

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра электроэнергетики и электротехнологий

О.Е. Широбокова

## **Теоретические основы электротехники**

Учебно-методическое пособие для самостоятельного изучения курса  
«Теоретические основы электротехники»,  
для студентов направлений подготовки  
13.03.02 - «Электроэнергетика и электротехника»  
15.03.04 – «Автоматизация технологических процессов и производств»

Брянская область, 2022

УДК 621.3 (076)  
ББК 31.1  
Ш 76

Широбокова, О. Е. Теоретические основы электротехники: учебно-методическое пособие для самостоятельного изучения курса «Теоретические основы электротехники», для студентов направлений подготовки 13.03.02 - «Электроэнергетика и электротехника» 15.03.04 – «Автоматизация технологических процессов и производств» / О. Е. Широбокова. - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2022 – 51 с.

Учебно-методическое пособие составлено для выполнения самостоятельной работы студентов по дисциплине «Теоретические основы электротехники». Кратко изложен теоретический курс, приведен набор задач для самостоятельной работы и порядок их выполнения.

Рецензент: д.т.н. проф. Кисель Ю.Е.

Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета энергетики и природопользования БГАУ, протокол № 3 от 28.10. 2022 г.

©Брянский ГАУ, 2022г.  
©Широбокова О.Е. 2022г.

## Содержание

Предисловие.....	4
ГЛАВА 1. Электрические цепи постоянного тока .....	5
1.1 Основные понятия и определения.....	5
1.2 Электрическая цепь и ее элементы .....	6
1.2.1 Основные понятия и определения для электрической цепи .....	7
1.3 Основные принципы, теоремы и законы электротехники .....	9
1.4 Методы расчёта электрических цепей постоянного тока.....	11
ГЛАВА 2. Анализ и расчет линейных цепей переменного тока.....	11
2.1 Понятие о линейных цепях переменного тока .....	11
2.2 Методы расчета цепей синусоидального тока.....	12
ГЛАВА 3. Трехфазные электрические цепи .....	17
3.1 Основные формулы и уравнения.....	17
3.2 Соединение обмоток генератора и приемника в «звезду» .....	18
3.3 Соединение обмоток приемника по схеме «треугольник» .....	20
3.4 Типовые задачи с решением .....	23
ГЛАВА 4. Переходные процессы в линейных электрических цепях .....	28
4.1 Основные сведения о расчёте переходных процессов .....	28
электрических цепей.....	28
4.2 Классический метод расчета переходных процессов .....	30
4.3 Операторный метод расчета переходных процессов.....	32
ГЛАВА 5. Электрические цепи несинусоидального тока .....	36
5.1 Характеристики несинусоидальных величин .....	36
5.2 Разложение периодических несинусоидальных кривых в ряд Фурье .....	37
5.3 Свойства периодических кривых, обладающих симметрией .....	38
5.4 Действующее значение периодической несинусоидальной переменной. ....	39
5.5 Мощность в цепях периодического несинусоидального тока .....	40
5.6 Методика расчета линейных цепей при периодических .....	40
несинусоидальных токах .....	40
ГЛАВА 6. Нелинейные электрические цепи.....	42
6.1 Понятие о нелинейных цепях. Нелинейные элементы.....	42
6.2 Нелинейные электрические цепи постоянного тока .....	44
6.3 Параметры нелинейных резисторов .....	44
6.4 Методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока ....	45
6.5 Графические методы расчета.....	45
6.6 Метод двух узлов .....	47
Список использованной литературы .....	50

## Предисловие

Подготовленное учебно- методическое пособие по курсу «Теоретические основы электротехники» для самостоятельной работы студентов, соответствует программе и включает краткий теоретический материал по основным разделам дисциплины: электрические цепи постоянного и синусоидального, а также трехфазного тока, переходные процессы в линейных электрических цепях, не-синусоидальные цепи, нелинейные цепи.

В методическом пособии дается значительное количество материала, который можно использовать при подготовке и выполнении расчетно-графической и курсовой работы, при сдаче зачёта и экзамена по дисциплине.

В результате освоения дисциплины формируются следующие основные компетенции:

Направление подготовки 13.03.02:

ОПК-4 Способен использовать методы анализа и моделирования электрических цепей и электрических машин

ОПК-4.1: Использует методы анализа и моделирования линейных и нелинейных цепей постоянного и переменного тока

ОПК-4.2: Использует методы расчета переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного тока

ОПК-4.3: Применяет знания основ теории электромагнитного поля и цепей с распределенными параметрами

Направление подготовки: 15.03.04

ОПК-1.6: Использует методы анализа и моделирования линейных и нелинейных цепей, постоянного и переменного тока, методы расчета переходных процессов в электрических цепях, применяет знания основ теории электромагнитного поля и цепей с распределенными параметрами

## ГЛАВА 1. Электрические цепи постоянного тока

### 1.1 Основные понятия и определения

Напряжённость электрического поля — векторная физическая величина, характеризующая электрическое поле в данной точке и численно равная отношению силы, действующей на неподвижный точечный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда.

Напряжённость электрического поля в Международной системе единиц (СИ) измеряется в вольтах на метр [В/м] или в ньютонах на кулон [Н/Кл].

Под напряжением понимают разность потенциалов между точками участка электрической цепи.

Напряжение — это энергия, которая затрачивается на перемещение единичного положительного заряда из точки а в точку b. Это скалярная физическая величина. Единица измерения - Вольт (В).

Другое определение понятия "напряжение" — это энергия, которую заряд тратит в потребителе, численно равная разности потенциалов на зажимах потребителя.

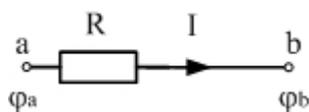


Рисунок 1.1 – Участок электрической цепи без ЭДС

Считается, что электрический ток всегда течёт от более высокого потенциала к более низкому. Следовательно, на участке ( $\varphi_a > \varphi_b$ ) величина падения напряжения ( $IR$ ) или ( $\varphi_a = \varphi_b + IR$ ), откуда ( $\varphi_a - \varphi_b = U_{ab} = IR$ ). Данная выкладка соответствует участку без источника ЭДС. Напряжение чаще всего называют падением напряжения. Его направление совпадает с направлением протекания тока.

С учетом ЭДС напряжение  $U_{ac}$  равно  $\varphi_a - \varphi_c$ . Выражая  $\varphi_b$  через  $\varphi_c$  получаем:

$$\varphi_b = \varphi_c - E,$$

$$\varphi_a = \varphi_b + IR = \varphi_c - E + IR,$$

$$\text{откуда } U_{ab} = \varphi_a - \varphi_c = IR - E.$$

В случае изменения напряжения, ЭДС

$$\varphi_b = \varphi_c + E;$$

$$\varphi_a = \varphi_b + IR = \varphi_c + E + IR;$$

откуда  $\varphi_a - \varphi_c = IR + E = U_{ac}$  (Вольт).

По выбранному направлению тока  $U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a = -U_{ac} = -(\varphi_a - \varphi_c) = \varphi_c - \varphi_a$ .

Следовательно, изменение чередования индексов равносильно изменению знака.

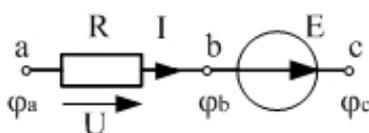


Рисунок 1.2 – Участок электрической цепи с ЭДС

В общем случае  $U_{ac} = \sum(I_k R_k) + \sum E_k$ , где со знаком плюс в первую сумму входят  $IR$ , совпадающие с выбранным направлением. С минусом, если не совпадают.

Во вторую сумму ЭДС входят с минусом, если их направление совпадает с выбранным направлением, а с плюсом наоборот.

Разность потенциалов (напряжение) между двумя точками равна отношению работы поля при перемещении положительного заряда из начальной точки в конечную к величине этого заряда.

Если за нулевой уровень отсчета потенциала принять потенциал бесконечно удаленной точки поля, то потенциал в данной точке равен отношению работы электростатических сил по перемещению положительного заряда из данной точки в бесконечность к этому заряду.

Единица разности потенциалов. Единицу разности потенциалов устанавливают с помощью формулы. В Международной системе единиц работу выражают в джоулях, а заряд - в кулонах. Поэтому разность потенциалов между двумя точками численно равна единице, если при перемещении заряда в 1 Кл из одной точки в другую электрическое поле совершает работу в 1 Дж. Эту единицу называют вольт (В);  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл}$ .

## 1.2 Электрическая цепь и ее элементы

В электротехнике рассматривается устройство и принцип действия основных электротехнических устройств, используемых в быту и промышленности. Чтобы электротехническое устройство работало, должна быть создана электрическая цепь, задача которой передать электрическую энергию этому устройству и обеспечить ему требуемый режим работы.

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электрическом токе, ЭДС (электродвижущая сила) и электрическом напряжении.

Для анализа и расчета электрическая цепь графически представляется в виде электрической схемы, содержащей условные обозначения ее элементов и способы их соединения. Электрическая схема простейшей электрической цепи, обеспечивающей работу осветительной аппаратуры, представлена на рис. 1.3.

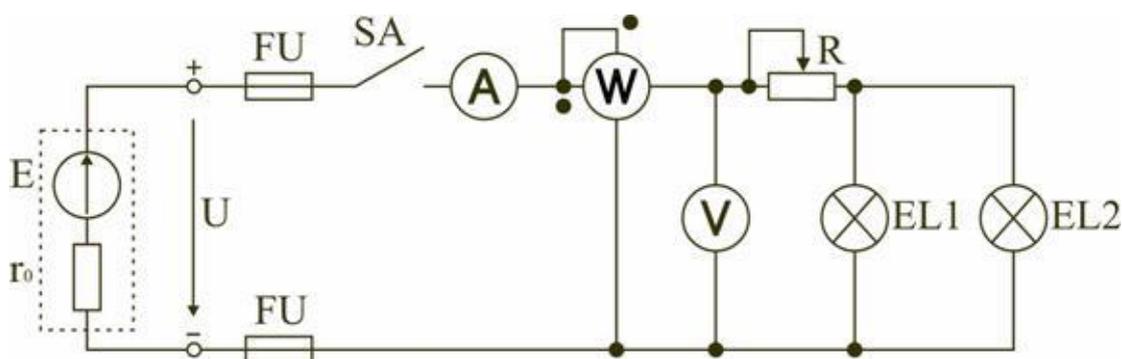


Рисунок 1.3 – Электрическая цепь

Все устройства и объекты, входящие в состав электрической цепи, могут быть разделены на три группы:

1) Источники электрической энергии (питания).

Общим свойством всех источников питания является преобразование какого-либо вида энергии в электрическую. Источники, в которых происходит преобразование неэлектрической энергии в электрическую, называются первичными источниками. Вторичные источники – это такие источники, у которых и на входе, и на выходе – электрическая энергия (например, выпрямительные устройства).

2) Потребители электрической энергии.

Общим свойством всех потребителей является преобразование электроэнергии в другие виды энергии (например, нагревательный прибор). Иногда потребители называют нагрузкой.

3) Вспомогательные элементы цепи: соединительные провода, коммутационная аппаратура, аппаратура защиты, измерительные приборы и т.д., без которых реальная цепь не работает.

Все элементы цепи охвачены одним электромагнитным процессом.

В электрической схеме на рис. 1.3 электрическая энергия от источника ЭДС  $E$ , обладающего внутренним сопротивлением  $r_0$ , с помощью вспомогательных элементов цепи передаются через регулировочный реостат  $R$  к потребителям (нагрузке): электрическим лампочкам  $EL1$  и  $EL2$ .

### **1.2.1 Основные понятия и определения для электрической цепи**

Для расчета и анализа реальная электрическая цепь представляется графически в виде расчетной электрической схемы (схемы замещения). В этой схеме реальные элементы цепи изображаются условными обозначениями, причем вспомогательные элементы цепи обычно не изображаются, а если сопротивление соединительных проводов намного меньше сопротивления других элементов цепи, его не учитывают. Источник питания показывается как источник ЭДС  $E$  с внутренним сопротивлением  $r_0$ , реальные потребители электрической энергии постоянного тока заменяются их электрическими параметрами: активными сопротивлениями  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . С помощью сопротивления  $R$  учитывают способность реального элемента цепи необратимо преобразовывать электроэнергию в другие виды, например, тепловую или лучистую.

При этих условиях схема на рис. 1.3 может быть представлена в виде расчетной электрической схемы (рис. 1.4), в которой есть источник питания с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $r_0$ , а потребители электрической энергии: регулировочный реостат  $R$ , электрические лампочки  $EL1$  и  $EL2$  заменены активными сопротивлениями  $R, R_1$  и  $R_2$ .

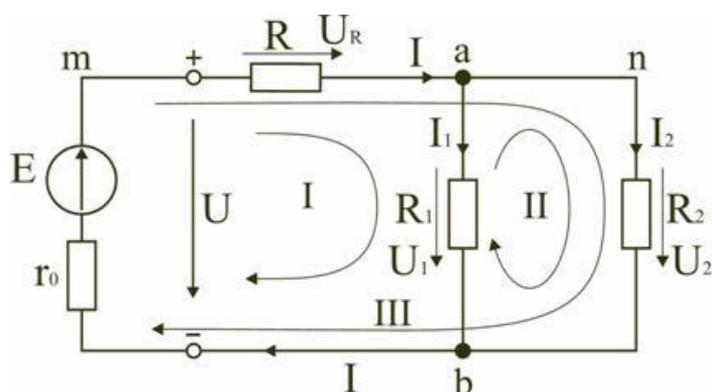


Рисунок 1.4 – Расчетная схема электрической цепи

Источник ЭДС на электрической схеме (рис. 1.4) может быть заменен источником напряжения  $U$ , причем условное положительное направление напряжения  $U$  источника задается противоположным направлению ЭДС.

При расчете в схеме электрической цепи выделяют несколько основных элементов.

Ветвь электрической цепи (схемы) – участок цепи с одним и тем же током. Ветвь может состоять из одного или нескольких последовательно соединенных элементов. Схема на рис. 1.4 имеет три ветви: ветвь  $mba$ , в которую включены элементы  $r_0$ ,  $E$ ,  $R$  и в которой возникает ток  $I$ ; ветвь  $ab$  с элементом  $R_1$  и током  $I_1$ ; ветвь  $anb$  с элементом  $R_2$  и током  $I_2$ .

Узел электрической цепи (схемы) – место соединения трех и более ветвей. В схеме на рис. 1.4 – два узла  $a$  и  $b$ . Ветви, присоединенные к одной паре узлов, называют параллельными. Сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 1.3) находятся в параллельных ветвях.

Контур – любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям. В схеме на рис. 1.4 можно выделить три контура: I –  $mbab$ ; II –  $anba$ ; III –  $manbm$ , на схеме стрелкой показывают направление обхода контура.

Условные положительные направления ЭДС источников питания, токов во всех ветвях, напряжений между узлами и на зажимах элементов цепи необходимо задать для правильной записи уравнений, описывающих процессы в электрической цепи или ее элементах. На схеме (рис. 1.3) стрелками укажем положительные направления ЭДС, напряжений и токов:

а) для ЭДС источников – произвольно, но при этом следует учитывать, что полюс (зажим источника), к которому направлена стрелка, имеет более высокий потенциал по отношению к другому полюсу;

б) для токов в ветвях, содержащих источники ЭДС – совпадающими с направлением ЭДС; во всех других ветвях произвольно;

в) для напряжений – совпадающими с направлением тока в ветви или элемента цепи.

Все электрические цепи делятся на линейные и нелинейные.

Элемент электрической цепи, параметры которого (сопротивление и др.) не зависят от тока в нем, называют линейным, например, электропечь.

Нелинейный элемент, например, лампа накаливания, имеет сопротивление, величина которого увеличивается при повышении напряжения, а, следовательно, и тока, подводимого к лампочке.

Следовательно, в линейной электрической цепи все элементы – линейные, а нелинейной называют электрическую цепь, содержащую хотя бы один нелинейный элемент.

### 1.3 Основные принципы, теоремы и законы электротехники

Расчет и анализ электрических цепей производится с использованием закона Ома, первого и второго законов Кирхгофа. На основе этих законов устанавливается взаимосвязь между значениями токов, напряжений, ЭДС всей электрической цепи и отдельных ее участков и параметрами элементов, входящих в состав этой цепи.

Закон Ома для участка цепи или  $UR=RI$ .

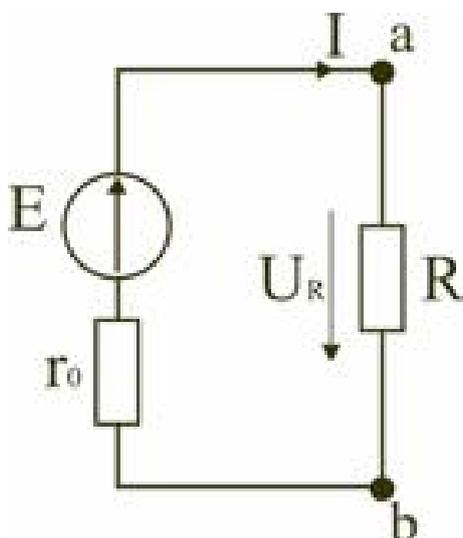


Рисунок 1.5 – Электрическая цепь с ЭДС

В этом случае  $UR=RI$  – называют напряжением или падением напряжения на резисторе  $R$ , а – током в резисторе  $R$ .

При расчете электрических цепей иногда удобнее пользоваться не сопротивлением  $R$ , а величиной обратной сопротивлению, т.е. электрической проводимостью:

В этом случае закон Ома для участка цепи запишется в виде:  $I=Ug$ .

Соотношение между током  $I$ , напряжением  $UR$  и сопротивлением  $R$  участка  $ab$  электрической цепи (рис. 1.5) выражается законом Ома

#### Первый закон Кирхгофа

Формулировка №1: Сумма всех токов, втекающих в узел, равна сумме всех токов, вытекающих из узла.

Формулировка №2: Алгебраическая сумма всех токов в узле равна нулю.

Поясню первый закон Кирхгофа на примере рисунка 1.6.

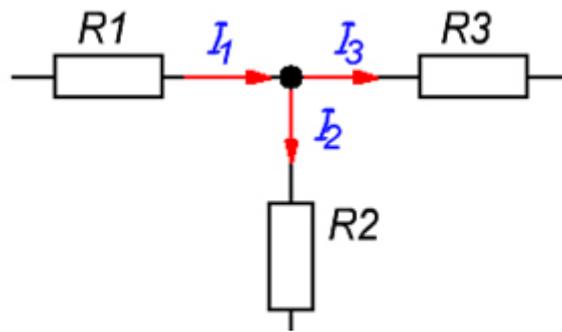


Рисунок 1.6 - Узел электрической цепи

Здесь ток  $I_1$  - ток, втекающий в узел, а токи  $I_2$  и  $I_3$  — токи, вытекающие из узла. Тогда применяя формулировку №1, можно записать:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

Что бы подтвердить справедливость формулировки №2, перенесем токи  $I_2$  и  $I_3$  в левую часть выражения (1), тем самым получим:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (2)$$

Знаки «минус» в выражении (2) и означают, что токи вытекают из узла.

Знаки для втекающих и вытекающих токов можно брать произвольно, однако в основном всегда втекающие токи берут со знаком «+», а вытекающие со знаком «-» (например как получилось в выражении (2)).

### Второй закон Кирхгофа

Формулировка: Алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжения на всех резистивных элементах в этом контуре.

Здесь термин «алгебраическая сумма» означает, что как величина ЭДС так и величина падения напряжения на элементах может быть как со знаком «+» так и со знаком «-». При этом определить знак можно по следующему алгоритму:

1. Выбираем направление обхода контура (два варианта либо по часовой, либо против).

2. Произвольно выбираем направление токов через элементы цепи.

3. Расставляем знаки для ЭДС и напряжений, падающих на элементах по правилам:

- ЭДС, создающие ток в контуре, направление которого совпадает с направлением обхода контура записываются со знаком «+», в противном случае ЭДС записываются со знаком «-».

- напряжения, падающие на элементах цепи записываются со знаком «+», если ток, протекающий через эти элементы совпадает по направлению с обходом контура, в противном случае напряжения записываются со знаком «-».

Например, рассмотрим цепь, представленную на рисунке 3, и запишем выражение согласно второму закону Кирхгофа, обходя контур по часовой стрелке, и выбрав направление токов через резисторы, как показано на рисунке.

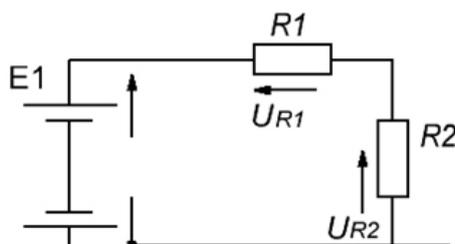


Рисунок 1.7 – Электрическая цепь, для пояснения второго закона Кирхгофа

$$E_1 - E_2 = -UR_1 - UR_2 \text{ или } E_1 = E_2 - UR_1 - UR_2 \quad (3)$$

#### 1.4 Методы расчёта электрических цепей постоянного тока

Общей задачей расчёта электрических цепей является определение токов во всех участках цепи при заданных параметрах элементов цепи. При этом используют законы Ома и законы Кирхгофа.

Различают следующие методы расчета электрических цепей:

1. Метод, использующий 1-й и 2-й законы Кирхгофа;
2. Метод контурных токов;
3. Метод узлового напряжения (двух узлов);
4. Метод преобразований треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и наоборот;
5. Метод узловых потенциалов;
6. Метод наложения (суперпозиции);
7. Метод эквивалентного генератора;
8. Метод пропорциональных чисел;
9. Метод входных и взаимных проводимостей.

#### Контрольные вопросы по разделу:

1. Основные понятия, термины и определения.
2. Электрическая цепь. Элементы электрических цепей.
3. Ветвь, узел и контур электрической цепи.
4. Основные принципы и законы электротехники.
5. Закон Ома для участка цепи с ЭДС и без.
6. Законы Кирхгофа.
7. Методы расчёта электрических цепей постоянного тока.

## ГЛАВА 2. Анализ и расчет линейных цепей переменного тока

### 2.1 Понятие о линейных цепях переменного тока

Большинство потребителей электрической энергии работает на переменном токе. В настоящее время почти вся электрическая энергия вырабатывается в виде энергии переменного тока. Это объясняется преимуществом производства и распределения этой энергии. Переменный ток получают на электростан-

циях, преобразуя с помощью генераторов механическую энергию в электрическую. Основное преимущество переменного тока по сравнению с постоянным заключается в возможности с помощью трансформаторов повышать или понижать напряжение, с минимальными потерями передавать электрическую энергию на большие расстояния, в трехфазных источниках питания получать сразу два напряжения: линейное и фазное. Кроме того, генераторы и двигатели переменного тока более просты по устройству, надежней в работе и проще в эксплуатации по сравнению с машинами постоянного тока.

В электрических цепях переменного тока наиболее часто используют синусоидальную форму, характеризующуюся тем, что все токи и напряжения являются синусоидальными функциями времени. В генераторах переменного тока получают ЭДС, изменяющуюся во времени по закону синуса, и тем самым обеспечивают наиболее выгодный эксплуатационный режим работы электрических установок. Кроме того, синусоидальная форма тока и напряжения позволяет производить точный расчет электрических цепей с использованием метода комплексных чисел и приближенный расчет на основе метода векторных диаграмм. При этом для расчета используются законы Ома и Кирхгофа, но записанные в векторной или комплексной форме.

## 2.2 Методы расчета цепей синусоидального тока

### Векторное изображение синусоидальных величин в прямоугольных координатах

При расчёте цепей переменного тока часто приходится производить операции сложения и вычитания токов и напряжений. Когда токи и напряжения заданы аналитически или временными диаграммами (рис. 2.1) эти операции оказываются весьма громоздкими. Рассмотрим вращение вектора на плоскости

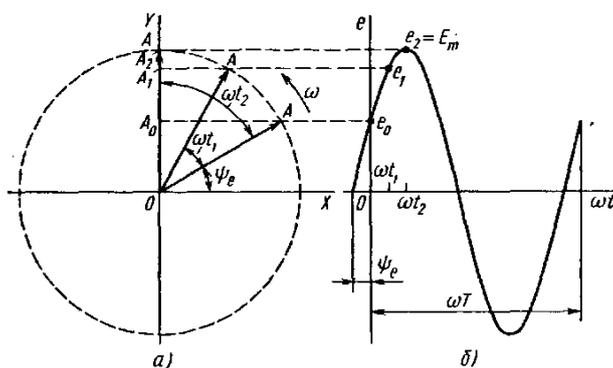


Рисунок 2.1 – Векторное изображение синусоидальных э.д.с.

В плоскости с осями координат  $OX$  и  $OY$  (рис. 2.1,  $a$ ) рассмотрим вращающийся с постоянной скоростью, равной угловой частоте  $\omega$ , вектор  $OA$ , длина которого равна амплитуде синусоидальной э.д.с.

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e)$$

За положительное направление вращения вектора  $OA$  принимаем направление, противоположное вращению часовой стрелки, угол поворота вектора отсчитываем от оси  $OX$ . В начальном положении вектор  $OA$  повернут по отношению к оси  $OX$  на угол  $\psi_e$ .

Построим проекции вектора  $OA$  на ось  $OY$  (рис. 2.1 б), которые изменяются по мере поворота вектора на угол  $\omega t$  по отношению к начальному положению. В начальном положении проекция  $OA_0 = OA \sin \psi_e = E_m \cdot \sin \psi_e = e_0$ , т. е. равна мгновенному значению э. д. с. при  $t=0$ . Через некоторое время вектор  $OA$  повернется на угол  $\omega t_1$  и будет составлять в осью  $OX$  угол  $\omega t_1 + \psi_e$ . Проекция на ось  $OY$ :  $OA_1 = OA \sin(\omega t_1 + \psi_e) = E_m \sin(\omega t_1 + \psi_e) = e_1$ , то есть равна мгновенному значению э. д. с. при  $t=t_1$ . При  $t=t_2$  вектор  $OA$  совпадает с осью  $OY$  и его проекция  $OA = E_m = e_2$ . При дальнейшем вращении вектора  $OA$  его проекции на ось  $OY$  начнут уменьшаться, затем станут отрицательными и т. д.

Таким образом, проекции на ось  $OY$  вектора, вращающегося с постоянной скоростью  $\omega$  и имеющего длину, равную амплитуде э. д. с., изменяются по синусоидальному закону, т. е. представляют собой мгновенные значения синусоидальной э. д. с. Следовательно, справедливо и обратное: любую синусоидально изменяющуюся во времени величину можно изображать вращающимся вектором, длина которого равна амплитуде, а угловая скорость вращения - угловой частоте этой синусоидальной величины. Начальное положение вращающегося вектора определяется углом, равным начальной фазе синусоидальной величины и откладываемым от положительного направления оси  $OX$  в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

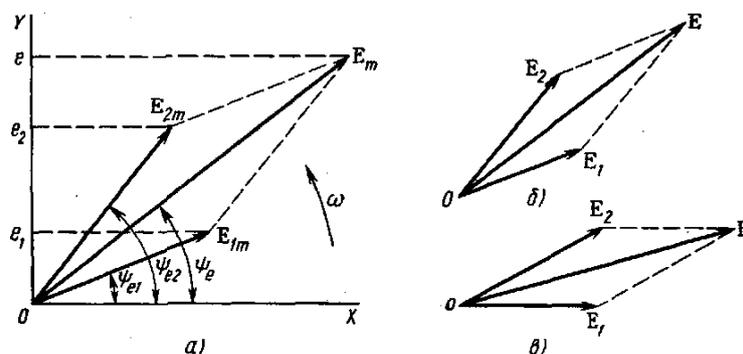


Рисунок 2.2 – Геометрическое сложение вращающихся векторов:

- а - максимальных значений э.д.с.;
- б - действующих значений э.д.с. при произвольном расположении векторов;
- в - действующих значений э.д.с. при расположении начального вектора  $E_1$  по горизонтальной линии.

Векторами можно изображать синусоидальные э. д. с., напряжения, потенциалы и токи. В одних и тех же координатах  $OX$  и  $OY$  можно представить векторы всех э. д. с., действующих в данной электрической цепи, напряжений на всех участках этой цепи и токов во всех ее ветвях. Так как все э. д. с.,

напряжения и токи имеют одинаковую частоту, то изображающие их векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью. Их взаимное расположение на плоскости остается постоянным. Поэтому векторы на практике не вращают, а строят их, соблюдая углы между векторами, которые представляют собой углы сдвига фаз.

Если несколько векторов, э. д. с., напряжений и токов, построенных с учетом их правильного взаимного расположения на плоскости, является изображением э. д. с., напряжения и токов, действующих в какой-то электрической цепи, то такая совокупность векторов называется векторной диаграммой.

### Комплексный метод расчёта

Все графические методы расчета электрических цепей синусоидального тока, в том числе и метод векторных диаграмм, не могут обеспечить высокой точности или очень сложны и трудоемки.

Комплексный метод расчета, базируется на теории комплексных чисел. Его *достоинства*: довольно прост; позволяет добиваться высокой точности.

Любой вектор на плоскости, проведенный из начала координат и изображающий действующее значение э. д. с., напряжения или тока, определяется точкой, соответствующей концу этого вектора (точка  $A$  на рисунке 2.3). На плоскости комплексных чисел точке  $A$  соответствует одно комплексное число  $A$ .

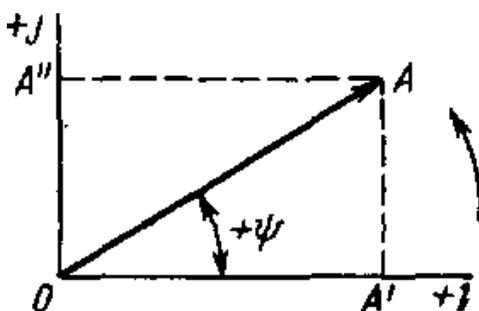


Рисунок 2.3 – Составляющие комплексного числа на комплексной плоскости

Таким образом, любой вектор однозначно изображается комплексным числом, соответствующим концу этого вектора. Комплексный метод расчета применим только к цепям с синусоидальными э. д. с., напряжениями и токами, так как только синусоидальные величины можно изображать векторами.

Комплексное число  $A$  имеет вещественную и мнимую составляющие:

$$\dot{A} = A' + A''$$

где

$A'$  — координата точки  $A$  на вещественной оси;

$A''$  — координата точки  $A$  на мнимой оси;

$$j = \sqrt{-1}$$

Умножение какого-то числа на  $j$  означает поворот его на угол  $\pi/2$  по отношению к положительному направлению вещественной оси в направлении против часовой стрелки.

Координаты точки  $A$  могут быть выражены через длину вектора  $|OA| = A$  и угол  $\varphi$ :  $A' = A \cdot \cos \varphi$  Тогда комплексное число можно записать:

$$\dot{A} = A(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

где

$A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}$  - модуль комплексного числа, равный длине вектора  $OA$ ;

$\varphi = \arctg\left(\frac{A''}{A'}\right)$  - аргумент комплексного числа, т. е. угол, на который век-

тор  $OA$  повернут по отношению к положительному направлению вещественной оси.

Угол  $\varphi$  положителен, если он отсчитывается в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, и отрицателен, если отсчитывается в направлении вращения часовой стрелки.

Используя формулу Эйлера  $\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}$ , получим:

$$\dot{A} = A e^{j\varphi}$$

где

$e^{j\varphi}$  - поворотный множитель, указывающий, на какой угол по отношению к вещественной оси должен быть повернут вектор, длина которого равна  $A$ .

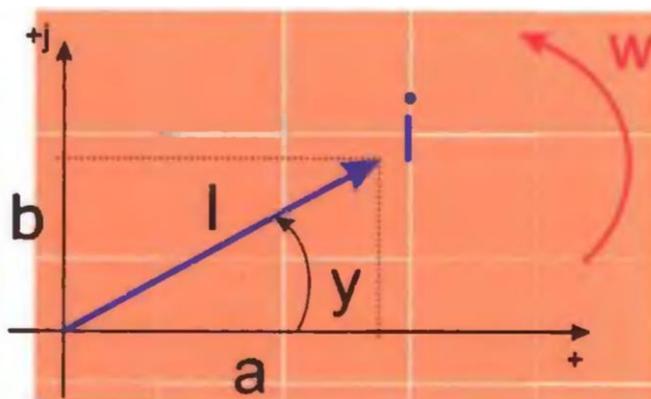


Рисунок 2.4 – Векторная диаграмма тока

### Законы Кирхгофа для электрической цепи синусоидального тока

Для цепей синусоидального тока справедливы законы Кирхгофа. Но так как синусоидальные величины (э.д.с., напряжение, ток) характеризуются мгновенными, максимальными и действующими значениями, то для каждого существуют свои формулировки законов Кирхгофа.

Для мгновенных значений Законы Кирхгофа справедливы в алгебраической форме.

Первый Закон Кирхгофа: алгебраическая сумма мгновенных значений

токов в узле равна нулю  $\sum_{k=1}^n i_k = 0$

По второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма э.д.с. в контуре равна алгебраической сумме падений напряжений в этом

контуре: 
$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n u_k$$

Для максимальных и действующих значений законы Кирхгофа справедливы только в векторной или комплексной форме.

Согласно первому закону, сумма комплексных токов в узле равна нулю

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

По второму закону сумма комплексных э.д.с. в контуре равна сумме комплексных падений напряжений в этом контуре: 
$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^m \dot{U}_k$$

Второй закон Кирхгофа может быть сформулирован иначе: сумма мгновенных или комплексных значений падений напряжений на всех элементах контура, включая источники э.д.с., равна нулю.

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0; \quad \sum_{k=1}^m \dot{U}_k = 0$$

При составлении уравнений по 3-нам Кирхгофа в цепях синусоидального тока необходимо указать условное положительное направление э.д.с., задать условное положительное направление токов в ветвях и положительное направление падений напряжений на участках цепи, совпадающее с положительным направлением тока.

Понятие „сопротивление“ для переменного тока.

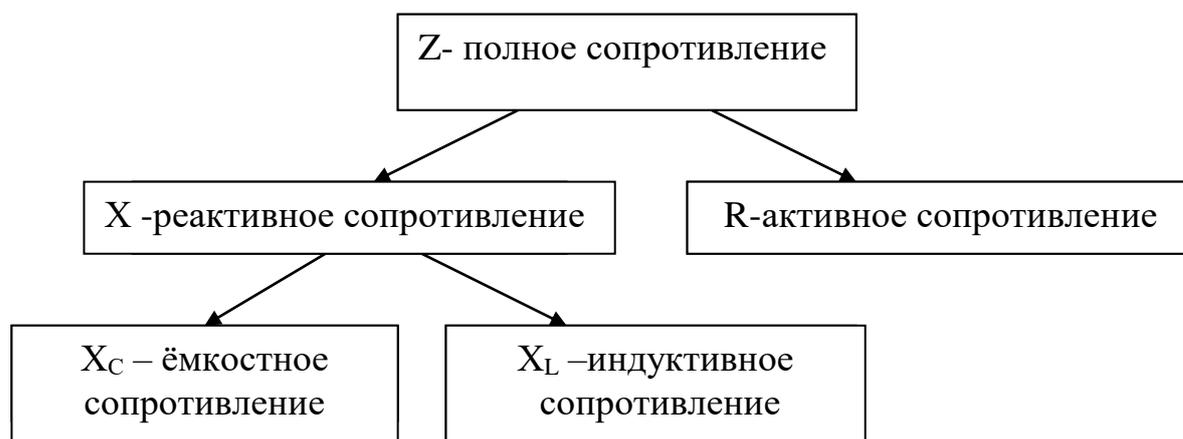
Электрический ток проводимости в металлах представляет собой направленное движение свободных электронов, скорость и направление которого определяются значением и полярностью приложенного к проводнику напряжения. При движении электроны сталкиваются с атомами проводящего вещества и кинетическая энергия электронов, запасенная ими при ускорении, превращается в тепловую энергию, затрачиваемую на нагрев проводника и рассеиваемую в окружающую среду. Это необратимый активный процесс преобразования электрической энергии, который количественно определяется сопротивлением  $R$ . Потому его называют активным сопротивлением.

Активным сопротивлением обладают металлы, уголь, электролиты.

Таким образом, все провода, обмотки, реостаты и другие элементы цепи обладают активным сопротивлением. Элементы электрической цепи, обладающие только активным сопротивлением  $R$ , называют *резисторами*.

При рассмотрении электрических цепей постоянного тока сопротивление  $R$  называли просто сопротивлением.

В теории цепей синусоидального тока его называют активным сопротивлением. То есть необходимо привести название этого сопротивления в соответствие с названиями других по характеру сопротивлений: индуктивное, ёмкостное, реактивное, полное.



где  $X_L$ -индуктивное и  $X_C$ -емкостное сопротивления определяются по формулам:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L, \text{ Ом}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot c} = \frac{1}{2\pi f \cdot c}; \text{ Ом}$$

### Контрольные вопросы по разделу:

1. Линейные электрические цепи синусоидального тока. Амплитуда, частота и фаза синусоидального тока и напряжения.
2. Получение синусоидальной ЭДС.
3. Методы расчета цепей синусоидального ток
4. Комплексный метод расчёта цепей синусоидального тока.
5. Векторное изображение синусоидальных величин на комплексной плоскости.
6. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.
7. Понятие сопротивления для переменного тока.

## ГЛАВА 3. Трехфазные электрические цепи

### 3.1 Основные формулы и уравнения

Трехфазная система электрических токов (ЭДС и напряжений) – это совокупность трех синусоидальных электрических токов (ЭДС и напряжений) одной частоты и сдвинутых по фазе друг относительно друга на  $120^\circ$ . При равенстве амплитуд токов (ЭДС и напряжений) во всех фазах систему называют симметричной.

Часть этой системы, где проходит один из трех токов называют фазой трехфазной системы.

Простейший трехфазный генератор – устройство аналогичное однофазному генератору, но имеющие отличия от последнего. Три однофазные обмотки (фазы) на якоре, начала и концы которых обозначают соответственно А, В, С и  $x, y, z$ . Эти обмотки сдвинуты в пространстве относительно друг друга на углы  $\frac{2\pi}{3}$  ( $120^\circ$ ).

При вращении якоря в обмотках генератора индуцируются ЭДС одной частоты и равной амплитуды, сдвинутые по фазе на  $120^\circ$  друг относительно друга (смотри рисунок 3.1).

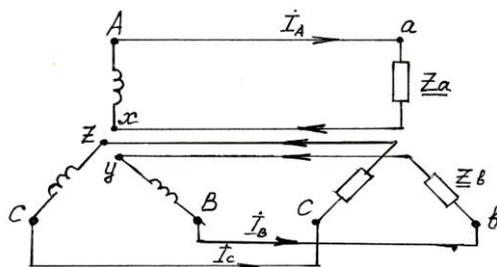


Рисунок 3.1 – Фазы генератора несвязанной трехфазной системы

Если отдельные фазы генератора и приемника соединены между собой (рис. 3.2), то такую систему называют связанной трехфазной системой, в которой фазы могут быть соединены в «звезду» и «треугольник».

### 3.2 Соединение обмоток генератора и приемника в «звезду»

Звезда – это такое соединение, когда к началам обмоток генератора А, В, С присоединяют три линейных провода, идущих к приемнику, а концы обмоток х, у, z соединены в узел, который называют нейтральной или нулевой точкой N-n (рисунок 3.2).

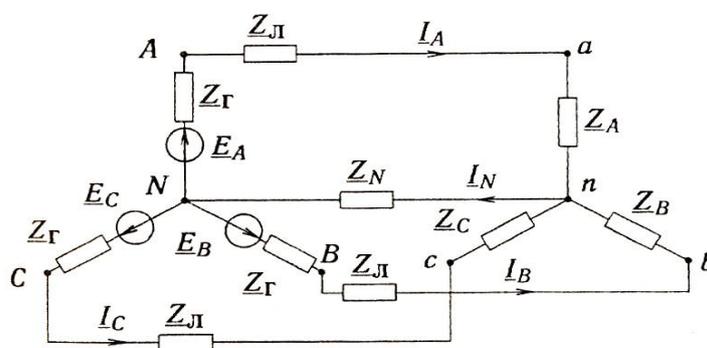


Рисунок 3.2 – Соединение связанной трехфазной цепи по схеме «звезда»

В четырехпроводной системе к этой точке присоединен нейтральный провод (рисунок 3.2), а в трехпроводной системе он отсутствует.

Напряжение между началами и концами фаз генератора или между линейными проводами и нейтральным проводом называют фазным напряжением. Напряжение между двумя линейными проводами называют линейным напряжением.

Токи, проходящие по линейным проводам, называют линейными и обозначают  $I_A, I_B, I_C, I_L$ . Токи, проходящие в фазах, называют фазными токами и обозначают  $I_a, I_b, I_c, I_\phi$ .

При соединении обмоток в «звезду» линейные токи равны соответствующим фазным токам

$$I_{\text{л}} = I_{\phi} \quad (3.1)$$

Линейное напряжение равно геометрической разности соответствующих фазных напряжений.

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A \end{cases} \quad (3.2)$$

Для симметричной системы напряжений ( $z_A = z_B = z_C$ ) имеем

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot U_{\phi} \quad (3.3)$$

В этом случае векторная сумма линейных напряжений равна нулю.

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0 \quad (3.4)$$

Действующее значение токов в фазах приемника

$$\begin{cases} I_a = \frac{U_a}{Z_a}; \\ I_b = \frac{U_b}{Z_b}; \\ I_c = \frac{U_c}{Z_c}; \end{cases} \quad (3.5)$$

В четырёхпроводной системе ток в нулевом проводе равен векторной сумме токов отдельных фаз

$$I_N = I_a + I_b + I_c \quad (3.6)$$

Если в четырехпроводной трехфазной цепи  $z_A = z_B = z_C$ , то ток в нулевом проводе равен нулю.

Активная мощность всей цепи при неравномерной нагрузке равна сумме активных мощностей отдельных фаз

$$P = P_a + P_b + P_c, \quad (3.7)$$

где  $P_a, P_b, P_c$  - активные мощности отдельных фаз приемника.

$$\begin{cases} P_a = U_a \cdot I_a \cos \varphi_a \\ P_b = U_b \cdot I_b \cos \varphi_b, \\ P_c = U_c \cdot I_c \cos \varphi_c \end{cases} \quad (3.8)$$

Реактивная мощность всей цепи при неравномерной нагрузке равна алгебраической сумме реактивных мощностей отдельных фаз.

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c, \quad (3.9)$$

где  $Q_a, Q_b, Q_c$  - реактивные мощности отдельных фаз приемника.

$$\begin{cases} Q_a = U_a \cdot I_a \sin \varphi_a \\ Q_b = U_b \cdot I_b \sin \varphi_b, \\ Q_c = U_c \cdot I_c \sin \varphi_c \end{cases} \quad (3.10)$$

Полная потребляемая мощность цепи при неравномерной нагрузке

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (3.11)$$

где

$P$  – активная мощность всей цепи, Вт;

$Q$  – реактивная мощность всей цепи, вар.

При симметричной нагрузке мощность всей цепи:

$$\text{- активная } P = 3U_\phi \cdot I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_\lambda \cdot I_\lambda \cos \varphi; \quad (3.12)$$

$$\text{- реактивная } Q = 3U_\phi \cdot I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3}U_\lambda \cdot I_\lambda \sin \varphi; \quad (3.13)$$

$$\text{- полная } Q = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi = \sqrt{3} \cdot U_\lambda \cdot I_\lambda \quad (3.14)$$

### 3.3 Соединение обмоток приемника по схеме «треугольник»

При соединении обмоток по схеме «треугольник» конец обмотки  $ab$  соединяется с началом обмотки  $bc$ , а конец обмотки  $bc$  соединяется с началом обмотки  $ca$ , а ее коней в свою очередь соединяется с началом обмотки  $ab$  (рисунок 3.3 и 3.4)

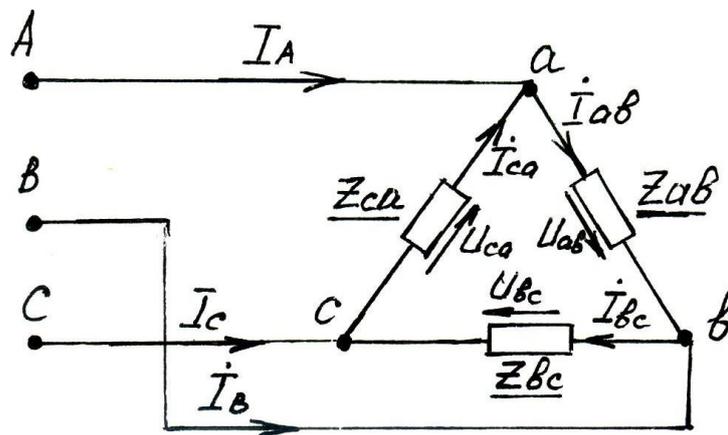


Рисунок 3.3 – Соединение обмоток по схеме «треугольник»

При соединении обмоток по схеме «треугольник» линейные и фазные напряжения равны, т.е.  $U_\lambda = U_\phi$ , а линейные и фазные токи отличаются в  $\sqrt{3}$  раз, т.е.

$$I_\lambda = \sqrt{3} \cdot I_\phi, \quad (3.15)$$

Линейные токи равны геометрической разности векторов соответствующих фазных токов

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \end{cases} \quad (3.16)$$

Векторные диаграммы линейных и фазных токов показаны на рисунке 3.4(б).

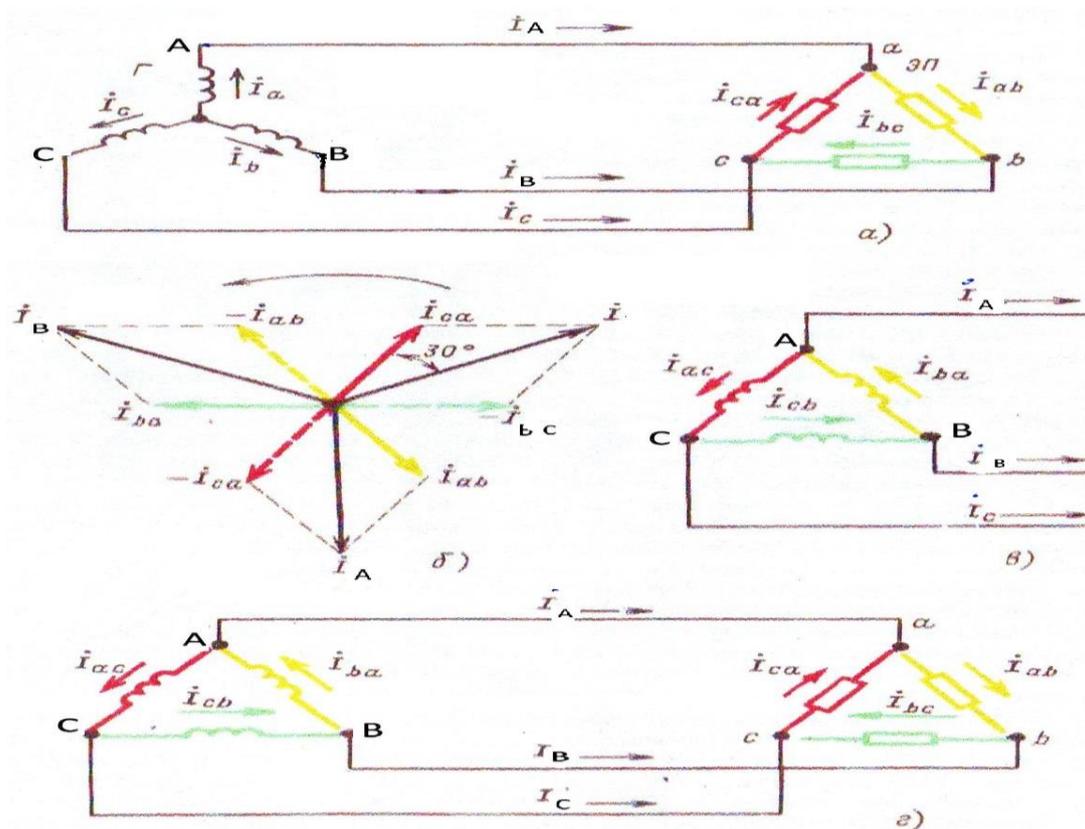


Рисунок 3.4 – Определение линейных токов при соединении в треугольник

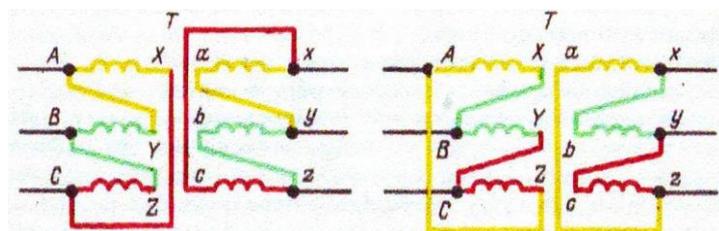


Рисунок 3.5 – Соединение в треугольник обмоток трансформатора

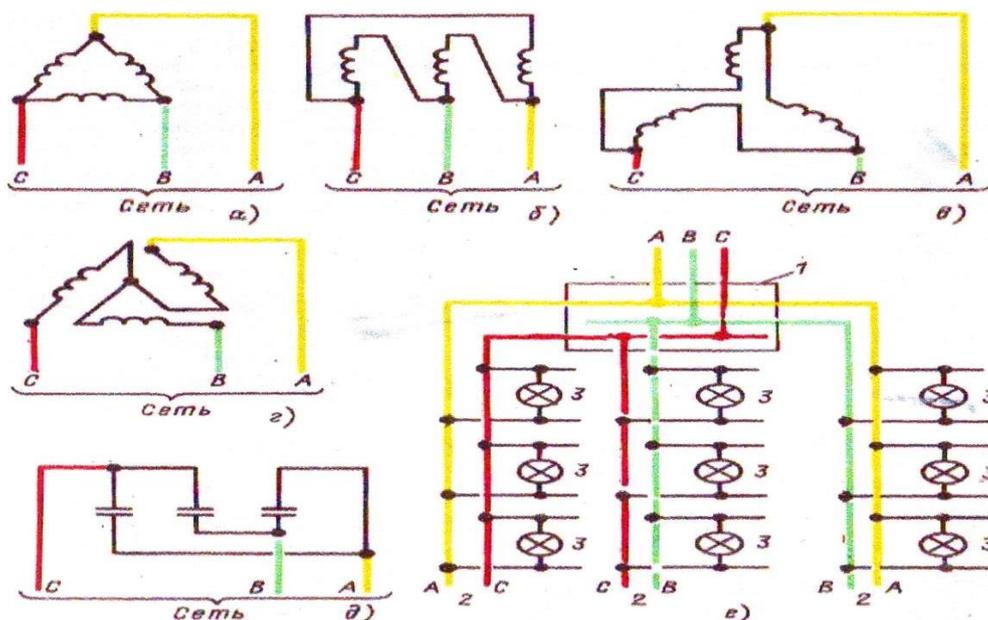


Рисунок 3.6 – Соединение в треугольник электроприемников

Если сопротивление линейных проводов не равно нулю (рис. 3.7а), то из-за падения напряжения в них треугольник не обеспечивает независимой работы фаз. Изменение напряжения, сопротивления в линейных проводах А и В, вызовет изменение фазного тока  $I_{ab}$ , а следовательно и линейных токов  $I_A, I_B$ . При этом изменяются падения напряжения в линейных проводах А и В, что при неизменных линейных напряжениях на зажимах генератора вызовет изменение напряжений на всех трех фазах приемника. При этом должны изменяться фазные токи  $I_{bc}, I_{ca}$  тех фаз, сопротивление которых осталось неизменным.

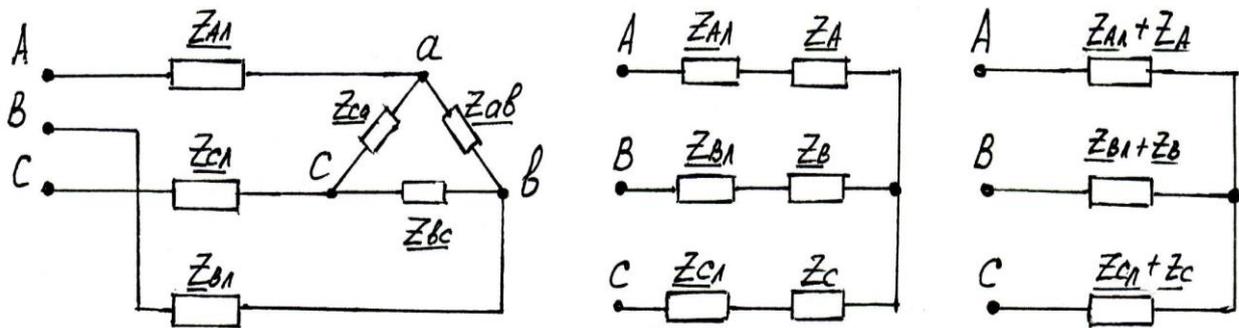


Рисунок 3.7 – Схема преобразования треугольника в эквивалентную звезду

Для расчёта цепи (рисунок 3.7а) при заданных линейных напряжениях, помимо методов уравнений Кирхгофа, наложения, контурных токов при отсутствии взаимной индукции можно применить метод преобразования. Треугольник сопротивлений  $z_{ab}, z_{bc}, z_{ca}$  преобразуют в эквивалентную звезду с сопротивлениями  $z_a, z_b, z_c$  по формулам

$$\begin{cases} z_a = \frac{z_{ab} \cdot z_{ca}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}} \\ z_b = \frac{z_{ab} \cdot z_{bc}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}}; \\ z_c = \frac{z_{bc} \cdot z_{ca}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}} \end{cases} \quad (3.17)$$

Объединяя, в каждой фазе сопротивление линии и приемника приводят схему к звезде (рис. 3.7 в) после определения токов, которой возвращаются к цепи (рис. 3.7 б). Находят фазные токи и линейные напряжения на звезде  $z_a, z_b, z_c$ . Затем переходят к исходному треугольнику (рис 3.7 а) и находят его фазные токи.

Приведенные выше выражения для расчёта соединения треугольником справедливы для общего случая несимметричной системы напряжений генератора.

Определение полной, активной и реактивной мощностей при равномерной и неравномерной нагрузках производится по формулам 3.7...3.14.

### 3.4 Типовые задачи с решением

**Задача 1.** Трёхфазный асинхронный электродвигатель с номинальной мощностью 10кВт, и  $\cos\varphi = 0.87$ ;  $\eta = 82\%$  подключен к трёхфазной сети с линейным напряжением 220В.

Необходимо определить:

- ток в проводах, к которым подключен двигатель;
- сопротивление фаз обмоток электродвигателя при соединении фаз обмоток статора треугольником (рис. 3.8);
- построить векторную диаграмму токов и напряжений двигателя.

Решение:

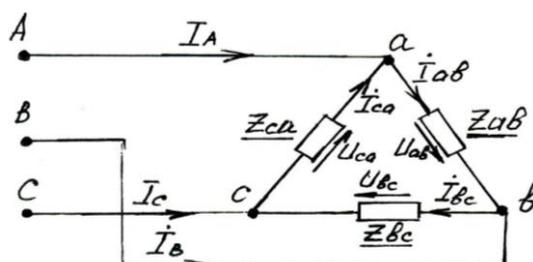


Рисунок 3.8 – Схема приемника соединение «треугольником»

1. Потребляемая мощность электродвигателя из сети:

$$P_1 = \frac{P_H}{\eta} = \frac{10 \cdot 10^3}{0.82} = 12.2 \text{ кВт}$$

2. Линейные токи электродвигателя

$$I_A = I_B = I_C = I_L = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_L \cdot \cos\varphi} = \frac{12.2 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.87} \cong 37 \text{ А}$$

3. Мощность одной фазы двигателя

$$P_\phi = \frac{P_1}{3} = \frac{12.2 \cdot 10^3}{3} = 4070 \text{ Вт} = 4,07 \text{ кВт}$$

4. Активное сопротивление фазы двигателя

$$R_\phi = \frac{P_\phi}{I_\phi^2} = \frac{4,07 \cdot 10^3}{\left(\frac{37}{\sqrt{3}}\right)^2} = 8,9 \text{ Ом}$$

где  $I_\phi$  - фазный ток приемника при соединении обмотки по схеме треугольник

$$I_{\phi\Delta} = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{37}{\sqrt{3}} = 21,39 \text{ А}$$

5. Индуктивное сопротивление обмотки приемника

$$X_\phi = z_\phi \cdot \sin\varphi = 10,3 \cdot 0,87 = 5,07 \text{ Ом}$$

где  $z_\phi$  - полное сопротивление одной фазы двигателя

$$z_\phi = \frac{U_\phi}{I_\phi} = \frac{220}{\frac{37}{\sqrt{3}}} = 10,3 \text{ Ом}$$

6. Запишем фазное напряжение двигателя в комплексной форме

$$\dot{U}_{ab} = 220B$$

$$\dot{U}_{bc} = 220e^{-j120^\circ} B$$

$$\dot{U}_{ca} = 220e^{j120^\circ} B$$

7. Фазные токи приемника в комплексной форме при условии  $\cos\varphi = 0.87$  ( $\varphi = 29.6^\circ$ )

$$\dot{I}_{ab} = I_\phi \cdot e^{-j29.6^\circ} = 21.3 \cdot e^{-j29.6^\circ} A$$

$$\dot{I}_{bc} = I_\phi \cdot e^{-j149.8^\circ} = 21.3 \cdot e^{-j149.8^\circ} A$$

$$\dot{I}_{ca} = I_\phi \cdot e^{j90.4^\circ} = 21.3 \cdot e^{j90.4^\circ} A$$

8. Строим векторную диаграмму токов и напряжений в масштабе на комплексной плоскости. Примем масштаб:  $m_U = \frac{50B}{1\text{мм}}$ ;  $m_I = \frac{5A}{1\text{мм}}$

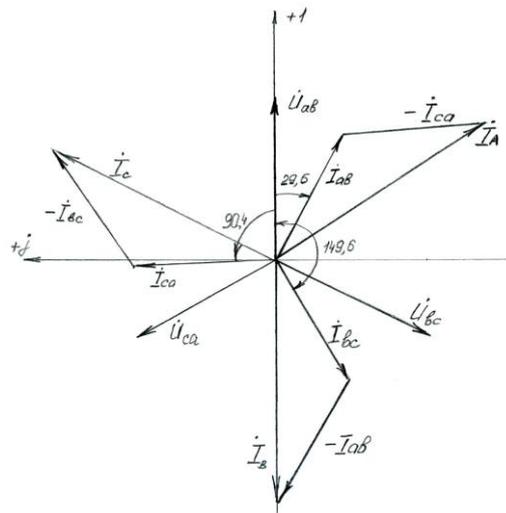


Рисунок 3.9 – Векторная диаграмма токов и напряжений двигателя

**Задача 2.** Трёхфазный двигатель мощностью 7 кВт, напряжением 127/220В работает с коэффициентом мощности 0,78 и КПД равным 87%. Необходимо определить:

- токи в проводах, с помощью которых двигатель присоединяется к сети;
- сопротивление фаз обмоток двигателя;
- построить векторную диаграмму токов и напряжений электродвигателя.

Решение

1. Потребляемая мощность электродвигателя из сети:

$$P_1 = \frac{P_H}{\eta} = \frac{7 \cdot 10^3}{0.87} = 8,05 \text{ кВт}$$

2. Токи в подводящих проводах

- при соединении обмоток по схеме звезда

$$I_{Л\gamma} = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_{Л\gamma} \cdot \cos\varphi} = \frac{8.05 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.78} \cong 27.1 A$$

- при соединении фаз обмоток по схеме треугольник

$$I_{Л\Delta} = \frac{P_1}{\sqrt{3} \cdot U_{Л\Delta} \cdot \cos\varphi} = \frac{8.05 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 127 \cdot 0.78} \cong 47 \text{ A}$$

3. Сопротивление фаз обмоток

- активное сопротивление фазы

$$R_\phi = \frac{P_\phi}{I_{\phi\gamma}^2} = \frac{P_1/3}{I_{\phi\gamma}^2} = \frac{8.05/3 \cdot 10^3}{27.1^2} = 3.65 \text{ Ом}$$

- полное сопротивление фазы

$$z_\phi = \frac{U_{\phi\gamma}}{I_{\phi\gamma}} = \frac{127}{27.1} = 4.7 \text{ Ом}$$

- индуктивное сопротивление фазы

$$X_\phi = \sqrt{z_\phi^2 - R_\phi^2} = \sqrt{4.7^2 - 3.65^2} = 2.96 \text{ Ом}$$

4. Запишем комплексы фазных напряжений при соединении обмоток по схеме «звезда»

$$\dot{U}_a = U_{\phi\gamma} \cdot e^{j\varphi} = 127 \cdot e^{j0^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_b = U_{\phi\gamma} \cdot e^{-j120^\circ} = 127 e^{-j120^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_c = U_{\phi\gamma} \cdot e^{j120^\circ} = 127 e^{j120^\circ} \text{ В}$$

5. Комплексы фазных токов при соединении обмоток по схеме «звезда»

$$\dot{I}_a = I_{\phi\gamma} \cdot e^{-j39^\circ} = 21.3 \cdot e^{-j39^\circ} \text{ А}$$

$$\dot{I}_b = I_{\phi\gamma} \cdot e^{-j159^\circ} = 27.1 \cdot e^{-j159^\circ} \text{ А}$$

$$\dot{I}_c = I_{\phi\gamma} \cdot e^{j81^\circ} = 27.1 \cdot e^{j81^\circ} \text{ А}$$

6. Векторная диаграмма токов и напряжений приемника представлена на рисунке 3.10.

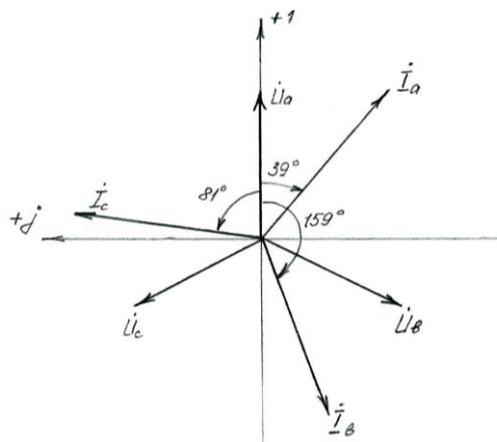


Рисунок 3.10 – Векторная диаграмма токов и напряжений приемника

**Задача 3.** Приёмник электрической энергии включен в трехфазную четырехпроводную сеть с действующим значением фазного напряжения  $U_\phi = 127 \text{ В}$  и частотой  $f = 50 \text{ Гц}$ . В фазу А включен резистор сопротивлением  $R_a = 181.4 \text{ Ом}$ , в

фазу В – конденсатор емкостью 17,5мкФ. Определить характер (емкостной, индуктивный, активный) нагрузки, включенной в фазу С, её полное, активной и реактивное сопротивления, необходимые для того, чтобы ток в нейтральном проводе был равен нулю.

Решение.

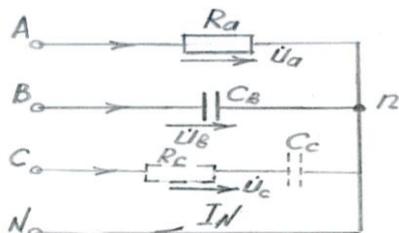


Рисунок 3.11 – Расчётная схема

1. Ёмкостное сопротивление фазы В (рисунок 3.10)

$$X_{CB} = \frac{1}{\omega C_B} = \frac{1}{2\pi f \cdot C_B} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 17.5 \cdot 10^{-6}} \cong 182 \text{ Ом}$$

2. Комплексы фазных напряжений

$$\dot{U}_a = U_{\phi_Y} \cdot e^{j\varphi} = 127 \cdot e^{j0^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_b = U_{\phi_Y} \cdot e^{-j120^\circ} = 127 e^{-j120^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_c = U_{\phi_Y} \cdot e^{j120^\circ} = 127 e^{j120^\circ} \text{ В}$$

На рисунке 3.12 представлена векторная диаграмма напряжений приемника.

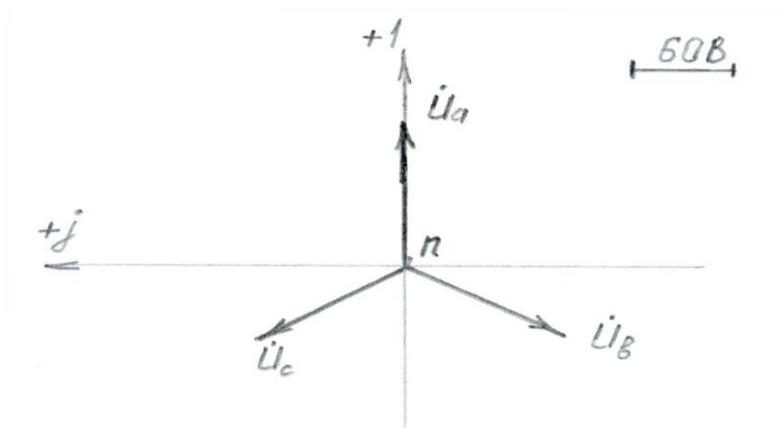


Рисунок 3.12 – Векторная диаграмма напряжений приемника

3. Фазные токи приемника

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{R_a} = \frac{127}{181.4} = 0.7 \text{ А}$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{X_{CB}} = \frac{127 e^{-j120^\circ}}{182 \cdot e^{-j90^\circ}} = 0.7 e^{-j30^\circ} = (0.6 - j0.35) \text{ А}$$

4. Ток в фазе С определяем из условия, что

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

отсюда  $\dot{I}_C = -\dot{I}_A - \dot{I}_B = -0.7 - (0.6 - j0.35) = -1.3 + j0.35 = 1.346e^{j165^\circ}$

5. Полное сопротивление фазы С

$$\underline{z}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{127e^{j120^\circ}}{1.346e^{j165^\circ}} = 94.35e^{-j45^\circ} = (66.5 - j66.5)\text{Ом}$$

6. Отсюда, чтобы ток в нейтральном проводе был бы равен нулю, необходимо в фазу С включить резистор сопротивлением  $R_C = 66.5\text{Ом}$ , и последовательно с ним включить емкость

$$7. C_C = \frac{1}{\omega|x_{Cc}|} = \frac{1}{314 \cdot 66.5 \cdot 10^{-6}} = 47,89\text{мкФ}.$$

где  $x_{Cc}$  - ёмкостное сопротивление фазы С, Ом,  $x_{Cc} = -66,5\text{Ом}$

8. Строим векторную диаграмму токов и напряжений в масштабе на комплексной плоскости. Примем масштаб:  $m_U = \frac{60\text{В}}{1\text{мм}}$ ;  $m_I = \frac{0,85\text{А}}{1\text{мм}}$  (рис 3.13)

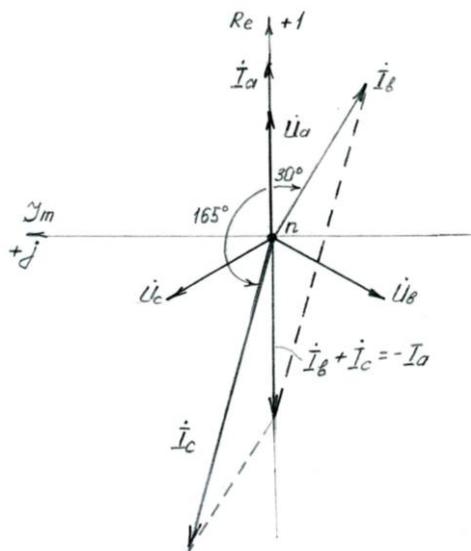


Рисунок 3.13 – Векторную диаграмму токов и напряжений приемника

9. Проверка  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = I_N = 0.7 + (0.6 - j0.35) + (-1.3 + j0.35) = 0$ , что соответствует условию  $I_N = 0$ .

### Контрольные вопросы по разделу:

1. Понятие о трехфазной системе
2. Получение трёхфазной системы э.д.с.
3. Схемы соединения трёхфазных цепей.
4. Соотношение между фазными и линейными величинами.
5. Соединение фаз приемника в «звезду» с нулевым проводом.
6. Соединение фаз приемника «треугольником».
7. Выводы по трехфазным цепям.

## ГЛАВА 4. Переходные процессы в линейных электрических цепях

### 4.1 Основные сведения о расчёте переходных процессов электрических цепей

Переходные процессы возникают в электрических цепях при переходе от одного установившегося режима работы к другому установившемуся режиму (рис.4.1). Смена режимов происходит в результате коммутаций (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и др.).

Переходной процесс протекает в течение определенного времени, которое зависит от запасов энергии в реактивных элементах цепи. Продолжительность переходного процесса может быть весьма незначительной, от долей секунды до долей микросекунды. При этом токи и напряжения в переходных процессах могут существенно превышать токи и напряжения в стационарных режимах, что может привести к разрушению различных элементов электрических и электронных схем.

В то же время при разумном ограничении напряжений и токов при переходных процессах их можно использовать для формирования различных электрических сигналов. Поэтому расчет переходных режимов в электрических цепях является очень важным для решения проблемы повышения надежности различных электрических и электронных устройств.

Момент внезапного изменения режима работы электрической цепи принимают за начальный (нулевой) момент времени, относительно которого характеризуют состояние цепи и описывают сам переходной процесс. Переходные токи, напряжения, ЭДС и другие значения обозначают малыми буквами, а их конкретные значения отмечают моментом времени, предшествующим изменению режима. Например, ток в момент времени, предшествующий изменению режима работы цепи, обозначают  $i(0_-)$ , в первый момент времени после изменения режима -  $i(0_+)$ , а в заданный момент времени  $t - i(t)$ . Установившееся значение тока, равное после завершения переходного процесса  $I_2$ , обозначают  $i(\infty) = I_2$ .

Для переходного процесса, рассматриваемого на рис.1, имеем  $i(0_-) = i(0_+) = I_1$ ;  $i(\infty) = I_2$ .

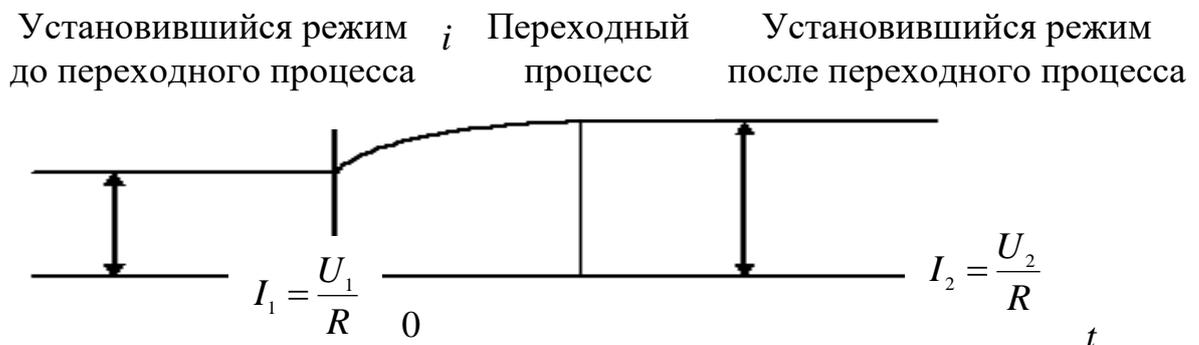


Рисунок 4.1 – Временные изменения тока в цепи при переходном процессе

**Первый закон.** В любой ветви с индуктивностью ток и магнитный поток в момент коммутации сохраняют те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, а дальше начинает изменяться именно с этих значений, т.е.

$$i(0) = i(0_+) \text{ и } \Phi(0_-) = \Phi(0_+).$$

**Второй закон.** В любой ветви с конденсатором напряжение и заряд сохраняют в момент коммутации те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем изменяются, начиная именно с этих значений, т.е.

$$u(0) = u(0_+) \text{ и } Q(0_-) = Q(0_+).$$

В цепях с индуктивностью или емкостью переходной процесс можно рассматривать как результат наложения двух процессов – принужденного и свободного. Ток и напряжение в цепи в течение переходного процесса можно представить в виде суммы принужденных и свободных значений токов и напряжений, т.е.

$$i_{пер}(t) = i_{прин}(t) + i_{св}(t).$$

Для расчета и анализа переходных процессов в электрических цепях применяются следующие методы: классический; операторный; частотный (спектральный); с помощью интеграла Дюамеля; переменных состояний.

**Классический метод** заключается в решении дифференциальных уравнений цепи, составленных по первому и второму законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений. Решение состоит в определении: корней характеристического уравнения, свободных составляющих переходного процесса, постоянных интегрирования и, наконец, переходных токов и напряжений.

Особенность классического метода состоит в том, при решении задачи имеют дело с реальными величинами и с реальным временем. Результаты расчета обычно иллюстрируют графиками. Однако эти расчеты сложны и требуют применения вычислительной техники.

**Операторный метод** состоит в том, что реальная функция времени, называемая *оригиналом*, заменяется другой функцией - *изображением*. Эта замена осуществляется с помощью прямых преобразований Лапласа и Карсона-Хевисайда.

Изображение является функцией не времени  $t$ , а комплексной переменной или оператора  $p$ . Его невозможно представить графически. Это означает, что расчет операторным методом проводится не в реальном масштабе времени. Однако данный недостаток компенсируется тем преимуществом перед классическим методом, что операции дифференцирования и интегрирования по времени сводятся к простым алгебраическим операциям умножения и деления. В результате решения системы уравнений получается изображение искомой функции, от которого переходят к ее оригиналу. Благодаря этим преимуществам операторный метод широко применяется в инженерных расчетах.

## 4.2 Классический метод расчета переходных процессов

Рассматриваемый метод относится к линейным цепям с сосредоточенными параметрами. Расчет переходных процессов классическим методом сводится к выполнению следующих операций:

1. На схеме цепи после коммутации указывают положительные направления токов в ветвях.

2. Составляют дифференциальные уравнения для мгновенных значений токов и напряжений по законам Кирхгофа для переходного режима.

Так как падение напряжения на активном сопротивлении  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$  определяют по формулам:  $u_R = i \cdot R$ ;  $u_L = L \frac{di}{dt}$  и  $u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$ , то по законам Кирхгофа будет составлена система интегрально-дифференциальных уравнений заданной цепи.

3. Полученную систему уравнений решают относительно искомой функции (тока или напряжения). В результате получают неоднородное линейное дифференциальное уравнение, порядок которого равен числу независимых мест накопления энергии. В случае двух независимых мест накопления в схеме линейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$a \frac{d^2 t}{dt^2} + b \frac{di}{dt} + ci = f(u),$$

где

$a, b, c$  - коэффициенты, зависящие от параметров цепи;

$f(u)$  - неоднородный член уравнения, зависящий от величины и формы приложенного к цепи напряжения.

4. Решают неоднородное линейное дифференциальное уравнение, в результате чего находят искомый ток или напряжение переходного процесса.

Решение дифференциального уравнения складывается из общего решения однородной части этого уравнения (правая часть равна нулю) и частного решения неоднородного уравнения, определяемого видом  $f(u)$ .

Частное решение выражает принужденный режим, задаваемый источниками энергии, а общее решение - свободный режим. Таким образом, ток переходного процесса равен  $i = i_{np} + i_{св}$ , а напряжение  $u = u_{np} + u_{св}$ .

5. Находят принужденную составляющую путем расчета цепи после коммутации.

6. Записывается характеристическое уравнение цепи типа  $ap^2 + bp + c = 0$  и определяются его корни.

7. Находят свободную составляющую, которая зависит от характера цепи, т.е. определяется видом корней характеристического уравнения  $p_K$ .

Общее решение для свободной составляющей ищут в виде

$$i_{св} = A_K \cdot e^{p_K \cdot t},$$

где

$A_K$  - постоянная интегрированная;

$p_K$  - корни характеристического уравнения.

При этом, если:

а) корни вещественные, отрицательные и разные ( $p_1 < 0; p_2 < 0$ ), переходной режим будет *апериодическим* и свободная составляющая тока запишется в виде

$$i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

б) корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные ( $p_1 = -\delta + j\omega_0; p_2 = -\delta - j\omega_0$ ), то в цепи будет периодический (колебательный) режим и свободная составляющая тока выражается зависимостью

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma),$$

где

$\delta$  - коэффициент затухания переходного режима;

$\omega_0$  - угловая частота свободных колебаний тока (напряжения);

$\gamma$  - начальная фаза переходного тока (напряжения).

в) корни характеристического уравнения равные, отрицательные ( $p_1 = p_2 = p < 0$ ), то свободная составляющая определяется

$$i_{св} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}.$$

8. Определяют постоянные интегрирования  $A_1; A_2$  и угол  $\gamma$  по начальным условиям, исходя из законов коммутации в момент времени  $t = 0$ . Для этого сначала определяют начальные значения тока на участках цепи с индуктивностью и напряжения на участках с емкостью

$$i(0_-) = i(0) = i(0_+);$$

$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+).$$

Подставляя эти значения в исходные дифференциальные уравнения при  $t = 0$ , определяют начальные значения токов в остальных ветвях.

Производная от тока в индуктивности находится непосредственно из уравнения, написанного для контура, в который входит ветвь с индуктивностью.

Производные от токов в других ветвях схемы определяются из уравнения, в котором нет ветви с индуктивностью после его дифференцирования и перехода к  $t = 0$ . При этом напряжение на конденсаторе нужно писать в форме интеграла

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt,$$

что дает  $\frac{du_C}{dt} = \frac{i_C(0)}{C}$ .

В некоторых случаях нужно использовать и первый закон Кирхгофа для производных токов  $\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$ .

Если характеристическое уравнение представляет собой уравнение *первого порядка*, то  $i_{cв} = Ae^{p_1 t}$  и тогда  $A = i_{cв}(0_+)$ .

Если характеристическое уравнение *второго порядка*, то  $i_{cв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$  и тогда  $A_1 = \frac{i'_{cв}(0_+) - p_2 \cdot i_{cв}(0_+)}{p_1 - p_2}$ ;  
 $A_2 = i_{cв}(0_+) - A_1$ .

Если корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные, то  $i_{cв} = Ae^{-\delta} \cdot \sin(\omega_0 t - \gamma)$ , тогда значения  $A$  и  $\gamma$  находят из совместного решения двух уравнений

$$\begin{cases} i_{cв}(0_+) = A \sin \gamma; \\ i'_{cв}(0_+) = -A \delta \sin \gamma + A \omega_0 \cos \gamma. \end{cases}$$

9. Характеристическое уравнение находится из входного сопротивления схемы в операторной форме.

### 4.3 Операторный метод расчета переходных процессов.

В операторном методе функцию вещественного переменного времени  $t$ , называемую *оригиналом*, заменяют соответствующей функцией комплексного переменного, зависящей от оператора  $p$  и называемой *изображением*.

В этом методе действия дифференцирования и интегрирования данной функции – оригинала заменены более простыми алгебраическими действиями над изображением этой функции.

При этом дифференциальные уравнения для оригиналов электрических величин тока и напряжения преобразуются в более простые алгебраические уравнения для изображений тех же величин.

В простейших случаях при составлении алгебраических уравнений, в которые входят изображения искомых функций, операция дифференцирования оригинала может быть заменена умножением изображения искомой функции на оператор  $p$ .

В результате решения полученной системы алгебраических уравнений находят изображения искомых электрических величин (токов и напряжений). Путем обратных преобразований полученных изображений находят соответствующие им оригиналы, т.е. искомые функции времени.

В этом методе отпадает необходимость определять постоянные интегрирования по начальным условиям, так как начальные условия учитываются при составлении алгебраических уравнений для изображений искомых электрических величин.

Для преобразования заданной функции  $f(t)$  - оригинала в соответствующую функцию  $F(p)$  - изображение можно применить прямое преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \text{ или } F(p) \doteq f(p),$$

где

$p$  - комплексная переменная или оператор

$$p = \delta + j\omega_0,$$

где

$\delta$  - вещественная часть оператора, характеризует затухание переходного процесса;

$\omega_0$  - мнимая часть того же оператора, характеризует угловую частоту свободных колебаний.

Прямое преобразование Лапласа условно обозначают  $F(p) \doteq L[f(t)]$ .

Переход от изображения  $F(p)$  к оригиналу  $f(t)$  может быть осуществлен при помощи обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(p)e^{pt} dt \text{ или сокращенно } f(t) = L^{-1}[F(p)].$$

Постоянное напряжение  $U$  будет записываться в операторной форме как  $\frac{U}{p}$ , т.е.  $U(p) = \frac{U}{p}$ .

Изображение гармонического напряжения  $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$  будет

$$u(p) = U_m \cdot \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}.$$

Пользуясь комплексными числами, гармоническое напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  можно представить как мнимую часть полного комплекса  $U_m e^{j(\omega t + \psi)}$ , т. е.  $u = \text{Im}[U_m e^{j(\omega t + \psi)}]$ .

В этом случае изображение гармонического напряжения значительно упрощается и имеет вид  $u(p) = \frac{U_m e^{j\psi}}{p - j\omega}$ .

Операторные сопротивления цепей записываются так же, как и сопротивления для тех же цепей в комплексной форме, в которых  $j\omega$  заменено на  $p$ . Так для цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов  $R, L$  и  $C$ , операторное сопротивление  $Z(p) = R + pL + \frac{1}{Cp}$ .

Напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости в операторной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} u_R(p) &= R \cdot I(p); \\ u_L(p) &= pLI(p) - Li(0); \\ u_C(p) &= \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}, \end{aligned}$$

где

$i(0)$  и  $u_C(0)$  - начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости.

Уравнения для изображений тока и напряжения любой цепи могут быть получены по законам Ома и Кирхгофа, написанных для операторных схем замещения.

$$\text{Закон Ома в операторной форме - } I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{Z(p)};$$

Закон Кирхгофа в операторной форме

$$\begin{aligned} \sum_1^n I_K(p) &= 0; \\ \sum_1^n I_K(p) \cdot Z(p) &= \sum_1^n \left[ E_K(p) + L_K i_K(0) - \frac{u_{CK}(0)}{p} \right]. \end{aligned}$$

Полученную систему уравнений в операторной форме решают относительно изображения искомого тока или напряжения. В общем случае выражения для тока в любой ветви в операторной форме имеет вид

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

где

$F_1(p)$  и  $F_2(p)$  - алгебраические многочлены степени которых соответственно  $m$  и  $n$ , причем  $m < n$ .

Переход от изображения к оригиналу осуществляется при помощи теоремы разложения

$$i(t) = \sum_1^n \frac{F_1(p_K)}{F_2'(p_K)} \cdot e^{p_K t},$$

где

$p_K$  - корни уравнения  $F_2(p) = 0$ ;

$n$  - число корней;

$F_1(p_K)$  - значение функции  $F_1(p)$  при  $p = p_K$ ;

$F_2'(p_K)$  - значение производной функции  $F_2(p)$  при  $p = p_K$ .

При подключении источника постоянного или гармонического напряжения к пассивной цепи с входным операторным сопротивлением  $Z(p)$  на осно-

вании теоремы разложения получены простые расчетные формулы, называемые формулами включения

$$i(t) = \frac{U}{Z(0)} + \sum \frac{U}{p_K Z'(p_K)} \cdot e^{p_K t},$$

где  $p_K$  - корни уравнения  $Z(p) = 0$ .

При включении цепи на синусоидальные напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  величина тока

$$i(t) = Jm \left[ \frac{U_m e^{(j\omega t + \psi)}}{Z(j\omega)} + \sum \frac{U_m e^{j\psi}}{(p_K + j\omega) \cdot Z'(p_K)} \cdot e^{p_K t} \right],$$

где  $U_m$  - амплитуда приложенного напряжения;

$\psi$  - начальная фаза приложенного напряжения;

$Z(j\omega)$  - полное сопротивление в комплексной форме;

$Z'(p_K)$  - производная операторного сопротивления при  $p = p_K$ .

Знак  $Jm$  означает, что от полученного комплексного уравнения берется коэффициент при мнимой части.

При расчете переходных процессов операторным методом в электротехнике часто применяют также прямое преобразование Карсона-Хевисайда, которое записывается

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

В преобразовании Карсона-Хевисайда в отличие от преобразования Лапласа перед интегралом имеется множитель  $p$ . Это дает возможность иметь одну и ту-же размерность для оригинала и изображения, а изображение постоянной равно самой постоянной, т.е.  $U(p) = U$ .

Операторные изображения простейших функций времени, часто встречающихся при расчётах переходных процессов, приведены в приложении 1.

### Контрольные вопросы к разделу:

1. Основные сведения о расчёте переходных процессов электрических цепей
2. График переходного процесса.
3. Основные понятия и принципы анализа переходных процессов
4. Законы коммутации.
5. Классический метод расчета переходных процессов.
6. Определение постоянных интегрирования в классическом методе.
7. Операторный метод расчёта переходных процессов. Понятие об операторном методе.

## ГЛАВА 5. Электрические цепи несинусоидального тока

Периодические несинусоидальные токи и напряжения в электрических цепях возникают в случае действия в них несинусоидальных ЭДС и/или наличия в них нелинейных элементов. Реальные ЭДС, напряжения и токи в электрических цепях синусоидального переменного тока по разным причинам отличаются от синусоиды. В энергетике появление несинусоидальных токов или напряжений нежелательно, т.к. вызывает дополнительные потери энергии. Однако существуют большие области техники (радиотехника, автоматика, вычислительная техника, полупроводниковая преобразовательная техника), где несинусоидальные величины являются основной формой ЭДС, токов и напряжений. В этом разделе мы рассмотрим методы расчёта линейных электрических цепей при воздействии на них источников периодических несинусоидальных ЭДС.

В общем случае характер изменения величин может быть периодическим, почти периодическим и непериодическим. В данном разделе будут рассматриваться цепи только с периодическими переменными.

Периодическими несинусоидальными величинами называются переменные, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону. Причины возникновения несинусоидальных напряжений и токов могут быть обусловлены или несинусоидальностью источника питания или (и) наличием в цепи хотя бы одного нелинейного элемента. Кроме того, в основе появления несинусоидальных токов могут лежать элементы с периодически изменяющимися параметрами.

В качестве примера на рис. 5.1, а представлена цепь с нелинейным резистором (НР), нелинейная вольтамперная характеристика (ВАХ) которого обуславливает несинусоидальную форму тока  $i$  в цепи при синусоидальном напряжении  $u$  на ее входе (см. рис. 5.1, б).

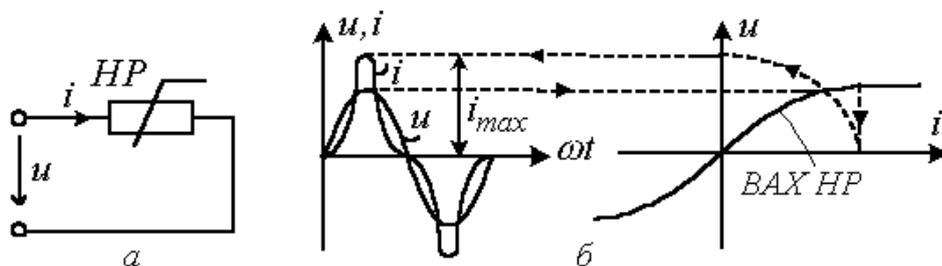


Рисунок 5.1 – Электрическая цепь (а) с нелинейным резистором, несинусоидальная функция и ее ВАХ (б)

### 5.1 Характеристики несинусоидальных величин

Для характеристики несинусоидальных периодических переменных служат следующие величины и коэффициенты (приведены на примере периодического тока):

1. Максимальное значение -  $i_{max}$  .

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

2. Действующее значение -

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt$$

3. Среднее по модулю значение -

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt$$

4. Среднее за период значение (постоянная составляющая) -

5. Коэффициент амплитуды (отношение максимального значения к дей-

ствующему) -  $\kappa_a = \frac{i_{max}}{I}$

6. Коэффициент формы (отношение действующего значения к среднему

по модулю) -  $\kappa_\phi = \frac{I}{I_{cp}}$

7. Коэффициент искажений (отношение действующего значения первой

гармоники к действующему значению переменной) -  $\kappa_u = \frac{I_1}{I}$

8. Коэффициент гармоник (отношение действующего значения высших

гармонических к действующему значению первой гармоники) -  $\kappa_z = \frac{\sqrt{\sum_{k=2} I_k^2}}{I_1}$

## 5.2 Разложение периодических несинусоидальных кривых в ряд Фурье

Из математики известно, что всякая периодическая функция  $f(t) = f(t + T)$ , где  $T$  – период, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в тригонометрический ряд. Можно отметить, что функции, рассматриваемые в электротехнике, этим условиям удовлетворяют, в связи с чем проверку на их выполнение проводить не нужно.

При разложении в ряд Фурье функция представляется следующим образом:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (5.1)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Здесь  $A_0$  – постоянная составляющая или нулевая гармоника;  $c_1 \sin(k\omega t + \varphi_1)$  – первая (основная) гармоника, изменяющаяся с угловой частотой  $\omega = 2\pi/T$ , где  $T$  – период несинусоидальной периодической функции.

В выражении (1)  $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_k = a_k / b_k$ , где коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k \omega t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k \omega t dt$$

### 5.3 Свойства периодических кривых, обладающих симметрией

Коэффициенты ряда Фурье для стандартных функций могут быть взяты из справочной литературы или в общем случае рассчитаны по приведенным выше формулам. Однако в случае кривых, обладающих симметрией, задача существенно упрощается, поскольку из их разложения выпадают целые спектры гармоник. Знание свойств таких кривых позволяет существенно сэкономить время и ресурсы при вычислениях.

1. Кривые, симметричные относительно оси абсцисс.

К данному типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству  $f(t) = -f(t + T/2)$  (см. пример на рис. 5.2). В их разложении отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники, т.е.  $A_0 = c_2 = c_4 = c_6 \dots = 0$ .

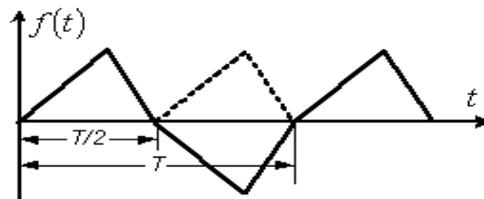


Рисунок 5.2

2. Кривые, симметричные относительно оси ординат.

К данному типу относятся кривые, для которых выполняется равенство  $f(t) = f(-t)$  (см. пример на рис. 5.3). В их разложении отсутствуют синусные составляющие, т.е.  $b_k = 0$ .

3. Кривые, симметричные относительно начала координат.

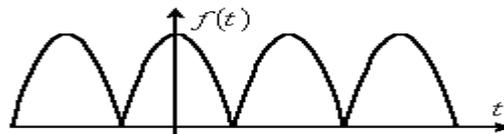


Рисунок 5.3

К этому типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству  $f(t) = -f(-t)$  (см. пример на рис. 4). При разложении таких кривых отсутствуют постоянная и косинусные составляющие, т.е.  $A_0 = a_k = 0$ .

## 5.4 Действующее значение периодической несинусоидальной переменной

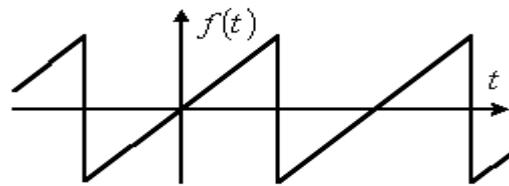


Рисунок 5.4

Как было показано выше, действующим называется среднеквадратичное за период значение величины:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

При наличии аналитического выражения функции  $i(t)$  и возможности взятия интеграла от ее квадрата действующее значение  $i(t)$  определяется точно. Однако в общем случае на практике действующее значение переменной определяется на основе информации о действующих значениях конечного ряда гармонических.

Пусть

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) \right]^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \int_0^T I_{pm} I_{qm} \sin(p\omega t + \varphi_p) \sin(q\omega t + \varphi_q) dt = I_0^2 + \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T I_{km}^2 (1 - \cos(2k\omega t + \\ &+ 2\varphi_k)) dt + \frac{1}{2T} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \int_0^T I_{pm} I_{qm} [\cos((p-q)\omega t + \varphi_p - \varphi_q) - \cos((p+q)\omega t + \varphi_p + \varphi_q)] dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждый из интегралов от тригонометрических функций в последнем выражении равен нулю. Таким образом,

$$I^2 = I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2$$

или

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

Аналогичные выражения имеют место для ЭДС, напряжения и т.д.

## 5.5 Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

Пусть

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(\kappa \omega t + \alpha_k) \quad \text{и} \quad i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(\kappa \omega t + \beta_k)$$

Тогда для активной мощности можно записать

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(\kappa \omega t + \alpha_k) \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(\kappa \omega t + \beta_k) \right] dt$$

Как было показано при выводе соотношения для действующего значения несинусоидальной переменной, среднее за период значение произведения синусоидальных функций различной частоты равно нулю. Следовательно,

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km}}{2} \cos(\alpha_k - \beta_k) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

где

$$\varphi_k = \alpha_k - \beta_k$$

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармонических:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

Аналогично для реактивной мощности можно записать

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k$$

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

где  $T$  – мощность искажений, определяемая произведениями действующих значений разнопорядковых гармонических тока и напряжения.

## 5.6 Методика расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных токах

Возможность разложения периодических несинусоидальных функций в ряд Фурье позволяет свести расчет линейной цепи при воздействии на нее несинусоидальных ЭДС (или токов) источников к расчету цепей с постоянными и синусоидальными токами в отдельности для каждой гармоники. Мгновенные значения искомых токов и напряжений определяются на основе принципа наложения путем суммирования найденных при расчете гармонических составляющих напряжений и токов. В соответствии с вышесказанным цепь на

$$e(t) = \sum_{k=0}^n E_{km} \sin(k\omega t + \varphi_n)$$

рис. 5.5 при воздействии на нее ЭДС (при расчете спектр рассматриваемых гармоник ограничивается) в расчетном плане представляется суммой цепей на рис. 5.6.

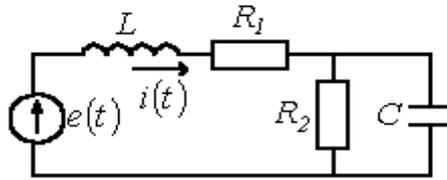


Рисунок 5.5 – Линейная электрическая цепь при периодических несинусоидальных токах

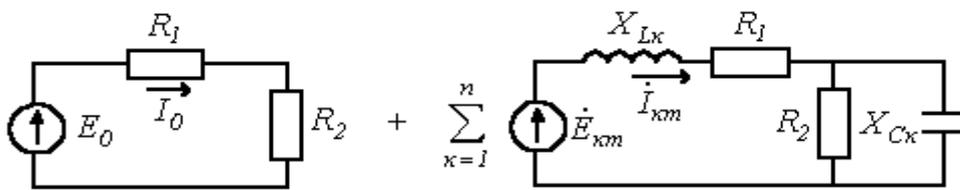


Рисунок 5.6 – Схема замещения

Здесь  $\dot{E}_{km} = E_{km} e^{j\varphi_k}$ ;  $X_{Lk} = k\omega L$ ;  $X_{Ck} = 1/(k\omega C)$ .

Тогда, например, для тока в ветви с источником ЭДС, имеем

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k)$$

где каждая к-я гармоника тока рассчитывается символическим методом по своей к-й расчетной схеме. При этом (поверхностный эффект не учитывается) для всех гармоник параметры  $R_1, R_2, L$  и  $C$  постоянны.

$$I_0 = \frac{E_0}{R_1 + R_2};$$

$$\dot{I}_{km} = \frac{\dot{E}_{km}}{R_1 + jX_{Lk} + \frac{R_2(-jX_{Ck})}{R_2 - jX_{Ck}}} = I_{km} e^{j\alpha_k}$$

Необходимо помнить, что ввиду различия частот суммировать комплексы различных гармоник недопустимо.

Таким образом, методика расчета линейных цепей при несинусоидальных токах сводится к следующему:

1. ЭДС и токи источников раскладываются в ряды Фурье.
2. Осуществляется расчет цепи в отдельности для каждой гармонической.
3. Искомые величины определяются как алгебраические суммы соответствующих гармонических.

### Контрольные вопросы

1. Что является причиной появления несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях?

2. Какие величины и коэффициенты характеризуют периодические несинусоидальные переменные?

3. Какие гармонические отсутствуют в спектрах кривых, симметричных относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала системы координат?

4. Достаточно ли для определения величины полной мощности в цепи несинусоидального тока наличие информации об активной и реактивной мощностях?

5. Для каких цепей справедлива методика расчета цепей несинусоидального тока, основанная на разложении ЭДС и токов источников в ряды Фурье?

6. Не прибегая к разложению в ряд Фурье, определить коэффициенты амплитуды и формы кривой на рис. 5.4.

Ответ:  $k_a = \sqrt{3}$ ;  $k_\phi = 2/\sqrt{3}$ .

7. Определить действующее значение напряжения на зажимах ветви с последовательным соединением резистора с  $R = 10 \text{ Ом}$  и катушки индуктивности с  $\omega L = 10 \text{ Ом}$ , если ток в ней  $i = 10\sqrt{2} \sin \omega t + 5\sqrt{2} \sin 3\omega t + \sqrt{2} \sin 5\omega t \text{ А}$ . Рассчитать активную мощность в ветви.

Ответ:  $U=218 \text{ В}$ ;  $P=1260 \text{ Вт}$ .

8. Определить действующее значение тока в ветви с источником ЭДС в схеме на рис. 5, если  $e(t) = 100 + 50 \sin \omega t + 10 \sin 3\omega t \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = \omega L = 1/(\omega C) = 10 \text{ Ом}$ .

Ответ:  $I=5,5 \text{ А}$ .

## ГЛАВА 6. Нелинейные электрические цепи

### 6.1 Понятие о нелинейных цепях. Нелинейные элементы.

Нелинейными называются цепи, в состав которых входит хотя бы один нелинейный элемент.

Нелинейными называются элементы, параметры которых зависят от величины и (или) направления связанных с этими элементами переменных (напряжения, тока, магнитного потока, заряда, температуры, светового потока и др.). Нелинейные элементы описываются нелинейными характеристиками, которые не имеют строгого аналитического выражения, определяются экспериментально и задаются таблично или графиками.

Нелинейные элементы можно разделить на двух – и многополюсные. Последние содержат три (различные полупроводниковые и электронные триоды) и более (магнитные усилители, многообмоточные трансформаторы, тетроды, пентоды и др.) полюсов, с помощью которых они подсоединяются к элек-

трической цепи. Характерной особенностью многополюсных элементов является то, что в общем случае их свойства определяются семейством характеристик, представляющих зависимости выходных характеристик от входных переменных и наоборот: входные характеристики строят для ряда фиксированных значений одного из выходных параметров, выходные – для ряда фиксированных значений одного из входных.

По другому признаку классификации нелинейные элементы можно разделить на инерционные и безынерционные. Инерционными называются элементы, характеристики которых зависят от скорости изменения переменных. Для таких элементов **статические характеристики**, определяющие зависимость между действующими значениями переменных, отличаются от **динамических характеристик**, устанавливающих взаимосвязь между мгновенными значениями переменных. Безынерционными называются элементы, характеристики которых не зависят от скорости изменения переменных. Для таких элементов статические и динамические характеристики совпадают.

Понятия инерционных и безынерционных элементов относительны: элемент может рассматриваться как безынерционный в допустимом (ограниченном сверху) диапазоне частот, при выходе за пределы которого он переходит в разряд инерционных.

В зависимости от вида характеристик различают нелинейные элементы с **симметричными** и несимметричными характеристиками. Симметричной называется характеристика, не зависящая от направления определяющих ее величин, т.е. имеющая симметрию относительно начала системы координат:  $f(x) = -f(-x)$ . Для несимметричной характеристики это условие не выполняется, т.е.  $f(x) \neq -f(-x)$ . Наличие у нелинейного элемента симметричной характеристики позволяет в целом ряде случаев упростить анализ схемы, осуществляя его в пределах одного квадранта.

По типу характеристики можно также разделить все нелинейные элементы на элементы с **однозначной** и **неоднозначной характеристиками**. Однозначной называется характеристика, у которой каждому значению  $x$  соответствует единственное значение  $y$  и наоборот. В случае неоднозначной характеристики каким-то значениям  $x$  может соответствовать два или более значения  $y$  или наоборот. У нелинейных резисторов неоднозначность характеристики обычно связана с наличием падающего участка, для которого, а у нелинейных индуктивных и емкостных элементов – с гистерезисом.

Наконец, все нелинейные элементы можно разделить на **управляемые** и **неуправляемые**. В отличие от неуправляемых управляемые нелинейные элементы (обычно трех- и многополюсники) содержат управляющие каналы, изменяя напряжение, ток, световой поток и др. в которых, изменяют их основные характеристики: вольтамперную, вебер-амперную или кулон-вольтную.

## 6.2 Нелинейные электрические цепи постоянного тока

Нелинейные свойства таких цепей определяет наличие в них нелинейных резисторов.

В связи с отсутствием у нелинейных резисторов прямой пропорциональности между напряжением и током их нельзя охарактеризовать одним параметром (одним значением  $R$ ). Соотношение между этими величинами в общем случае зависит не только от их мгновенных значений, но и от производных и интегралов по времени.

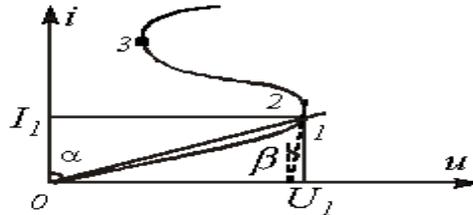


Рисунок 6.1

## 6.3 Параметры нелинейных резисторов

В зависимости от условий работы нелинейного резистора и характера задачи различают статическое, дифференциальное и динамическое сопротивления.

Если нелинейный элемент является безынерционным, то он характеризуется первыми двумя из перечисленных параметров.

**Статическое сопротивление** равно отношению напряжения на резистивном элементе к протекающему через него току. В частности, для точки 1 ВАХ на рис. 6.1

$$R_{cm} = \frac{U_1}{I_1} = m_R \operatorname{tg} \alpha$$

Под **дифференциальным сопротивлением** понимается отношение бесконечно малого приращения напряжения к соответствующему приращению тока

$$R_{\partial} = \frac{du}{di} = m_R \operatorname{tg} \beta$$

Следует отметить, что у неуправляемого нелинейного резистора  $R_{cm} > 0$  всегда, а  $R_{\partial}$  может принимать и отрицательные значения (участок 2-3 ВАХ на рис. 6.1).

В случае инерционного нелинейного резистора вводится понятие динамического сопротивления, определяемого по динамической ВАХ. В зависимости от скорости изменения переменной, например тока, может меняться не только величина, но и знак  $R_{дин}$ .

$$R_{дин} = \frac{du}{di}$$

## 6.4 Методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока

Электрическое состояние нелинейных цепей описывается на основании законов Кирхгофа, которые имеют общий характер. При этом следует помнить, что для нелинейных цепей принцип наложения неприменим. В этой связи методы расчета, разработанные для линейных схем на основе законов Кирхгофа и принципа наложения, в общем случае не распространяются на нелинейные цепи.

Общих методов расчета нелинейных цепей не существует. Известные приемы и способы имеют различные возможности и области применения. В общем случае при анализе нелинейной цепи описывающая ее система нелинейных уравнений может быть решена следующими методами:

- графическими;
- аналитическими;
- графо-аналитическими;
- итерационными.

## 6.5 Графические методы расчета

При использовании этих методов задача решается путем графических построений на плоскости. При этом характеристики всех ветвей цепи следует записать в функции одного общего аргумента. Благодаря этому система уравнений сводится к одному нелинейному уравнению с одним неизвестным. Формально при расчете различают цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединениями.

а) Цепи с последовательным соединением резистивных элементов.

При последовательном соединении нелинейных резисторов в качестве общего аргумента принимается ток, протекающий через последовательно соединенные элементы. Расчет проводится в следующей последовательности. По заданным ВАХ  $U_i(I)$  отдельных резисторов в системе декартовых координат  $U-I$  строится результирующая зависимость  $U(I) = \sum U_i(I)$ . Затем на оси напряжений откладывается точка, соответствующая в выбранном масштабе заданной величине напряжения на входе цепи, из которой восстанавливается перпендикуляр до пересечения с зависимостью  $U(I)$ . Из точки пересечения перпендикуляра с кривой  $U(I)$  опускается ортогональ на ось токов – полученная точка соответствует искомому току в цепи, по найденному значению которого с использованием зависимостей  $U_i(I)$  определяются напряжения  $U_i$  на отдельных резистивных элементах.

Применение указанной методики иллюстрируют графические построения на рис. 6.2, б, соответствующие цепи на рис. 6.2, а.

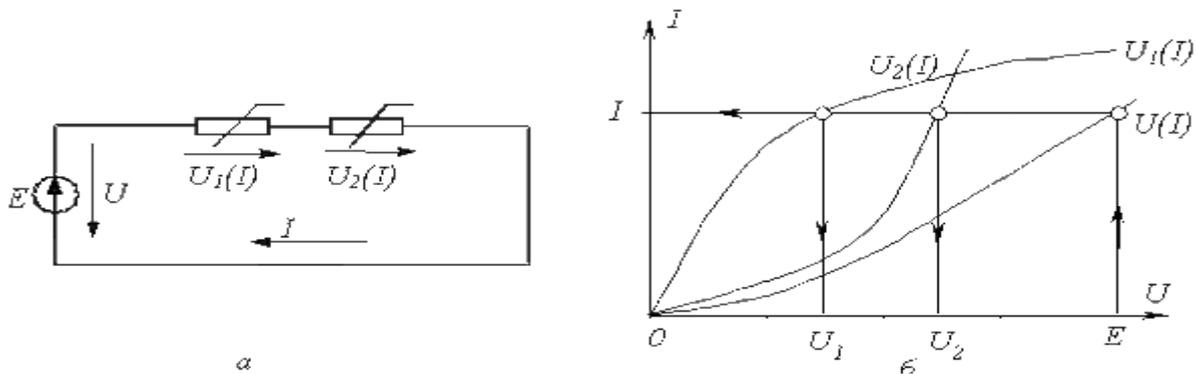


Рисунок 6.2

Графическое решение для последовательной нелинейной цепи с двумя резистивными элементами может быть проведено и другим методом – **методом пересечений**. В этом случае один из нелинейных резисторов, например, с ВАХ  $U_1(I)$  на рис.6.2,а, считается внутренним сопротивлением источника с ЭДС  $E$ , а другой – нагрузкой. Тогда на основании соотношения  $E - U_1(I) = U_2(I)$  точка а (см. рис. 6.3) пересечения кривых  $I(E - U_1)$  и  $U_2(I)$  определяет режим работы цепи. Кривая  $I(E - U_1)$  строится путем вычитания абсцисс ВАХ  $U_1(I)$  из ЭДС  $E$  для различных значений тока.

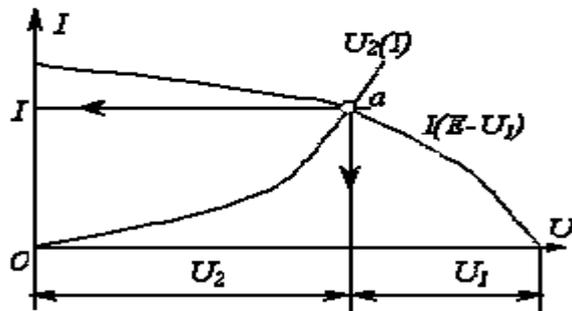


Рисунок 6.3

Использование данного метода наиболее рационально при последовательном соединении линейного и нелинейного резисторов. В этом случае линейный резистор принимается за внутреннее сопротивление источника, и линейная ВАХ последнего строится по двум точкам.

б) Цепи с параллельным соединением резистивных элементов.

При параллельном соединении нелинейных резисторов в качестве общего аргумента принимается напряжение, приложенное к параллельно соединенным элементам. Расчет проводится в следующей последовательности. По заданным ВАХ  $I_i(U)$  отдельных резисторов в системе декартовых координат  $U - I$  строится результирующая зависимость  $I(U) = \sum I_i(U)$ . Затем на оси токов откладывается точка, соответствующая в выбранном масштабе заданной величине тока источника на входе цепи (при наличии на входе цепи источника напряжения задача решается сразу путем восстановления перпендикуляра из

точки, соответствующей заданному напряжению источника, до пересечения с ВАХ  $I_i(U)$ , из которой восстанавливается перпендикуляр до пересечения с зависимостью  $I(U)$ . Из точки пересечения перпендикуляра с кривой  $I(U)$  опускается ортогональ на ось напряжений – полученная точка соответствует напряжению на нелинейных резисторах, по найденному значению которого с использованием зависимостей  $I_i(U)$  определяются токи  $I_i$  в ветвях с отдельными резистивными элементами.

Использование данной методики иллюстрируют графические построения на рис. 6.4, б, соответствующие цепи на рис. 6.4, а.

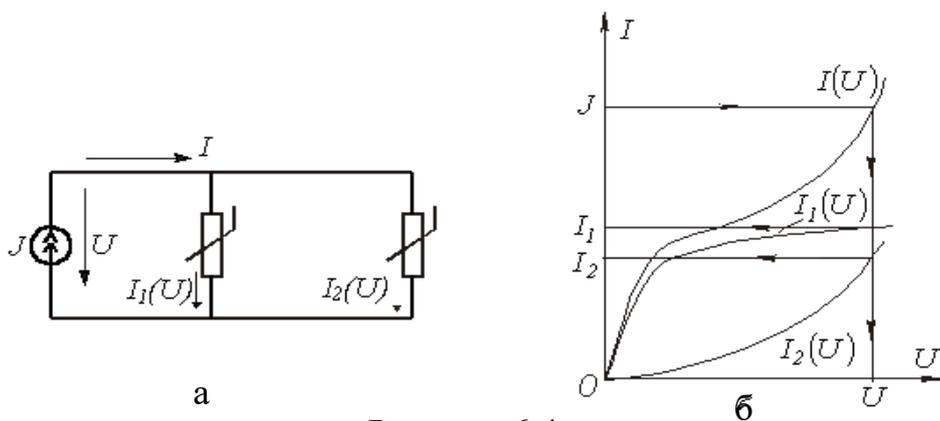


Рисунок 6.4

в) Цепи с последовательно-параллельным (смешанным) соединением резистивных элементов.

1. Расчет таких цепей производится в следующей последовательности:

Исходная схема сводится к цепи с последовательным соединением резисторов, для чего строится результирующая ВАХ параллельно соединенных элементов, как это показано в пункте б).

2. Проводится расчет полученной схемы с последовательным соединением резистивных элементов (см. пункт а), на основании которого затем определяются токи в исходных параллельных ветвях.

## 6.6 Метод двух узлов

Для цепей, содержащих два узла или сводящихся к таковым, можно применять метод двух узлов. При полностью графическом способе реализации метода он заключается в следующем:

Строятся графики зависимостей  $I_i(U_{mn})$  токов во всех  $i$ -х ветвях в функции общей величины – напряжения  $U_{mn}$  между узлами  $m$  и  $n$ , для чего каждая из исходных кривых  $I_i(U_i)$  смещается вдоль оси напряжений параллельно самой себе, чтобы ее начало находилось в точке, соответствующей ЭДС  $E_i$  в  $i$ -й ветви, а затем зеркально отражается относительно перпендикуляра, восстановленного в этой точке.

Определяется, в какой точке графически реализуется первый закон Кирхгофа  $\sum I_i(U_{mn}) = 0$ . Соответствующие данной точке токи являются решением задачи.

Метод двух узлов может быть реализован и в другом варианте, отличающемся от изложенного выше меньшим числом графических построений.

В качестве примера рассмотрим цепь на рис. 5. Для нее выражаем напряжения на резистивных элементах в функции  $U_{mn}$ .

$$U_1 = E_1 - U_{mn} ; \quad (1)$$

$$U_2 = U_{mn} ; \quad (2)$$

$$U_3 = E_3 - U_{mn} . \quad (3)$$

Далее задаемся током, протекающим через один из резисторов, например во второй ветви  $I_2$ , и рассчитываем  $U_{mn}$ , а затем по  $U_{mn}$  с использованием (1) и (3) находим  $U_1$  и  $U_3$  и по зависимостям  $I_1(U_1)$  и  $I_3(U_3)$  - соответствующие им токи  $I_1$  и  $I_3$  и т.д. Результаты вычислений сводим в табл. 6.1, в последней колонке которой определяем сумму токов

$$\sum I_i = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Таблица 6.1 – Таблица результатов расчета методом двух узлов

$I_2$	$U_2 = U_{mn}$	$U_1 = E_1 - U_{mn}$	$I_1$	$U_3 = E_3 - U_{mn}$	$I_3$	$\sum I_i$

Алгебраическая сумма токов в соответствии с первым законом Кирхгофа должна равняться нулю, поэтому получающаяся в последней колонке табл. 6.1 величина  $\sum I_i$  указывает, каким значением  $I_2$  следует задаваться на следующем шаге.

В осях  $\sum I_i - U_{mn}$  строим кривую зависимости  $\sum I_i(U_{mn})$  и по точке ее пересечения с осью напряжений определяем напряжение  $U_{mn}$  между точками m и n. Для найденного значения  $U_{mn}$  по (1)...(3) рассчитываем напряжения на резисторах, после чего по заданным зависимостям  $I_i(U_i)$  определяем токи в ветвях схемы.

### Контрольные вопросы и задачи

1. Почему метод наложения неприменим к нелинейным цепям?
2. Какие параметры характеризуют нелинейный резистор?
3. Почему статическое сопротивление всегда больше нуля, а дифференциальное и динамическое могут иметь любой знак?
4. Какие методы используют для анализа нелинейных резистивных цепей постоянного тока?

5. Какая последовательность расчета графическим методом нелинейной цепи с последовательным соединением резисторов?

6. Какая последовательность расчета графическим методом нелинейной цепи с параллельным соединением резисторов?

7. Какой алгоритм анализа цепи со смешанным соединением нелинейных резисторов?

8. В чем сущность метода двух узлов?

9. В цепи на рис. 2,а ВАХ нелинейных резисторов  $U_1(I) = 5I^2 + I$  и  $U_2(I) = 7I^2 + 3I$ , где напряжение – в вольтах, а ток – в амперах;  $E = 56 \text{ В}$ . Графическим методом определить напряжения на резисторах.

Ответ:  $U_1 = 22 \text{ В}$ ;  $U_2 = 34 \text{ В}$ .

10. В цепи на рис. 4,а ВАХ нелинейных резисторов  $I_1(U) = 0,3U^2 + 0,2U$  и  $I_2(U) = 0,5U^2 + 0,7U$ , где ток – в амперах, а напряжение – в вольтах;  $J = 5 \text{ А}$ . Графическим методом определить токи  $I_1$  и  $I_2$ .

Ответ:  $I_1 = 1,6 \text{ А}$ ;  $I_2 = 3,4 \text{ А}$ .

11. В цепи на рис. 5  $I_1(U_1) = 0,015U_1^2$ ;  $I_2(U_2) = 0,01U_2^2$ , где ток – в амперах, а напряжение – в вольтах; третий резистор линейный с  $R = 10 \text{ Ом}$ . Определить токи в ветвях методом двух узлов, если  $E_1 = E_3 = 60 \text{ В}$ .

Ответ:  $I_1 = 1,5 \text{ А}$ ;  $I_2 = 2,5 \text{ А}$ ;  $I_3 = 1 \text{ А}$ .

## Список использованной литературы

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник. М.: «Гайдарика», 1999.
2. Быков А.П., Сапков Г.Н. Теоретические основы электротехники. Расчёт переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами операторным методом: учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. М.: ВЗИИЖДТ, 1973.
3. Теоретические основы электротехники / А.Н., Горбунов И.Д., Кабанов А.В., Кравцов И.Я. Редько– М., 1998.
4. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов. В 2 т. СПб., Питер. 2009.
5. Евдокимов Ф.С. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1999.
6. Потапов Л.А. Краткий курс теоретических основ электротехники: учебное пособие. Брянск: БГТУ, 2001. Ч. 1.
7. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: практическое пособие. СПб.: Корона принт, 2003.
8. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / под ред. П.А. Ионкина. М.: Энергоатомиздат, 1982.
9. Широбокова О.Е. Теоретические основы электротехники: учебно-методическое пособие к выполнению самостоятельной работы студентов. Брянск, 2017.
10. Широбокова О.Е., Никитин А.М. Теоретические основы электротехники: учебное пособие для лабораторных работ по курсу «Теоретические основы электротехники» для бакалавров очной формы обучения. Брянск: Изд-во БГАУ, 2017. 94 с.

Учебное издание

О.Е. Широбокова

## **Теоретические основы электротехники**

Учебно-методическое пособие для самостоятельного изучения курса  
«Теоретические основы электротехники»,  
для студентов направлений подготовки  
13.03.02 - «Электроэнергетика и электротехника»  
15.03.04 – «Автоматизация технологических процессов и производств»

Редактор Адылина Е.С.

---

Подписано к печати 02.11.2022 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага офсетная. Усл. п. л. 2,96 Тираж 25 экз. Изд. №.7401

---

Издательство Брянского государственного аграрного университета  
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский