Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Бычкова Т.В.

Дискретная математика. Множества

Учебно-методическое пособие

Кафедра автоматики, физики и математики

Брянская область - 2021

УДК 519.1 (07)

ББК 22.176

Б 95

Бычкова, Т. В. Дискретная математика. Множества: учебно-методическое пособие / Т. В. Бычкова. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2021. – 37 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для практических занятий и самостоятельной работы бакалавров очной и заочной форм обучения направления подготовки 09.09.03 «Прикладная информатика». Пособие содержит краткие теоретические сведения, примеры решений упражнений и заданий, задания для самостоятельной работы и индивидуальные задания по темам «Множества» и «Комбинаторика», рассматриваемым при изучении курса «Дискретная математика».

Рецензенты: к.т.н. Безик Д.А.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования Брянского ГАУ протокол №6 от 29 марта 2021 года.

Оглавление

1. Множества

1.1 Понятие множества и его элементов

Теория множеств - это раздел математики, в котором изучаются общие свойства конечных и бесконечных множеств. Строгих определений понятий «множество» и «элементы множества» нет, они относятся к интуитивным понятиям в математике, основанных на нестрогих представлениях.

Множество — это совокупность объектов, называемых элементами множества. Например,

A = {Москва, Пекин, Берлин, Лондон, Париж};

S = {2, 3, 5, 7, 9};

Z = {сыр, яйцо, молоко, сметана}.

Элементы каждого множества заключаются в фигурные скобки. Обычно множества обозначают прописными, а их элементы – строчными латинскими буквами. Принадлежность элемента a множеству M обозначается с помощью знака принадлежности $a \in M$, непринадлежность $a \notin M$. Знак принадлежности $\in$ представляет собой видоизмененную букву ε греческого алфавита, с которой начинается слово εστι, в переводе обозначающее «есть».

На практике удобно использовать следующие способы задания множеств:

- перечисление, например, $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$;
- описание характеристических свойств множества, например $C = \{$*неположительные четные числа*$\}$;
- для бесконечных множеств удобным является запись с помощью подходящих предикатов. Предикат – это предложение с переменной $P(x)$, которое становится утверждением (истинным или ложным) при подстановке определённого значения переменной. Запись

$$S = \{x: P(x)\} \tag{1.1}$$

означает, что множество S состоит из таких элементов x, для которых предикат $P(x)$ является верным.

Например, $M = \{x\!: X$ — *четное натуральное число*$\}$ описывает множество {2, 4, 6, ...}. Любое натуральное четное число может быть записано как $2n$, где n натуральное число, тогда эквивалентна (1.1) будет запись:

$$M = \{2n\!: n \in \mathbb{N}\}\,. \tag{1.2}$$

Замечание: существуют некоторые общепринятые обозначения для часто встречаемых множеств:

$\emptyset$ - пустое множество;

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел $\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$;

$\mathbb{R}$ - множество действительных чисел, $\mathbb{R} = \{x : x \in (-\infty;\ \infty)\}$;

$\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел, $\mathbb{C} = \left\{\alpha \pm \beta i : \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\right\}$.

Понятие множества встречается и в современных языках программирования при объявлении переменных, когда задается принадлежность переменной к определенному типу данных. Тип данных представляет собой множество объектов со списком стандартных операций над ними. Определение типа переменных равносильно указанию множества, из которого переменным присваиваются значения.

Если множества A и B составлены из одних и тех же элементов, то говорят, что они равны: $A = B$. В противном случае множества A и B не равны (обозначается $A \neq B$).

Множество B называется подмножеством множества A (обозначается $B \subseteq A$, *говорят* B *включено в* A), если каждый элемент множества B является элементом множества A. Множество B называется собственным подмножеством множества А (обозначается $B \subset A$), если $B \subseteq A$ и $A \neq B$, т. е. в A есть элементы, не содержащиеся в B. Символы $\subseteq$ и $\subset$ называются знаками включения. Очевидно, что пустое множество является подмножеством любого множества. Подмножества бывают двух видов: собственные и несобственные. Само множество и пустое множество называются несобственными подмножествами, все остальные подмножества - собственными.

Числовые множества связаны соотношением: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, которое можно продемонстрировать диаграммной на рисунке 1.

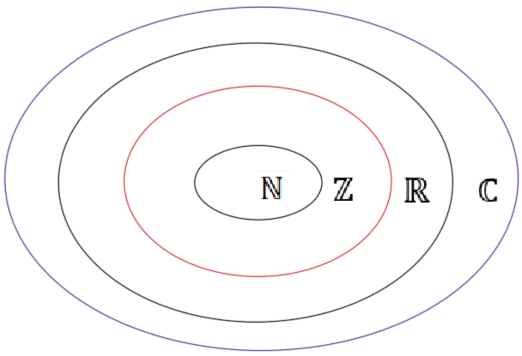


Рисунок 1 - Взаимосвязь между числовыми множествами

1.2 Операции над множествами

Наглядным представлением множеств и отношением между ними являются *диаграммы Эйлера – Венна*, которые строятся следующим образом: прямоугольной рамкой выделяется универсальное множество

U, содержащее элементы всех рассматриваемых множеств; внутри прямоугольника выделяют замкнутыми линиями (обычно овалами) фигуры, соответствующие всем рассматриваемым множествам. Для конечных множеств их элементы часто обозначаются точками (рис.2). Подмножества, обладающие определенными свойствами, могут отмечаться штриховкой (рис.3).

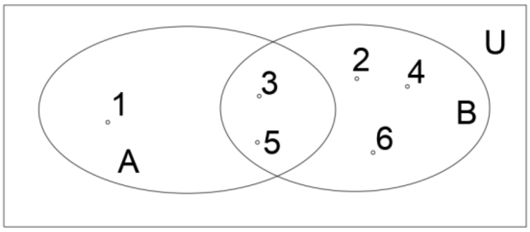


Рисунок 2 – Диаграмма Эйлера-Венна для множеств A={1, 5, 3}, B={2, 3, 4, 5, 6}

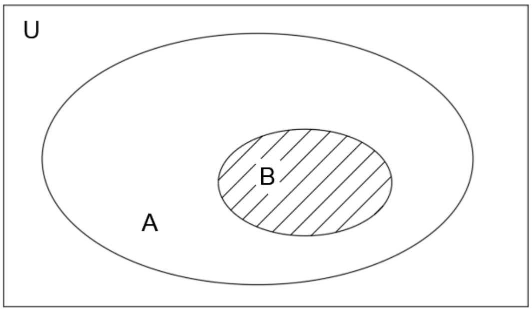


Рисунок 3 – Диаграмма Эйлера-Венна для множеств A и B, таких, что $B \subset A$

Объединением множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B , и не содержащее никаких других элементов (рис. 4):

$$A \cup B = \{x : x \epsilon A \textit{ или } x \epsilon B\}. \qquad (1.3)$$

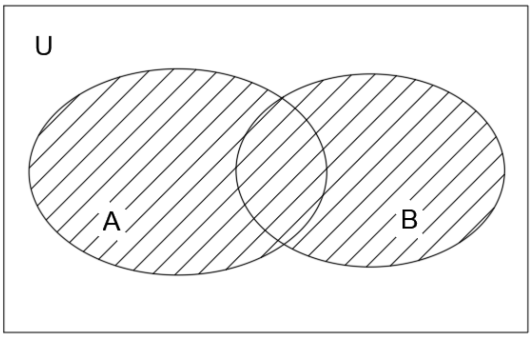


Рисунок 4 – Диаграмма Эйлера-Венна для объединения множеств A∪B

Пересечением множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат одновременно и множеству A и множеству B , и не содержащее никаких других элементов (рис. 5):

$$A \cap B = \{x : x \epsilon A \textit{ и } x \epsilon B\} \qquad (1.4)$$

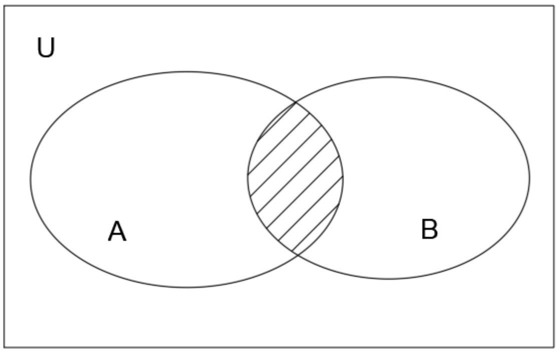


Рисунок 5 - Диаграмма Эйлера-Венна для пересечения множеств A∩B

Разностью множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называются множество, содержащее все элементы множества A, которые не принадлежат множеству B, и не содержащее никаких других элементов (рис. 6):

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}. \quad (1.5)$$

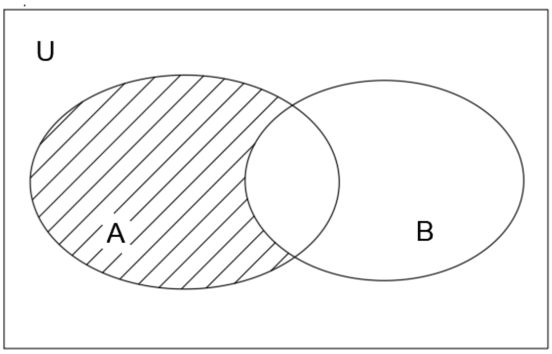


Рисунок 6 - Диаграмма Эйлера-Венна для разности множеств A\B

Дополнением до универсального множества U множества A (обозначается $\bar{A}$) называются множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A (но принадлежащих множеству U) (рис. 7):

$$\bar{A} = \{x: x \in U \setminus A\}. \quad (1.6)$$

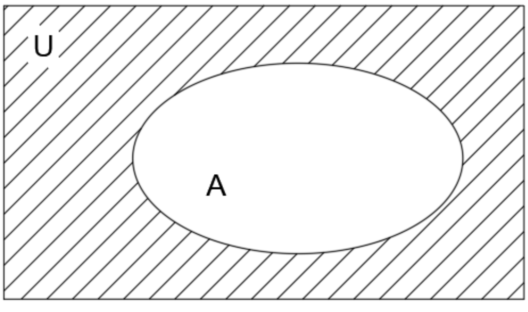


Рисунок 7 - Диаграмма Эйлера-Венна для дополнения множества $\bar{A}$

Симметрической разностью двух множеств A и B называют множество, состоящее из элементов A и не принадлежащих B или наоборот, не принадлежащих A и принадлежащих B (рис.8):

$$\mathrm{A}\,\Delta\,\mathrm{B} = \{x\colon (x \in A \text{ и } x \notin \mathrm{B}) \text{или } (x \notin A \text{ и } x \in \mathrm{B})\ \}. \qquad (1.7)$$

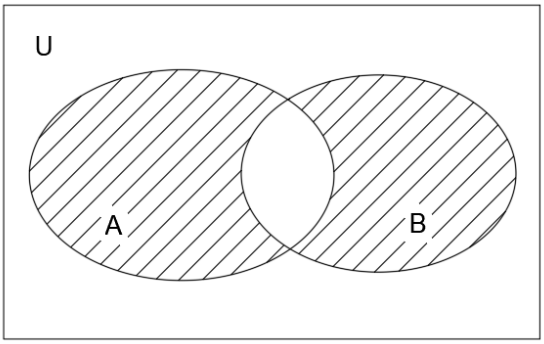


Рисунок 8 - Диаграмма Эйлера-Венна для симметрической разности множеств A Δ B

Введенные операции позволяют выражать одни множества через другие. При этом используется следующий порядок выполнения операций:

- операции дополнения,
- операции пересечения,
- операции объединения, разности, симметрической разности.

Для изменения этого порядка в выражении используются скобки.

Пример 1.1 Заданы множества A = {*–4,-3, 0, 1, 2, 4, 6*}; B = {*1, 2, 3, 5, 10, 12*}; C = {*-7,-6,-5,-4,-3,-2,0,1*}.

Найти:

а) $A \cup B$,

б) $A \cap B$,

в) $A \cup B \cap C$,

г) $A \setminus B$,

д) $(B \setminus A) \cap C$;

е) $A \,\Delta\, B$

<u>Решение</u>

а) Объединение множеств A и B содержит все элементы содержащиеся в этих множествах:

$A \cup B$ = { -4,-3, 0, 1, 2, 4, 6}∪{*1, 2, 3, 5, 10, 12*}={-4, -3, 0, *1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12*)

б) Пересечению множеств принадлежат элементы, входящие одновременно во множество A и во множество B, тогда

$A \cap$B = {1, 2}.

в) Операция пересечения имеет больший приоритет, чем объединение. Поэтому, учитывая старшинство операций, первоначально найдем
$B \cap C = \{1\}$.
После этого найдем окончательное решение:
$A \cup B \cap C = \{-4, -3, 0, 1, 2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{-4, -3, 0, 1, 2, 4, 6\}$
г) Найдем разность множеств A и B, т. е. $A \setminus B$.
По определению в множество $A \setminus B$ должны входить те элементы множества A, которые не принадлежат множеству B, поэтому
$A \setminus B = \{-4, -3, 0, 4, 6\}$.
д) Найдем пересечение разности множеств B и A с множеством C, т.е. $(B \setminus A) \cap C$. Найдем сначала разность множеств B и A:
$B \setminus A = \{3, 5, 10, 12\}$.
Тогда $(B \setminus A) \cap C = \emptyset$.
е) Найдем симметрическую разность множеств A и B, это множество, состоящее из элементов A и не принадлежащих B или элементов, не принадлежащих A и принадлежащих B. Найдем сначала разности множеств A и B, B и A:
$A \setminus B = \{-4, -3, 0, 4, 6\}$,
$B \setminus A = \{3, 5, 10, 12\}$.
Затем найдем объединение получившихся множеств:
$A \Delta B = \{-4, -3, 0, 4, 6\} \cup \{3, 5, 10, 12\} = \{-4, -3, 0, 3, 4, 5, 6\ 10, 12\}$.

Пример 1.2 По заданной диаграмме Эйлера-Венна (рис.9), описать множество, заданное штриховкой.

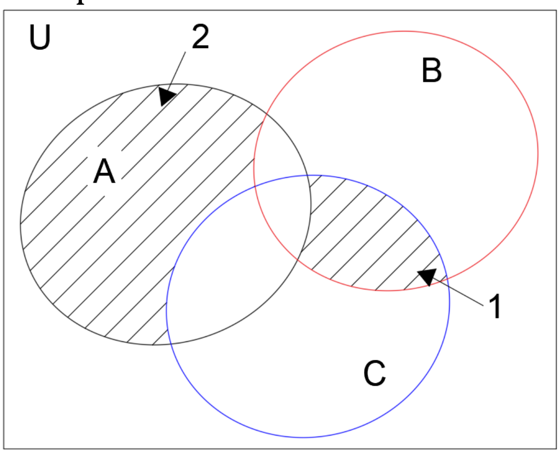


Рисунок 9 – Диаграмма Эйлера-Венна к примеру 2

<u>Решение</u>

На рис. 9 изображена диаграмма, содержащая три взаимно пересекающихся множества A, B, C, находящихся внутри универсального множества U. Штриховкой обозначено две фигуры.

Фигура 1 – это множество, содержащее элементы множества А, за исключением элементов содержащихся в В или С, т.е. $A \setminus (B \cup C)$

Фигура 2 – это пересечение множества B и множества C, но не содержащее никаких элементов множества A, т. е. $(B \cap C) \setminus A$;

Тогда решением является множество, объединяющее обе фигуры:

$$(A \setminus (B \cup C)) \cup ((B \cap C) \setminus A).$$

1.3 Отношения между множествами

Между элементами множеств различных множеств могут быть установлены различные взаимосвязи, обычно называемые отношениями. Например, рассмотрим два множества: A = {сотрудники организации} и B = {табельные номера}, для каждого сотрудника определен его табельный номер в данной организации, т.е. множества A и B взаимосвязаны.

Для определения вида отношения между элементами двух множеств нужно определить два дополнительных множества - множество определения и множество значений. Эти множества могут быть различными (как, например, отношение между множеством студентов группы и множеством полученных ими оценок) или одинаковыми (как, например, «быть братом» на множестве людей). Иногда в литературе для отношений, связывающих различные множества, используется термин «соответствия». Приведем определение:

Пусть заданы множества A и B. Соответствием G между множествами A и B называется отношение, при котором элементам из множества A сопоставляются элементы из множества B. Это обозначается:

$$G\colon A \to B. \tag{1.8}$$

Графически данное определение продемонстрировано на рисунке 10.

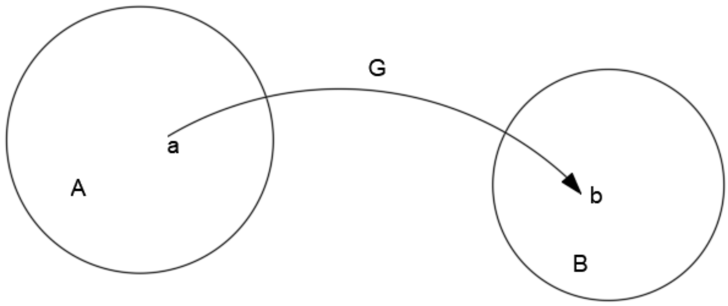


Рисунок 10 - Соответствием G между множествами A и B

Замечания:

- ✓ каждый элемент множества $b \in B$, соответствующий элементу из множества $a \in A$, называется *образом элемента* a; множество всех образов элемента $a \in A$ будем обозначать $G(a)$;
- ✓ каждый элемент $a \in A$, соответствующий элементу $b \in B$, называется *прообразом элемента* b; множество всех прообразов элемента $b \in B$ будем обозначать $G^{-1}(b)$;
- ✓ множество всех образов всех элементов $a \in A$, называется *множеством значений* соответствия G, которое будем обозначать $E(G)$;
- ✓ множество всех прообразов всех элементов $b \in B$, называется *множеством определения* соответствия G, которое будем обозначать $D(G)$.

Рассмотрим пример соответствия G между подмножеством множества студентов A и множеством экзаменационных оценок B,

$G: A \to B$.

Таблица 1 - Экзаменационные оценки студентов

ФИО	Оценки по предметам		
	Математика	Физика	Информатика
Иванов И.И.	5	4	5
Петров П.В.	3	2	3
Сидоров С.М.	4	4	4
Васечкин В.И.	2	3	4

Графически данную таблицу можно представить так, как это сделано на рисунке 11.

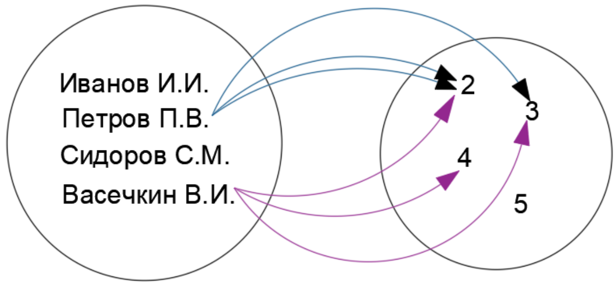


Рисунок 11 - Графическое представление соответствия из таблицы 1 для второй и четверной строк

Множество определения соответствия *G,* заданного таблицей 1:
D(G) = {Иванов И.И., Петров П.В., Сидоров С.М., Васечкин В.И.}.
Множество значений:
E(G) = {2,3,4,5}.

Множеством всех образов элемента *a* = «Петров П.В.» является G (Петров П.В.) = {2, 3}.

Прообразом элемента *b* = 5 является G^{-1} (5) = {Иванов И.И.}.

Выделяют следующие типы соответствий:

- ✓ соответствие G называется всюду ***определенным***, если его множество определения совпадает со всем множеством A: $D(G) = A$, т. е. для каждого элемента $a \in A$ найдется хотя бы один образ;
- ✓ соответствие *G* называется ***сюръективным***, если его множество значений совпадает со всем множеством *B*: $E(G) = B$, т. е. для каждого элемента $b \in B$ найдется хотя бы один прообраз;
- ✓ соответствие *G* называется ***функциональным*** *(однозначным)*, если для любого элемента $a \in A$ существует не более одного образа $G(a) = b$;
- ✓ соответствие *G* называется ***инъективным***, если для любого элемента $b \in B$ существует не более одного прообраза $G^{-1}(b) = a$;
- ✓ соответствие *G* называется ***взаимнооднозначным*** **или** ***биективным***, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Пример 1.3 Пусть A= $\mathbb{R}$, B $= \mathbb{R}_+$,$G = \{(x, y): x \in A,\ y \in B,\ y = x^2\}$. Найти тип соответствия.

<u>Решение</u>

Из свойств функции $y = x^2$ вытекает, что рассматриваемое соответствие

1) всюду определено, т. к. для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется образ - значение $y = x^2 \geq 0$;

2) сюръективно, т. к. для каждого $y \geq 0$ найдется прообраз – значение $x = \sqrt{y}$;

3) функционально, т. к. для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется только один образ - значение $y = x^2 \geq 0$;

4) не инъективно, т. к. для всякого $y \in \mathbb{R}_+$ во множестве A существуют два прообраза - значения $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$;

5) не взаимно однозначно, т. к. не является инъективным.

1.4 Бинарные отношения

Наиболее изученными и чаще всего используемыми являются так называемые бинарные, или двухместные, отношения. Прежде чем их рассматривать, введем понятия упорядоченной пары и прямого произведения множеств.

Пусть a и b – элементы множеств A и B соответственно. Тогда через (a, b) будем обозначать упорядоченную пару, т. е. в общем случае $(a, b) \neq (b, a)$. Классическим примером упорядоченных пар являются координаты точек на плоскости.

Прямым (декартовым) произведением двух множеств (A и B) называется множество всех упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит первому множеству A, а второй – множеству B:

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}. \quad (1.9)$$

Для координат точек на плоскости, принадлежащих множеству вещественных чисел $\mathbb{R}$, прямое произведение содержит бесконечное множество упорядоченных пар – координат всех точек плоскости. Если координаты определены на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. и рассматриваемая область плоскости ограничена, то прямое произведение будет содержать конечное множество упорядоченных пар.

Так, на множестве студентов группы могут быть заданы такие бинарные отношения, как «жить в одной комнате общежития», «быть моложе», «быть земляком» и т. д.

Пример 1.4 Пусть $A=\{0, 1\}$, $B=\{a, b, c\}$, найти декартовы произведения $A \times B$.

Решение

$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$

Тоже самое можно представить в виде таблицы, графа или на координатной плоскости (рис. 12)

$A \backslash B$	a	b	c
0	$(0, a)$	$(0, b)$	$(0, c)$
1	$(1, a)$	$(1, b)$	$(1, c)$

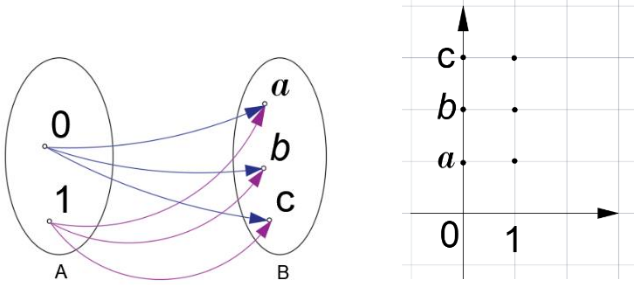


Рисунок 12 – Способы представления декартова произведения A × B

Заметим, что множества $A \times B$ и $B \times A$ различны.

При разработке информационных систем часто бывает необходимо описывать запросы на получение информации. Для этого можно использовать язык теории множеств. Массивы однородных данных M_i, $i = \overline{1, n}$, представляют собой множества, а файл базы данных является подмножеством M их декартового произведения

$$\mathrm{M} \subseteq \mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_2 \times \ldots \times \mathrm{M}_n.$$

В общем случае могут рассматриваться n-местные отношения, например, отношения между тройками элементов (тернарные) и т. д.

Например, равенство $x^2 + y^2 = z^2$ задает тернарное отношение на множестве $\mathbb{Z}$. Отношение является множеством, включающим все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие данному равенству.

Пусть множество $B = \{0, 1\}$, множество B^n состоит из последовательностей нулей и единиц длины n. Они называются строкой бит или битовой строкой длины n.

1.5 Мощность множества

Множество, содержащее конечное число элементов называется конечным, в противном случае – бесконечным. Число элементов конечного множества A называется его мощностью, обозначается $|\mathrm{A}|$.

Для вычисления мощности объединения двух множеств справедлива формула:

$$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|. \tag{1.10}$$

Действительно, мощность объединения двух множеств $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}|$, т.е. количество элементов, равно суммарному количеству элементов каждого множества $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$, причем количество элементов, содержащихся в пересечении множеств $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|$ учитывается два раза, во избежание удвоения, это значение вычитается.

Аналогичную формулу можно получить для объединения трех, четырех и более множеств. Для трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - \\ - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \qquad (1.11)$$

Геометрическая интерпретация данных утверждений с помощью диаграмм Эйлера-Венна демонстрирует их справедливость наглядно (рис. 13).

Множества могут содержать как конечное, так и бесконечное число элементов. Мощность пустого множества $|\emptyset|=0$.

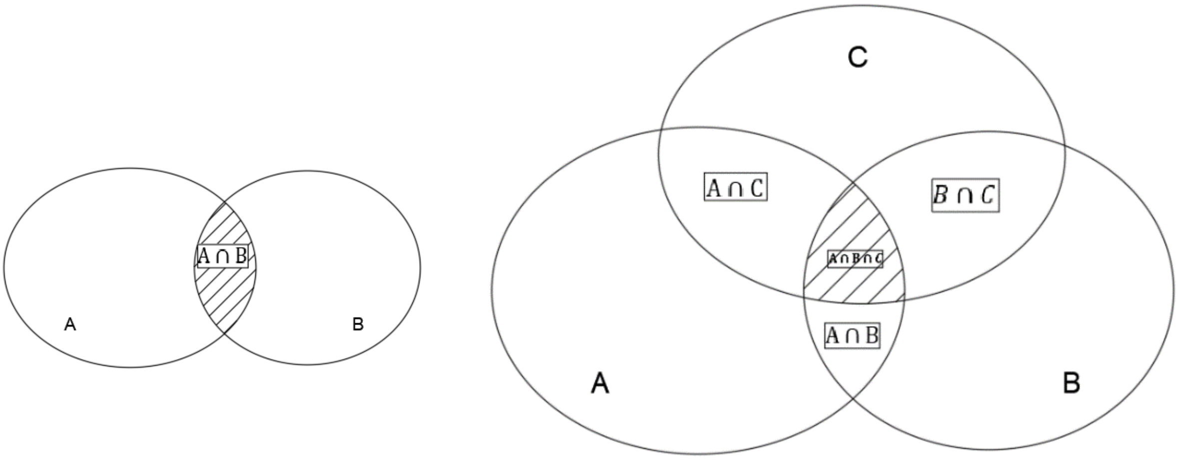


Рисунок 13 – Диаграммы Эйлера-Венна для формул мощности объединения множеств $|A \cup B|$ и $|A \cup B \cup C|$

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются конечными множествами. Все элементы этих множеств можно перебрать (пересчитать). Конечные множества, содержащие n элементов, называются n-элементными множествами. Например, множество, содержащее один элемент - одноэлементное множество, множество, содержащее пять элементов - пятиэлементное множество и т.д.

Бесконечными множествами называют такие, про которые нельзя сказать, сколько элементов в них содержится, т.е. элементы этих множеств нельзя перебрать. Например, множества натуральных, целых, четных, нечетных чисел и многие другие.

Для бесконечных множеств введены два типа бесконечности.

Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются ***счетными****.*

Множества, равномощные множеству вещественных чисел, называются ***континуальными****.*

Разница между счетными и континуальными множествами в том, что между, например, числами 4 и 5, являющимися соседними элементами множества $\mathbb{N}$ нельзя вставить число из этого же множества. А между любыми элементами множества $\mathbb{R}$ можно найти какое либо число.

Для счетных множеств сформулированы следующие утверждения, которые мы примем без доказательства.

Теорема 1.

1) Объединение конечного числа счетных множеств счетно;
2) объединение счетного числа конечных множеств счетно;
3) объединение счетного числа счетных множеств счетно.

Теорема 2.

Множество всех рациональных чисел счетно.

Теорема 3.

Множество всех действительных чисел из интервала (0, 1) не является счетным.

Мощность множества декартово произведения A и B равна

$$|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = mn, \tag{1.12}$$

где $|\mathrm{A}| = m, |\mathrm{B}| = n.$

Если же одно из них или сразу оба бесконечны, то и декартово произведение будет иметь бесконечное число упорядоченных пар.

1.6 Алгебра множеств

Из операций, выполняемых над множествами, можно вывести многочисленные свойства, называемые также основными законами алгебры множеств.

Законы коммутативности:

$$\begin{gathered} \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A} \\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A} \end{gathered} \tag{1.13}$$

Законы идемпотентности:

$$\begin{gathered} \mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A} \\ \mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A} \end{gathered} \tag{1.14}$$

Законы ассоциативности:

$$\begin{gathered} \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} \\ \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} \end{gathered} \tag{1.15}$$

Законы дистрибутивности:

$$\begin{gathered} \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \\ \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \end{gathered} \tag{1.16}$$

Закон тождества:

$$\begin{gathered} \mathrm{A} \cup \emptyset = \mathrm{A} \\ \mathrm{A} \cup U = U \end{gathered} \tag{1.17}$$

$$A \cap U = A$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (1.18)$$

Законы дополнения:

$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$
$$\overline{\overline{A}} = A \qquad (1.19)$$
$$\overline{U} = \emptyset$$
$$\overline{\emptyset} = U$$

Доказательство справедливости приведенных формул может опираться на равенство двух множеств.

Пример 1.5 Доказать один из законов де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Решение

Рассмотрим два множества $\overline{A \cup B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$. Используя поэтапные эквивалентные переходы, основанные на определении соответствующих операций, получим равные множества.

$\overline{A \cup B} = \{x : x \notin A \cup B\} = \{x : \text{не } (x \in A \cup B)\} = \{x : \text{не } \big((x \in A) \text{ и } (x \in B)\big)\}$,

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{x : (x \notin A) \text{или } (x \notin B)\} = \{x : \big(\text{ не } (x \in A)\big) \text{ или } (\text{не } (x \in B)\big)\} =$
$\{x : \text{не } \big((x \in A) \text{ и } (x \in B)\big)\}$.

Таким образом, доказали что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Заданы множества *A = {0, 1, 5, 15, 20, 25}* , *B = {0, 1, 2, 4, 5}* , *C = {1, 15, 20}*. Найти: *а)* $A \cup B$; *б)* $A \cap C$; *в)* $A \cup B \cap C$; *г)* $C \setminus B$; *д)* $(B \setminus A) \cap C$; *е)* $A \Delta B$; *ж)* $(B \cap A) \setminus C$. Найдите мощности полученных множеств.
2. Задайте множество четных трехзначных натуральных чисел перечислением элементов. Найдите мощность полученного множества.
3. Задайте множество $\{x:\ x \in \mathbb{C}, x^2 + 4 = 0\}$ перечислением элементов. Найдите мощность полученного множества.
4. Взаимное расположение множеств A, B и C указано на рисунке 14. Изобразите множество, соответствующее заданной формуле: $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \cap C)$.

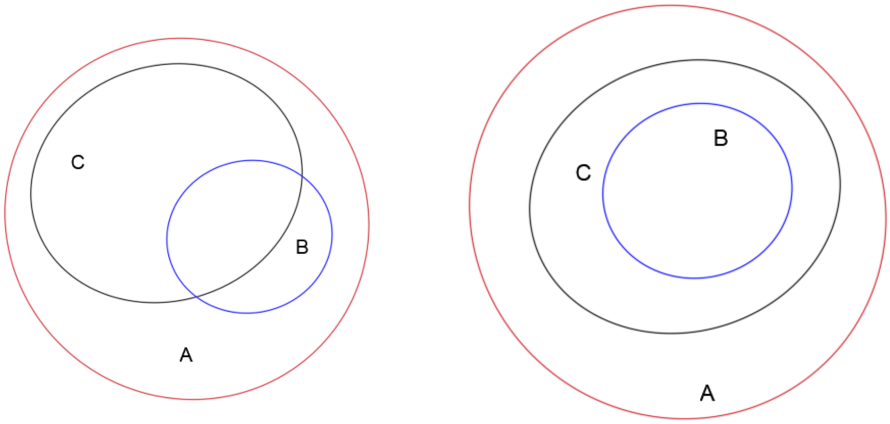


Рисунок 14 Взаимные расположением множеств *A, B, C* для задания 4.

5. Докажите равенства 1.14-1.16, используя поэтапные эквивалентные переходы.
6. Докажите равенство: $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
7. Заданы множества A={1,3,5} и B={a, b}. Найдите: а) A×B, б) B×A, в) B×B, г) A×Ø.

Индивидуальные задания

1. Заданы множества A , B , C. Найти: *а*) $A \cup B$; *б)* $A \cap C$; *в)* $A \cup B \cap C$; *г)* $C \setminus B$; *д)* $(B \setminus A) \cap C$; *е)* $A \Delta B$; *ж)* $(B \cap A) \setminus C$. Найдите мощности полученных множеств.

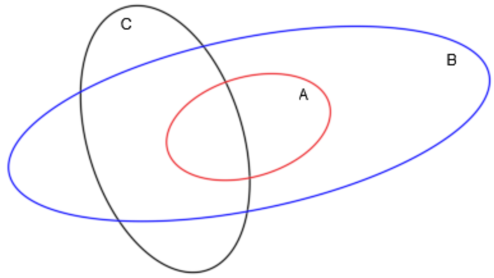
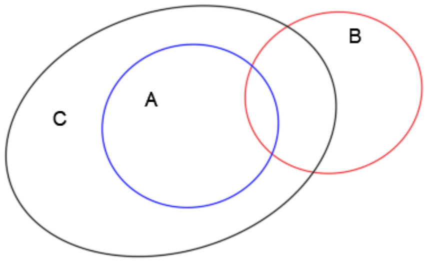
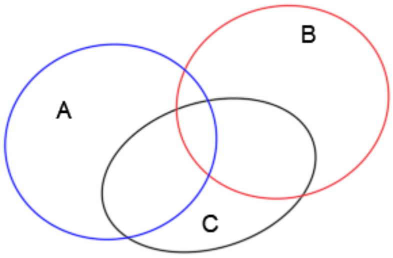
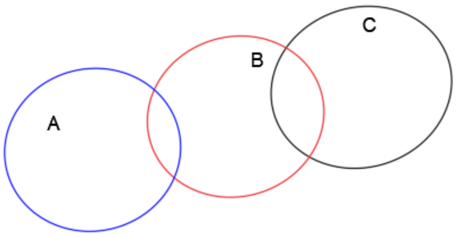
Номер варианта	A	B	C
1	{1,3,5,9,11,12}	{0,1,3,7}	{0,1,2,12}
2	{0,4,5,6,7,9}	{4,5,7,9,11}	{1,2,4}
3	{3,4,6,7,8,9}	{0,1,2,4,9}	{2,5,8}
4	{0,1,2,3,4,5,6}	{2,4,8,10}	{2,6,7,12}
5	{1,3,5,7,10,12}	{0,1,4,7}	{0,2,8,12,14}
6	{1,3,5,7,9,11}	{0,7,9,10}	{1,2,3}
7	{0,2,4,6,8,10,14}	{0,1,2,4}	{1,2,8}
8	{0,3,6,9,12,15}	{2,4,6,8,12}	{0,1,2}
9	{1,2,3,5,6,7,10}	{1,3,5,9}	{0,1,3,10}
10	{1,7,8,11,13,15}	{1,3,7,13}	{1,7,15}
11	{1,5,6,7,8,9,11}	{0,1,2,7}	{0,1,2,9}
12	{0,1,2,7,8,9,12}	{0,1,3,8}	{1,2,3}
13	{1,2,3,4,5,9,10}	{0,1,2,5}	{0,3,6,9}
14	{1,2,5,9,11,12}	{1,4,5,7}	{0,1,2,4}
15	{1,8,9,11,12,15}	{0,1,8,15}	{0,8,15}
16	{1,3,4,6,9,11,12}	{0,1,2,7}	{0,1,3,12}
17	{0,2,3,6,7,10,14}	{0,1,3,4}	{1,4,7,8}

18	{0,3,6,9,12,15}	{2,4,6,8,12}	{0,8,9,10}
19	{1,2,3,5,6,7,10}	{1,3,5,9}	{1,3,10,13}
20	{1,7,8,11,13,15}	{1,3,7,13}	{1,7,15,16}

2. Задайте множества перечислением элементов. Найдите мощности полученных множеств.

Номер варианта	Множество
1	$\{x\colon\ x \in \mathbb{N}, 7 < x < 15\}$
2	Множество четных одноразрядных натуральных чисел
3	Множество нечетных одноразрядных целых чисел
4	$\{x\colon\ x \in \mathbb{Z}, -15 < x < 3\}$
5	$\{x\colon\ x \in \mathbb{N}, \lvert x\rvert < 15\}$
6	$\{x\colon\ x \in \mathbb{Z}, \lvert x\rvert < 15\}$
7	$\{x\colon\ x \in \mathbb{N}, -7 < x \le 15\}$
8	$\{x\colon\ x \in \mathbb{Z}, -7 < x \le 15\}$
9	Множество двузначных целых чисел кратных 11
10	Множество двузначных натуральных чисел кратных 11
11	$\{x\colon\ x \in \mathbb{N}, x^3 \le 8\}$
12	Множество нечетных одноразрядных натуральных чисел
13	Множество четных одноразрядных целых чисел
14	$\{x\colon\ x \in \mathbb{Z}, x^2 \le 8\}$
15	$\{x\colon\ x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\}$
16	$\{x\colon\ x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 = 0\}$
17	Множество отрицательных целых чисел больших -8
18	Множество нечетных натуральных чисел меньших 14
19	$\{x\colon\ x \in \mathbb{N}, x \le 8\}$
20	$\{x\colon\ x \in \mathbb{Z}, x \le 8\}$

3. Взаимное расположение множеств A, B и C указано на рисунке. Изобразите множество, соответствующее заданным формулам.

Номер варианта	Взаимное расположение множеств	Задание *а)*	Задание *б)*
1		$A \setminus (B \cup C)$	$(B \cap C) \setminus (A \cup C)$
2		$B \setminus (A \cup C)$	$(B \setminus C) \cap (A \cup C)$
3		$C \setminus (B \cup A)$	$(B \cap C) \cup (A \setminus C)$
4		$(B \setminus C) \cup A$	$(B \cup C) \cap (A \cup C)$
5		$(A \setminus B) \cup C$	$(B \cap C) \cup (A \cap C)$
6		$A \setminus (B \cup C)$	$(B \cap C) \setminus (A \cup C)$
7		$B \setminus (A \cup C)$	$(B \setminus C) \cap (A \cup C)$
8		$C \setminus (B \cup A)$	$(B \cap C) \cup (A \setminus C)$
9		$(B \setminus C) \cup A$	$(B \cup C) \cap (A \cup C)$
10		$(A \setminus B) \cup C$	$(B \cap C) \cup (A \cap C)$
11		$A \setminus (B \cup C)$	$(B \cap C) \setminus (A \cup C)$
12		$B \setminus (A \cup C)$	$(B \setminus C) \cap (A \cup C)$
13		$C \setminus (B \cup A)$	$(B \cap C) \cup (A \setminus C)$
14		$(B \setminus C) \cup A$	$(B \cup C) \cap (A \cup C)$
15		$(A \setminus B) \cup C$	$(B \cap C) \cup (A \cap C)$
16		$A \setminus (B \cup C)$	$(B \cap C) \setminus (A \cup C)$
17		$B \setminus (A \cup C)$	$(B \setminus C) \cap (A \cup C)$
18		$C \setminus (B \cup A)$	$(B \cap C) \cup (A \setminus C)$
19		$(B \setminus C) \cup A$	$(B \cup C) \cap (A \cup C)$
20		$(A \setminus B) \cup C$	$(B \cap C) \cup (A \cap C)$

2. Комбинаторика

Комбинаторика представляет собой область математики, занимающейся подсчётом элементов конечных множеств.

Как самостоятельная ветвь математики комбинаторика возникла в XVII веке с развитием теории вероятностей. Название этому математическому направлению дал немецкий языковед, философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), опубликовавший в 1666 г. свою работу «Об искусстве комбинаторики», где впервые вводится термин «комбинаторный».

При решении комбинаторных задач используются правила суммы и произведения.

Правило суммы: если некоторый объект A можно распределить (выбрать) x способами, а объект B — y способами, причем эти способы не пересекаются, то «A **или** B» можно распределить $\boldsymbol{x + y}$ способами.

Правило произведения: если некоторый объект A можно распределить (выбрать) x способами, а после каждого варианта выбора объекта A некоторый объект B можно распределить y способами, то оба объекта «A **и** B» можно выбрать $\boldsymbol{x \cdot y}$ способами.

В комбинаторных формулах часто встречается выражение **n!** Это факториал – функция, определенная на множестве целых положительных чисел и представляющая собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n, где каждое число встречается точно один раз. Название функции произошло от английского слова factor, что в переводе обозначает «сомножитель». Вычисляется факториал так:

$$
\begin{aligned}
&0! = 1\\
&1! = 1\\
&2! = 1\cdot 2 = 2\\
&3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6\\
&4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24\\
&5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120\\
&\ldots\\
&(n-1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)\\
&n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n = (n-1)!\cdot n
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

Заметим, что функция **n!** является быстро растущей, для нее справедлива формула Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \qquad (2.2)$$

Общие задачи пересчета связаны с выборкой некоторого числа элементов из заданного множества. Такие задачи полезно делить на виды в зависимости от того, как выбираются элементы: с повторением или без повторений, с учетом порядка выбора или без него.

2.1 Размещения

Размещениями из n элементов по k местам (обозначается A_n^k) называются соединения, содержащие k элементов, взятых из n элементов и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом или их порядком. Количество A_n^k всех размещений из n элементов по k местам находится по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2.3)$$

Доказательство. Количество элементов, входящих в каждый набор совпадает с количеством мест, поэтому наборы состоят из k элементов, причем первый элемент может быть выбран (n) способами, второй (n-1) способом, третий (n-2), …, m-й элемент (n-m+1) способом. Тогда по правилу произведения количество всех таких наборов будет равно

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Что и требовалось доказать.

Размещениями с повторением из n элементов по k местам (обозначается $\tilde{A}_n^k$) называются соединения, содержащие k элементов, взятых из n элементов и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом или их порядком. Количество $\tilde{A}_n^k$ всех размещений с повторениями из n элементов по k местам находится по формуле:

$$\tilde{A}_n^k = n^k \tag{2.4}$$

Доказательство. Возьмем n объектов: $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Будем выбирать объект из этого множества и возвращать обратно и так k раз. Это действие представляет собой последовательный выбор объектов по одному из множеств

$A_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $A_2 = \{a_1, \ldots, a_n\}$, …, $A_k = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

По правилу умножения количество способов выбрать k объектов равно

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$$

Что и требовалось доказать.

Пример 2.1 Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

<u>Решение</u>

При составлении сигналов порядок выбранных цветов флажков является важным, поэтому применим формулу размещений. Цвета у флажков не повторяются, поэтому искомое число сигналов найдем по формуле размещения без повторений:

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4!} = 30.$$

Ответ: 30 сигналов.

Пример 2.2 Сколькими способами можно распределить 3 различных шара по 6 лункам?

<u>Решение</u>

Заметим, что по условию данной задачи нет ограничений на попадание сразу трех шаров в одну лунку, значит нужно применить формулу с повторениями, причем это будет формула размещений с повторениями, т.к. важно в какую именно лунку попадут шары. Искомое число способов:

$\widetilde{A}_6^3 = 6^3 = 216.$

Ответ: 216 способов.

2.2 Сочетания

Сочетаниями из n элементов по k местам (обозначается C_n^k) называются такие соединения, содержащие k элементов, взятых из n элементов и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом, порядок роли не играет. Количество C_n^k всех возможных сочетаний из n элементов по k местам, находятся по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2.5)$$

При доказательстве справедливости данного утверждения легко заметить, что $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

Для вычисления *сочетаний с повторениями (обозначается* $\tilde{C}_n^k$) справедлива формула:

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \qquad (2.6)$$

Пример 2.3 Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение

Заметим, что порядок извлечения деталей не важен, повторений деталей нет, поэтому применяем формулу сочетаний без повторений. Искомое число способов для извлечения двух деталей из имеющихся десяти равно $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$.

Ответ: 45 способов.

Пример 2.4 Сколькими способами можно рассадить трех опоздавших госте между шестью уже сидящими за круглым столом?

Решение

Искомое число способов для рассаживания трех гостей среди присутствующих шести равно $\tilde{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21.$

Ответ: 21 способ.

2.3 Перестановки

Перестановками из n элементов называются такие соединения этих элементов, которые отличаются только порядком их следования друг за другом. Количество P_n всех возможных перестановок из n элементов находится по формуле

$$P_n=n! \qquad (2.7)$$

Доказательство. Перестановки представляют собой вид размещений, при котором количество элементов и мест совпадает, т.е. $n=k$. Тогда

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Что и требовалось доказать.

Для вычисления *перестановок с повторениями (обозначается* $\widetilde{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$) справедлива формула:

$$\widetilde{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \qquad (2.8)$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – число повторений соответственно *1-го, 2-ого….k – го* элемента.

Пример 2.5 Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, при условии, что цифры в числах не повторяются?

Решение

Заметим, что первую из трех цифр можно выбрать тремя способами, вторую цифру уже двумя способами, третью – единственным оставшимся числом. Тогда искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. И вот эти числа: 123, 132, 231, 213, 312, 321.

Ответ: 6 чисел.

Пример 2.6 Сколько существует перестановок в слове «математика»?

Решение

Заметим, что в слове «математика», состоящем из 10 букв, есть повторяющиеся: «м» повторяется 2 раза, «а» - 3 раза, «т» - 2 раза. Искомое число перестановок посчитаем по формуле (2.8), получим

$\widetilde{P}_{10}(2, 3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200.$

Ответ: 151200 перестановок.

2.4 Бином Ньютона

Числа C_n^k называются биномиальными коэффициентами, т.к. они входят в формулу Бинома Ньютона:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k, \qquad (2.9)$$

где *n, k* - натуральные числа,

x, y - действительные числа.

В частности, при *n=2* получается формула сокращенного умножения $(a+b)^2 = C_2^0 \cdot a^2 + C_2^1 \cdot a \cdot b + C_2^2 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Биномиальные коэффициенты также находятся с помощью треугольника Паскаля, в котором каждый внутренний элемент строки равен сумме стоящих над ним элементов предыдущей строки, а боковые стороны треугольника имеют значение единиц.

Выражение	Биномиальные коэффициенты C_n^k
$(x+y)^0$	1
$(x+y)^1$	1 1
$(x+y)^2$	1 2 1
$(x+y)^3$	1 3 3 1
$(x+y)^4$	1 4 6 4 1
$(x+y)^5$	1 5 10 10 5 1
…	……….

Рисунок 15 – Треугольник Паскаля

Пример 2.7 Разложить выражение $(a+b)^5$, используя бином Ньютона.

<u>Решение</u>

По треугольнику Паскаля видно, что биномиальные коэффициенты равны 1, 5, 10, 10, 5, 1. Эти же самые коэффициенты можно найти по формуле (2.9):

$C_5^0 = \frac{5!}{0!\cdot 5!} = 1;$

$C_5^1 = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5;$

$C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10;$

$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10;$

$C_5^4 = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5;$

$C_5^5 = \frac{5!}{5!\cdot 0!} = 1.$

Записываем искомое разложение:
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Пример 2.8 Найти коэффициенты бинома Ньютона для шестого элемента в разложении выражения $(a+b)^{10}$.

<u>Решение</u>

Вычислим коэффициенты по формуле (2.9), где *n = 10*, *k = 5* (поскольку первый элемент начинается с нуля)

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Ответ: 252.

Полиномиальная формула является обобщением формулы бинома Ньютона для произвольного числа слагаемых:

$$\left(x_1 + x_2 + \dots + x_\text{p}\right)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\text{p}=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_\text{p}!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p}, \qquad (2.10)$$

где $k_1, k_2, \dots, k_\text{p}$ - натуральные числа,
$x_1, x_2, \dots, x_\text{p}$ - действительные числа.

Пример 2.9 Раскрыть скобки в выражении $(x_1 - 2x_2 + 3)^2$.

<u>Решение</u>

Выпишем все возможные случаи, когда сумма ступеней равна двум: 200, 020, 002, 110, 101, 011. Применим полиномиальную формулу

$$(x_1 - 2x_2 + 3)^2 =$$

$$= \frac{2!}{2!\,0!\,0!} x_1^2(-2x_2)^0 3^0 + \frac{2!}{0!\,2!\,0!} x_1^0(-2x_2)^2 3^0$$
$$+ \frac{2!}{0!\,0!\,2!} x_1^0(-2x_2)^0 3^2 + \frac{2!}{1!\,1!\,0!} x_1^1(-2x_2)^1 3^0$$
$$+ \frac{2!}{1!\,0!\,1!} x_1^1(-2x_2)^0 3^1 + \frac{2!}{0!\,1!\,1!} x_1^0(-2x_2)^1 3^1$$
$$= x_1^2 + 4x_2^2 + 9 - 4x_1x_2 + 6x_1 - 6x_2$$

Ответ: $x_1^2 + 4x_2^2 + 9 - 4x_1x_2 + 6x_1 - 6x_2$.

Задачи для самостоятельного решения

<u>Задача № 1.</u> Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

Задача № 2. Сколько четырёхзначных чисел можно записать при помощи цифр 1,2,3,4,5?

Задача № 3. Сколькими способами можно распределить три награды (1,2,3 места) среди 10-ти участников соревнования?

Задача № 4. В классе 12 учебных предметов и 5 различных уроков в день. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий?

Задача № 5. В президиум собрания избраны 8 человек. Сколькими способами они могут распределить между собой обязанности председателя, секретаря и заместителя?

Задача № 6. Сколько существует способов, чтобы рассадить двух учеников по трём свободным местам?

Задача № 7. В группе 28 студентов. Сколько можно составить групп по 5 человек в каждой?

Задача № 8. Игра спортлото «5» из «36». Сколько неповторяющихся вариантов можно получить?

Задача № 9. В вазе 4 красных и 8 розовых гвоздик. Сколькими способами можно взять: а) три цветка из вазы? б) три красных и два розовых цветка?

Задача № 10. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за три стола по 4 человека?

Задача № 11. Сколько различных вариантов существует для составления хоккейной команды из 9 нападающих, 5 защитников, 3 вратарей, если в состав хоккейной команды на предстоящую игру должны войти 3 нападающих, 2 защитника и 1 вратарь?

Задача № 12. В группе из 28 студентов 7 юношей. Требуется составить такие группы из 5 студентов, чтобы в каждой был юноша. Сколько таких групп можно составить?

Задача № 13. В школьном турнире по хоккею в полуфинал вышли 4 команды. Сколько всего игр состоится при условии, что каждая команда играет по две игры с противником?

Задача № 14. Сколькими способами можно составить список из 10-ти человек?

Задача № 15. Сколько существует способов, чтобы рассадить 12 гостей за круглый стол?

Задача № 16. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Москва»?

Задача № 17. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на пять, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7?

Задача № 18. Четыре стрелка должны поразить 8 мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

Задача № 19. Шесть ящиков различных материалов доставляются на 8 этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на восьмой этаж будет доставлено не менее двух ящиков?

Задача № 20. Разложить выражение $(2a+3b)^5$, используя бином Ньютона.

Задача № 21. Разложить выражение $(a-9b)^6$, используя бином Ньютона.

Задача № 22. Найти коэффициенты бинома Ньютона для шестого элемента в разложении выражения $(a+b)^{14}$.

Задача № 23. Найти коэффициенты бинома Ньютона для третьего элемента в разложении выражения $(a-5b)^{10}$.

Задача № 24. Раскрыть скобки в выражении $(4a-2b+7)^2$

Задача № 25. Раскрыть скобки в выражении $(-a-b+2)^3$

Индивидуальные задания

Вариант	Задание
1	1. У человека есть пять пиджаков, восемь рубашек и семь галстуков. Сколько различных костюмов можно составить из этих предметов? 2. Перевертыш — это многозначное число, которое не поменяет своего значения, если все его цифры записать в обратном порядке. Сколько существует шестизначных перевертышей? 3. Разложить выражение $(a+2b)^6$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-b+4)^3$ 5. Сколько двоичных чисел можно записать, используя 16 разрядов?
2	1. У женщины в шкафу висит шесть платьев, пять юбок и три блузки. Сколько разных нарядов она может составить из своей одежды? 2. Сколько существует четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют цифры: 0, 1, 2, 3, и 6, причем 0 на первом месте, естественно, стоять не может? 3. Разложить выражение $(2a+b)^4$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-8b+4)^2$ 5. Сколько двоичных чисел можно записать, используя 8 разрядов?

3	1. В холодильнике стоит мороженое шести разных наименований. На десерт можно взять одну, две или даже три порции мороженого сразу. Сколько возможностей есть для различных десертов? 2. Сколько можно составить четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют цифры: 0, 1, 2, 3, и 8, причем в своей записи не имеющих повторяющихся цифр? 3. Разложить выражение $(a-3b)^5$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-b+3)^3$ 5. Сколько шестнадцатеричных чисел можно записать, используя 8 разрядов?
4	1. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать? 2. Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из шести символов. Первые два из них — строчные буквы латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей? 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для шестого элемента в разложении выражения $(a+2b)^5$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-b+8)^3$ 5. Сколько можно составить автомобильных номеров для одного региона, используя номер, состоящий из трех букв и трех цифр?
5	1. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона, который состоит из 6 цифр. Сколько существует вариантов выбора при условии, что все цифры номера различны? 2. Обычно наибольшее число очков на одной кости домино равно 12. Сколько костей содержала бы игра, если бы этот число равнялось 18? 3. Разложить выражение $(4a-2b)^5$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(-2a-b+2)^2$ 5. Сколько шестнадцатеричных чисел можно записать, используя 16 разрядов?

6	1. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона, который состоит из 7 цифр. Сколько существует вариантов выбора при условии, что четыре последние цифры телефонного номера одинаковы. 2. Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из четырех символов. Первые два из них — строчные буквы латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся две могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей? 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для пятого элемента в разложении выражения $(a+b)^8$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-7b+16)^2$ 5. Сколько существует перестановок в слове «колокол»?
7	1. Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из четырех символов. Это могут быть цифры или буквы латинского алфавита (всего 26 букв). Сколько можно придумать различных паролей? 2. Обычно наибольшее число очков на одной кости домино равно 12. Сколько костей содержала бы игра, если бы этот число равнялось 20? 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для третьего элемента в разложении выражения $(a-b)^{12}$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(-2a-b+8)^2$ 5. Сколько двоичных чисел можно записать, используя 10 разрядов?
8	1. Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из шести символов. Это могут быть цифры, строчные или прописные буквы латинского алфавита (всего 26 букв). Сколько можно придумать различных паролей? 2. Обычно наибольшее число очков на одной кости домино равно 12. Сколько костей содержала бы игра, если бы этот число равнялось 22? 3. Разложить выражение $(n-2k)^6$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(-a-b-14)^2$ 5. Сколько существует перестановок во фразе «око за око»?

9	1. Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из восьми символов. Первые два из них — прописные буквы латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей? 2. Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6 000, можно составить, используя только нечетные цифры? 3. Разложить выражение $(a-b)^8$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-b+5)^3$ 5. Сколькими способами можно пятерых студентов распределить по трем группам?
10	1. Пароль, открывающий доступ к телефону, состоит из шести цифр. Сколько можно придумать различных паролей? 2. Перевертыш — это многозначное число, которое не поменяет своего значения, если все его цифры записать в обратном порядке. Сколько существует семизначных перевертышей? 3. Разложить выражение $(x+0{,}3b)^5$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-b+1)^4$ 5. Сколько существует перестановок в слове «параллепипед»?
11	1. Пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из четырех символов. Первый символ — прописная буква латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся три могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей? 2. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона, который состоит из 7 цифр. Сколько существует вариантов выбора при условии, что все цифры номера могут быть любыми из имеющихся десяти. 3. Разложить выражение $(x+5y)^5$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a+b+1)^4$ 5. Сколько существует перестановок в слове «параллелограмм»?

12	1. Пароль, открывающий доступ к телефону, состоит из четырех цифр. Сколько можно придумать различных паролей? 2. Обычно наибольшее число очков на одной кости домино равно 12. Сколько костей содержала бы игра, если бы этот число равнялось 30? 3. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона, который состоит из 6 цифр. Сколько существует вариантов выбора при условии, что все цифры номера могут быть любыми из имеющихся десяти. 4. Разложить выражение $(-x+y)^7$, используя бином Ньютона. 5. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-b+3)^3$
13	1. Пароль, открывающий доступ к электронной почте, состоит из восьми символов. Это могут быть цифры, строчные или прописные буквы латинского алфавита (всего 26 букв). Сколько можно придумать различных паролей? 2. Обычно наибольшее число очков на одной кости домино равно 12. Сколько костей содержала бы игра, если бы этот число равнялось 24? 3. Разложить выражение $(7x-3b)^5$, используя бином Ньютона. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(2a-b+24)^2$ 5. Сколько существует перестановок в слове «эксцентриситет»?
14	1. Пароль, открывающий доступ к электронной почте, состоит из шести символов. Это могут быть цифры, строчные или прописные буквы латинского алфавита (всего 26 букв). Сколько можно придумать различных паролей? 2. Обычно наибольшее число очков на одной кости домино равно 12. Сколько костей содержала бы игра, если бы этот число равнялось 26? 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для четвертого элемента в разложении выражения $(a-b)^{12}$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $\left(-a-7b+1\right)^2$

	5. Из Москвы до Новосибирска можно добраться поездом и самолетом; из Новосибирска в Томск - поездом, самолетом, автобусом, пароходом. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Москва – Новосибирск - Томск?
15	1. Сколько четных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, и 6, причем 0 на первом месте, естественно, стоять не может? 2. Двадцати студентам раздали два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно рассадить в два ряда так, чтобы рядом не было двух одинаковых вариантов? 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для четвертого элемента в разложении выражения $(a-b)^9$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-b+5)^3$ 5. Стадион имеет 4 входа. Сколькими способами болельщик может войти на стадион в один вход, а выйти через другой?
16	1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр: 0, 1, 2, 3, 6, 9, причем эти числа не имеют повторяющихся цифр и окажутся больше, чем 4 000? 2. Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е место. Две команды, занявшие последние места, не будут участвовать в следующем таком же первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних двух команд. 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для четвертого элемента в разложении выражения $(2a-b)^6$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-b+3)^3$ 5. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?
17	1. Пароль, открывающий доступ к электронной почте, состоит из пяти символов. Это могут быть цифры, строчные или прописные буквы латинского алфавита (всего 26 букв). Сколько можно придумать различных паролей?

	2. Сколько можно составить автомобильных номеров для одного региона, используя номер, состоящий из двух букв и трех цифр? 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для третьего элемента в разложении выражения $(a+b)^7$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(-7a-b+6)^2$ 5. Сколькими способами можно рассадить 7 человек за круглым столом?
18	1. Пароль, открывающий доступ к электронной почте, состоит из шести символов. Если использовать строчные или прописные буквы латинского алфавита (всего 26 букв) сколько можно придумать различных паролей? 2. Двенадцати студентам раздали два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно рассадить в два ряда так, чтобы рядом не было двух одинаковых вариантов 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для восьмого элемента в разложении выражения $(a-b)^{12}$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(a-7b+8)^2$ 5. Из колоды в 52 карты выбирают 3. Сколькими способами может быть сделан выбор «тройка, семерка, туз»?
19	1. Пароль, открывающий доступ к телефону, состоит из пяти цифр. Сколько можно придумать различных паролей? 2. Шестнадцати студентам раздали два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно рассадить в два ряда так, чтобы рядом не было двух одинаковых вариантов? 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для третьего элемента в разложении выражения $(a+b)^{14}$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(3a-b-4)^2$ 5. 25 выпускников школы решили обменяться фотографиями. Сколько было всего заказано фотографий?

20	1. Пароль, открывающий доступ к электронной почте, состоит из пяти символов. Это могут быть цифры, строчные буквы латинского алфавита (всего 26 букв). Сколько можно придумать различных паролей? 2. Обычно наибольшее число очков на одной кости домино равно 12. Сколько костей содержала бы игра, если бы этот число равнялось 28? 3. Найти коэффициенты бинома Ньютона для шестого элемента в разложении выражения $(a-b)^{12}$. 4. Раскрыть скобки, пользуясь полиномиальной формулой $(2a-b-13)^2$ 5. При игре в домино 7 игроков делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Список литературы

1. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техносфера, 2003. 320с.
2. Бережной В. В., Шапошников А. В. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие (курс лекций). Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2016. – Режим доступа: http://www.knigafund.ru/books/208367
3. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика. М.: ФОРУМ, 2012
4. Комогорцев В.Ф., Бардадын Н.Н. Дискретная математика. Брянск: Изд-во Брянская ГСХА, 2012.

Учебное издание

Татьяна Викторовна Бычкова

Дискретная математика. Множества

Учебно-методическое пособие для бакалавров очной и заочной формы обучения направления подготовки 09.09.03 «Прикладная информатика»

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 23.04.21 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 2,15. Тираж 25 экз. Изд. № 6923.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ