МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

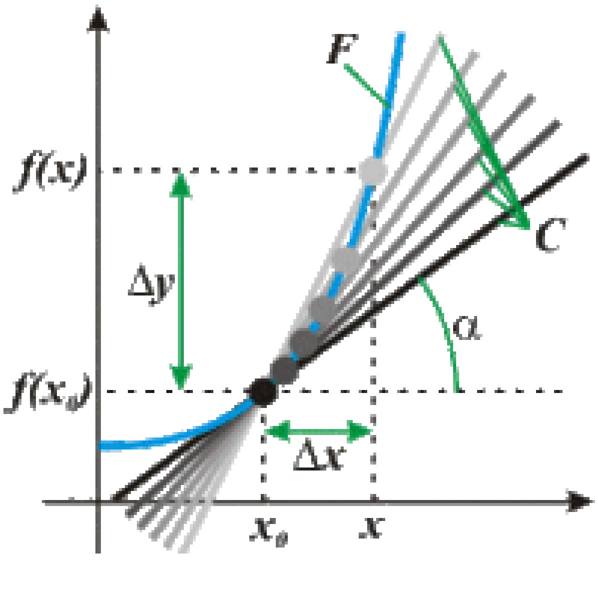
Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Высшая математика»

для бакалавров очной формы обучения направлений подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств
20.03.02 Природообустройство и водопользование
21.03.02 Землеустройство и кадастры
35.03.06 Агроинженерия



Брянская область 2019

УДК 517.23 (076)
ББК 22.161.1
Р 19

Ракул, Е. А. Производная функции: учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» для бакалавров очной формы обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 20.03.02 Природообустройство и водопользование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 35.03.06 Агроинженерия / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2019. – 25 с.

Рецензенты:
Панов М.В., к.т.н., доцент кафедры автоматики, физики и математики.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 01.10.2019 г., протокол №1.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ РАБОТ

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров первого курса указанных направлений подготовки, а также может быть использовано студентами других направлений при подготовке к занятиям.

Дифференциальное исчисление применяется для решения широкого круга прикладных задач, к которым сводятся задачи по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники. Данные методические разработки предназначены для того, чтобы помочь студенту выполнить самостоятельную работу, включающую в себя задания по теме «Производная функции»». При выполнении работы студент может обратиться за консультацией к преподавателю.

1. Каждая работа должна быть выполнена в отдельной тетради.
2. На титульном листе должны быть указаны фамилия и инициалы студента, номер варианта, номер группы.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, в строгом соответствии с вариантом. Номер варианта необходимо узнать у преподавателя.
4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания номеров задания, сохраняя номера задач. Условия задач необходимо переписать в тетрадь.
5. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, выполняя, если требуется, необходимые чертежи.
6. В конце работы нужно поставить дату и подпись. Сдать работу на проверку необходимо в срок, указанный преподавателем.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1

Найти производную функции.

1	$y = tg^2 \frac{x}{2} \cdot \sin\frac{3}{x}$	**16**	$y = \sin 3x \cdot \cos^2 \frac{3}{x}$
2	$y = \left(x^3 + 3\right)\ln\left(e^{3x}\right)$	**17**	$y = \left(2 + \sqrt[3]{3x+1}\right)e^{\sqrt{x}}$
3	$y = e^{3x} \cdot arctg^2 \sqrt{x}$	**18**	$y = \left(x^2 - 8\right) \cdot ctg^2 \frac{2}{x-2}$
4	$y = (5x+1) \cdot \sin^3 \frac{1}{x}$	**19**	$y = 2^{x\sqrt{\sin 2x}}$
5	$y = \cos(3x+1) \cdot \ln^2(3x+2)$	**20**	$y = \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \ln^2 \frac{3}{x}$
6	$y = 2^{3x} \ln(arctg 5x)$	**21**	$y = \frac{3}{x+1}\sin\sqrt{\frac{x+1}{3}}$
7	$y = \ln\left(x^2\right) \cdot \sin^2 \sqrt{1-8x}$	**22**	$y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin\left(1 + \ln\sqrt{x}\right)$
8	$y = (5 - \sin 8x) \cdot \cos^2 5x$	**23**	$y = (5x+4)^2 \cdot tg\sqrt{x+5}$
9	$y = 8x^2 \cdot \cos\frac{8}{x-2}$	**24**	$y = ctg^2 \frac{x}{2} \cdot \sin^3 2x$
10	$y = ctg\left(5\sin\frac{x}{5}\right)$	**25**	$y = (3x+6)^3 \cdot \arcsin(3x+6)$
11	$y = x^3 \cdot e^{\sqrt{2+x^3}}$	**26**	$y = \sqrt{\sin 2x} \cdot \cos\frac{2}{x}$
12	$y = \cos^2(5x-3) \cdot 3x^2$	**27**	$y = \sqrt[3]{6x+1} \cdot tg^2 \sqrt{3x}$
13	$y = 5x^3 \cdot e^{-\arcsin 5x}$	**28**	$y = (5x-3)^3 \cdot arctg\sqrt{x}$
14	$y = \sqrt{2x+1}\cos^2 \sqrt{2x+1}$	**29**	$y = tg^3 3x \cdot \sqrt{\cos(3x+7)}$
15	$y = \arcsin\left(\sqrt{x}\sin x\right)$	**30**	$y = \sin^2 \frac{x}{5} \cdot \sqrt{\cos\frac{5}{x}}$

ЗАДАНИЕ 2

Найти производную функции.

1	$y=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\cos^2 3x}$	**16**	$y=\frac{\sqrt[3]{x+3}}{\sin\sqrt[3]{x+3}}$
2	$y=\frac{\sin 7x}{arctg\sqrt{5x}}$	**17**	$y=\frac{arcctg\sqrt{x}}{\sin^2\sqrt{x}}$
3	$y=\frac{ctg^2 2x}{\arcsin\left(e^x\right)}$	**18**	$y=\frac{tg^2\sqrt{x-1}}{\arcsin 2x}$
4	$y=\frac{5^{\sin 5x}}{arctg\sqrt{x}}$	**19**	$y=\frac{arctg\sqrt{x-2}}{\sin(x-2)}$
5	$y=\frac{\arcsin\sqrt{\sin 2x}}{4^{3x}}$	**20**	$y=\frac{2e^{\cos^2 x}}{\ln(\cos x)}$
6	$y=\frac{arctg^2\sqrt{x}}{\cos x^2}$	**21**	$y=\frac{\cos^2 8x}{\arcsin\sqrt{2x}}$
7	$y=\frac{\sin\sqrt{x+3}}{\cos\left(e^{-x}\right)}$	**22**	$y=\frac{arctg\sqrt{e^x}}{tg 2x}$
8	$y=\frac{\ln\sqrt{3x}}{tg(3x+1)}$	**23**	$y=\frac{\left(\cos^2 x-2^x\right)}{\cos 2x}$
9	$y=\frac{3tg^2 3x}{\arcsin\sqrt{x}}$	**24**	$y=\frac{arctg\sqrt{x+1}}{\cos^2 3x}$
10	$y=\frac{(1-\sin 7x)}{\arcsin\sqrt{x+7}}$	**25**	$y=\frac{\sin 3x}{\ln^2(\sin x)}$
11	$y=\frac{\arccos\sqrt{x}}{tg 5x}$	**26**	$y=\frac{ctg\sqrt{3x}}{\arcsin 3x}$
12	$y=\frac{arctg\sqrt{3x}}{\sin^2 x}$	**27**	$y=\frac{tg(2x-3)}{\cos(\ln 2x)}$
13	$y=\frac{e^{\cos 2x}}{\arcsin\sqrt{2x}}$	**28**	$y=\frac{\cos\left(e^{5x}\right)}{\arccos(5x-1)}$
14	$y=\frac{\sqrt[3]{\cos 3x}}{tg^2 3x}$	**29**	$y=\frac{\sin^2 8x}{\sqrt{\arcsin 8x}}$
15	$y=\frac{\sin^2 5x}{\arccos 5x}$	**30**	$y=\frac{e^{tg 4x}}{\sin\sqrt{4x+1}}$

ЗАДАНИЕ 3

Найти производную показательно-степенной функции.

1	$y=(\cos x)^{tg 8x}$	**16**	$y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{2\sqrt{x}}$
2	$y=(\ln 3x)^{\sin^2 5x}$	**17**	$y=(tg 4x)^{\sin 4x}$
3	$y=\left(x^5+2\right)^{\sin\sqrt{x}}$	**18**	$y=\left(1+2x^2\right)^{\arcsin x}$
4	$y=\left(2-x^2\right)^{arctgx}$	**19**	$y=(x+\ln 5x)^{\sqrt{5x}}$
5	$y=(\cos x+1)^{\arcsin\sqrt{x}}$	**20**	$y=(tg 9x)^{tg 9x}$
6	$y=(\sin 6x)^{\ln\sqrt{2x}}$	**21**	$y=\left(x^2+1\right)^{arctgx^2}$
7	$y=(x+\sin 3x)^{\sqrt{6x}}$	**22**	$y=(x+\sin 3x)^{x^3}$
8	$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}$	**23**	$y=(\arccos 5x)^{\sqrt{x}}$
9	$y=(\arcsin 5x)^{\cos\sqrt{5x}}$	**24**	$y=(ctg 2x)^{\sin\sqrt{2x}}$
10	$y=\left(\sqrt{x}+x\right)^{7x+3}$	**25**	$y=(\arccos x)^{\sqrt{\ln x}}$
11	$y=(\sin 2x)^{ctg 2x}$	**26**	$y=\left(ctg\sqrt{x}\right)^{ctgx}$
12	$y=\left(x^4+6\right)^{x^2-7}$	**27**	$y=(3+\cos 3x)^{x^3}$
13	$y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{tg\sqrt{x}}$	**28**	$y=(\sin 7x)^{e^{7x}}$
14	$y=(ctg 3x)^{3x^2}$	**29**	$y=\left(2x^3-1\right)^{\sin 6x}$
15	$y=\left(tg\sqrt{3x}\right)^{\sin 3x}$	**30**	$y=\left(x^2+9\right)^{x^3-6}$

ЗАДАНИЕ 4

Составить уравнение нормали (варианты 1 – 12) или уравнение касательной (варианты 13 – 30) к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

1	$y=\frac{4x-x^2}{4},\quad x_0=2$	**16**	$y=\frac{-2\left(x^8+2\right)}{3\left(x^4+1\right)},\quad x_0=1$
2	$y=x-x^3,\quad x_0=-1$	**17**	$y=\frac{x^5+1}{x^4+1},\quad x_0=1$
3	$y=2x^2+3x-1,\quad x_0=-2$	**18**	$y=\frac{x^{16}+9}{1-5x^2},\quad x_0=1$
4	$y=x^2+8\sqrt{x}-32,\quad x_0=4$	**19**	$y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right),\quad x_0=1$
5	$y=x+\sqrt{x^3},\quad x_0=1$	**20**	$y=\frac{1}{3x+2},\quad x_0=2$
6	$y=\sqrt[3]{x^2}-20,\quad x_0=-8$	**21**	$y=\frac{x}{x^2+1},\quad x_0=-2$
7	$y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},\quad x_0=4$	**22**	$y=\frac{x^2-3x+3}{3},\quad x_0=3$
8	$y=8\sqrt[4]{x}-70,\quad x_0=16$	**23**	$y=\frac{2x}{x^2+1},\quad x_0=1$
9	$y=2x^2-3x+1,\quad x_0=1$	**24**	$y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right),\quad x_0=1$
10	$y=\frac{x^2-3x+6}{x^2},\quad x_0=3$	**25**	$y=\frac{1+3x^2}{3+x^2},\quad x_0=1$
11	$y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\quad x_0=64$	**26**	$y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2,\quad x_0=1$
12	$y=\frac{x^3+2}{x^3-2},\quad x_0=2$	**27**	$y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x},\quad x_0=1$
13	$y=2x^2+3,\quad x_0=-1$	**28**	$y=\frac{1}{3}\left(3x-2x^3\right),\quad x_0=1$
14	$y=\frac{x^{29}+6}{x^4+1},\quad x_0=1$	**29**	$y=\frac{x^2}{10}+3,\quad x_0=2$
15	$y=2x+\frac{1}{x},\quad x_0=1$	**30**	$y=\frac{1}{4}\left(x^2-2x-3\right),\quad x_0=4$

ЗАДАНИЕ 5

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции в точке x.

1	$y=\sqrt[3]{x},\quad x=7{,}76$	**16**	$y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}},\quad x=1{,}016$
2	$y=\sqrt[3]{x^3+7x},\quad x=1{,}012$	**17**	$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad x=4{,}16$
3	$y=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{5-x^2}\right),\quad x=0{,}98$	**18**	$y=\sqrt{4x-3},\quad x=1{,}28$
4	$y=\sqrt[3]{x},\quad x=27{,}54$	**19**	$y=\sqrt{x},\quad x=4{,}012$
5	$y=\arcsin x,\quad x=0{,}081$	**20**	$y=\sqrt[5]{x^2},\quad x=1{,}03$
6	$y=\sqrt[3]{x^2+2x+5},\quad x=0{,}97$	**21**	$y=\sqrt{x^2+5},\quad x=1{,}97$
7	$y=\sqrt[3]{x},\quad x=26{,}46$	**22**	$y=2^{-x},\quad x=0{,}985$
8	$y=\sqrt{x^2+x+3},\quad x=1{,}97$	**23**	$y=\arcsin x,\quad x=0{,}4983$
9	$y=x^{11},\quad x=1{,}021$	**24**	$y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}},\quad x=1{,}48$
10	$y=\sqrt[3]{x},\quad x=1{,}021$	**25**	$y=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}},\quad x=1{,}992$
11	$y=x^{21},\quad x=0{,}998$	**26**	$y=\sqrt[3]{x^2+5x+13},\quad x=2{,}033$
12	$y=\sqrt[4]{x},\quad x=81{,}216$	**27**	$y=\sqrt{3x^2-8},\quad x=6{,}29$
13	$y=2x^2-x+3,\quad x=3{,}111$	**28**	$y=\dfrac{5}{\sqrt{x}},\quad x=1{,}015$
14	$y=x^6,\quad x=2{,}015$	**29**	$y=\sqrt{6x^2+4},\quad x=3{,}96$
15	$y=\sqrt{4x+1},\quad x=2{,}46$	**30**	$y=\ln(tgx),\quad x=47^\circ$

ЗАДАНИЕ 6

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

1	$y=x^2+\dfrac{16}{x}-16,\ \ [1;\ 4]$	**16**	$y=\dfrac{4x}{4+x^2},\ \ [-4;2]$
2	$y=4-x-\dfrac{4}{x^2},\ \ [1;\ 4]$	**17**	$y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8,\ \ [-4;-1]$
3	$y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1,\quad [0;6]$	**18**	$y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)},\quad [-2;4]$
4	$y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5},\quad [-3;3]$	**19**	$y=\dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5},\quad [-2;1]$
5	$y=2\sqrt{x}-x,\quad [0;4]$	**20**	$y=-\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5},\quad [-5;1]$
6	$y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)},\quad [-1;5]$	**21**	$y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)},\quad [0;4]$
7	$y=x-4\sqrt{x}+5,\quad [1;9]$	**22**	$y=\dfrac{x^2-2x+16}{x-1}-13,\quad [2;5]$
8	$y=\dfrac{10x}{1+x^2},\ \ [0;3]$	**23**	$y=2\sqrt{x-1}-x+2,\quad [1;5]$
9	$y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-1,\quad [-3;3]$	**24**	$y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)},\quad [-3;4]$
10	$y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59,\ \ [2;\ 4]$	**25**	$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{8}{x-2}+5,\ \ [-2;\ 1]$
11	$y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2},\quad [-1;\ 2]$	**26**	$y=8x+\dfrac{4}{x^2}-15,\quad [0{,}5;\ 2]$
12	$y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)},\quad [-1;6]$	**27**	$y=\dfrac{x^2+4x+16}{x+2}-9,\quad [-1;2]$
13	$y=\dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2},\quad [1;4]$	**28**	$y=\dfrac{4}{x^2}-8x-15,\quad [-2;\ -0{,}5]$
14	$y=x-4\sqrt{x+2}+8,\quad [-1;7]$	**29**	$y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)},\quad [-2;5]$
15	$y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}1,\quad [1;5]$	**30**	$y=\dfrac{10x+10}{x^2+2x+2},\ \ [-1;2]$

ЗАДАНИЕ 7

1. Турист идет из пункта A, находящегося на шоссе, в пункт B, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от A до B по прямой составляет 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт B, если скорость его передвижения по шоссе 5 км/ч, а по бездорожью – 3 км/ч?

2. Доказать, что конический шатер данной вместимости V требует наименьшего количества материала, когда его высота в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

3. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, у которого сумма длин его катета и гипотенузы равна 4 см.

4. Требуется изготовить ящик с крышкой объемом 72 см^3, причем стороны основания которого относились бы, как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

5. Объем правильной треугольной призмы равен $V = 16$ м^3. Какова должна быть длина стороны основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

6. Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна $S = 24\pi$ м^2.

7. Каковы должны быть размеры прямоугольника наибольшей площади, вписанного в круг радиуса $R = 6$ см?

8. В прямоугольной системе координат через точку $M(1;\ 2)$ проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая вместе с осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

9. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

10. Через данную точку $P(1;\ 4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

11. Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием объемом $V = 25$ м^3 ($V \approx 8\pi$). Каковы должны быть радиус основания R и

высота H цилиндра, чтобы на облицовку его дна и боковой поверхности ушло наименьшее количество материала?

12. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса $R = 3$ м, вращается вокруг основания. Найти высоту треугольника h, при которой полученное тело вращения имеет наибольший объем.

13. Из прямоугольного листа жести размером 24×9 см требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты. Каковы должны быть стороны этих квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшая?

14. Открытый чан имеет форму цилиндра объемом V. Каковы должны быть радиус основания R и высота H цилиндра, чтобы его поверхность была наименьшей?

15. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

16. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Периметр сечения $P = 35{,}7$ м ($P \approx 20 + 5\pi$). При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

17. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

18. Требуется изготовить шатер вместимостью $V = 14{,}14$ м^3 $\left(V \approx \frac{9}{2}\pi\right)$, имеющий форму конуса. Каковы должны быть размеры конуса (R и H), чтобы на шатер ушло наименьшее количество материала?

19. Цистерна имеет форму цилиндра, завершенного с одной стороны полушаром. Вместимость ее $V = \frac{40}{3}\pi$ м^3. Найти радиус R, при котором цистерна будет иметь наименьшую полную поверхность.

20. В прямоугольной системе координат через точку $M(2;\, 3)$ проведена прямая, которая вместе с осями координат образует треугольник, расположенный в I четверти. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

21. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак наибольшей вместимости. Каковы должны быть размеры бака (R и H), если на его изготовление имеется $S = 6\pi$ м^2 материала?

22. Требуется вырыть яму конической формы с образующей $a = 3$ м. При какой глубине объем ямы будет наибольшим?

23. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

24. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна l.

25. Проволока длиной 40 см согнута в прямоугольник. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

26. Резервуар, открытый сверху, имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала, если он будет вмещать 256 дм^3 воды?

27. Периметр равнобедренного треугольника равен 2p. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

28. Из сектора круга радиуса R свертывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объем?

29. Даны точки $A(0;\ 3)$ и $B(4;\ 5)$. На оси Ox найти точку, сумма расстояний которой до точек A и B наименьшая.

30. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

ЗАДАНИЕ 8

Исследовать функцию и построить ее график.

1	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	**16**	$y=\frac{2x^2}{2x-1}$
2	$y=\frac{1}{x}e^{x-1}$	**17**	$y=\frac{1}{x}+4x^2$
3	$y=\frac{4x^3}{3(x^2+1)}$	**18**	$y=\sqrt[3]{x}-1$
4	$y=\frac{8x}{(x-2)^2}$	**19**	$y=\frac{4x^3}{9(3-x^2)}$
5	$y=\frac{x^2}{2(x-1)}$	**20**	$y=\frac{1}{e^x-1}$
6	$y=\frac{2(x-1)^2}{x^2}$	**21**	$y=x^2e^x$
7	$y=3x\ln x$	**22**	$y=x^3e^{-x}$
8	$y=\ln(x^2+2x+2)$	**23**	$y=x^3-5x^2+5x-15$
9	$y=\frac{16-x^2}{4x-5}$	**24**	$y=x^2+\frac{1}{x^2}$
10	$y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$	**25**	$y=\frac{e^x}{x}$
11	$y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$	**26**	$y=\frac{2x}{x^2-1}$
12	$y=\frac{5\ln x}{x}$	**27**	$y=\frac{x}{e^x}$
13	$y=3xe^{-x}$	**28**	$y=\frac{x^2}{x-4}$
14	$y=\frac{4x^2}{3+x}$	**29**	$y=x+\frac{\ln x}{x}$
15	$y=\ln(x^2+1)$	**30**	$y=\frac{3x^2}{1+x^3}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЕ 1.

Найти производную функции $y = e^{4x} \cdot \sin^2\left(\frac{2}{x}\right)$.

Решение.

Применим правило дифференцирования произведения функций $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. Положим $u = e^{4x}$, $v = \sin^2\left(\frac{2}{x}\right)$. Получим:

$$y' = \left(e^{4x}\right)' \cdot \sin^2\left(\frac{2}{x}\right) + e^{4x} \cdot \left(\sin^2\left(\frac{2}{x}\right)\right)' = e^{4x}(4x)' \cdot \sin^2\left(\frac{2}{x}\right) +$$

$$+ e^{4x} \cdot 2\sin\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)' = 4e^{4x} \cdot \sin^2\left(\frac{2}{x}\right) + 2e^{4x}\sin\left(\frac{2}{x}\right)\cos\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' =$$

$$= 4e^{4x} \cdot \sin^2\left(\frac{2}{x}\right) + 2e^{4x}\sin\left(\frac{2}{x}\right)\cos\left(\frac{2}{x}\right) \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4e^{4x} \cdot \sin^2\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{2e^{4x}}{x^2}\sin\left(\frac{4}{x}\right).$$

ЗАДАНИЕ 2.

Найти производную функции $y = {\arcsin\sqrt{5x}}\big/{5^{2x+1}}$.

Решение.

Применим правило дифференцирования частного функций $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Положим $u = \arcsin\sqrt{5x}$, $v = 5^{2x+1}$. В результате получим:

$$y' = \frac{\left(\arcsin\sqrt{5x}\right)' \cdot 5^{2x+1} - \arcsin\sqrt{5x} \cdot \left(5^{2x+1}\right)'}{\left(5^{2x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{5x}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{5x}\right)' \cdot 5^{2x+1} - \arcsin\sqrt{5x} \cdot 5^{2x+1} \cdot \ln 5 \cdot (2x+1)'}{\left(5^{2x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{5^{2x+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-5x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x}}(5x)' - \arcsin\sqrt{5x} \cdot \ln 5 \cdot 2\right)}{\left(5^{2x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{5}{2\sqrt{5x(1-5x)}} - 2\ln 5 \cdot \arcsin\sqrt{5x}}{5^{2x+1}}.$$

ЗАДАНИЕ 3.

Найти производную показательно-степенной функции $y = \left(x^2+3\right)^{\cos 2x}$.

Решение.

Прологарифмируем обе части равенства по основанию e:

$$\ln y = \ln\left(x^2+3\right)^{\cos 2x},$$

$$\ln y = \cos 2x \cdot \ln\left(x^2+3\right).$$

Продифференцируем теперь обе части последнего равенства, применив справа правило дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\cos 2x)' \cdot \ln\left(x^2+3\right) + \cos 2x \cdot \left(\ln\left(x^2+3\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = -\sin 2x \cdot (2x)' \cdot \ln\left(x^2+3\right) + \cos 2x \cdot \frac{1}{x^2+3}\cdot\left(x^2+3\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = -2\sin 2x \cdot \ln\left(x^2+3\right) + \cos 2x \cdot \frac{2x}{x^2+3}.$$

Учитывая, что $y = \left(x^2+3\right)^{\cos 2x}$, окончательно получаем:

$$y' = \left(x^2+3\right)^{\cos 2x} \cdot \left(-2\sin 2x \cdot \ln\left(x^2+3\right) + \frac{2x\cdot\cos 2x}{x^2+3}\right).$$

ЗАДАНИЕ 4.

Составить уравнение нормали к кривой $y = \left(3x-2x^3\right)^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение.

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид: $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Найдем производную заданной по условию функции:

$$y' = 2\left(3x - 2x^3\right)\cdot\left(3x - 2x^3\right)' = 2\left(3x - 2x^3\right)\left(3 - 6x^2\right).$$

Имеем: $f(x_0) = f(1) = (3 - 2\cdot 1)^2 = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 2(3-2)(3-6) = -6$. Подставляя эти значения в уравнение нормали, получим уравнение вида:

$$y = 1 - \frac{1}{-6}(x-1), \quad y = 1 + \frac{1}{6}(x-1), \quad y = 1 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}, \quad y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}.$$

ЗАДАНИЕ 5.

Вычислить приближенно значение функции в точке x с помощью дифференциала: $y = \frac{6}{\sqrt{x}}$, $x = 4{,}018$.

Решение.

Применим формулу приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$.

По условию, $x = 4{,}018 = 4 + 0{,}018$, значит, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}018$. Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{6}{\sqrt{x}}\right)' = 6\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 6\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = -3x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{x\sqrt{x}}.$$

Имеем: $f(x_0) = f(4) = \frac{6}{\sqrt{4}} = \frac{6}{2} = 3$, $f'(x_0) = f'(4) = -\frac{3}{4\sqrt{4}} = -\frac{3}{8} = -0{,}375$.

Тогда $f(4{,}018) = \frac{6}{\sqrt{4{,}018}} \approx 3 + (-0{,}375)\cdot 0{,}018 = 2{,}993$.

ЗАДАНИЕ 6.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ на отрезке [–3; 3].

Решение.

Для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, надо вычислить значения функции на концах промежутка и во всех её критических точках, принадлежащих промежутку.

Заданная по условию функция непрерывна на отрезке [–3; 3]. Найдем производную: $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6 \cdot \left(x^2 - x - 2\right)$.

В данном случае критическими являются точки, в которых производная равна нулю, т.е. $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, причем обе они принадлежат рассматриваемому отрезку [–3; 3]. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y(-1) = 17, \quad y(2) = -10, \quad y(-3) = -35, \quad y(3) = 1.$$

Среди этих значений выбираем наименьшее и наибольшее:

$$y_{наим} = y(-3) = -35, \qquad y_{наиб} = y(-1) = 17.$$

ЗАДАНИЕ 7.

Разность двух чисел равна 12. Каковы должны быть эти числа, чтобы их произведение было наименьшим?

Решение.

При решении задач на вычисление наименьших и наибольших значений величин надо определить, для какой величины в задаче необходимо найти наименьшее или наибольшее значение. Она и будет исследуемой функцией. В качестве независимой переменной лучше всего выбрать переменную, через которую исследуемая функция выражается проще всего.

Обозначим одно число x, тогда второе будет равно $x+12$. Функция, которая выражает произведение этих двух чисел, имеет вид:

$$f(x)=x(x+12)=x^2+12x.$$

Область определения этой функции – вся числовая прямая.

Найдем производную функции: $f'(x)=2x+12=2(x+6)$.

Приравнивая производную к нулю, получим единственную критическую точку: $x=-6$. Она разбивает область определения функции на два интервала (Рис. 1). Определяем знак производной в каждом интервале, и отмечаем поведение функции.

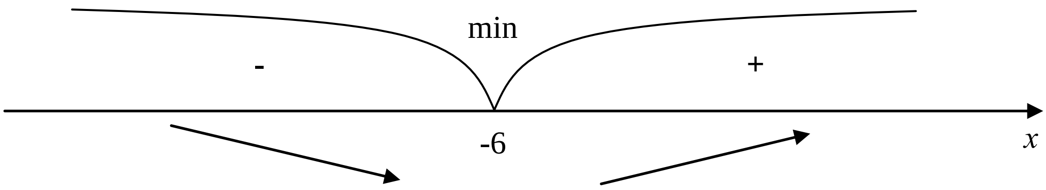


Рис. 1

Таким образом, точка $x=-6$ является точкой минимума функции, а значит, в ней функция, выражающая произведение чисел, принимает свое наименьшее значение. Итак, получили одно число равным -6, тогда второе равно 6.

ЗАДАЧА 8.

Исследовать функцию $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить её график.

Решение.

1) Функция определена при всех значениях аргумента x, кроме $x=1$. Следовательно, область определения функции: $D(y)=(-\infty;\,1)\cup(1;\,+\infty)$.
2) Функция непериодическая. Для установления четности или нечетности функции проверим выполнимость равенств $f(-x)=f(x)$ (для четной функции) или $f(-x)=-f(x)$ (для нечетной функции):

$$f(-x)=\frac{-2x-1}{(-x-1)^2} \qquad\qquad -f(x)=-\frac{2x-1}{(x-1)^2},$$

Следовательно, $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то есть данная функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Найдем точки пересечения с осями координат.

С осью Ox: $y=0,\quad 2x-1=0,\quad x=\frac{1}{2}$, т.е. $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$- точка пересечения с осью Ox.

С осью Oy: $x=0,\quad y=-1$, т.е. $(0;\ -1)$ - точка пересечения с осью Oy.

4) Определим промежутки знакопостоянства. Нуль функции $x=\frac{1}{2}$ разбивает область определения функции на три интервала (Рис. 2), в каждом из которых определяем знак функции.

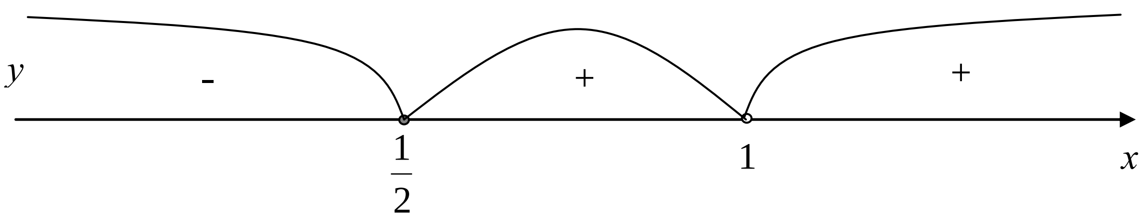


Рис. 2

Таким образом, функция принимает отрицательные значения в интервале $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)$, а в интервалах $\left(\frac{1}{2};1\right)$ и $(1;+\infty)$ функция принимает положительные значения.

5) Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна в своей области определения. В точке $x=1$ функция терпит разрыв. Найдем односторонние пределы в точке разрыва:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{2(1-0)-1}{(1-0-1)^2}=\frac{1}{(-0)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{2(1+0)-1}{(1+0-1)^2}=\frac{1}{(+0)^2}=+\infty.$$

Значит, $x=1$ - точка разрыва второго рода.

6) Вертикальные асимптоты графика функции следует искать в точках разрыва второго рода. Поэтому прямая $x=1$ - вертикальная асимптота графика функции.

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-2x+1}=\left|\begin{array}{l}\textit{применим правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x-2}=0,$$

Значит, прямая $y=0$ - горизонтальная асимптота графика функции.

Проверим наличие наклонной асимптоты $y=kx+b$. Для этого найдем пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

То есть наклонная асимптота совпадает с горизонтальной асимптотой $y=0$.

7) Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-(2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{x}{(x-1)^2}.$$

Производная $y'=0$ при $x=0$ и y' не существует при $x=1$. Тем самым имеем две критические точки: $x_1=0,\ x_2=1$. Но точка $x_2=1$ не принадлежит области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Разобьем числовую ось на три интервала (рис. 3): $(-\infty;0),(0;1),(1;\infty)$.

В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, следовательно, здесь функция убывает; во втором интервале – положительна и данная функция возрастает. При переходе через точку $x=0$ первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум: $y_{\min}=y(0)=-1$. Значит, точка $A(0;-1)$ – точка минимума функции.

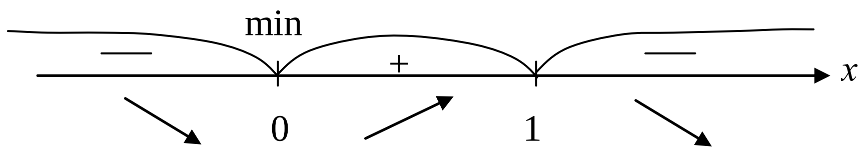


Рис. 3

На рисунке 3 знаками +, - указаны интервалы знакопостоянства производной y', а стрелками – возрастание и убывание исследуемой функции.

8) Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

$$y'' = -\frac{(x-1)^3 - x\cdot 3(x-1)^3}{(x-1)^6} = \frac{2x+1}{(x-1)^6}.$$

Вторая производная равна нулю ($y''=0$) при $x=-\frac{1}{2}$ и y'' не существует при $x=1$. Разобьем числовую ось на три интервала (Рис. 4): $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $(1;\infty)$. На правом интервале вторая производная $y''<0$, и дуга исследуемой кривой выпукла; на втором и третьем интервалах $y''>0$, тем самым график является вогнутым. При переходе через точку $x=-\frac{1}{2}$ вторая производная меняет свой знак, поэтому $x=-\frac{1}{2}$ - абсцисса точки перегиба. Следовательно, $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$- точка перегиба графика функции.

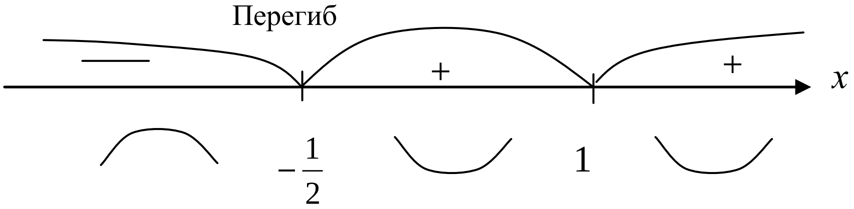


Рис. 4

9) Построим график заданной функции (Рис. 5).

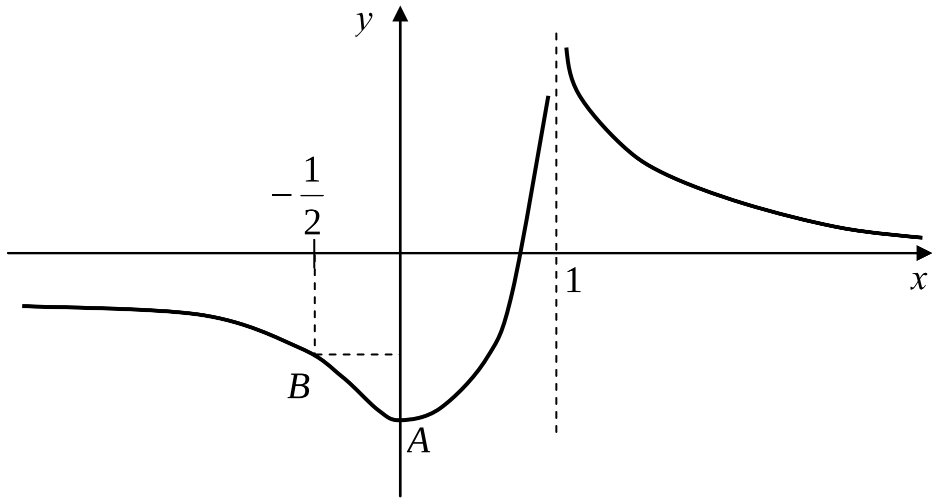


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Шипачев В.С. Высшая математика: учебное пособие для вузов. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 447 с. (Бакалавр и специалист). ISBN 978-5-534-12319-7. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/447322

2. Шипачев В.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 212 с. (Бакалавр. Прикладной курс). ISBN 978-5-534-04282-5. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437924

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. Том 1: учебник для бакалавров. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 703 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-9916-3701-5. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/425369

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 кн. Кн. 1: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 253 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-534-02148-6. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437223

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник: учебное пособие для академического бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 192 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-9916-7568-0. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/433433

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Высшая математика»

для бакалавров очной формы обучения направлений подготовки
13.03.03 Электроэнергетика и электротехника
15.03.05 Автоматизация технологических процессов и производств
20.03.03 Природообустройство и водопользование
21.03.03 Землеустройство и кадастры
35.03.06 Агроинженерия

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 24.10.2019 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 1,45. Тираж 25 экз. Изд. 6502.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии.
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ