МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Брасовский промышленно - экономический техникум

Самохова Г.А.

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Брянская область 2015

УДК 372.851
ББК 74.57
С 17

Самохова, Г.А. **Математика:** учебно-методическое пособие / Г.А. Самохова. – Брянск.: Издательство ФГБОУ ВО Брянский ГАУ, 2015. – 118 с.

В методическом пособии приведен перечень практических работ по всем разделам рабочей программы дисциплины, определены объем времени на их выполнение, формы выполнения и контроля. К каждому виду работы даны методические указания и рекомендации по выполнению приведенных в пособии заданий.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 21.02.04 Землеустройство.

Рецензенты

Токарева А.В., заведующая РМК отдела образования Брасовского района

Другова Г.Е., методист (Брасовский филиал ФГБОУ ВО Брянский ГАУ)

Рекомендовано к изданию решением учебно-методическим советом филиала ФГБОУ ВО «Брянский аграрный университет» - Брасовский промышленно-экономический техникум от 25.05.2015 года, протокол № 5.

Пояснительная записка

Данное учебно-методическое пособие разработано в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» и предназначено для реализации требований федерального государственного стандарта среднего профессионального образования по специальности 21.02.04 «Землеустройство».

Согласно учебного плана и рабочей программы для специальности предусмотрено 14 часов на проведение практических занятий. Каждое занятие проводится в течении 2-х часов.

Настоящие материалы разработаны с учетом рабочей программы, составленной на основе федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) среднего профессионального образования.

В процессе практического занятия согласно рабочей программы дисциплины «Элементы высшей математики», утвержденной ПЦК естественнонаучных дисциплин студенты выполняют практические занятия под руководством преподавателя в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

Выполнение студентами практических занятий направлено на:

— обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний;

— формирование умений применять полученные знания в практической деятельности;

— развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений;

— выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы.

Практические занятия выполняются по следующим темам дисциплины «Элементы высшей математики»:

Раздел 1. Элементы математического анализа.

Раздел 2. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики.

Цель и задачи практических занятий:

В результате выполнения практических занятий обучающийся должен

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Практические занятия - один из видов практического обучения, имеющий целью закрепление теоретических знаний и формирование практических умений и навыков.

Практическая работа по математике заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий, направленных на усвоение основ учебной дисциплины «Элементы высшей математики», приобретение практических навыков решения примеров и задач. Выполнение практической работы студенты производят в письменном виде, оформляя отчеты в отдельной тетради для практических работ. Отчет предоставляется преподавателю, ведущему данную дисциплину для проверки.

Практические занятия способствуют более глубокому пониманию теоретического материала учебного курса, а также развитию, формированию и становлению различных уровней составляющих профессиональной компетентности студентов, пониманию межпредметных связей. Основой практикума выступают типовые задачи, которые должен уметь решать студент, изучающий дисциплину «Элементы высшей математики» и обучающихся по специальности «Компьютерные сети».

Для лучшего усвоения студентами изучаемого материала и получения уверенных навыков решения примеров и задач при проведении практических занятий целесообразно использовать различные методы и приемы:

- рассмотрение решения типовых примеров в форме видеолекции;
- исследовательская работа при решении примеров и практических задач;
- работа в группах;
- применение компьютерных программ для решения математических задач.

Содержанием практических занятий являются

— Выполнение вычислений, расчетов;
— Работа со справочниками, таблицами.

Необходимые структурные элементы практического занятия:

— Инструктаж, проводимый преподавателем;
— Самостоятельная деятельность студентов;

— Анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированных умений.

Перед выполнением практического занятия проводится проверка знаний студентов на предмет их готовности к выполнению задания.

Методические указания к выполнению практических работ содержат:

- Тему занятия;
- Цель занятия;
- Задачи;
- Обеспечение практической работы:
- Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.
- Пояснения (основные формулы, необходимые для выполнения практического занятия);
- Порядок выполнения занятия;
- Используемую литературу.

Оценки за выполнение являются показателями текущей успеваемости студентов по дисциплине «Элементы высшей математики».

Критерии оценки практических заданий

Отметка «5» ставится, если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если:

допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Отметка «1» ставится, если:

работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения. При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Прочность, осознанность и действенность знаний обучающихся наиболее эффективно обеспечивается при помощи активных методов. Среди них важное место занимают практические занятия по выполнению тренировочных заданий. Следует подчеркнуть, что само содержание учебной программы при ограничении времени, отведенном на изучение учебной дисциплины «Математика», требует не столько запоминания, сколько развития умений и навыков самостоятельной работы с учебной литературой.

Решая эти задачи, организуется проведение практических занятий, в ходе которых обучающиеся отрабатывают навыки решения прикладных задач в области профессиональной деятельности.

Методические рекомендации направлены, прежде всего, на оказание методической помощи студентам при проведении практических занятий по дисциплине «Математика». В данном пособии систематизированы задания по выполнению основных тренировочных заданий. Для выполнения указанных заданий практической работы требуется хорошо знать теоретический материал.

Данные методические рекомендации преследуют следующие цели:

- расширение и углубление знаний, полученных студентами при изучении теоретического материала;

Перечень практических занятий
по учебной дисциплине «Математика»

№ урока	Содержание практических занятий	Количество часов
2	Вычисление предела функции в точке.	2
4	Отработка техники дифференцирования. Вычисления производных и дифференциалов элементарных функций в заданной точке.	2
6	Отработка техники интегрирования. Освоение техники нахождения неопределенного интеграла от простейших функций с использованием таблиц неопределенных интегралов. Вычисление определенного интеграла. Освоение техники вычисления определенных интегралов от простейших функций. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения.	2
8	Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и дифференциальных уравнений второго порядка вида $y''=x+C$, $y''=\sin x$	2
11	Решение задач связанных с вычислением числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение элементарных задач, связанных с вычислением вероятностей событий.	2
13	Построение гистограммы и полигона частот. Расчет относительных частот.	2
15	Построение эмпирического ряда по заданной выборке..	2
	Итого	14

Критерии выполнения студентом практических заданий

№ п/п	Оцениваемые навыки	Метод оценки	«Отлично»	«Неудовлетворительно»
1	Отношение к работе, умение организовать работу	Наблюдение руководителя, просмотр материалов	Работа выполнена в срок. Студент точно понимает цель задания. Работа выполнена с минимальной помощью или без нее	Демонстрирует безразличие к выполняемой работе. Требует постоянного напоминания для выполнения, не выполняет требования задания. Требуется дополнительная проверка, подтверждающая самостоятельность выполнения
2.	Качественное наполнение структурных разделов работы	Проверка практической работы	Содержание разделов соответствует их названию. Собрана полная, необходимая информация. Правильно реализует алгоритмы решения по исходным данным	Содержание разделов не соответствует их названию. Использованная информация и исходные данные отрывисты и второстепенны. Полученные результаты не внушают доверия и требуют дополнительной проверки
3.	Умение использовать полученные знания и навыки при реализации задания практической работы	Проверка работы, собеседование	Свободно использует полученные знания для практической работы,	Не способен применить полученные ранее знания (даже после консультаций) из соответствующих дисциплин для решения конкретных задач практической работы. Не способен использовать знания из одного раздела при решении задач последующих разделов
4.	Достаточность объема используемой литературы и правовых источников	Проверка работы, собеседование	При подготовке и выполнении практической работы использован достаточный	При подготовке и выполнении практической работе учебная литература и правовые источники не использовались

			объем учебной литературы и правовых источников	или использовались недостаточно
5.	Умение обобщать, анализировать и делать выводы	Проверка работы, собеседование	Работа выполнена в соответствии с методикой, действующей нормативной базой	Работа выполнена с ошибками, использована устаревшая нормативная база
6.	Уровень общей профессиональной грамотности	Проверка работы	Умелое использование профессиональной терминологии, содержит ссылки на правовые источники	Неумение пользоваться профессиональной терминологией, отсутствие ссылок на правовые источники
7.	Оформление работы	Проверка работы	Студент демонстрирует аккуратность соблюдения применяемых методов и приемов, имеются все данные	Работа выполнена и оформлена небрежно, без соблюдения установленных требований

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ
по предмету «Элементы высшей математики»
для 21.02.04- 2-й курс

Практическое занятие № 1

Тема: Вычисление предела функции в точке.

Цель: Приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по вычислению пределов функции в точке. Формировать умения и навыки вычисления пределов. Повторить и систематизировать знания по данной теме. Определить уровень остаточных знаний по данной теме.

Задачи:

- развитие творческого профессионального мышления;
- познавательная мотивация;
- овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
- овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
- углубление теоретической и практической подготовки;
- развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практической работы:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.

Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2010-380 с.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия

1. Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;
2. Проверка готовности студентов к занятию;
3. Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Предел функции.»
› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
› Выполнить самостоятельную работу №1.
› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретический материал и примеры нахождения пределов функции

Типы неопределенностей и методы их раскрытия.

Часто при вычислении пределов какой-либо функции, непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применять эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

I. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* числа 5 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия нужно разложить знаменатель на множители: $x^2 - 25 = (x-5)*(x+5)$, получили общий множитель (x-5), на который можно сократить дробь. Заданный предел примет вид: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x+5}$. Подставив x=5, получим результат: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* числа 3 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель *x-3.* В результате получим новый предел, знаменатель которого при подстановке вместо переменной x числа 3 не равен нулю. Этот предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* числа 0 видим, что получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и его следствием $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. После чего предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)=1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

I I. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-8x}{4x+5}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* бесконечности (∞) видим, что получается неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия нужно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень, в данном случае на *x*. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-8x}{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{8x}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-8}{4+\frac{5}{x}}=\frac{0-8}{4+0}=\frac{-8}{4}=-2,$$

т.к. величины $\dfrac{1}{x},\dfrac{5}{x}$ являются бесконечно малыми и их пределы равны 0.

Задания для самостоятельной работы:

I вариант	II вариант	III вариант
	«3»	
а) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-8}{4x+2}$	а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x+2}{5x-1}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x}{x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-8x}{4x+5}$
в) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-36}{x-6}$	в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{x^2-25}$	в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 5x}$
	«4»	
а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$	а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3+5x-2}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+3x+}{4x^3-x^2-7x+8}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$
в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4}$	в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$	в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$
г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg 4x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$	г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{\sin 3x}$

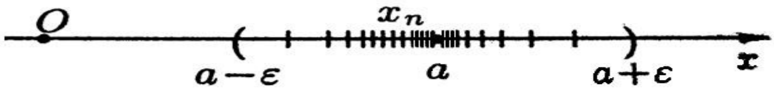
«5»		
а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$	а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$	а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-3x^2+2x}{4x^3-2x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{x^3+4}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{300x-1000}$
в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$	в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x}}{x^2-2x}$	в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$
г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$	г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2\frac{x}{5}}$	г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 4x}{\sin^2 x}$

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительно ε го числа найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Графически это выглядит так:

$|x_n - a| < \varepsilon, \quad a-\varepsilon < Xn < a+\varepsilon$



Т.е. элемент x_n находится в ε - окрестности точки а. При этом последовательности $\{x_n\}$ называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

Основные свойства сходящихся последовательностей:

1) Сходящаяся последовательность ограничена.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a + b;$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \times y_n) = a \times b;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a/b (b \neq 0).$

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a$ и для всех n выполняется неравенства $x_n \leq y_n \leq Z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. x

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и последовательность $\{y_n\}$ - ограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$

Самостоятельная работа

№1. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n^2+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+4}{n^2+5}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1})$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{5n+11}+\dfrac{\cos n}{10n})$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n^2+1}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n+1}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3}{n^2+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\times 3^n}{3^n-2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\times\sin n!}{n^2+1}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{5n}{n+1}+\dfrac{\sin n}{n})$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^n-n+1})$

20. $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}n^2(n-\sqrt{n^2+1})$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+.....+n}{n^2}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+.....+\dfrac{1}{2^n})$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+....+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+....+\dfrac{1}{3^n}}$

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Например: 1) $y = x - 2$ при $x \to 2$ б. м. ф. т.к. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$ 2) $y = \sin x$ при $x \to -\pi$ б. м. ф. т. к $\lim\limits_{x\to -\pi}\sin x = 0$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Например, $y = 2^x$ есть б. б. Ф при $x \to \infty$; $y = \dfrac{1}{x-4}$ если б. б. ф. при $x \to 4$ действительно $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x = \infty$ и $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4} = \infty$

Теорема (*о связи между функций, ее пределом и бесконечно малой функцией*). Если функция $y = f(x)$ имеет придел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \text{то}\ f(x) = A + \alpha(x).$

Теорема (обратная). Если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и б.м.ф. α (x), то число A является пределом функции $y = f(x)$, т.е если $f(x) = A + d(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Например, требуется вычислить $\lim\limits_{ч\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$. Представим числитель и знаменатель в виде суммы числа и б.м.ф.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

Функции $y=\frac{3}{x}, y=\frac{1}{x^2}, y=\frac{2}{x}, y=\frac{5}{x^2}$ при $x \to \infty$ есть б.м.ф. таким образом $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x^0}g(x)$$

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 2. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

Теорема 3. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\times\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))^n$.

Теорема 4. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}\quad (\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0)$$

Примеры:

1) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+4}{x^2-2x+4}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)}=\frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{1}{6}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}=\frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=$$

$$=\frac{3-0}{1-0}$$

3) $$\lim_{x\to 1}(x^2-7x-8)=\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}7x-\lim_{x\to 1}8=\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-7\lim_{x\to 1}x-8=$$
$$=1-7-8=-14.$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \quad \text{или} \quad \lim_{d\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

Примеры:
Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\times\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{sim3x}{3x}=3\times 1=3$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{8x^3}=(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x})^3=1^3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x})^{x+1}=\begin{vmatrix} x=4t \\ x\to\infty \\ t\to\infty \end{vmatrix}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{4}{4t})^{4t+1}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{1}=$

$=(\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t})^4\times\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})=e^4\times 1=e^4$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{5x}\right)^{2x}=\begin{vmatrix} 5x=-t \\ x=\frac{-t}{5} \\ x\to\infty \\ t\to\infty \end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{-2t}{5}}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-\frac{2}{5}}=e^{-\frac{2}{5}}$

Контрольные вопросы по теме:

1.Что называется пределом функции?
2.Сформулируйте основные теоремы о пределах.
3.Что называется числовой последовательностью?
3.Сформулируйте теорему Вейерштрасса для последовательности.
4.Какой вид имеет формула первого замечательного предела?
5.Какой вид имеет формула второго замечательного предела?
6.Какие функции называются бесконечно-большими?
7.Какие функции называются бесконечно-малыми?
8.Какая последовательность называется стационарной?
9.Какая последовательностьназываетсясходящейся7
10.Какая последовательность называется расходящейся?
11.Какие свойства сходящихся последовательностей вы знаете?
12.Какая последовательность называется возрастающей?
13.Какая последовательность называется убывающей?

Самостоятельная работа

№1. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n^2+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+4}{n^2+5}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1})$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{5n+11}+\dfrac{\cos n}{10n})$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n^2+1}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n+1}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3}{n^2+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\times 3^n}{3^n-2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\times\sin n!}{n^2+1}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{5n}{n+1}+\dfrac{\sin n}{n})$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^n-n+1})$

20. $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}n^2(n-\sqrt{n^2+1})$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+.....+n}{n^2}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+.....+\dfrac{1}{2^n})$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+....+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+....+\dfrac{1}{3^n}}$

№3. Найти пределы:

37. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$

38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$

41. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

42. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

43. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3+4}$

44. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+3}{2x^2+3x+4}$

45. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}$

46. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

47. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x-3}{x^2+2}$

48. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+4}{x^2+5}$

49. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

50. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

51. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$

52. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$

53. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{tg 2x}{\sin 4x}$

54. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 10x}{\sin 9x}$

55. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

56. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

57. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

58. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

Практическая занятие № 2

Тема: Отработка техники дифференцирования. Вычисление производных и дифференциалов элементарных функций в заданной точке.

Цель: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная функция. Закрепить навык нахождения производной и дифференциалов высшего порядка.

Обеспечение практического занятия:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задачи:

- развитие творческого профессионального мышления;
- познавательная мотивация;
- овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
- овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
- углубление теоретической и практической подготовки;
- развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Нахождение производных элементарных и сложных функций. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков.»

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу №2

› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретический материал и примеры нахождения производной элементарных функций, сложной функции, производных и дифференциалов высших порядков

Определение: Производной функции $f(x)$ $(f'(x_0))$ в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha - 1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования

Если у функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные, то

1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c - const$

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Производная сложной функции

Теперь можно установить важное в практических приложениях правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих ее функций.

Теорема 7.3.1. *Пусть задана сложная функция*

$z=F(x)=f(\varphi(x))$ *;функция* φ *имеет производную в точке* x_0*, а функция* f *имеет производную в точке* $y_0=\varphi(x_0)$*. Тогда функция* F *имеет производную в точке* x_0 *и* $F'(x_0)=f'(y_0)\varphi'(x_0)$.

Доказательство. Так как функция $z=f(y)$ дифференцируема в точке y_0, то $\Delta z(\Delta y)=f'(y_0)\Delta y+\varepsilon(\Delta y)\Delta y,$

где $\varepsilon(\Delta y)\to 0$ при $\Delta y\to 0$. Если положить $\varepsilon(0)=0$, то функция $\varepsilon(\Delta y)$ непрерывна в точке $\Delta y=0$.

Придадим переменной x в точке x_0 малое приращение Δx; оно влечет приращение зависимой переменной z: $\Delta z(\Delta y(\Delta x))$. Итак, $\Delta F(x_0)=\Delta z(\Delta y(\Delta x))=f'(y_0)\Delta y(\Delta x)+\varepsilon(\Delta y(\Delta x))\Delta y(\Delta x)$.

Разделив на $\Delta x\neq 0$, получим

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=f'(y_0)\frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x}+\varepsilon(\Delta y(\Delta x))\frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (7.3.1)$$

Так как существует $\varphi'(x_0)$, то функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и, следовательно, $\Delta y(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и так как $\Delta y(0)=0$, то функция $\Delta y(\Delta x)$ непрерывна в точке $\Delta x=0$. Отсюда сложная функция, как суперпозиция непрерывных функций $\varepsilon(\Delta y(\Delta x))$, непрерывна в точке $\Delta x=0$.

Теперь, переходя к пределу в (7.3.1) при $\Delta x\to 0$, получим

$$F'(x_0)=f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

Пример.
$z = F(x) = e^{\sin x}$,

$$F(x) = f(\varphi(x)), z = e^y = f(y), y = \varphi(x) = \sin x.$$

Тогда

$$F'(x) = e^y (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x.$$

Пример. Найдем дифференциал функции $z = \arcsin \ln(x^2 + a^2)$:

$$dz = \frac{d \ln(x^2 + a^2)}{\sqrt{1 - \ln^2(x^2 + a^2)}} = \frac{d(x^2 + a^2)}{\sqrt{1 - \ln^2(x^2 + a^2)}\,(x^2 + a^2)} = \frac{2x dx}{\sqrt{1 - \ln^2(x^2 + a^2)}\,(x^2 + a^2)}.$$

Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \in (a;b)$, то мы можем рассмотреть функцию $f' : (a;b) \to \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке x значение производной $f'(x)$. Эта функция f' называется производной функции f, или *первой производной* от f. (Иногда саму исходную функцию f называют *нулевой производной* и обозначают тогда $f^{(0)}$.) Функция $g_1(x)=f'(x)$, в свою очередь, может иметь производную во всех (или некоторых) точках x интервала $(a;b)$, которую мы обозначим $g_1'(x)=f''(x)$ и назовём *второй производной* функции $f(x)$. Если предположить, что вторая производная $g_2(x)=f''(x)$ существует во всех точках $x\in(a;b)$, то она может также иметь производную $g_2'(x)=f'''(x)$, называемую *третьей производной* функции $f(x)$, и т. д. Вообще, n*-й производной* функции $f(x)$ называется производная от предыдущей, $(n-1)$-й производной $g_{n-1}(x)=f^{(n-1)}(x)$:

$$f^{(n)}(x)=g_{n-1}'(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)',$$

если эта производная существует. n-я производная называется также *производной* n*-го порядка*, а её номер n называется *порядком производной.*

При $n=1;2;3$ первую, вторую и третью производные принято обозначать штрихами: $f'(x), f''(x), f'''(x)$ или y', y'', y'''; при прочих n -- числом в скобках в верхнем индексе: $f^{(4)}(x), f^{(5)}(x),\dots$ или $y^{(4)}, y^{(5)},\dots$.

Физический смысл производной второго порядка проясняется из того, что если первая производная $f'(x)$ задаёт мгновенную скорость изменения значений $f(x)$ в момент времени x, то вторая производная, то есть производная от $f'(x)$, задаёт мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, то есть *ускорение* значений $f(x)$. Следовательно, третья производная -- это скорость изменения ускорения (или, что то же самое, ускорение изменения скорости, поскольку, как очевидно следует из определения, $(f''(x))' = (f'(x))''$).

Пример 1. Найдём вторую производную функции $f(x) = \sin^3 x$. Первая производная равна

$$f'(x) = (\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x;$$

далее находим

$$f''(x) = 3(\sin^2 x\cos x)' = 3(2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x) = 3\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Пример 2. Пусть $y = f(x) = e^{kx}$. Тогда

$$y' = e^{kx}\cdot k = ke^{kx}; y'' = k(e^{kx})' = ke^{kx}\cdot k = k^2e^{kx}; \ldots; y^{(n)} = k^ne^{kx}; \ldots.$$

При $k = 1$ все производные оказываются равными исходной функции: $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = f(x) = \sin x$. Тогда

$$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{(4)} = \sin x.$$

Поскольку четвёртая производная $y^{(4)}$ совпала с исходной функцией y, то далее значения производных начнут повторяться с шагом 4: при $k = 0; 1; 2; \ldots$ получаем

$$y^{(4k)}(x) = \sin x; y^{(4k+1)}(x) = \cos x; y^{(4k+2)}(x) = -\sin x; y^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$$

Заметим также, что

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right).$$

Легко видеть, что имеет место общая формула:

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Дифференциалы высших порядков.

Напомним, что дифференциал функции $f(x)$ (называемый также *первым дифференциалом*, или *дифференциалом первого порядка*) задаётся формулой

$$df(x; dx) = f'(x)dx.$$

Рассмотрим это выражение (при фиксированном приращении dx аргумента x) как функцию переменного x и найдём её дифференциал $d(df(x;dx)) = d^2 f(x;dx)$:

$$d^2 f(x;dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Этот дифференциал от первого дифференциала называется *вторым дифференциалом* от функции $f(x)$, или *дифференциалом второго порядка*. Аналогично, дифференциал от второго дифференциала называется *третьим дифференциалом*; он задаётся формулой

$$d^3 f(x;dx) = (f''(x)(dx)^2)'dx = f'''(x)(dx)^3.$$

Вообще, n*-й дифференциал* $d^n f(x;dx)$, или *дифференциал* n*-го порядка*, определяется как дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала (при постоянном приращении dx); для него имеет место формула:

$$d^n f(x;dx) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Примеры.

1. Найти значение производной функции

$y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Решение.

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)' \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Примеры.

1. Если $y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, то

$$y' = (3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}})' = 3(x^{-1/2})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

2. $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Найдем $y'(-1)$.

$y' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$.

3. $y = \ln x \cdot \cos x$, то $y' = (\ln x)' \cos x + \ln x (\cos x)' = 1/x \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x$.

4. $$y = \frac{x^3}{\cos x},\ \ y' = \frac{\left(x^3\right)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}.$$

$y = tgx,$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Контрольные вопросы по теме

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.
8. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?

9. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?

10. В чем заключается механический смысл производной?

11. Что называется производной второго порядка и, каков ее механический смысл?

12. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?

Самостоятельная работа №2

Вариант – 1

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = x^2 + 4x + 3;$

б) $y = \frac{6}{x} + 2\sqrt{x};$

в) $y = \frac{x^6 - 4x + 1}{x};$

г) $y = \frac{3x - 4}{3};$

д) $y = \frac{3x - 4}{7 - 2x};$

е) $y = 3sin2x;$

ж) $y = \sqrt{x^2 - 4x};$

з) $y = (3 + 2x)(2x - 3), y'(0{,}25) - ?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = x^3$;

б) $y = cos^2 x;$

в) $y = \ln(3x^2 - 2x + 5).$

Вариант – 2

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = x^6 - 3x + 8;$

б) $y = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x};$

в) $y = \frac{x^5 - 3x^2 + 2}{x}$;

г) $y = \frac{8 - 6x}{5}$;

д) $y = \frac{5x + 2}{x - 3}$;

е) $y = 5cos3x$;

ж) $y = \sqrt{3x - x^2}$;

з) $y = (x^2 - 3)(x^2 + 3), y'(\frac{1}{2}) - ?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = sinx$;

б) $y = (5x + 2)^4$;

в) $y = 10^{5-3x}$.

Вариант – 3

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = 3x^4 - 6x^2 + 5$;

б) $y = \frac{4}{x} + 4\sqrt{x}$;

в) $y = \frac{x^5 - 9x^2 + 5}{x}$;

г) $y = \frac{6x^2 - 7x}{3}$;

д) $y = \frac{5x + 1}{3 - 2x}$;

е) $y = 2tg5x$;

ж) $y = \sqrt{8x - 7}$;

з) $y = (4x - 1)(4x + 1), y'(0{,}25) - ?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = x^4$;

б) $y = \sqrt{1 + cosx}$;

в) $y = xlnx$.

Вариант – 4

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = x^7 - 4x^2 + 9;$

б) $y = 6\sqrt{x} - \frac{5}{x};$

в) $y = \frac{4x+523}{4};$

г) $y = \frac{3x^2-x+1}{x};$

д) $y = \frac{3+7x}{4-x};$

е) $y = 5sin6x;$

ж) $y = \sqrt{3x-1};$

з) $y = (2x+1)(2x-1), y'(3)-?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = 2^x;$

б) $y = arcsin\frac{x}{2};$

в) $y = \sqrt{1+\sqrt[5]{x}}.$

Практическая занятие № 3

Тема: **Освоение техники нахождения неопределенных интегралов от простейших функций с использованием таблиц неопределенных интегралов. Освоение техники вычисления определенных интегралов. Приложения определённого интеграла в геометрии. Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.**

Цель: Проверить на практике понятие определённого интеграла, умение вычислять определённый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. Умение вычислять площадь фигур с помощью определенных интегралов. Закрепление умений и навыков решения прикладных задач с помощью определённого интеграла.

Задачи:

- развитие творческого профессионального мышления;
- познавательная мотивация;
- овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
- овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
- углубление теоретической и практической подготовки;
- развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

1.Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

2.Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

3.Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Приложения определённого интеграла в геометрии. Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.»

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу №3.

› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретический материал и примеры вычисления определённого интеграла.

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x).$

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C,$ где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C,$ где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x);\qquad d\int f(x)dx=f(x)dx;$
2. $\int dF(x)=F(x)+C;$
3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\qquad k$ — const;
4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C;\quad C = \text{const};$ 2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad \alpha \neq -1;$ 3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$ 5. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

6. $\int e^{u}du = e^{u} + C;$ 7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$ 9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$ 11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx;$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\dfrac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — верно.}$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1}\\ \text{таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln5}\cdot5^x\ln5+4\cdot1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\quad\text{— верно.}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt = F(t) + C,$ то $\int f(x)dx = F(\psi(x)) + C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x).$

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$а)\ \int \cos 4x dx;\ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ в)\int x(2 - x^2)^5\,dx$$

Решение:

$$а)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{matrix} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{matrix} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx = \left| \begin{matrix} t = 9x + 1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5dx=\left|\begin{array}{c} t=2-x^2\\ dt=(2-x^2)'=-2xdx\\ xdx=\dfrac{dt}{-2}\end{array}\right|=\int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int t^5dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}+C=-\frac{1}{12}(2-x^2)^6+C.$$

Интегрирование по частям. Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV=UV-\int VdU, \tag{3}$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U\to dU$	$dV\to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,\ldots$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx\to V=-\frac{1}{k}\cos kx$ $dV=\cos kx\,dx\to V=\frac{1}{k}\sin kx$ $dV=e^{kx}dx\to V=\frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$	
$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU = \frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \mathrm{arctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arctg}\, kx \to dU = \frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arcctg}\, kx \to dU = -\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n = 0,1,2,\ldots$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2xdx;$ *б)* $\int (1+2x)\ln xdx.$

Решение.

$$a)\int(3x-1)\sin 2xdx = \left| \begin{matrix} U=3x-1 \to dU=3dx \\ dV=\sin 2xdx \to V=-\frac{\cos 2x}{2} \end{matrix} \right| = (3x-1)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int\frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int\cos 2xdx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$б)\ \int(1+2x)\ln x dx=\left|\begin{array}{l}U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x}\\ dV=(1+2x)dx\to\\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{array}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \qquad (5)$$

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

$$1)\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx; \qquad 2)\int_a^a f(x)dx=0;$$

$$3)\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

$$4)\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx;$$

$$5)\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx,\ C-\text{const};$$

6) Если $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx;$$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dx, \qquad (6)$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int_a^b V\,dU, \qquad (7)$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx$

Решение.

$$\int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) = \left(\frac{27}{3} - 72 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3\right) =$$

$$= (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5\right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 = -49 - \frac{1}{3} = -49\frac{1}{3}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{5}{5x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{2}{2x^2+2}+2^x-\frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{2x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$

5) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{3x^2-9}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\quad\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\quad\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\quad\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\quad\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\quad\int\sin\frac{x}{2}dx$ $\quad\int\frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}dx$ $\quad\int\cos 2x\,dx$ $\quad\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ $\quad\int\sin 2x\,dx$ $\quad\int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad\int \sin(2-3x)dx$ $\quad\int \frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям

1) $\int (7x-1)\cos x\,dx$ $\quad\int \operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int (6-5x)e^x\,dx$ $\quad\int (7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\quad\int \operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int (1+2x)\cos x\,dx$ $\quad\int \arcsin x\,dx$

5) $\int (8x-1)\sin 5x\,dx$ $\quad\int (6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^x\,dx$ $\quad\int (3x+2)\ln x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл

1) $\int_1^2 (x^3+10x)dx$

2) $\int_{-2}^3 (3x^2+6x-2)dx$

3) $\int_1^3 (x^2-16x+3)dx$

4) $\int_0^8 (21x-19)dx$

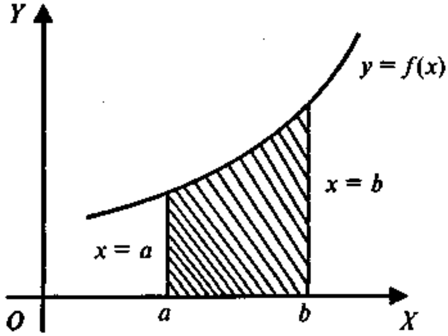
5) $\int_{-4}^0 (x^3+8)dx$

6) $\int_{10}^{13} (2x+7)dx$

Геометрический смысл определённого интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1), выражается определённым интегралом:

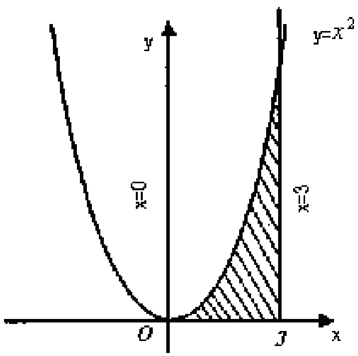
$$S = \int_{a}^{в} f(x)dx$$



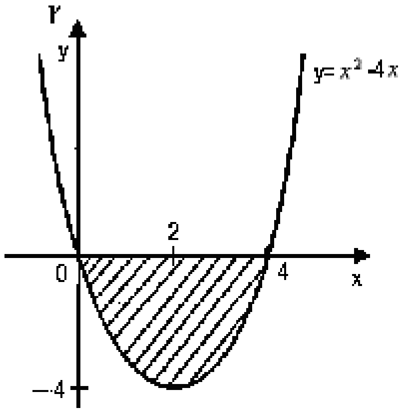
Примеры:

1. Определить площадь S фигуры, заключённой между ветвью кривой $y = x^2$, осью OX и прямыми $x = 0$, $x = 3$ (рис.2).

Решение: $S = \int_{0}^{3} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right| = 9(кв.ед.)$



2) Найти площадь S фигуры, заключённой между осью OX и кривой $y = x^2 - 4x$ (рис.3)



36

Решение: рассмотрим точки пересечения кривой $y = x^2 - 4x$ с осью OX:
$y = 0$; $\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x (x - 4) = 0$; $\Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ или $x_2 = 4$.
Найдём производную функции $y' = 2x - 4$, и точки экстремума:
$y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $2x - 4 = 0$; $\Leftrightarrow$ $x = 2$; $y'' = 2 > 0$; $\Leftrightarrow$ $x = 2$ – точка *min*; $y(2) = - 4$.

Искомая площадь ограничена сверху осью OX , снизу графиком функции $y = x^2 - 4x$, слева прямой $x = 0$, справа прямой $x = 4$. Так как на отрезке $[0; 4]$ $y < 0$, то

$$S = \left| \int_0^4 \left(x^2 - 4x\right) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_0^4 \right| = \left| \frac{64}{3} - 32 \right| = \left| 21\frac{1}{2} - 32 \right| = \left| -10\frac{2}{3} \right| = 10\frac{2}{3}$$

(кв.ед.)

3) Найти площадь фигуры, заключённой между линиями $y = x^3$, $x = -1$. $x = 2$ и осью OX

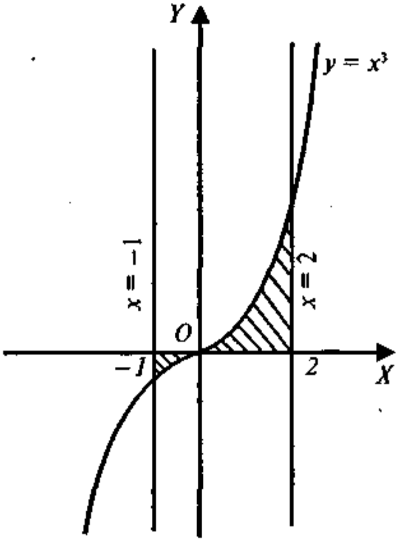


рис.4

Решение: найдем точки пересечения графика функции $y = x^3$ с осью ОХ(см. рис 4):
$y = x^{3;}$ $y = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0;$ Вычислим производную функции: $y' = 3x^{2;}$ $y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$. Найдем значение второй производной в точке $x=0$: $y'' = 6x$ $y''(0) = 0$. Вычислим $y''(-1) = -=6$ $y''(1) = 6$ $\Leftrightarrow$ Т.к. y'' меняет знак при переходе через $x=0$ $\Leftrightarrow$ т. $(0;0)$ – точка перегиба. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

$$S = \int_0^2 x^3 dx + \left| \int_{-1}^0 x^3 dx + \right| = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 + \left| \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^0 \right| = 4 + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| = 4\frac{1}{4} \ (кв.ед.)$$

3. Расчетно-графическая работа

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните рисунок.
Вариант – 1

1. $y = -x^2 + 4; y = 0.$
2. $y = sinx; x = 0; y = 0.$
3. $y = x^2; y = 9.$

Вариант – 2

1. $y = x^2 + 3; x = 0; x = 2;\ y = 0.$
2. $y = cosx; x = 0; x = \frac{\pi}{4}; y = 0.$
3. $y = -x^2 + 6; y = 2.$

Вариант – 3

1. $y = x^2 - 2x; x = 2; x = 4;\ y = 0.$
2. $y = sinx; x = \frac{\pi}{6}; x = 3; y = 0.$
3. $y = x^2 + 2; y = x + 4.$

Вариант – 4

1. $y = -x^2 + 4x; x = 2;\ y = 0.$
2. $y = cosx; x = -\frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{6}; y = 0.$
3. $y = x^2; y = x + 2.$

Контрольные вопросы по теме

1. Что такое определенный интеграл?
2. Что в записи $\int_a^b f(x)$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)$; г) $f(x)dx$?
3. Зависит ли приращение $F(b) - F(a)$ от выбора первообразной?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
6. Перечислите все пять случаев применения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.
7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?
8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Практическое занятие №4

<u>Тема:</u> Решение дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка.

<u>Цель:</u> отработка умений и навыков решения простейших дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

1.Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

2.Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

3.Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Решение дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка.»

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу №4.

› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретический материал и примеры решения дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков.

Диф.уравнением называется уравнение, связывающее функцию $y = f(x)$, переменную *x* и производную *f(x).*

Если функция $y = f(x)$ зависит только от переменной *x*, то диф.урав. называется обыкновенным.

Общий вид обыкновенного диф. уравнения. $F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$.

Максимальный порядок входящих в уравнение производных называется порядком диф.уравнения.

$$F(x, y, y') = 0$$
$$y' = f(x, y)$$
-диф.уравнение первого порядка.

$$F(x, y, y', y'') = 0$$
$$y'' = f(x, y, y')$$
- диф. Уравнение второго порядка.

Решить диф.уравнение – значит найти первообразную функции *f(x)*, т.е. вычислить неопределенный интеграл от *F(x).*

Пусть дано диф.ур. первого порядка $y' = f(x)$, необходимо его решить.

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \mid * dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot dx = f(x)dx$$
$$dy = f(x)dx$$
$$\int dy = \int f(x)dx$$
$$y = \int f(x)dx + c$$
общее решение диф.уравнения.

Алгоритм решения диф.уравнений:

1. $y' = \dfrac{dy}{dx}$

2. домножаем обе части уравнения на dx и переносим слагаемые с dx в другую сторону.

3. Переменные, содержащие *x* переносим к dx, а переменные, содержащие *y* к dy .

4. Интегрируем обе части уравнения.

Пример. Решить диф.уравнение.

$$ydy - xdx = 0$$
$$ydy = xdx$$
$$\int ydy = \int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

Уравнению вида $y' = f(x)$ можно придать вид

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, где M(x,y)=M_1(x)\cdot M_2(y), N(x,y)=N_1(x)\cdot N_2(y)$$
$$M_1(x)\cdot M_2(y)dx+N_1(x)\cdot N_2(y)dy=0.....(*)$$
$$\frac{M_1(x)\cdot M_2(y)dx}{M_2(y)\cdot N_1(x)}+\frac{N_1(x)\cdot N_2(y)dy}{M_2(y)\cdot N_1(x)}=0$$
$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0....(**)$$

Уравнение (*) называется уравнением с разделяющимися переменными, а уравнение (**) – уравнением с разделенными переменными.

Пример.

$$y+x\cdot y'=0$$
$$y+x\frac{dy}{dx}=0 \mid *dx$$
$$ydx+xdy=0 \mid : xy$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{dy}{y}\Rightarrow \ln|x|=-\ln|y|+\ln|c|$$
$$\ln|y|=\ln|c|-\ln|x|\Rightarrow y=\frac{c}{x}$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $f(x,y)$ называется однородной, если $f(tx,ty)=t^m\cdot f(x,y)$

Пример.
$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$
$$f(tx,ty)=(tx)^2-tx\cdot ty+(ty)^2=t^2(x^2-xy+y^2)$$

Уравнение вида $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Уравнение $y'+py+q=0....(1)$ называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Такое уравнение вычисляется с помощью замены

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ подставим в (1) =>

$u'v + uv' + puv + q = 0$

$u'v + (v' + pv)u + q = 0$

$a) \exists v' + pv = 0, v' = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx} + pv = 0 \mid *dx$

$dv + pvdx = 0 \mid : v$

$\frac{dv}{v} + pdx = 0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int pdx \Rightarrow \ln \mid v \mid = -\int pdx \Rightarrow v = e^{-\int pdx}$

$b) u'v + q = 0$

$u'v = -q \Rightarrow \frac{du}{dx} v = -q \mid *dx \Rightarrow du \cdot v = -qdx \mid : v$

$\int du = -\int \frac{q}{v} dx$

$u = -\int \frac{q}{e^{-\int pdx}} dx = -q \cdot e^{\int pdx} dx + c \Rightarrow y = u \cdot v = e^{-\int pdx} (-\int q \cdot e^{\int pdx} dx + c)$

Задача. Решить диф.уравнение.

1. $ydx + xdy = 0$

2. $y - y'x = 0$

3. $2yy' = 1$

4. $y' = 1 - 3x^2$

5. $xydx + (11x^2)dy = 0$

6. $2yy' = 1 - 3x^2$

7. $x^2 y^2 dy - xydx = 0$

8. $x^2 dy + (y-1)dx = 0$

9. $y' = \sin x$

10. $x^2 dx + ydy = 0$

11. $y' = \sin^2 x$

12. $(2x-1)dy = (y+1)dx$

13. $dy + y * \lg xdx = 0$

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функцию $f(x,y)$ можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y:

$$f(x,y) = p(x)h(y),$$

где $p(x)$ и $h(y)$ – непрерывные функции.

Рассматривая производную y' как отношение дифференциалов $\dfrac{dy}{dx}$, перенесем dx в правую часть и разделим уравнение на $h(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)h(y), \Rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = p(x)dx.$$

Разумеется, нужно убедиться, что $h(y) \neq 0$. Если найдется число x_0, при котором $h(x_0) = 0$, то это число будет также являться решением дифференциального уравнения. Деление на $h(y)$ приводит к потере указанного решения.

Обозначив $q(y) = \dfrac{1}{h(y)}$, запишем уравнение в форме:

$$q(y)dy = p(x)dx.$$

Теперь переменные разделены и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx + C,$$

где C – постоянная интегрирования.

Вычисляя интегралы, получаем выражение

$$Q(y) = P(x) + C,$$

описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

Однородные уравнения

Определение однородного дифференциального уравнения
Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$$

называется *однородным*, если правая часть удовлетворяет соотношению

$$f\left(tx, ty\right) = f\left(x, y\right)$$

для всех значений *t*. Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией нулевого порядка по отношению к переменным *x* и *y*:

$$f\left(tx, ty\right) = t^0 f\left(x, y\right) = f\left(x, y\right).$$

Однородное дифференциальное уравнение можно также записать в виде

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

или через дифференциалы:

$$P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy = 0,$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового порядка.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение линейного уравнения первого порядка
Дифференциальное уравнение вида

$$y' + a\left(x\right)y = f\left(x\right),$$

где a(x) и b(x) – непрерывные функции x, называется **линейным неоднородным**
дифференциальным уравнением первого порядка.

Общий вид линейного диффер**енциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.** Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y''+\rho y'+qy=f(x)$, где ρ и q – вещественные числа, f(x) – непрерывная функция, называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка вида:

$y''+\rho y'+qy=0$, (1) у которого правая часть f(x) равна нулю. Такое уравнение называется однородным.

Уравнение $K2+\rho K+q=0$, (2) называется характеристическим уравнением данного уравнения (1).

Характеристическое уравнение (2) является квадратным уравнением, имеющим два корня. Обозначим их через К1 и К2.

Общее решение уравнения (1) может быть записано в зависимости от величины дискриминанта $D=\rho 2-4q$ уравнения (2) следующим образом:

1. При D>0 корни характеристического уравнения вещественные и различные (К1≠К2), и общее решение имеет вид ……..$y=C1e^{x}+C2e^{-2x}$

2. При D=0 корни характеристического уравнения вещественные и равные (К1=К2=К), и общее решение имеет вид: …$y=Ax^{2}+Bx+C$…

3. Если D<0, то корни характеристического уравнения комплексные: где – мнимая единица, и общее решение (К1=α+βi, К2=α–βi, β≠0), имеет вид $y=e\alpha x(C1\cos\beta x+C2\sin\beta x)$.

Проверочные задания из практического занятия №4

Решите дифференциальные уравнения.

Вариант – 1

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{x-1};$
2. $y'=x$, если $y=0$ при $x=2$;
3. $(1+x^{3})dy=3x^{2}ydx.$

Вариант – 2

1. $e^{x}dx=2ydy;$
2. $2ydx=(1+x)dy$, если $y(1)=4$;
3. $(1+x^{2})dy-2xydx=0.$

Контрольные вопросы по теме

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какая функция называется решением дифференциального

уравнения?

3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое называется частным?

4. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?

5. Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?

6. Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?

7. Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого, третьего порядка?

8. Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения?

9. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического уравнения?

10. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.

11. Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными?

12. Как решается уравнение с разделенными переменными?

13. Чем отличается уравнение с разделяющимися переменными от уравнения с разделенными переменными? Как разделяют переменные?

14. Каков алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными?

15. В чем заключается задача Коши? Каков его геометрический смысл?

16. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка?

17. Какими величинами являются и от чего зависят коэффициенты p и q в линейном дифференциальном уравнении первого порядка?

18. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

19. Какой вид имеет простейшее дифференциальное уравнение второго порядка? Как оно решается?

20. Как определяется и как записывается в общем виде линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?

21. Что такое характеристическое уравнение?

Практическое занятие № 5

<u>Тема:</u> Решение комбинаторных задач, вычисление вероят-

ностей событий. Решение практических задач с применением вероятностных методов.

<u>Цель:</u> отработка умений и навыков в решении комбинаторных задач. Уметь вычислять вероятность событий. Научить применять вероятностные методы для решения практических задач.

Задачи:

- развитие творческого профессионального мышления;
- познавательная мотивация;
- овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
- овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
- углубление теоретической и практической подготовки;
- развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

1.Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

2.Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

3.Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Решение комбинаторных задач, вычисление вероятностей событий. Решение практических задач с применением вероятностных методов.»

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу №5.

› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Основы комбинаторики.

Комбинаторика, это раздел математики в котором изучается вопрос о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям можно составить из конечного числа различных элементов.

Комбинации, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком называются соединениями различают три вида соединений.

Предварительно познакомимся с понятием факториала.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно, называют n- факториалом и пишут

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Размещениями называются соединения составленные из n-различных элементов по m-элементам, которые отличаются друг от друга либо составом эл-тов либо их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Перестановки называют соединения составленные из одних и тех же n-элементов, которые отличаются друг от друга только их порядком размещения

$$P_n = n!$$

$$\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Сочетаниями называются соединения составленные из n-различных элементов по m-

элементам, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Сочетания с повторениями это такие соединения состоящие из n-различных элементов по m-элементам отличающиеся друг от друга или хотя бы одним элементом или тем что хотя бы один элемент входит различное число раз

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Правило суммы

Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов М способами, а объект В N способами, то выбор либо объекта А либо объекта В может быть осуществлен M+N способами.

Правило произведения

Если объект А может быть выбран из совокупности объектов М способами, а после такого выбора объект В может быть выбран N способами, то пара объесков А и В могут быть выбраны А*В способами.

Основные понятия теории вероятностей

Событием называется любой исход опыта, различают следующие виды событий:

- случайные
- достоверные
- невозможные

Понятие достоверного и невозможного события используется для количественной оценки возможности появления того или иного явления, а с количественной оценкой связана вероятность.

События называется **несовместными** в данном опыте если появление одного из них исключает появление другого.

События называется **совместными** если появление одного из них не исключает появление остальных.

Несколько событий образуют **полную группу** событий если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Если два несовместных события образуют полную группу они называются **противоположными**

События называется **равновозможными** если появление ни одного из них не является объективно более возможным чем другие.

Пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара.

Вероятностью события А называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу

Два события называются равновероятными (или равновозможными), если нет никаких объективных причин считать, что одно из них может наступить чаще, чем другое.

Так, например, появления герба или надписи при бросании монеты представляют собой равновероятные события.

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице. Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю. Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству.

Пример. В урне 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 10?

Решение. Пусть событие А = (Номер вынутого шара не превосходит 10). Число случаев благоприятствующих появлению события А равно числу всех возможных случаев $m=n=10$. Следовательно, $P(A)=1$. Событие А достоверное

События называются **неравновозможными** если появление хотя бы одного из них является более возможным чем другие.

Случаями называются несовместные равновозможные и образующие полную группу события.

Вычисление вероятностей

1. классический способ
2. геометрический
3. статистический

Первые два способа называются способами непосредственного подсчета вероятности, а классический основан на подсчете числа опытов благоприятствующих данному событию среди всех его возможных исходах.

Основы теории вероятности

Суммой событий A_i называется событие С состоящее в появлении события А или события В или их обоих вместе.

Суммой события А и В называется событие С заключенное в выполнении хотя бы одного из названых событий.

Произведением нескольких событий называется событие заключающееся в совместном выполнении всех этих событий.

Теорема умножения вероятностей

Событие А называется зависимым от события В если его вероятность меняется в зависимости от того произошло событие В или нет.

Для независимых событий условная и безусловная вероятность совпадают.

Вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на вероятность другого вычисленную при условии, что первое событие имело место.

$$P(A*B)=P(A)*P(B/A)=P(B)*P(B/A)$$

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место.

$$P(A_1;A_2.A_n)=P(A_1)*P(A_2/A_1)*. \\ *P(A_n/A_1,A_2.A_{n-1})$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A)+P(B)=P(A)+P(B)-P(A*B)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность появления события А заключающееся в наступлении хотя бы одного из независимых совокупностей событий .$A_1,A_2.A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятности противоположных событий $A_1,A_2.A_n$

$$P(A)=1-q^1*q^2*.*q^n$$

Формула полной вероятности

Пусть событие А может появиться вместе с одним из образующих полную группу попарнонесовместных событий $H_1,H_2.H_n$ называемых гипотезами, тогда вероятность события А вычисляется как сумма произведений вероятностей каждой гипотезы на вероятность события А при этой гипотезе

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i)*P(A/H_i)$$

Формула Бейса

Пусть имеется полная группа попарнонесовместных гипотез $H_1, H_2 . H_n$ с известными вероятностями появления. В результате проведения опыта появилось некоторое события А, требуется переоценить вероятности гипотез при условии, что событие А произошло

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A/H_i)}{P(A)}$$

Повторение опытов

Несколько опытов называются независимыми, если вероятность одного или иного из исходов каждого их опытов не зависит от того какие исходы имели другие опыты.

Теорема

Если производится n независимых опытов в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью p, причем то тогда вероятность того, что событие А появится ровно m раз определяется по формуле.

Формула Бернули

$$P_n(m) = C_n^m * p^m * q^{n-m}$$

формула Бернули применяется в тех случаях, когда число опытов невелико, а вероятности появления достаточно велики.

Решение комбинаторных задач.

1. Охарактеризовать события, о которых идет речь в приведенных заданиях как достоверные, невозможные или случайные.

1) Ученик задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) задумано четное число (случайное);

б) задумано нечетное число (случайное);

в) задумано число, не являющееся ни четным, ни нечетным (невозможное, так как любое натуральное число либо четное, либо нечетное);

г) задумано число, являющееся четным или нечетным (достоверное).

2) В мешке лежат 10 шаров: 3 синих, 3 белых и 4 красных. Охарактеризовать следующее событие:

а) из мешка вынули 4 шара и они все синие (невозможное, в мешке только 3 синих шара);

б) из мешка вынули 4 шара и они все красные (случайное);

в) из мешка вынули 4 шара, и все они оказались разного цвета (невозможное, в мешке шары только трех разных цветов);

г) из мешка вынули 4 шара, и среди них не оказалось шара черного цвета (достоверное – в мешке нет черных шаров).

2. Бросают игральный кубик, то есть небольшой куб, на гранях которого нанесены очки 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании игрального кубика на его верхней грани может выпасть одно очко, два очка, три очка и т. д. Каждый из этих исходов является случайным. Какова на ваш взгляд вероятность выпадения 4 очков?

Решение: P(A) = m/n, P(A) = 1/6).

3. Какова вероятность появления четных очков при одном бросании игрального кубика?

Решение: Пусть А – событие «выпадет четное число» n =6, так как число возможных исходов 6 (1; 2; 3; 4; 5; 6); n =3, так как только 3 четных очка (2; 4; 6;). Значит P(A) = 3:6 = 0,5.

4. Из карточек составили слово «статистика». Какую карточку с буквой вероятнее всего вытащить? Какие события равновероятные?

Решение: Всего в слове статистика 10 букв. Буква «с» встречается 2 раза – P(с) = 2/10 = 1/5; буква «т» встречается 3 раза – P(т) = 3/10; буква «а» встречается 2 раза – P(а) = 2/10 = 1/5; буква «и» встречается 2 раза – P(и) = 2/10 = 1/5; буква «к» встречается 1 раз – P(к) = 1/10. Вероятнее всего вытащить карточку с буквой «т». Вероятность одинакова у букв «с», «а», «и»: P(с) = P(а) = P(и) = 2/10 = 1/5.

Какими двумя способами решаются комбинаторные задачи?

Геометрический способ:

- способ перебора различных комбинаций (дерево возможных вариантов)

Правило умножения:

- при помощи логических рассуждений.

Задачи на перебор возможных комбинаций называется комбинаторными.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач на перебор различных вариантов, удовлетворяющим каким-либо правилам или условиям.

5. Запишите все трехзначные числа, для записи которых употребляются только цифры 1 и 2.

Решение: В записи числа на первом месте может стоять цифра 1 или 2, на втором месте также одна из двух цифр 1 и 2. На третьем месте также можно записать либо 1 либо 2. получили восемь чисел:

111, 112, 121, 122, 122, 212, 221, 222

6. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов: красного, белого, зеленого. Сколько стран могут использовать такую символику?

Решение:

1 способ. Построим дерево различных вариантов.

1 полоса	б		к		з	
2 полоса	к	з	б	з	б	к
3 полоса	з	к	з	б	к	б

Итого получилось 6 вариантов.

2 способ. Для первой полосы есть 3 варианта, для второй полосы – 2 варианта, для третьей – 1 вариант. Если умножить 3 на 2 на 1, то получится 6. Такой же ответ получился при помощи дерева вариантов. Про второй способ рассуждений говорят так: мы использовали правило умножения (или правило произведения).

7. Сколькими способами можно завернуть 2 подарка в обёрточную бумагу, если есть неограниченное количество этой бумаги серебристого, золотого, красного и голубого цветов и для каждого подарка можно взять бумагу только одного цвета.

Решение:

1 способ – 12 вариантов, дерево возможный вариантов.

1 подарок	с	з	к	г
2 подарок	с з к г	с з к г	с з к г	с з к г

2 способ - правило умножения 4x3 = 12.

Правило умножения:

Пусть 1 элемент можно выбрать К способами, 2 элемент можно выбрать М способами. Тогда пару чисел можно выбрать К*М способами.

Если есть тройка элементов: 1 – К, 2 – М, 3 – Л, то тройку элементов можно выбрать К*М*Л способами.

8. Сколько предложений можно составить из слов: я, смогу, решить, задачу?

Я смогу решить задачу.	Решить задачу я смогу.
Я смогу задачу решить.	Решить задачу смогу я.
Я решить задачу смогу.	Решить я смогу задачу.
Я решить смогу задачу.	Решить я задачу смогу.
Я задачу смогу решить.	Решить смогу я задачу.
Я задачу решить смогу.	Решить смогу задачу я.
Смогу я решить задачу.	Задачу решить смогу я.
Смогу я задачу решить.	Задачу решить я смогу.
Смогу решить я задачу.	Задачу смогу я решить.

Смогу решить задачу я. Задачу смогу решить я.
Смогу задачу решить я. Задачу я смогу решить.
Смогу задачу я решить. Задачу я решить смогу.

9. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех полос разного цвета – белого, синего, красного. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

Таблица вариантов

КБС	КСБ
БСК	БКС
СБК	СКБ

Дерево вариантов

3.Правило умножения

1 полоса 3 способа

2 полоса 2 способа

3 полоса 1 способ

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Ответ: 6 способов.

10. Восемь друзей решили провести турнир по шашкам так, чтобы каждый сыграл с каждым одну партию. Сколько партий будет сыграно?

Решение: Каждый игрок должен сыграть по 7 партий. Рассмотрим случаи, когда игроки не повторяются. Первый должен сыграть 7 партий (со 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 игроками), второй – 6 партий (с 3, 4, 5, 6, 7, 8 игроками), третий – 5 партий (с 4, 5, 6, 7, 8 игроками), четвертый – 4 партии (с 5, 6, 7, 8 игроками), пятый – 3 партии (с 6, 7, 8 игроками), шестой – 2 партии (с 7, 8 игроками), седьмой – 1 партия (с 8-м игроком). Отсюда, количество партий: 7+6+5+4+3+2+1=28.

11. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Первая цифра

Вторая цифра

Третья цифра

11. Имеется девять различных книг, четыре из которых – учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Решение: Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 9, а 6 книг это можно сделать Р6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить Р4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению Р6·Р4 = 6! ·4! = 720·24 = 17280.

Ответ: 17280 способов.

12. В столовой имеются три первых блюда, пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами, ученик может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

Решение. Первое блюдо можно выбрать 3 способами. Для каждого выбора первого блюда существует 5 возможностей выбора второго блюда. Значит, первые два блюда можно выбрать 3·5 способами. Наконец, для каждого выбора третьего блюда, т.е. существует 3·5·2 способов составления обеда из трех блюд. Итак, обед из трех блюд может быть составлен 30 способами.

13. Ослик ИА решил пригласить к себе на День рожденья Винни-Пуха, Сову, Пятачка, Кота Матроскина, Шарика, Дядю Фёдора и почтальона Печкина. Сколько существует вариантов последовательного написания пригласительных билетов, если учесть, что Шарик, Кот Матроскин и Дядя Фёдор живут в одном доме и получат один пригласительный билет, а Сова получила приглашение в устной форме?

Введём обозначения

Винни – Пух Пятачок Дядя Федор

Почтальон Печкин

14.Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1;4;7?

Решение:

Для того чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел, будем выписывать их в порядке возрастания. Сначала запишем числа, начинающиеся с цифры 1, затем с цифры 4 и, наконец, с цифры 7. Получаем следующий расклад.

1 4 7

1 4 7

1 4 7

147;174;417;471;714;741

15. (ЕГЭ) В урне лежат одинаковые шары: 5 белых, 3 красных и 2 зелёных. Саша вынимает один шар. Найдите вероятность того, что он окажется зелёным.

Решение: Всего в урне лежит 5+3+2=10 шаров, из них 2 – зелёных. Вероятность того, что вынутый шар окажется зелёным, равна 2:10=0,2.

16. (ЕГЭ) В коробке находятся 7 красных шаров, 13 белых ша-

ров и 6 голубях шаров. Определите вероятность того, что наудачу взятый из коробки шар окажется белым.

Решение: Всего в коробке 7+13+6=26 шаров, из них13 – белых. Вероятность того, что наудачу взятый из коробки шар окажется белым, равна 13:26=1:2=0,5.

17. (ЕГЭ) Из города А в город В можно добраться поездом, самолётом и на автомобиле. Из города В в город С можно добраться только поездом и самолётом. Пассажир выбирает для себя транспорт случайным образом. Какова вероятность того, что этот пассажир, добравшийся из города А в город В, воспользовался в обоих случаях самолётом?

Решение:

По правилу произведения получаем, что добраться из города А в город С через город В можно 3·2=6 способами. Вероятность того, что пассажир, добравшийся из города А в город В, воспользовался в обоих случаях самолётом, равна 1:6.

18. (ЕГЭ) В заключительном этапе велосипедной гонки участвуют равные по профессиональной квалификации спортсмены: 5 велосипедистов общества «Динамо», 4 велосипедиста общества «Буревестник», 6 велосипедистов общества «Зенит». Найдите вероятность того, что первым финиширует спортсмен общества «Зенит».

Решение: Всего в велосипедной гонке участвуют 5+4+6=15 спортсменов. Из них 6 – велосипедистов общества «Зенит». Вероятность того, что первым финиширует спортсмен общества «Зенит», равна 6:15=2:5=0,4.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача №1

В урне находится 10 шаров, из них 6 белых и 4 черных шара. Вынули из урны 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара - белые?

Решение: Рассмотрим событие А – оба вынутых шара белого цвета.

Число всевозможных исходов равно количеству выборок 2 шаров из 10. Выборка без возвращения и без повторения, поэтому $n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$. Число исходов, благоприятствующих наступлению события А равно числу вариантов извлечения 2 белых шаров из 6, поэтому $m = C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$. Тогда $p(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = 0,33$.

Ответ: $p(A) = \frac{1}{3} = 0{,}33$.

Задача №2

В секретном замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

Решение: Рассмотрим событие A – замок будет открыт. Это событие равносильно тому, что цифры на дисках составляют определенное число.

Так как варианты набора цифр на дисках образуют выборку с возвращением (цифры могут повторяться) упорядоченную (при смене порядка цифр получается другое число), $n = \overline{A}_5^4 = 5^4 = 625.$ Благоприятный исход у этого события только один, поэтому $m = 1$. Тогда $p(A) = \frac{1}{625}.$

Задача №3

Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их на удачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение: Пусть событие A – набран верный номер. Тогда число всевозможных исходов равно числу трехзначных чисел, составленных из различных цифр. Так как в этом случае мы имеем выборку без возвращения (цифры различны), но упорядоченную (меняя цифры местами, получаем новое число), то $n = A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720.$ Исход, благоприятствующий наступлению события A только 1. Поэтому $p(A) = \frac{1}{720}.$

Задача №4

В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все открытки различны?

Решение: Пусть событие A - все проданные открытки различны.

Тогда число всевозможных исходов равно числу вариантов выбора 4 открыток. Эта выборка с возвращением (выбранные открытки могут быть одинаковые), неупорядоченная (так как важен лишь состав выборки, а не то, в каком порядке отобраны открытки). Значит $n = \overline{C}_6^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126.$ Число исходов, благоприятствующих наступлению события А, есть число способов, которыми можно выбрать 4 различные открытки из 6 видов. Так как открытки теперь различны, то эта неупорядоченная выборка без повторения, значит $m = C_6^4 = 15.$ Тогда $p(A) = \frac{5}{42} \approx 0{,}12.$

<u>Ответ:</u> $p(A) = \frac{5}{42} \approx 0{,}12.$

Проверочные задания для практического занятия

Вариант – 1

1. Вычислите:

а) $\frac{52!}{50!}$; б) C_{15}^{13}; в) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$; г) $\frac{10!-8!}{89}$.

2. Решите уравнения:

а) $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$; б) $A_7^3 = 42x$; в) $\frac{A_x^2+A_x^4}{A_x^2} = 13$.

3. Проверьте равенства:

а) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$; б) $C_{20}^{12} = \frac{A_{20}^8}{P_8}$.

Вариант – 2

1. Вычислите:

а) $\frac{62!}{60!}$; б) $C_6^4 + C_5^0$; в) $A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^2$; г) $\frac{5!+6!}{4!}$.

2. Решите уравнения:

а) $20A_{n-2}^3 = A_n^5$; б) $\frac{x}{A_x^8} = \frac{1}{12}$; в) $A_{2x}^3 = 14A_x^3$.

3. Проверьте равенства:

а) $C_{14}^9 + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$; б) $C_{15}^4 - C_{15}^3 = \frac{C_{16}^4}{2}$.

Вариант – 3

1. Вычислите:

а) $\frac{42!}{40!}$; б) C_{17}^{14}; в) $A_8^4 + A_7^4 + A_6^4$; г) $\frac{12!-10!}{131}$.

2. Решите уравнения:

а) $A_{n-2}^3 = 5A_{n-3}^2$; б) $A_n^4 = 15A_{n-2}^3$; в) $\frac{A_x^5+A_x^2}{A_x^2} = 15$.

3. Проверьте равенства:

а) $C_n^6 = \frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}}$; б) $C_{15}^6 = C_{15}^9$.

Вариант – 4

1. Вычислите:

а) $\frac{72!}{70!}$; б) $C_5^3 + C_6^0$; в) $A_7^2 \cdot A_6^2 + A_5^2$; г) $\frac{7!+5!}{4!}$.

2. Решите уравнения:

а) $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$; б) $\frac{A_x^5}{A_x^4} = \frac{1}{2}$; в) $A_6^3 = 60x$.

3. Проверьте равенства:

а) $C_{11}^4 + C_{11}^5 = C_{12}^5$; б) $C_{18}^{10} = \frac{A_{18}^8}{P_8}$.

Контрольные вопросы по теме

1. Что называется, n-факториалом?
2. Перечислите основные задачи комбинаторики.
3. Что называется, перестановками?
4. Запишите формулу для числа перестановок из m элементов.
5. Что называется, размещениями?
6. Запишите формулу числа размещений из m элементов по n.
7. Что называется, сочетаниями?
8. Запишите формулу числа сочетаний из m элементов по n.
9. Какие события называются достоверными? Приведите примеры.
10. Какие события называются невозможными? Приведите примеры.
11. Что называется, вероятностью события?
12. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.
13. Чему равна сумма несовместных событий?
14. Какие события, называются противоположными? Приведите примеры.
15. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
16. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
17. Как формулируется теорема умножения вероятностей?
18. Какая величина называется случайной?
19. Какая случайная величина называется дискретной?
20. Что называется, законом распределения случайной величины?
21. Какой закон распределения называется биномиальным?
22. Что называется, математическим ожиданием дискретной случайной величины?
23. Что называется, дисперсией случайной величины?
24. Что понимается под законом больших чисел?

Практическое занятие № 6

Тема: Построение гистограммы и полигона частот. Расчет относительных частот.

Цель: Проверить на практике умение построения гистограммы и полигона частот, умение рассчитывать относительные частоты.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

1.Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

2.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2011, 480 с. Гл. 15, с. 187 – 197, Гл.16, с. 197 -203, с. 205 – 207, с. 211 – 213.

3.Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М: «Высшая школа», 2011, 404 с. Гл. 9, с. 151 -157, Гл. 10, с. 157 -163.

4.Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Построение гистограммы и полигона частот . Расчет относительных частот.»

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу №6.

Ответить на контрольные вопросы.

Общие и теоретические положения по теме практического занятия:

- понятие о генеральной совокупности и выборке;
- представительность выборки, способы ее отбора;
- статистическое распределение выборки;
- статистическая оценка параметров распределения (выборочного среднего, выборочной дисперсии, выборочного стандартного отклонения);

- виды случайных величин (дискретных и непрерывных);
- формулы вычисления математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины;
- алгоритм первичной обработки статистических данных;
- гистограмма относительных частот;
- график эмпирической функции распределения.
- математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.. среднее квадратичное отклонение случайной величины.
- генеральная совокупность и выборка. Эмпирическая функция распределения, выборочное среднее и дисперсия.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Дискретные случайные величины

● *Закон распределения случайной величины*

1. Случайная величина X принимает только целые значения $1, 2, \ldots, 28$. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: $P(X = k) = ck$. Найдите значение константы c и вероятность $P(X > 2)$.

X	1	2	3	….	k	…	28
P	c	2c	3c	….	kc	…	28c

C(1+2+…+28)=1

$$C\ \frac{29 * 28}{2} = 1$$

$$C = \frac{1}{29 * 14}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) =$$

$$= 1 - \frac{1}{29 * 14} - \frac{2}{29 * 14} = \frac{403}{406}$$

2. Случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения $0, 1, 2, \ldots$. При этом $P(X = k) = C \cdot 6^{-k}$. Найдите значение константы C и вероятность $P(X < 3)$.

X	0	1	2	…	k

P	c	c/6	c/6^2	…	c/6^k

$$C\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\ldots\right)=C\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=C\frac{1}{5/6}=\frac{6}{5}C$$

$$C=\frac{5}{6}$$

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6^3}=\frac{215}{216}$$

● ***Независимые дискретные случайные величины***

3. Независимые дискретные случайные величины X, Y *принимают только целые значения:* X *– от* 1 *до* 12 *с вероятностью* $\frac{1}{12}$, Y *– от* 1 *до* 15 *с вероятностью* $\frac{1}{15}$. *Найдите вероятность* $P(X+Y=18)$.

$$P=\frac{m}{n}$$

$$n=12\cdot 15$$

$$m: 3+15;\ 4+14;\ \ldots\ 12+6$$

$$m=10$$

$$P=\frac{m}{n}=\frac{10}{12\cdot 15}=\frac{1}{18}$$

$$P(X+Y)=\frac{1}{18}$$

4. Независимые случайные величины X, Y *принимают только целые значения:* X *– от* 1 *до* 11 *с вероятностью* $\frac{1}{11}$, Y *– от* 1 *до* 9 *с вероятностью* $\frac{1}{9}$. *Найдите вероятность* $P(X<Y)$.

$$P = \frac{m}{n}$$

$$n = 11 \cdot 9$$

m :

$(1 < 2);\ (1 < 3);\ \dots\ (1 < 9);\ = 9$

$(2 < 3);\ \dots\ (2 < 9);\ = 8$

…

$(8 < 9);\ = 1$

$$m = \frac{9 + 1}{2} \cdot 9 = 45$$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{45}{11 \cdot 9} = \frac{5}{11}$$

5. Независимые случайные величины X, Y *принимают только целые значения:* X *– от* 1 *до* 10 *с вероятностью* $\frac{1}{10}$, Y *– от* 1 *до* 15 *с вероятностью* $\frac{1}{15}$. *Найдите вероятность* $P(X + Y < 8)$.

$$P = \frac{m}{n}$$

$$n = 10 \cdot 15$$

m :

$(1 + 1);\ (1 + 2);\ \dots\ (1 + 6);\ = 6$

$(2 + 1);\ \dots\ (2 + 5);\ = 5$

…

$(6 + 1);\ = 1$

$$m = \frac{6 + 1}{2} \cdot 6 = 21$$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{21}{150} = \frac{7}{50}$$

6. Независимые случайные величины X, Y *принимают только целые значения:* X *– от* -6 *до* 5 *с вероятностью* $\frac{1}{12}$, Y *– от* -6 *до* 9 *с вероятностью* $\frac{1}{16}$. *Найдите вероятность* $P(XY = 0)$.

$$P(XY = 0) = 1 - P(XY \neq 0) = 1 - P(X \neq 0; Y \neq 0) =$$

$$= 1 - \frac{11}{12} \cdot \frac{15}{16} = 1 - \frac{55}{64} = \frac{9}{64}$$

7. Независимые случайные величины X и Y принимают только целые значения: X – от -8 до 7, Y – от -6 до 8. Найдите $P(XY>0)$, если известно, что возможные значения X и Y равновероятны.

$$P(XY>0)=P(X>0;Y>0 \textit{ или } X<0;Y<0)=$$
события _ несовместимы
$$=P(X>0,Y>0)+P(X<0,Y<0)=$$
$$=P(X>0)\cdot P(Y>0)+P(X<0)\cdot P(Y<0)=$$
$$=\frac{7}{16}\cdot\frac{8}{15}+\frac{8}{16}\cdot\frac{6}{15}=\frac{13}{30}$$

8. Независимые случайные величины X,Y принимают только целые значения: X – от -6 до 9 с вероятностью $\frac{1}{16}$, Y – от -5 до 8 с вероятностью $\frac{1}{14}$. Найдите $P(XY<0)$.

$$P(XY<0)=P(X>0;Y<0 \textit{ или } X<0;Y>0)=$$
$$=P(X>0,Y<0)+P(X<0,Y>0)=$$
$$=P(X>0)\cdot P(Y<0)+P(X<0)\cdot P(Y>0)=$$
$$=\frac{9}{16}\cdot\frac{5}{14}+\frac{6}{16}\cdot\frac{8}{14}=\frac{45}{224}+\frac{48}{224}=\frac{93}{224}$$

9. Независимые случайные величины $X_1,...,X_8$ принимают только целые значения от 0 до 8. Найдите вероятность $P(X_1X_2...X_8=0)$, если известно, что все возможные значения равновероятны.

$$P(X_1,X_2,\ldots X_8=0)=1-P(X_1,X_2,\ldots X_8\neq 0)=$$
$$=1-P(X_1\neq 0,\ldots X_8\neq 0)=$$
$X_1,\ldots X_8$ – *независимы*
$$=1-P(X_1\neq 0)\ldots P(X_8\neq 0)=1-(\frac{8}{9})^8=$$
$$=1-\frac{16777216}{43046721}=\frac{26269505}{43046721}$$

10. Независимые случайные величины X, Y, Z *принимают только целые значения:* X *– от* 1 *до* 16 *с вероятностью* $\frac{1}{16}$, Y *– от* 1 *до* 12 *с вероятностью* $\frac{1}{12}$, Z *– от* 1 *до* 7 *с вероятностью* $\frac{1}{7}$. *Найдите вероятность того, что* X, Y, Z *примут разные значения.*

$$P = \frac{m}{n}$$

$$n = 16 \cdot 12 \cdot 7$$

$$m : Z, Y, X$$

$$7 \cdot 11 \cdot 14 = m$$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{7 \cdot 11 \cdot 14}{16 \cdot 12 \cdot 7} = \frac{77}{96}$$

11. Независимые случайные величины X, Y, Z *принимают только целые значения:* X *– от* 1 *до* 13 *с вероятностью* $\frac{1}{13}$, Y *– от* 1 *до* 9 *с вероятностью* $\frac{1}{9}$, Z *– от* 1 *до* 7 *с вероятностью* $\frac{1}{7}$. *Найдите вероятность* $P(X < Y < Z)$.

$$P(X < Y < Z) = P(Y = 2, X < 2 < Z) + P(Y = 3, X < 3 < Z) +$$
$$+ \ldots + P(Y = 6, X < 6 < Z) =$$
$$= P(Y = 2) \cdot P(X < 2) \cdot P(2 < Z) +$$
$$+ \ldots + P(Y = 6) \cdot P(X < 6) \cdot P(6 < Z) =$$
$$= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{13} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{13} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{13} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{13} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{7}\right) =$$
$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{7} \cdot (1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5) = \frac{35}{9 \cdot 13 \cdot 7} = \frac{5}{117}$$

● ***Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины***

12. Распределение дискретной случайной величины X *задано таблицей*

X	3	4	5
P	0.3	0.2	0.5

Найдите математическое ожидание $m = M(X)$ *и вероятность* $P(X < m)$.

$M(X) = 3*0.3 + 4*0.2 + 0.5*5 = 4.2$

$P(X < M(X)) = P(X < 4.2) = 0.3 + 0.2 = 0.5$

$M(X^2) = 9*0.3 + 16*0.2 + 25*0.5 = 2.7 + 3.2 + 12.5 = 18.4$

13. Дискретная случайная величина X принимает только целые значения $1,4,7,10,13$, каждое с вероятностью $\frac{1}{5}$. Найдите математическое ожидание $m = M(X)$ и вероятность $P(X < m)$.

$$M(X) = 1*\frac{1}{5} + 4*\frac{1}{5} + 7*\frac{1}{5} + 10*\frac{1}{5} + 13*\frac{1}{5} = 7$$

$$P(X < M(X)) = P(X < 7) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$M(X^2) = 1*\frac{1}{5} + 16*\frac{1}{5} + \frac{49}{5} + \frac{100}{5} + \frac{169}{5} = 67$$

14. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	1	2	3
P	0.1	0.3	0.6

Найдите дисперсию $D(X)$.

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

$M(X) = 0.1 + 0.6 + 1.8 = 2.5$

$M(X^2) = 0.1 + 1.2 + 5.4 = 6.7$

$D(X) = 6.7 - 6.25 = 0.45$

15. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	4	8	11	14	18
P	0.1	0.25	0.3	0.25	0.1

Найдите математическое ожидание $m = M(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sigma_X$ и вероятность $P(|X - m| < \sigma)$.

$M(X) = 0.4 + 2 + 3.3 + 3.5 + 1.8 = 11$

$M(X^2) = 1.6 + 16 + 36.3 + 49 + 32.4 = 135.3$

$D(X) = 135.3 - 121 = 14.3$

$\sigma(X) = \sqrt{14.3} = 3.78$

$P(|X - 11| < 3.78) = P(-3.78 < X - 11 < 3.78) =$

$= P(7.22 < X < 14.78) = 0.25 + 0.3 + 0.25 = 0.8$

16. Для случайной величины X *известно, что* $M(X) = 4$, $M(|X|) = 8$, $D(|X|) = 20$. *Найдите дисперсию* $D(X)$.

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

$D(|X|) = M(|X|^2) - [M(|X|)]^2$

$M(|X|^2) = D(|X|) + [M(|X|)]^2$

$M(X^2) = 20 + 64 = 84$

$D(X) = 84 - 16 = 68$

17. Независимые дискретные случайные величины X, Y *могут принимать только значения* 0 *и* 1. *При этом* $P(X = 0) = 0.1$, $P(Y = 0) = 0.9$. *Найдите математическое ожидание* $M[(X+Y)^2]$.

X	*0*	*1*	*Y*	*0*	*1*
P	*0.1*	*0.9*	*P*	*0.9*	*0.1*

$X + Y = Z$

$M(Z^2) = D(Z) + M^2(Z)$

$M(Z) = M(X + Y) = M(X) + M(Y) = 0.9 + 0.1 = 1$

$M^2(Z) = 1$

$D(Z) = D(X + Y) = D(X) + D(Y) =$

X, Y – *независимы*

$M(X) = 0.9$

$M^2(X) = 0.9$

$D(X) = 0.9 - 0.81 = 0.09$

$M(Y) = 0.1$

$M^2(Y) = 0.1$

$D(Y) = 0.1 - 0.01 = 0.09$

$= 0.09 + 0.09 = 0.18$

$M(Z^2) = 1 + 0.18 = 1.18$

18. Независимые дискретные случайные величины X, Y *могут принимать только значения* 0 *и* 1. *При этом* $P(X=0)=0.1$, $P(Y=0)=0.6$. *Найдите математическое ожидание* $M[(X-Y)^2]$.

X	0	1	Y	0	1
P	0.1	0.9	P	0.6	0.4

$X - Y = Z$

$M(Z^2) = D(Z) + M^2(Z)$

$M(Z) = M(X - Y) = M(X) - M(Y) = 0.9 - 0.4 = 0{,}5$

$M^2(Z) = 0{,}25$

$D(Z) = D(X - Y) = D(X) + D(Y) =$

X, Y *– независимы*

$M(X) = 0.9$

$M^2(X) = 0.9$

$D(X) = 0.9 - 0.81 = 0.09$

$M(Y) = 0.4$

$M^2(Y) = 0.4$

$D(Y) = 0.4 - 0.16 = 0.24$

$= 0.24 + 0.09 = 0.33$

$M(Z^2) = 0{,}33 + 0.25 = 0{,}58$

19. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, ..., X_9$ *распределены по закону, заданному таблицей*

X	−1	0	1
P	0.3	0.2	0.5

Найдите математическое ожидание $M[X_1^2 + X_2^2 + ... + X_9^2]$.

$M[X_1^2 + ... + X_9^2] = M(X_1^2) + ... + M(X_9^2) = 9M(X_1^2) =$

$= 9 * 0.8 = 7.2$

$M(X_1^2) = (-1)^2 * 0.3 + 0^2 * 0.2 + 1^2 * 0.5 = 0.3 + 0.5 = 0.8$

20. Независимые случайные величины $X_1, X_2, ..., X_8$ *принимают только целые значения* $-9, -8, ..., 12, 13$. *Найдите математиче-*

ское ожидание $M\left(X_1X_2...X_8\right)$, *если известно, что возможные значения равновероятны.*

$$M\,(X1...X8) = M\,(X1)\cdot ...M\,(X8) = [M\,(X1)]^8 = 2^8 = 256$$

$$M\,(X1) = -9*\frac{1}{23} + ... + 13*\frac{1}{23} = \frac{1}{23}(-9-8-...+13) =$$

$$= \frac{1}{23}(10+11+12+13) = 2$$

21. Для независимых случайных величин $X_1,...,X_4$ *известно, что их математические ожидания* $M(X_i) = -1$, *дисперсии* $D(X_i) = 1$, $i = 1,...,4$. *Найдите дисперсию произведения* $D(X_1...X_4)$.

$$M\,(X_1) = -1$$
$$D(X) = M\,(X^2) - M^2(X)$$
$$D(X) = M\,(X^2) - (-1)^2$$
$$M\,(X^2) = 2$$
$$D(X_1...X_4) = M\,(X_1^2)M\,(X_2^2)M\,(X_3^2)M\,(X_4^2) - \left([M\,(X_1)]^2....[M\,(X_4)]^2\right)$$
$$M\,(X^2) = 4M\,(X^2) = 8$$
$$D(X_1...X_4) = M^4(X_1^2...X_4^2) - M^8(X_1...X_4) = 16-1 = 15$$

22. Независимые случайные величины $X_1,...,X_{60}$ *могут принимать только значения* 0 *и* 1. *При этом* $P(X_i = 0) = 0.9$, $i = 1,...,60$. *Найдите математическое ожидание* $M[(X_1 + ... + X_{60})^2]$.

Xi	*0*	*1*
P	*0.9*	*0.1*

$M(X_i) = 0.1$

$M^2(X_i) = 0.1$

$D(X_i) = 0.1 - 0.01 = 0.09$

$Y = X_1 + \ldots + X_{50}$

$M(Y) = M(X_1 + \ldots + X_{60}) = M(X_1) + \ldots + M(X_{60}) =$

$= 60 \cdot 0.1 = 6$

$D(Y) = D(X_1 + \ldots + X_{60}) =$

$X_1, \ldots X_{60}$ – *независимы*

$= D(X_1) + \ldots + D(X_{50}) = 60 \cdot 0.09 = 5.4$

$M(Y^2) = D(Y) + M^2(Y)$

$M(Y^2) = 5.4 + 36 = 41.4$

23. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_3$ *могут принимать только значения* 0 *и* 1. *При этом* $P(X_i = 0) = 0.4$, $i = 1, \ldots, 3$. *Найдите математическое ожидание* $M[4^{X_1 + \ldots + X_3}]$.

$M[4^{X1+X2+X3}]M[4^{X1} \cdot 4^{X2} \cdot 4^{X3}] = M(4^{X1})M(4^{X2})M(4^{X3}) =$

$= [M(4^{X1})]^3 = 2.8^3 = 21.952$

$M(4^{X1}) = 4^0 * 0.4 + 4^1 * 0.6 = 2.8$

24. Вероятность выигрыша 3 *рублей в одной партии равна* $\frac{2}{5}$, *вероятность проигрыша* 2 *рублей равна* $\frac{3}{5}$. *Найдите дисперсию капитала игрока после* 5 *партий.*

$$M(K) = 3 \cdot \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5} = 0$$

$$D(K) = 5 \cdot (3^2 \cdot \frac{2}{5} + 2^2 \cdot \frac{3}{5}) = 30$$

● Основные дискретные законы распределения и их характеристики

25. На плоскости начерчены две окружности, радиусы которых 5 *и* 25 *соответственно. Меньшая окружность содержится* *внутри большего круга. В большой круг наудачу бросают* 5 *точек. Пусть случайная величина* X *– число точек, попавших в малый круг. Вычислите математическое ожидание* $M(X)$ *и дисперсию* $D(X)$.

$$P = \frac{\mu(A)}{\Omega(A)}$$

$$P = \frac{\pi r_м^2}{\pi R_б^2} = \frac{25}{25^2} = \frac{1}{25}$$

$$q = \frac{24}{25}$$

X – биномиальн ое _ распределе ние

$$M(X) = np$$

$$M(X) = 5 \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{5}$$

$$D(X) = npq$$

$$D(X) = 5 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{24}{5 \cdot 25} = \frac{24}{125}$$

26. Производится 1920 *независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются* 7 *монет. Пусть* X *– число испытаний, в которых выпало* 3 *герба. Найдите математическое ожидание* $M(X)$.

X *– число испытаний, в которых выпало* 3 *герба.*

$$P = C_7^3 \cdot p^3 \cdot q^4$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 4!} = 35$$

$$P = 35 \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{35}{128}$$

$$M(X) = np$$

$$M(X) = 1920 \cdot \frac{35}{128} = 525$$

27. Случайные величины $X_1, ..., X_{192}$ *распределены по биномиальному закону с параметрами* $n = 4$ *и* $p = \frac{5}{8}$. *Найдите математическое ожидание* $M[X_1^2 + ... + X_{192}^2]$.

$M(X_1^2+\ldots+X_{192}^2)=192M(X_i)^2=192\cdot 7.1875=1380$

$M(X_i^2)=D(X_i)+M^2(X_i)$

$M(X_i)=np=4\cdot\frac{5}{8}=2.5$

$M^2(X_i)=6.25$

$D(X_i)=npq=4\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{16}$

$M(X_i^2)=6.25+\frac{15}{16}=7.1875$

28. Случайные величины $X_1,\ldots,X_{27}$ *независимы и распределены по биномиальному закону с параметрами* $n=5$ *и* $p=\frac{2}{3}$. *Найдите математическое ожидание* $M\{(X_1+\ldots+X_{27})^2\}$.

$Z=X_1+\ldots+X_{27}$

$M(Z)=M(X_1+\ldots+X_{27})=M(X_1)+\ldots+M(X_{27})=$

$=27M(X_i)$

$27M(X_i)=27\cdot 5\cdot\frac{2}{3}=M(Z)=90$

$D(Z)=D(X_1+\ldots+X_{27})=$

$X_1,\ldots,X_{27}$ – *независимы*

$=D(X_1)+\ldots+D(X_{27})=27D(X_i)=27npq=$

$=27\cdot 5\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=30$

$M(Z^2)=30+90^2=8130$

29. Отрезок длины 35 *поделен на две части длины* 25 *и* 10 *соответственно. Наудачу* 6 *точек последовательно бросают на отрезок.* X *– случайная величина, равная числу точек, попавших на отрезок длины* 10. *Найдите математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины* X.

$$P = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

биномиальн ое _ распределе ние

$$M(X) = np$$

$$M(X) = 6 \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$$

$$D(X) = npq$$

$$D(X) = 6 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7}$$

$$\delta = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{2\sqrt{15}}{7}$$

30. Производится 14 *независимых испытаний, в каждом из которых подбрасываются* 4 *игральные кости. Пусть* X *– число испытаний, в которых все выпавшие цифры оказались* ≥ 2*. Найдите дисперсию* $D(X)$.

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$M(X) = np = 14 * \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$D(X) = npq = 14 * \left(\frac{5}{6}\right)^4 * \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4\right) = \frac{2935625}{839808}$$

31. Производится 10 *независимых испытаний с вероятностью успеха* 0.6 *в каждом испытании. Пусть* X *– число успехов в испытаниях с номерами* $1, 2, \ldots, 7$*,* Y *– число успехов в испытаниях с номерами* $5, 6, \ldots, 10$*. Найдите дисперсию* $D[X + 2Y]$.

U- число успехов в испытаниях с номерами 1,2,3,4
V- число успехов в испытаниях с номерами 5,6,7
W- число успехов в испытаниях с номерами 8.9.10.
Каждая из величин имеет биномиальное распределение

$$X = U + V$$
$$Y = V + W$$
$$D(X + 2Y) = D(U + V + 2(V + W)) = D(U + V + 2V + 2W) =$$
$$= D(U + 3V + 2W) = D(U) + D(3V) + D(2W) =$$
$$= D(U) + 9D(V) + 4D(W) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot (4 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 3) =$$
$$= 0.24 \cdot 43 = 10,32$$
$$p = 0.1$$
$$q = 0.9$$
$$D = npq$$
$$D(U) = 4 * 0,6 * 0,4$$
$$D(V) = 3 * 0,6 * 0,4$$
$$D(W) = 3 * 0,6 * 0,4$$

32. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 20 *и* 40 *соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина* X *– число бросаний. Найдите математическое ожидание* $M(X)$ *и дисперсию* $D(X)$.

Геометрическое распределение

$$M(X) = \frac{1}{p}$$
$$p = \frac{20^2}{40^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$q = \frac{3}{4}$$
$$M(X) = 4$$
$$D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$$

33. В спортивной лотерее каждую неделю на 100 билетов разыгрывается 9 *палаток и* 9 *рюкзаков. Турист решил каждую неделю покупать по одному билету до тех пор, пока он не выиграет палатку и рюкзак. Найдите среднее время реализации данного намерения (время измеряется в неделях).*

T-время ожидания

T=T1+T2

T1, T2-независимы

T1-время ожидания 1-го выигрыша
T2-время ожидания др. выигрыша

$$M(T) = M(T_1) + M(T_2)$$

$$M(T_1) = \frac{1}{p_1}$$

$$p_1 = \frac{18}{100}$$

$$M(T_1) = \frac{100}{18}$$

$$M(T_2) = \frac{100}{9}$$

$$p_2 = \frac{9}{100}$$

$$M(T) = \frac{100}{18} + \frac{100}{9} = \frac{100}{9}\cdot(\frac{1}{2} + 1) = 1.5\cdot\frac{100}{9} \approx 17$$

34. В серии независимых испытаний, которые проводятся с частотой одно испытание в единицу времени, вероятность наступления события A *в одном испытании равна* $\frac{1}{4}$. *Пусть* T *– время ожидания наступления события* A 10 *раз (за все время ожидания). Найдите математическое ожидание* $M(T)$ *и дисперсию* $D(T)$.

Ti-время ожидания от (i-1)-ого до i-ого события
Геометрическое распределение

$$T = T_1 + \ldots + T_{15}$$

$$M(T) = M(T_1 + \ldots + T_{15}) = M(T_1) + \ldots + M(T_{15}) = 10M(T_i) = 40$$

$$M(T_i) = \frac{1}{p} = 4$$

$$q = \frac{3}{4}$$

$$D = \frac{q}{p^2}$$

$$D = \frac{3}{4} : 16 = 12$$

$$D(T) = D(T_1 + \ldots + T_{15}) =$$

$T_1, \ldots, T_{15}$ *– независимы*

$$= 10D(T_i) = 10\cdot 12 = 120$$

35. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{10}$ *распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным* 4. *Найдите математическое ожидание* $M(X_1^2 + \ldots + X_{10}^2)$.

$M(X_1^2 + \dots + M_{10}^2) = M(X_1^2) + \dots + M(X_{10}^2) =$

$= 10\,M(X_i^2)$

$M(X) = \dfrac{1}{p}$

$4 = \dfrac{1}{p}$

$p = \dfrac{1}{4}$

$q = \dfrac{3}{4}$

$D = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{3}{4} \div \dfrac{1}{16} = 12$

$M(X_1^2) = D(X_1) + M^2(X_1) = 12 + 4^2 = 28$

$10\,M(X_1^2) = 280$

$M(X_1^2 + \dots + M_{10}^2) = 280$

36. Случайные величины независимы $X_1, \dots, X_8$ *и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным* 6. *Найдите математическое ожидание* $M\{(X_1 + \dots + X_8)^2\}$.

$Z = X1 + X8$

$M(Z^2) = D(Z) + M^2(Z)$

$M(Z) = M(X_1 + \dots + M_8) = 8M(X_1) = 8 * 6 = 48$

$M^2(Z) = 2304$

$D(Z) = D(X1 + \dots X8) = 8D(X1) =$

$D = \dfrac{q}{p^2}$

$6 = \dfrac{1}{p}$

$p = \dfrac{1}{6}$

$q = \dfrac{5}{6}$

$D = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{5}{6} : \dfrac{1}{6^2} = 30$

$= 8 * 30 = 240$

$M(Z^2) = 240 + 2304 = 2544$

37. Случайные величины X, Y *распределены по геометрическому закону. Найдите дисперсию* $D[X-Y]$, *если их математические ожидания равны* 4, *а коэффициент корреляции* X *и* Y *равен* 0.5.

$$\frac{1}{M(X)} = p$$

$$p = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{3}{4}$$

$$D(X, Y) = \frac{q}{p^2} = 12$$

$$D(X-Y) = D(X+(-Y)) = D(X) + D(-Y) + 2Cov(X,-Y) =$$

$$= D(X) + D(Y) \_ 2Cov(X,Y) = 12 + 12 - 2\delta_x \delta_y \rho =$$

$$= 24 - 2 \cdot 12 \cdot 0.5 = 24 - 12 = 12$$

38. Случайная составляющая выручки равна $4X$, *где* X *– биномиальная случайная величина с параметрами* $n = 500$ *и* $p = \frac{1}{2}$. *Случайная составляющая затрат имеет вид* $50Y$, *где* Y *– пуассоновская случайная величина. Найдите дисперсию прибыли, считая, что* X *и* Y *– независимы, а* $M(Y) = 5$.

$$случ.в - на = Z - прибыль \quad -$$

$$Z = 4X - 50Y$$

$$D(Z) = D(4X - 50Y) = D(4X + (-50Y)) =$$

$$= D(4x) + D(-50Y) =$$

$$= 16D(X) + 2500D(Y) =$$

$$D(X) = npq = \frac{500}{4} = 125$$

$$M(Y) = D(Y) = 5$$

$$= 16 \cdot 125 + 2500 \cdot 5 = 14500$$

39. Для пуассоновской случайной величины X *отношение* $\frac{P(X=10)}{P(X=9)} = 6$. *Найдите математическое ожидание* $M[X]$.

$$P = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(X = 10) = \frac{\lambda^{10} \cdot e^{-\lambda}}{10!}$$

$$P(X = 9) = \frac{\lambda^{9} \cdot e^{-\lambda}}{9!}$$

$$\frac{P(X = 10)}{P(X = 9)} = \frac{\lambda^{10} \cdot e^{-\lambda}}{10!} \cdot \frac{9!}{\lambda^{9} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{10} = 6$$

$$\lambda = 10 \cdot 6 = 60$$

$$M(X) = \lambda = 60$$

Проверочные задания для практического занятия:

Вариант 1

Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	8	12
n_i	6	4	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 2
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	5	7	9
n_i	6	4	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	4	3	2	6
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 3
Задания:
1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	12	11	7
n_i	5	6	9

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	4	3	2	6
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 4
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	5	7	9
n_i	6	4	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	4	3	2	6
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 5
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

i	4	6	10
n_i	6	4	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	34	33	32	36
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 6
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	15	9	6
n_i	6	4	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	13	14	12	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 7
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

i	5	7	9
n_i	4	4	12

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	24	23	22	26
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 8
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	12	8	10
n_i	6	4	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	6	3	7	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 9
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	12	17	19
n_i	7	3	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	6	3	9	7
p	0,3	0,35	0,15	0,2

Вариант 10
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	6	9	12
n_i	16	14	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	24	23	22	16
p	0,45	0,2	0,1	0,25

Вариант 11
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	8	9	4
i	4	3	13

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	7	4	5	4
p	0,3	0,1	0,4	0,2

Вариант 12
Задания:

1.Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	5	7	9
n_i	6	4	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	4	3	2	6
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Вариант 13
Задания:

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	7	3	8
n_i	6	4	10

Найти распределение относительных частот. Построить полигон частот.

2. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	11	20	40	60
p	0,05	0,10	0,25	0,60

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое генеральная и выборочные совокупности?
2. Объем выборки.
3. Среднее генеральное и среднее выборки.
4. Репрезентативность выборки.
5. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.
6. Непрерывные и дискретные величины.
7. Гистограмма и полигон распределения.

Практическое занятие № 7

Тема: Построение эмпирического ряда по заданной выборке.

Цель: Решение задач на построение для заданной выборки ее графической диаграммы, расчёта по заданной выборке её числовых характеристик, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков. Проверить на практике умения построения эмпирического ряда по заданной выборке.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

1.Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

2.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2011, 480 с. Гл. 15, с. 187 – 197, Гл.16, с. 197 -203, с. 205 – 207, с. 211 – 213.

3.Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М: «Высшая школа», 2011, 404 с. Гл. 9, с. 151 -157, Гл. 10, с. 157 -163.

4.Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Построение эмпирического ряда по заданной выборке.»

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу №7.

› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

Вариационные ряды. Генеральная совокупность и Выборка.

Совокупность предметов или явлений, объединённых каким-либо общим признаком или свойством качественного или количественного характера, называется объектом наблюдения.

Количественным называется признак, значения которого выражаются числами. Качественным называется признак, характеризующийся некоторым свойством или состоянием элементов совокупности.

Каждый объект статистического наблюдения состоит из отдельных элементов – единиц наблюдения. Результаты статистических наблюдений представляют собой числовую информацию – данные. Статистические данные – это сведения о том, какие значения принял интересующий исследователя признак в статистической совокупности.

Статистическая совокупность называется генеральной совокупностью, если исследованию подлежат все элементы совокупности. Выборочной совокупностью, или просто выборкой, называют часть элементов генеральной совокупности подлежащих исследованию. Она извлекается из генеральной совокупности случайно, чтобы каждый объект имел равные шансы быть отобранным.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, …, x_k - n_k раз и $\sum n_i = n$ - объем выборки.

Значения признака, которые при переходе от одного элемента совокупности к другому изменяются, называются *вариантами* и обозначаются маленькими латинскими буквами. Порядковый номер варианта называется *рангом*.

Ряд значений признака, расположенный в порядке возрастания или убывания с соответствующими им весами, называется *вариацион-*

ным рядом. В качестве весов выступают частоты. Числа n_i показывает, сколько раз встречается тот или иной вариант в статистической совокупности, называются *частотами*, а отношение их к объему выборки – *частостями* или *относительными частотами*.

Относительная частота $W_i = n_i / n$ показывает, какая часть единиц совокупности имеет тот или иной вариант к сумме всех частот ряда.

Перечень вариантов и соответствующих им частот или частостей называется *статистическим распределением выборки* или *статистическим рядом*.

Вариационные ряды бывают дискретными и интервальными.

Дискретные вариационные ряды строят обычно в том случае, если значения изучаемого признака могут отличаться друг от друга не менее чем на не- которую конечную величину. В дискретных вариационных рядах задаются точечные значения признака.

Общий вид дискретного ряда показан в таблице 1.

Таблица 1

Значения признака x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_k

Интервальные вариационные ряды строят обычно в том случае, если зна-чения изучаемого признака могут отличаться друг от друга на сколь угодно ма-лую величину. Значения признаков в них задаются в виде интервалов. Общий вид интервального ряда имеет вид, который показан в таблице 2.

Таблица 2

Значения признака x_i	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_{k-1} - x_k$
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_k

В интервальных вариационных рядах в каждом интервале выделяют верхнюю и нижнюю границы.

Разность между верхней и нижней границами интервала называется *ин-тервальной разностью* или длиной интервала. В общем виде интервальную разность k_i представим как $k_i = x_{i(\max)} - x_{i(\min)}$.

Первый и последний интервалы могут быть открытыми, т.е. иметь только одну границу.

Если интервалы в вариационных рядах имеют одинаковую длину, их на-зывают *равновеликими*, в противном случае неравновеликими.

При построении интервального ряда (если строится ряд с равными интер-валами), для определения оптимальной величины интервалов применяют формулу Стерджеса $k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \lg n}$, где n число единиц совокупности; $x_{\max}$ и

$x_{\min}$ − наибольшее и наименьшее значения вариационного ряда.

Дискретный вариационный ряд графически можно представить с помощью *полигона распределения частот* (рисунок 2).

Интервальные вариационные ряды графически можно представить в виде *гистограмм*, т.е. столбчатой диаграммы (рисунок 3)

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$: $F^*(x) = n_x / n$, где n_x − число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Свойства эмпирической функции:

1^0. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0;1).

2^0. $F^*(x)$ - неубывающая функция.

3^0. Если x_1 − наименьшая варианта, а x_k − наибольшая, то $F^*(x)= 0$ при $x \le x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

<u>Пример 1.</u> Найти эмпирическую функцию по данному распределению

выборки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

60

Решение: Найдем объем выборки: n =10 + 15 + 25 = 50. Наименьшая варианта равна единице, поэтому $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$. Значение $x < 4$, а именно

$x_1 =1$, наблюдалось 10 раз, следовательно, $F^*(x) =10/50 = 0{,}2$ при $1< x \le 4$.

Значения $x < 6$, а именно: $x_1 =1$, $x_2 = 4$, наблюдались 10 + 15 = 25 раз; следовательно, $F^*(x) = 25/50 = 0{,}5$ при $4 < x \le 6$. Так как $x = 6$ − наибольшая варианта,

то $F^*(x) =1$ при $x > 6$. Напишем искомую эмпирическую функцию:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}2 \text{ при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 \text{ при } 4 < x \le 6, \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$$

Пример 2. В результате тестирования группа абитуриентов набрала баллы: 5, 3, 0, 1, 4, 2, 5, 4, 1, 5. Записать полученную выборку в виде: а)вариационного ряда; б) статистического ряда.

Решение: а) Проранжировав статистические данные (т.е. исходный ряд), получим вариационный ряд (0,1,1,2,3,4,4,5,5,5).

б) подсчитав частоту и частость вариантов $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$, получим статистическое распределение выборки (так называемый дискретный статистический ряд)

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

$$\sum_{i=1}^{6} n_i = 10$$

Или

x_i	0	1	2	3	4	5
w_i	1/10	2/10	1/10	1/10	2/10	3/10

$$\sum_{i=1}^{6} w_i = 1$$

Пример 3. Измерили рост (с точностью до см) 30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерений таковы:

178, 160, 154, 183, 155, 153,
167, 186, 163, 155, 157, 175,
170, 166, 159, 173, 182, 167,
171, 169, 179, 165, 156, 179,
158, 171 ,175, 173, 164, 172,

Построить интервальный статистический ряд.

Решение: Для удобства проранжируем полученные данные: 153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172, 173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 189.

Отметим, что X – рост студента – непрерывная случайная величина. При более точном измерении роста значения случайной величины X обычно не повторяются (вероятность наличия на Земле двух человек, рост которых равен, скажем $\sqrt{3}$ =1,732050808... метров, равна нулю!).

Как видим, $x_{\min}$ =153, $x_{\max}$ =186; по формуле Стерджеса, при n = 30, находим длину частичного интервала

$$\frac{186-153}{1+\log_2 30} \approx \frac{33}{1+3{,}322\lg 30} \approx \frac{33}{5{,}907} \approx 5{,}59.$$

Примем $h = 6$. Тогда $x_{нач} = 153 - \frac{6}{2}$ =150. Исходные данные разбиваем на 6 (m =1+ $\log_2 30$ = 5,907 ≈ 6) интервалов

[150;156),[156;162),[162;168),[168;174),[174;180),[180;186)

Подсчитав число студентов n_i , попавших в каждый из полученных промежутков, получим интервальный статистический ряд

Рост	[150 −156)	[156 −162)	[162 −168)	[168 −174)	[174 −180)	[180 −186)
Частота	4	5	6	7	5	3
Частость	0,13	0,17	0,20	0,23	0,17	0,10

Числовые характеристики статистического распределения. Статистические оценки параметров распределения

<u>Числовые характеристики статистического распределения</u>

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака X

Среднее арифметическое вычисляют по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$ где x_i − i − e значение признака, n – объем ряда.

Генеральной средней $\bar{x}_Г$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности. $\bar{x}_Г = (x_1 + x_2 + ... + x_N)/N$, где $(x_1 + x_2 + ...+ x_N)$ − значения признака генеральной совокупности объема N

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n.

Выборочной средней $\bar{x}_B$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. $\bar{x}_B = (x_1 + x_2 + ...+ x_n)/n$, где

$(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ − значения признака генеральной совокупности объема n или

$$\bar{x}_в = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \Big/ n .$$

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику – генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией $D_Г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значения признака генеральной совокупности от их среднего~~о~~ значения $\bar{x}_Г$. Если все значения $(x_1 + x_2 + ... + x_N)$ − признака генеральной совокупности объема N различны, то $D_Г$

$$= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_Г)^2 \Big/ N .$$

Если же значения $(x_1 + x_2 + ... + x_k)$ − имеют соответственно частоты $(N_1, N_2, ..., N_k)$, причем $(N_1 + N_2 + ... + N_k) = N$, то

$$= \sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \bar{x}_Г)^2 \Big/ N .$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из генеральной дисперсии.

Выборочной дисперсией $D_В$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения x_B . Если все значения $(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ признака выборки объема n различны, то

$$D_B = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_B)^2 \Big/ n .$$

Если же значения признака $(x_1 + x_2 + ... + x_k)$ имеют соответственно частоты $(n_1, n_2, ... n_k)$ причем

$(n_1 + n_2 + ... + n_k) = n$, то

$$D_B = \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_B)^2 \Big/ n .$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии.

В качестве описательных характеристик вариационного ряда (или полученного статистического распределения) используется медиана, мода, размах вариации (выборки) и т.д.

Размахом вариации называется число $R = x_n - x_1$, где $x_1 = \min\limits_{1 \le k \le n} x_k$, $x_n = \max\limits_{1 \le k \le n} x_k$ или $R = x_{\max} - x_{\min}$, где $x_{\max}$ − наибольший, $x_{\min}$ − наименьший вариант ряда.

Модой M_0^* вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой M_e^* вариационного ряда называется значение признака случайной величины X, приходящееся на середину ряда.

Если $n = 2k$ (т.е. ряд имеет четное число членов), то $M_e^* = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$;

если $n = 2k + 1$, то $M_e^* = x_{k+1}$.

<u>Точечные оценки</u>

Статистической оценкой θ^* неизвестного параметра θ теоретического распределения называют функцию $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ от наблюдаемых случаных величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\theta^* = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ − результаты n наблюдений над количественным признаком X (выборка).

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя $\bar{x}_в = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$, где x_i − варианта выбор-

k

ки, n_i − частота варианты x_i , $n = \sum n_i$ –
объем выборки. i=1

Замечание 1. Если первоначальные варианты x_i − большие числа, то для упрощения расчета целесообразно вычесть из каждой варианты одно и то же число C, т.е. перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$ (в качестве C выгодно принять число, близкое к выборочной средней; поскольку выборочная средняя неизвестна, число C выбирают «на глаз»). Тогда $x_в = C + (\sum n_i u_i)/n$.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия.

$$D_в = \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2 / n;$$

эта оценка является смещенной, так как

$$M(D_в) = \frac{n-1}{n} D_Г .$$

Более удобна формула

$$D_в = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n}\right]^2 .$$

Замечание 2. Если первоначальные варианты x_i − большие числа, то целесообразно вычесть из всех вариант одно и то же число C, равное выборочной средней или близкое к ней, т.е. перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$ (дисперсия при этом не изменится).

Тогда $$D_в(X) = D_в(u) = \overline{u^2} - [\bar{u}]^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n}\right]^2.$$

Замечание 3. Если первоначальные варианты являются десятичными дробями с k десятичными знаками после запятой, то, чтобы избежать действий с дробями, умножают первоначальные варианты на постоянное число $C = 10^k$, т.е. переходят к условным вариантам $u_i = Cx_i$. При этом дисперсия увеличится в C^2 раз. Поэтому, найдя дисперсию условных вариант, надо разделить ее на C^2: $D_в(X) = D_в(u) / C^2$.

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия $$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^2}{n-1}.$$

Более удобна формула $$s_X^2 = \frac{\sum n_i x_i^2 - (\sum n_i x_i)^2 / n}{n-1},$$ в условных вариантах она имеет вид $$s_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - (\sum n_i u_i)^2 / n}{n-1},$$ причем если $u_i = x_i - C$, то $s_X^2 = s_u^2$; если $u_i = C \cdot x_i$, то $s_X^2 = s_u^2 / C^2$.

Пример 1. По условию примера 2 и 3 из § 1 главы 4 найти характеристики выборки – результаты тестирования 10 абитуриентов.

Решение: Находим:

$$\overline{x}_B = \frac{1}{10}(0\cdot 1+1\cdot 2 + ...+ 5\cdot 3)= 3,$$

$$D_B = \frac{1}{10}((0-3)^2\cdot 1+ (1-3)^2\cdot 2 + ...+ (5-3)^2\cdot 3)= 3{,}2;$$

$$\sigma_B = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}79;$$

$$S^2 = \frac{10}{9}\cdot 3{,}2 \approx 3{,}56;$$

$$S = \sqrt{3{,}56} \approx 1{,}87;$$

$$R = 5 - 0 = 5;$$

$$M_0^* = 5;$$

$$M_e^* = \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение вариационного ряда.
2. Что называется размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?
5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочного среднего.
7. Дайте определение выборочной дисперсии.
8. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?

Домашнее задание

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высшая школа, 2011. гл.15, 16, №2, № 3 стр.196.

Проверочные задания для практического занятия

Вариант 1

№ 1. Для выборки 7,-7,2,7,7,5,5,7,5,-7 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Вариант 2

№ 1. Для выборки 5,2,8,-2,5,-2,0,0,8,5 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-5	6
2	5-8	7
3	8-11	4
4	11-14	5
5	14-17	3

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Вариант 3

№ 1. Для выборки 1,9,2,1,1,5,5,1,5,9 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-7	5
2	7-12	10
3	12-17	25
4	17-22	6
5	22-27	4

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Вариант 4

№ 1. Для выборки 15,10,2,15,15,5,5,15,5,10 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	3-5	4
2	5-7	6
3	7-9	20
4	9-11	40
5	11-13	20
6	13-15	4
7	15-17	6

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Обязательная литература

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003, 480 с. Гл. 15, с. 187 – 197, Гл.16, с. 197 - 203, с. 205 – 207, с. 211 – 213.

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М: «Высшая школа», 2004, 404 с. Гл. 9, с. 151 -157, Гл. 10, с. 157 -163.

Дополнительная литература

Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука. 1969, 576 с. Гл. 7, с. 131 – 14

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

4.1. Основная литература

№ п/п	Наименование	Авторы	Место издания	Год издания	Наличие	
					в научно-технической библиотеке, экз	в ЭБС, адрес в сети Интернет
1.	Математика	Богомолов Н.В.	Москва, Дрофа	2011г		
2.	Математика. Дидактические задания	Богомолов Н.В.	Москва, Дрофа	2011г		
3.	Сборник задач по математике	Богомолов Н.В.	Москва, Дрофа	2011г		
4.	Математика, учебник для средних специальных учебных заведений	Пехлецкий И.Д.	Москва, Академия	2009г		
5.	Математика: учебное пособие	Омельченко В.П.	Ростов н/Д: Феникс	2011г		
6.	Конспект лекций по высшей математике	Письменный Д.Т.	Москва, Айрис-пресс	2010г		

4.2. Дополнительная литература

№ п/п	Наименование	Авторы	Место издания	Год издания	Наличие	
					в научно-технической библиотеке, экз	в ЭБС, адрес в сети Интернет
1.	Дискретная математика	Спирина М.С.	М., Академия	2006г		
2.	Введение в дискретную математику	Яблонский С.В.	М., Высшая школа	2002г		
3.	Математика для техникумов, в 2 частях	Яковлев Г.Н.	Новая волна	2008г		

4.3. Интернет-ресурсы

http://ru.wikipedia.org
Энциклопедия

http://webmath.exponenta.ru
На сайте дан теоретический и практический материал по высшей математике

http://www.mathprofi.ru
Высшая математика для заочников и не только

http://matematik-master.ru
На сайте можно найти лекции по высшей математике, решения типовых примеров

http://integraloff.net
Сайт предназначен для решения различных задач по математике в режиме онлайн

http://lib.mexmat.ru
Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ

http://www.exponenta.ru
Образовательный математический сайт

http://www.krugosvet.ru
Универсальная научно-популярная онлайн энциклопедия

Учебное издание

Самохова Г.А.

МАТЕМАТИКА

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 26.06.2015 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 6,85. Тираж 100 экз. Изд. № 3040.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ