^2-2t-8=0 \qquad Д=4+4\cdot 8=36$

$t_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2}; \qquad t_1=4 \quad t_2=-2$

$2^x=4; \quad 2^x=2^2; \qquad \underline{x=2} \qquad\qquad 2^x=-2$ – уравнение не имеет решения, т.к. $2^x>0$ всегда. Ответ: $x=2$

Показательные неравенства.

<u>Определение</u>. Неравенства, содержащие переменную в показателе степени, называются показательными.

При решении показательных неравенств используются свойства показательной функции, свойства степени. Рассмотрим простейшие методы решения показательных неравенств.

а) $5^{x-1} > \left(\frac{1}{25}\right)^{4-x}$

приведём обе части неравенства к одинаковым основаниям. Учитывая, что $\frac{1}{25} = 5^{-2}$, то $5^{x-1} > \left(5^{-2}\right)^{4-x} \Rightarrow 5^{x-1} > 5^{-2(4-x)}$, т.к. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ (свойство степени). Основание 5 > 1 $\Rightarrow$ функция возрастающая и поэтому $x-1 > -2(4-x)$.

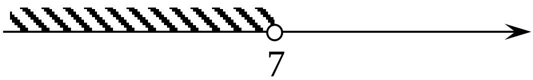
Решаем неравенство первой степени.

$x-1 > -8+2x$

$x-2x > -8+1$

$-x > -7$

$x < 7$ $\qquad x \in (-\infty; 7)$

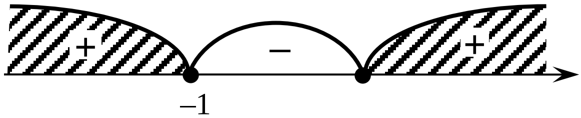


б) $0,7^{x^2-1} \le 1$. Приведём к одинаковым основаниям. Зная, что $a^0 = 1$, представим правую часть неравенства, как $0,7^0$ и тогда

$0,7^{x^2-1} \le 0,7^0$

так как 0,7 < 1, то функция убывающая и значит $x^2-1 \ge 0$. Это квадратное неравенство, которое решается методом интервалов.

$$(x-1)(x+1) \ge 0$$

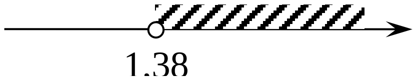


$x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

в) $5^x > 9,2$

Привести к одинаковым основаниям не представляется возможным. Используем метод логарифмирования.

$x \log_5 5 > \log_5 9,2$, т.к. $\log_5 5 = 1$, то



$x > \log_5 9,2$

$x > 1,38$

$x \in (1,38; +\infty)$

Можно логарифмировать обе части неравенства по любому основанию. Например по основанию 10.

$x \lg 5 > \lg 9,2$

$x > \dfrac{\lg 9,2}{\lg 5}$, т.к. $\lg 5 > 0$ и $x > 1,38$. Ответ тот же.

г) $0,24^x \le 15,7$ Прологарифмируем по основанию «е»

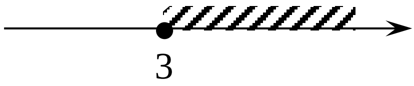
$x \cdot \ln 0,24 \le \ln 15,7$, т.к. $\ln 0,24 < 0$,

то $x \ge \dfrac{\ln 15,7}{\ln 0,24}$ $\quad x \ge -1,93$

$x \in [-1,93; +\infty)$

д) $3^{x+1} - 3^x \le 54$ Используя свойство степени, имеем $3^x \cdot 3^1 - 3^x \le 54$; вынесем 3^x за скобки

$3^x(3-1)\le 54 \Rightarrow 3^x\cdot 2\le 54 \Rightarrow 3^x\le 27 \Rightarrow 3^x\le 3^3$, т.к. 3 > 1, то $x\le 3$



$x\in[3;+\infty)$

Затем решаются неравенства

2.3 $9^{0,5x^2-3}<27$, приведем к основанию 3

$3^{2\left(0,5x^2-3\right)}<3^3$, т.к. 3 > 1, то

$2\left(0,5x^2-3\right)<3$

$x^2-6<3$

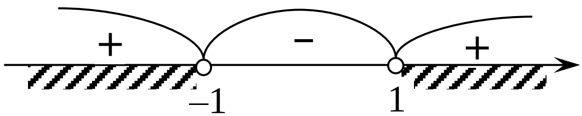
$x^2-9<0$

$(x-3)(x+3)<0$ $x\in(-3;3)$

2.9 $2^{\frac{x-1}{x+1}}>1$

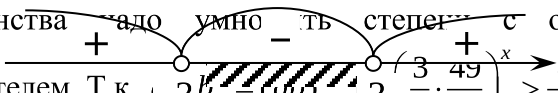
$2^{\frac{x-1}{x+1}}>2^0$, т.к. 2 > 1, то

$\frac{x-1}{x+1}>0$



$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

2.11 $\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{49}{6}\right)^{x-1}>\frac{4}{49}$. В левой части неравенства надо умножить степени с одинаковым показателем. Т.к. $a^n b^n=(ab)^n$, то $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{49}{6}\right)^x>\frac{4}{49}$



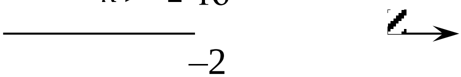
Сокращаем дроби и получим

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \frac{4}{49}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{7}\right)^2$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$$, т.к. $\frac{7}{2} > 1$,

$x > -2$ то



$x \in (-2; +\infty)$

<u>2.12</u>

$$0,3^{3x-7} < \left(\frac{100}{9}\right)^{-1}$$

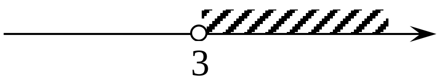
$$0,3^{3x-7} < \left(\frac{10}{3}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{3x-7} < \left(\frac{3}{10}\right)^2$$, т.к. $\frac{3}{10} < 1$, то

$3x - 7 > 2$

$3x > 9$

$x > 3$



$x \in (3; +\infty)$

Самостоятельно:

1) $0,4^{x-2} \leq \frac{125}{8}$

2) $2,5^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 1$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \frac{1}{32}$

4) $7^x < 12,7$

3. Логарифмические неравенства:

Неравенства, содержащие переменную под знаком логарифма, называются логарифмическими. При решении неравенств используются свойства логарифмов, логарифмической функции.

Рассмотрим методы решения на примерах.

Лекция 21. Логарифмы, их свойства. Логарифмическое тождество, формула перехода.

Итак, мы знаем, что $a^n = b$, а если n – неизвестно? Как можно найти показатель степени из равенства: $2^x = 14$? Никакие известные нам действия не помогут. Вот поэтому вводится новое понятие, понятие логарифма.

Определение: Логарифмом числа называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число: $\log_a b = c;\;\; a > 0$ согласно определения имеем $a^c = b$, и тогда $a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.

$5^{\log_5 2} = 2; \qquad 0{,}2^{\log_{0,2} 3} = 3$.

Логарифмы обладают свойствами:

1.1. Логарифмы отрицательных чисел на существуют (положительное число в любой степени есть число положительное).

1.2. Логарифм единицы при любом основании равен нулю, $\log_a 1 = 0$, т.к $a^0 = 1$.

1.3. Логарифм самого основания равен 1, то есть $\log_a a = 1$, т.к. $a^1 = a$

1.4. Логарифм произведения при любом основании равен сумме логарифмов сомножителей при этом же основании.

$$\log_a\left(N_1 \cdot N_2\right) = \log_a N_1 + \log_a N_2$$

Покажем, что это так:

Пусть $\log_a N_1 = n_1$ и $\log_a N_2 = n_2$; по определению логарифма имеем $N_1 = a^{n_1}$ и $N_2 = a^{n_2}$

$N_1 \cdot N_2 = a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1+n_2}$; отсюда $n_1 + n_2 = \log_a\left(N_1 \cdot N_2\right)$ и тогда

$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$, что и требовалось доказать!

1.5. Логарифм дроби при любом основании равен разности логарифма числителя и логарифма знаменателя при этом же основании

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$$

(доказательство аналогично свойству 4, докажите самостоятельно. Можно воспользоваться подсказкой учебника)

1.6. Логарифмом степени при любом основании равен произведению показателя степени на логарифм основания степени. $\log_a N^m = m \cdot \log_a N$

Логарифм числа с основанием 10 называется десятичным и имеет особую запись.

$$\log_{10} b = \lg b$$

Логарифм числа с снованием e называется натуральным и имеет также особую запись $\log_e b = \ln b$. $e \approx 2,718$ число Непера.

И десятичный, и натуральный логарифмы любого числа можно находить при помощи МК

$\lg 17,4 = 1,2405$ $\ln 0,384 = -0,9571$

17,4 $\boxed{\log}$ 0,384 $\boxed{\ln}$

А если надо вычислить логарифм числа при любом основании? Что делать? Надо перейти к основанию 10 или e.

По определению логарифма $a^{\log_a N} = N$, используя свойство логарифмов (смотрите свойство 6) имеем $\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$

и тогда $\boxed{\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}}$ и называется формулой перехода от одной системы логарифмов к другой. Эта формула часто применяется при решении логарифмических уравнений и неравенств $\log_a N = \dfrac{\lg N}{\lg a}; \log_a N = \dfrac{\ln N}{\ln a}$, что даёт возможность вычисления выполнять при помощи МК.

Решить: $\log_{1,24} 618,7 = \dfrac{\lg 618,7}{\lg 1,24} = 29,88$

$$\log_{1,24} 618,7 = \frac{\ln 618,7}{\ln 1,24} = 29,88$$

Как видно результаты равные поэтому можно делать переход к любому основанию.

Проверьте результат: $\log_{1,2} 0,784 = -1,3347$ $\log_{0,34} 11,78$

Замечания: 1) $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$, т.е. 2) $\boxed{\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b}$ 3) $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

Используя определение логарифма, можно находить переменную.

Рассмотрим на конкретных примерах

$\log_{\sqrt{3}} x = -2$ по определению логарифма $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = x \Rightarrow x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

$\log_x \frac{1}{27} = -3$ по определению логарифма

$$x^{-3} = \frac{1}{27} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^3} = \frac{1}{27}; \quad x^3 = 27; \quad x = 3$$

$\log_{\sqrt[3]{2}} 64 = x$ по определению логарифма

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^x = 64 \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{1}{3}x} = 64 \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{1}{3}x} = 2^6; \quad \frac{1}{3}x = 6; \quad x = 18$$

$$\log_{\sqrt{x}} 8 = 3; \quad \left(\sqrt{x}\right)^3 = 8; \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 8; \quad x^{\frac{3}{2}} = 8; \quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}; \quad x = 2^2$$

$$\log_{\frac{2}{3}} 2,25 = x; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2\frac{1}{4}; \quad \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x =$$

$$\log_{5\sqrt[3]{5}} x = -0,8; \quad \left(5\sqrt[3]{5}\right)^{-0,8} = x; \quad x = \left(5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} =$$

$$\log_{0,6} 4\frac{17}{27} = x; \quad 0,6^x = 4\frac{17}{17}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{125}{27}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5^3}{3^3}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x =$$

$$\log_4 36 + \log_2 10 - 2\log_2 \sqrt{15} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 5} = \log_{2^2} 6^2 + \log_2 10 - 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 15 + 2^{2 \cdot \frac{1}{2}\log}$$

$$= \frac{2}{2}\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 15 + 2^{\log_2 5} = \log_2 \frac{6 \cdot 10}{15} + 5 = \log_2 4 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$0,04^{1+\log_5 0,02} - \sqrt{2}^{\log_2 25} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1+\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \frac{1}{25} \cdot 5^{-2\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^{-2} - 25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{25} \cdot 2500 - 5 = 100 - 5 = 95$$

$$49^{1-\log_7 2}-5^{-\log_5 4}=\frac{49}{49^{\log_7 2}}-4^{-1}=\frac{49}{7^{2\log_7 2}}-\frac{1}{4}=\frac{49}{4}-\frac{1}{4}=\frac{48}{4}=12$$

Лекция 22. Решение логарифмических уравнений и неравенств

Определение: Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма, называются логарифмическими. Рассмотрим методы решения логарифмических уравнений на примерах.

Пособие стр. 31 – 32

1.4 $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+6\right)=-2$

По определению логарифма можно записать,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=x^2+6$$

$$x^2+6=16$$

$$x^2+6-16=0$$

$$x^2-10=0$$

$x=\pm\sqrt{10}$ надо помнить, что логарифма отрицательных чисел не существует. Так как $x^2+6>0$ всегда, то полученные значения $x=\pm\sqrt{10}$ оба являются корнями уравнения. Ответ: $\pm\sqrt{10}$

1.5 По определению логарифма, можно решить уравнение:

$\log_5\left(6-5^x\right)=1-x$; отсюда $5^{1-x}=6-5^x$

получили показательное уравнение $5\cdot5^{-x}=6-5^x$, решим его: $\frac{5}{5^x}=6-5^x$

приведём к общему знаменателю $5^x\neq0 \Rightarrow \quad 5=\left(6-5^x\right)\cdot5^x$ $5=6\cdot5^x-\left(5^x\right)^2$

Обозначим $5^x=t$, получим

$$5=6t-t^2; \qquad t^2-6t+5=0$$

$$D=36-20=16$$

$t_{1,2}=\dfrac{6\pm4}{2}$; $t_1=5$; $t_2=1$ и тогда $5^x=5 \Rightarrow x=1$; $5^x=1$; $5^x=5^0$; $x=0$.

Ответ: $x=1 \quad x=0$

$$.7. \qquad \lg(3x-2)+\lg 2=2-\lg(x+1)$$

Используя определение логарифма, можно число 2 записать $2=\lg100$ и тогда имеем равносильное уравнение $\lg(3x-2)+\lg 2=\lg100-\lg(x+1)$. Применим свойства логарифмов и тогда

$$\lg\left((3x-2)\cdot 2\right)=\lg\frac{100}{x+1}$$

отсюда следует, что

$$2(3x-2)=\frac{100}{x+1}$$

решаем уравнение при $x\neq-1$

$$2(3x-2)(x+1)=100$$

$$(3x-2)(x+1)=50$$

$$3x^2-2x+3x-2=50$$

$$3x^2+x-52=0$$

$$D=1+4\cdot3\cdot52=625$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm25}{6};\ x_1=4;\ x_2=-\frac{26}{6}=-\frac{13}{3}$$

потенцирование выражений может привести к появлению посторонних корней, поэтому полученные корни нужно проверить.

Проверка:

$x = 4$

$\lg 10 + \lg 2 = \lg 100 - \lg 5$

$10 \cdot 2 = \dfrac{100}{5}$

$20 = 20$ верно.

$x = -\dfrac{13}{3}$ – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

Ответ: $x = 4$.

Можно указать другой метод нахождения корней уравнения, основанный на предварительном нахождении всех значений *x*, для которых имеет смысл уравнение, то есть указать область допустимых значений переменной (ОДЗ).

По свойству логарифмов:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 2 \\ x > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \dfrac{2}{3} \\ x > -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{2}{3}$$

$$x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

и тогда можно сказать, что ОДЗ удовлетворяет корень $x = 4$. Проверив этот корень, получаем верное равенство.

Замечание. Пользоваться указанием ОДЗ удобно для более простых выражений, стоящих под знаком логарифма.

При решении уравнения применяется метод решения, известный как метод потенцирования.

.8.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+2=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

т.к. $2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

Используя свойства логарифмов имеем $\log_{\frac{1}{2}}\left((2x-3)\cdot\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^{-1}$

и тогда

$$\frac{1}{4}(2x-3)=\frac{1}{x+2},\qquad x\neq-2$$

$$\frac{1}{4}(2x-3)(x+2)=1 \qquad\qquad (2x-3)(x+2)=4$$

$$2x^2-3x+4x-6-4=0 \qquad\qquad 2x^2+x-10=0$$

$$D=1+80=81$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm9}{4};\quad x_1=2;\ x_2=-2,5$$

Проверка:

$x=2$

$$\log_{\frac{1}{2}}1+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}4$$

$$1\cdot\frac{1}{4}=4^{-1}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$ верно.

x = –2,5 – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

Ответ: $x=2$

$x^{2\lg x-1,5}=\sqrt{10}$

данное уравнение можно назвать и показательным и логарифмическим.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, получаем равносильные ему логарифмическое уравнение

$$(2\lg x-1,5)\cdot\lg x=\frac{1}{2}\lg 10$$

$$2\lg^2 x-1,5\lg x=\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$2\lg^2 x-1,5\lg x-\frac{1}{2}=0$$

$$4\lg^2 x-3\lg x-1=0$$

Получаем квадратное уравнение относительно $\lg x$

Пусть $\lg x=t$, тогда $4t^2-3t-1=0$

$D=9+16=25;$ $\quad t_{1,2}=\frac{3\pm 5}{8}$

$$t_1=1;\quad t_2=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

И тогда $\lg x=1 \;\Rightarrow\; x=10$

если $\lg x=-\frac{1}{4}$, то $x=10^{-\frac{1}{4}}$ $x=10^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$

Ответ: 10; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

$2\log_x 25-3\log_{25} x=1$

Приведём логарифмы к одинаковому основанию. Известно, что $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ и тогда

$$2 \cdot \frac{1}{\log_{25} x} - 3\log_{25} x = 1 \qquad \underline{\text{ОДЗ}}:\ x > 0 \quad x \neq 1$$

$$2 - 3\left(\log_{25} x\right)^2 = \log_{25} x$$

$$3\log_{25}^2 x + \log_{25} x - 2 = 0$$

И тогда $\log_{25} x = -1 \qquad x = 25^{-1} = \dfrac{1}{25}$;

Если $\log_{25} x = \dfrac{2}{3}$, то $x = 25^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} = 5^{1\frac{1}{3}} = 5\sqrt[3]{5}$

Ответ: $\dfrac{1}{25}$; $\quad 5\sqrt[3]{5}$

Пусть $\log_{25} x = t, \qquad 3t^2 + t - 2 = 0$

$D = 1 + 24 = 25; \qquad t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{6}$;

$t_1 = -1; \qquad t_2 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$$\log_2\left(2 - x\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(x - 1\right) = \log_{\sqrt{2}} 3$$

Приведём логарифмы к одинаковому основанию. Так как $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$, то

$\log_2(2-x)+\log_{2^{-1}}(x-1)=\log_{2^{\frac{1}{2}}}3$ <u>ОДЗ</u>:

$\log_2(2-x)-\log_2(x-1)=2\log_2 3$ $\begin{cases}2-x>0\\x-1>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<2\\x>1\end{cases}$ $x\in(1;2)$

Используем свойства логарифма и получим

$\frac{2-x}{x-1}=3^2$ $x\neq 1$

$2-x=9(x-1)$

$2-x=9x-9;$ $2-x-9x+9=0$

$-10x=-11;$ $10x=-11$

$x=1{,}1$

Как видно x = 1,3 не удовлетворяет ОДЗ и следовательно проверке подлежит корень x = 7,7

<u>Самостоятельно</u>:

1)

$\log_2(2x-6)=4-\log_2(x-6)$ <u>ОДЗ</u>:

$2x-6=\frac{16}{x-6}$ $x\neq 6$ $\begin{cases}2x-6>0\\x-6>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>3\\x>6\end{cases}$

$2x^2-6x-12x+36=16$

$2x^2-18x+20=0$ $x\in(6;+\infty)$

$x^2-9x+10=0$ $x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{41}}{2};$ $x_1=1{,}3;$ $x_2=7{,}7$

<u>Проверка</u>:

$x = 7,7$

$\log_2 9,4 = \log_2 16 - \log_2 1,7$

$9,4 = \dfrac{16}{1,7}$

$9,4 = 9,4$ верно. Ответ: $x = 7,7$

2) $\log_4 x + \log_x 4 = 2,5$

$\log_4 x + \dfrac{1}{\log_4 x} = 2,5$

$\log_4^2 x - 2,5\log_4 x + 1 = 0$

$\log_4 x = y \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2,5y + 1 = 0$

$D = 6,25 - 4 = 2,25$

$y_{1,2} = \dfrac{2,5 \pm 1,5}{2}; \qquad y_1 = 2; \; y_2 = \dfrac{1}{2}$

$\log_4 x = 2 \qquad \log_4 x = \dfrac{1}{2}$

$\underline{x = 16} \qquad x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$\underline{x = 2}$

3) $(\log_3 x)^2 + 4\log_{\frac{1}{3}} x + 3 = 0$

$\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$

$\log_3 x = t; \quad t^2 - 4t + 3 = 0 \qquad \log_3 x = 3 \qquad \log_3 x = 1$

$t_1 = 3; \quad t_2 \quad \underline{x = 27} \qquad \underline{x = 3}$

Ответ: $x = 27; \; x = 3$

4) $x^{\lg x} = 10$

$\lg x \cdot \lg x = \lg 10$

$\lg^2 x = 1$

$\lg x = \pm 1;$ $\qquad \lg x = 1;$ $\qquad \lg x = -1$

$\qquad x = 10$ $\qquad x = 10^{-1} = 0{,}1$

Ответ: $10;\quad 0{,}1$.

Лекция 23. Аксиомы и их простейшие следствия

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В стереометрии , так же как и в планиметрии , свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем, При этом отправными являются свойства основных геометрических фигур, выражаемые аксиомами. Основными фигурами в стереометрии являются точка , прямая и плоскость.

Группа аксиом состоит из трех аксиом.

C_1 Какова бы ни была плоскость, существуют точки принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

C_2 Если две различные плоскости имеют общую точку , то они пересекаются по прямой , проходящей через эту точку.

C_3 Если две различные прямые имеют общую точку , то через них можно провести плоскость , и притом только одну.

Существует группа теорем, которые являются следствиями из аксиом стереометрии.

ТЕОРЕМА 1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и при том только одну.

ТЕОРЕМА 2. Если две точки прямой принадлежат плоскости , то вся прямая принадлежит этой плоскости .

ТЕОРЕМА 3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость , и притом только одну .

При изучении данного раздела вы должны знать аксиомы стереометрии и уметь доказывать теоремы (следствия из аксиом стереометрии).

Лекция 24. Параллельность прямых и плоскостей.

В пространстве существует несколько видов расположения прямых : пересекающие , параллельные , скрещивающиеся.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ : две прямые в пространстве называются параллельными , если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ : прямые , которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости , называются скрещивающимися.

Теорема 16.1 доказывает свойства параллельности прямых :

Через точку вне данной прямой можно провести прямую , параллельную этой прямой , и притом одну.

Так же существует признак параллельности прямых .

ТЕОРЕМА 16.2 Две прямые , параллельные третьей прямой , параллельны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ : прямая и плоскость называются параллельными , если они не пересекаются.

А теорема 16.3 является признаком параллельности прямой и плоскости.

Если прямая, не принадлежащая плоскости , параллельна какой–нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ : две плоскости называются параллельными , если они не пересекаются.

ТЕОРЕМА 16.4 Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости , то эти плоскости параллельны.

На ряду с этим вы должны уметь доказывать теоремы о существовании плоскости , параллельной данной

плоскости.
ТЕОРЕМА 16.5 Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость , параллельную данной , и притом только одну.
Нужно так же отметить о существовании свойств параллельных плоскостей это следующие утверждения :
Если две параллельные плоскости пересекаются третьей , то прямые пересечения параллельны.
Отрезки параллельных прямых , заключенные между двумя параллельными плоскостями , равны. Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками.

Лекция 25. Тетраэдр. Параллелепипед.

Цели:

Тетраэдр
Поверхность, составленная из четырёх треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется тетраэдром и обозначается DABC. Тетраэдр имеет 4 грани, 6 рёбер и 4 вершины.
Параллелепипед
Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов ABCD и A1B1C1D1 и четырёх параллелограммов ABB1A1, BCC1B1, CDD1C1 и DAA1D1, называется параллелепипедом и обозначается ABCDA1B1C1D1.
D1 C1 A1 B1 D C A B
Параллелепипед
Тетраэдр
Многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани тетраэдра, называется сечением тетраэдра.
Параллелепипед
Многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани параллелепипеда, называется сечением параллелепипеда.
Параллелепипед
Свойства:10. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны. (Две грани

параллелепипеда называются параллельными, если их плоскости параллельны.)20. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.30. Th Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.40. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений. V = а * в * с

Презентация

Макеты фигур

Фронтальный опрос

Лекция 26. Задачи на построение сечений.

Цели:

1. **Сечения.** Секущая плоскость тетраэдра (параллелепипеда) - любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра (параллелепипеда). Секущей плоскостью тетраэдра называется любая плоскость по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра. Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра. Сечением тетраэдра может быть треугольник и четырёхугольник.
2. Обязательные условия для задач на построение сечений. 1.Отрезок соединяющий две точки сечения, лежит в одной плоскости (принадлежит одной грани). 2.Все дополнительные точки лежат на линии пересечения плоскостей. 3.Если строим плоскость параллельную данной, то секущая плоскость пересекает плоскость по прямым параллельным данной плоскости.

Задача 1. Точки M, N и P лежат соответственно на рёбрах AB, BD и CD тетраэдра ABCD. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP. (рис. 30)

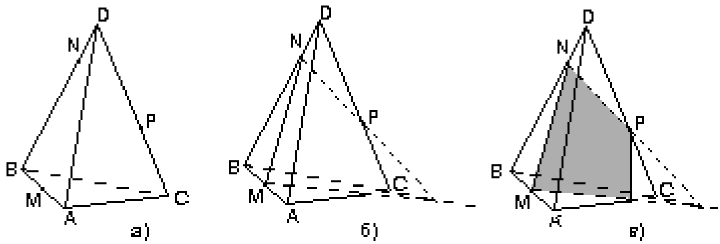


рис. 30

Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов ABCD и A1B1C1D1 и четырёх параллелограммов ABB1A1, BCC1B1, CDD1C1, DAA1D1 называется параллелепипедом. Обозначается: ABCDA1B1C1D1. A D C B A1 D1 C1 B1

Слайд 14

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются гранями, их стороны – рёбрами, а вершины параллелограммов – вершинами параллелепипеда. Параллелепипед имеет 6 граней, 12 рёбер, 8 вершин.

Слайд 15

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих рёбер – противоположными. Две вершины, не принадлежащие одной грани называются противоположными. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда. Две противоположные грани называют основаниями, а остальные грани – боковыми гранями параллелепипеда.

Слайд 16

Свойства параллелепипеда. 1.Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны. 1.1 Две грани параллелепипеда называются параллельными, если их плоскости параллельны. 2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Слайд 17

1.Назовите грани параллелепипеда 2.Назовите рёбра 3.Назовите смежные и противоположные грани 4.Назовите основание и боковые грани параллелепипеда A D C B A1 D1 C1 B1

Слайд 18

Задачи на построение сечения в параллелепипеде. Секущей плоскостью параллелепипеда называется любая плоскость по обе стороны от которой имеются точки данного параллелепипеда. Секущая плоскость пересекает грани параллелепипеда по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением параллелепипеда. Сечением параллелепипеда могут быть треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники.

Задача 2. На рёбрах параллелепипеда даны три точки А, В и С. Построить сечение параллелепипеда плоскостью АВС. (рис. 31)

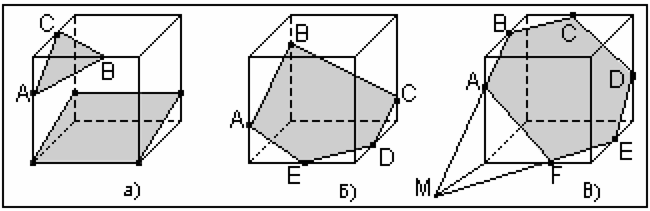


рис. 31

Презентация большая

Лекция 27. Перпендикулярность прямых и плоскостей.

Цели:

Математический диктант

Презентация

Лекция 28. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей. Прямоугольный параллелепипед.

Цели:

Презентация

Лекция 29. Понятие многогранника. Призма. Пирамида

Цели:

Презентация

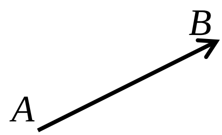
Лекция 30. Правильные многогранники. Симметрия в пространстве.

Цели:

Лекция 31. Векторы.

Определение. **Отрезок** AB называется **направленным**, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая концом.

Если A – начало, а B – конец, то этот отрезок обозначается $\overrightarrow{AB}$, а на чертеже его конец обозначается стрелочкой.



Определение. Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Определение. Направленные **отрезки** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются **сонаправленными** (**противоположно_направленными**), если лучи AB и A_1B_1 сонаправлены (противоположно направлены). Пишем $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{A_1B_1}$ ($\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{A_1B_1}$).

Определение. Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются **эквивалентными** или **равными**, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Пишем $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{A_1B_1}$. Очевидно, $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{A_1B_1}$ $\Leftrightarrow$ они совмещаются параллельным переносом.

Определение. Каждый направленный отрезок задает вектор, при этом, эквивалентные отрезки задают один и тот же вектор. Направление всех отрезков данного класса называется *направлением вектора*, а их длина – *длиной вектора*. Длина вектора $\vec{\mathbf{a}}$ обозначается $|\vec{\mathbf{a}}|$.

Если вектор $\vec{\mathbf{a}}$ задается направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, то пишем $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, и говорим, что $\overrightarrow{AB}$ есть *вектор* $\vec{\mathbf{a}}$, *отложенный из точки* A. На чертеже вектор изображается любым из задающих его направленных отрезков.

Определение. Вектор, длина ко-торого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается $\vec{\mathbf{o}}$. Вектор, длина которого равна 1, называется единичным.

Определение. Векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если задающие их направленные отрезки сонаправлены (противоположно направлены). Пишем $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$ ($\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$). Два вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются *коллинеарными*. Пишем $\vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}}$. Считается, что у $\vec{\mathbf{o}}$ направление неопределено и он коллинеарен любому вектору.

Три и более векторов, параллельных одной плоскости называются *компланарными.*

Теорема $\mathbf{1'}$**.** *(второй признак коллинеарности векторов)***.**

Для того, чтобы два ненулевых вектора на плоскости или в пространстве были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны ($\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3) || \vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$).

Лекция 32. Метод координат в пространстве.

Деление отрезка пополам.

Пусть нам известны координаты концов отрезка: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти координаты точки $C(x, y, z)$, которая делит этот отрезок в отношении $\lambda_1:\lambda_2$. Самостоятельно выведите из равенства (6), что

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \; y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \; z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Эти формулы также будут доказаны на практических занятиях. В частности, если C делит отрезок AB пополам, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Длина вектора.

Расстояние между точками.

Скалярное произведение двух векторов.

Пусть в пространстве задана декартова СК, **i**, **j**, **k** – базисные орты. Пусть $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$. В соответствии со свойствами скалярного произведения мы можем при скалярном умножении векторов раскрывать скобки, как при умножении чисел. Поэтому

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + a_1b_2\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + a_1b_3\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} +$$

$$+ a_2b_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + a_2b_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + a_2b_3\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + a_3b_2\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + a_3b_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Нам известно, что $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные и взаимно ортогональные $\Rightarrow$ $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$, и это же верно для произведений в другом порядке. Поэтому

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \Rightarrow \vec{\mathbf{a}}^{\,2} = \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\Rightarrow |\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}^{\,2}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\Rightarrow \cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

сфера радиуса R с центром в точке $O'(a, b, c)$ задается уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Лекция 34. Объемы и площади поверхностей тел

Наклонная призма

Объем наклонной призмы

$$V=S_{пс}a,$$

где $S_{пс}$ - площадь перпендикулярного сечения наклонной призмы, a - боковое ребро.

Площадь боковой поверхности наклонной призмы

$$S_б=P_{пс}a,$$

где $P_{пс}$ - периметр перпендикулярного сечения наклонной призмы, a - боковое ребро.

Площадь полной поверхности наклонной призмы

$$S_п=S_б+2S_{осн},$$

где $S_б$, - площадь боковой поверхности наклонной призмы, $S_{осн}$ - площадь её основания.

Прямая призма

Объем прямой призмы

$$V=S_{осн}a,$$

где $S_{осн}$ - площадь основания прямой призмы, a - боковое ребро.

Площадь боковой поверхности прямой призмы

$$S_б=P_{осн}a,$$

где $P_{осн}$ - периметр основания прямой призмы, a - боковое ребро.

Площадь полной поверхности прямой призмы

$$S_п=S_б+2S_{осн},$$

где $S_б$, - площадь боковой поверхности прямой призмы, $S_{осн}$ - площадь основания.

Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V=abc,$$

где a,b,c - измерения прямоугольного параллелепипеда.

Площадь боковой поверхности параллелепипеда

$$S_б=2c(a+b),$$

где a, b - стороны основания, c - боковое ребро прямоугольного параллелепипеда.

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда

$$S_п=2(ab+bc+ac),$$

где a,b,c - измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб

$$V=a^3,\ S_б=4a^2,\ S_п=6a^2,$$

где a - ребро куба.

Пирамида

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}H$$

где $S_{осн}$ - площадь основания, H - высота.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей её боковых граней.

Площадь полной поверхности пирамиды

$$S_п=S_б+2S_{осн},$$

где $S_б$ - площадь боковой поверхности прямой пирамиды, $S_{осн}$ - площадь основания.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

$$S_б = \frac{1}{2} P_{осн} l$$

где $P_{осн}$ - периметр основания правильной пирамиды, l - её апофема.

Усеченная пирамида

Объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$$

где S_1 , S_2 - площади оснований усеченной пирамиды, H - её высота.

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней.

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды

$$\boldsymbol{S_п = S_б + S_1 + S_2}\ ,$$

где $S_б$ - площадь боковой поверхности пирамиды, S_1 , S_2 - площади оснований.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

$$S_б = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$$

где P_1 , P_2 - периметры оснований, а l - ее апофема.

Цилиндр

Объем цилиндра

$$\boldsymbol{V=p\,R^2 H}\,,$$

где R - радиус основания цилиндра, а H - его высота.

Площадь боковой поверхности цилиндра

$$\boldsymbol{S_б=2p\,R\,H}\,,$$

где R - радиус основания цилиндра, а H - его высота.

Площадь полной поверхности цилиндра

$$\boldsymbol{S_n=2p\,R\,H + 2p\,R^2},$$

где R - радиус основания цилиндра, а H - его высота.

Конус

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

где R - радиус основания конуса, а H - его высота.

Площадь боковой поверхности конуса.

$$S_б = 2p\ R\ L\ ,$$

где R - радиус основания конуса, а L - его образующая.

Площадь полной поверхности конуса

$$S_n = 2p\ R\ (R+L),$$

где R - радиус основания конуса, а L - его образующая.

Усеченный конус

Объем усеченного конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

где *R, r* - радиусы оснований усеченного конуса, *H* - его высота.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$$S_{б}=p\ L\ (R+r),$$

где *R, r* - радиусы оснований усеченного конуса, *L* - его образующая.

Площадь полной поверхности усеченного конуса

$$S_{п}=p\ L\ (R+r)+p\ R^2+p\ r^2,$$

где *R, r* - радиусы оснований усеченного конуса, *L* - его образующая.

Сфера и шар

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

где *R* - радиус шара.

Площадь сферы (площадь поверхности шара)

$$S=4p\, R^2,$$

где R - радиус сферы.

Объем шарового сегмента

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H \right)$$

где H - высота шарового сегмента, R - радиус шара.

Объем шарового сектора

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H$$

где H - высота соответствующего шарового сектора, R - радиус шара.