ФГБОУ ВО «Брянский государственный сельскохозяйственный университет»

Рыжик В.Н.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА

Брянск 2015

УДК 52 (07)
ББК 22.1
Р 93

Рыжик В.Н. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ: МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ/ В.Н. Рыжик.- Брянск: Издательство Брянского ГАУ, 2015.- 52 с.

Данное методическое пособие содержит основные понятия и формулы по теме «Производная функции». В нем рассмотрены типовые примеры, необходимые для выполнения расчетно-графической работы по данной теме, а также варианты расчетно-графической работы.

Производная функции

Произво́дная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется **дифференци́рованием**. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование.

В классическом дифференциальном исчислении производная чаще всего определяется через понятия теории пределов, однако исторически теория пределов появилась позже дифференциального исчисления.

Русский термин «производная функции» впервые употребил В. И. Висковатов.

Определение

Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определена функция

$$f\colon U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Производной функции называется такое число A, что функцию в окрестности $U(x_0)$ можно представить в виде

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h)$$

если A существует.

Определение производной функции через предел.

Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определена функция

$$f\colon U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Производной функции f в точке x_0 называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Общепринятые обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \dot{y}(x_0).$$

Таблица производных

Производные степенных функций	Производные тригонометрических функций	Производные обратных тригонометрических функций
$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(c) = (const)$

$(e^x)^{(n)} = e^x$

Дифференцируемость

Дифференцируемая функция

Производная $f'(x_0)$ функции f в точке x_0, будучи пределом, может не существовать или существовать и быть конечной или бесконечной. Функция f является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда её производная в этой точке существует и конечна:

$$f \in \mathcal{D}(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0) \in (-\infty; \infty).$$

Для дифференцируемой в x_0 функции f в окрестности $U(x_0)$ справедливо представление

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Замечания

- Назовём $\Delta x = x - x_0$ приращением аргумента функции, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ приращением значения функции в точке x_0. Тогда
-

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

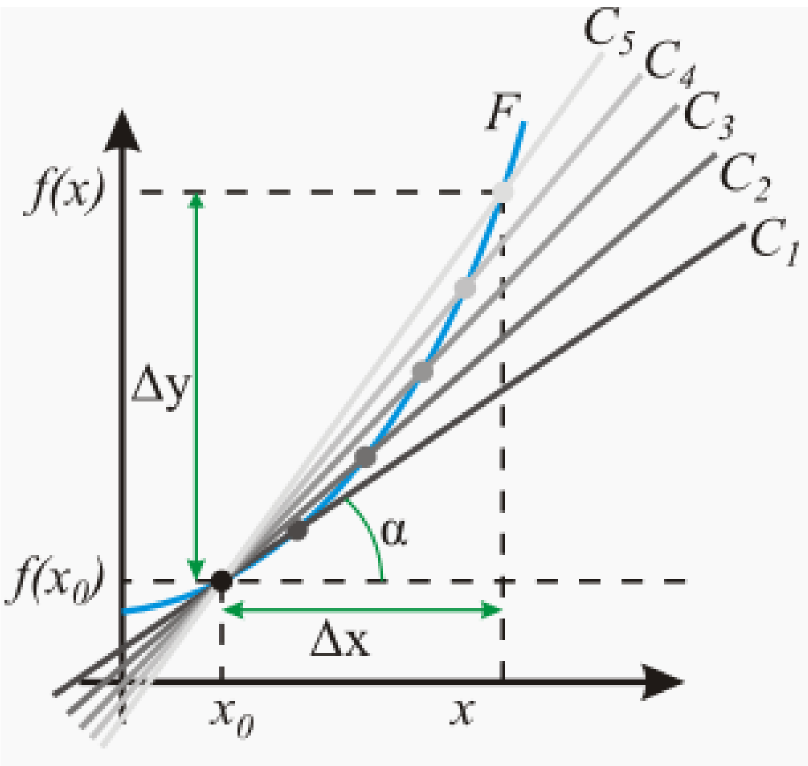
- Пусть функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ имеет конечную производную в каждой точке $x_0\in(a,b)$.
  - Тогда определена производная функция

$$f':(a,b)\to\mathbb{R}.$$

- Функция, имеющая производную в точке, непрерывна в ней. Обратное не всегда верно.
- Если производная функция сама является непрерывной, то функцию f называют **непреры́вно дифференци́руемой** и пишут: $f\in C^{(1)}\big((a,b)\big)$.

Геометрический и физический смысл производной

Тангенс угла наклона касательной прямой



Геометрический смысл производной.

На графике функции выбирается абсцисса x_0 и вычисляется соответствующая ордината $f(x_0)$. В окрестности точки x_0 выбирается произвольная точка x. Через соответствующие точки на графике функции F проводится секущая (первая светло-серая линия C_5). Расстояние $\Delta x = x - x_0$ устремляется к нулю, в результате секущая переходит в касательную (постепенно темнеющие линии C_5 — C_1). Тангенс угла α наклона этой касательной — и есть производная в точке x_0.

Касательная прямая

Если функция $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}$ имеет конечную производную в точке x_0, то в окрестности $U(x_0)$ её можно приблизить к линейной функции

$$f_l(x)\equiv f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Функция f_l называется касательной к f в точке x_0. Число $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом (*угловым коэффициентом* касательной) или тангенсом угла наклона касательной прямой.

Скорость изменения функции

Пусть $s=s(t)$ — закон прямолинейного движения. Тогда $v(t_0)=s'(t_0)$ выражает мгновенную скорость движения в момент времени t_0. Вторая производная $a(t_0)=s''(t_0)$ выражает мгновенное ускорение в момент времени t_0.

Вообще производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 выражает скорость изменения функции в точке x_0, то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью $y=f(x)$.

Производные высших порядков

Понятие производной произвольного порядка задаётся рекуррентно. Полагаем

$$f^{(0)}(x_0)\equiv f(x_0).$$

Если функция f дифференцируема в x_0, то производная первого порядка определяется соотношением

$$f^{(1)}(x_0)\equiv f'(x_0).$$

Пусть теперь производная n-го порядка $f^{(n)}$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема. Тогда

$$f^{(n+1)}(x_0)=\left(f^{(n)}\right)'(x_0).$$

Если функция $u=f(x,y,z)$ имеет в некоторой области D частную производную по одной из переменных, то названная производная, сама являясь функцией от $x, y, z,$ может иметь в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) частные производные по той же или по любой другой переменной. Для исходной функции $u = f(x, y, z)$ эти производные будут частными производными второго порядка (или вторыми частными производными).

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0) \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}$$

$$u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y}$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной. Например,

$$u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)$$

Способы записи производных

В зависимости от целей, области применения и используемого математического аппарата используют различные способы записи производных. Так, производная n-го порядка может быть записана в нотациях:

- Лагранжа $f^{(n)}(x_0)$, при этом для малых n часто используют штрихи и римские цифры:

$$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0) = f^{I}(x_0),$$

$$f^{(2)}(x_0) = f''(x_0) = f^{II}(x_0),$$

$$f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0) = f^{III}(x_0),$$

$$f^{(4)}(x_0) = f^{IV}(x_0), \text{ и т. д.}$$

Такая запись удобна своей краткостью и широко распространена; однако штрихами разрешается обозначать не выше третьей производной.

- Лейбница, удобная наглядной записью отношения бесконечно малых (только в случае, если x — независимая переменная; в противном случае обозначение верно лишь для производной первого порядка):

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

- [Ньютона](), которая часто используется в механике для производной по времени функции координаты (для пространственной производной чаще используют запись Лагранжа). Порядок производной обозначается числом точек над функцией, например:

$\dot{x}(t_0)$ — производная первого порядка x по t при $t = t_0$, или $\ddot{f}(x_0)$ — вторая производная f по x в точке x_0 и т. д.

- Эйлера, использующая дифференциальный оператор (строго говоря, дифференциальное выражение, пока не введено соответствующее функциональное пространство), и потому удобная в вопросах, связанных с функциональным анализом:

- $\mathrm{D}^n f(x_0)$, или иногда $\partial^n f(x_0)$.

- В вариационном исчислении и математической физике часто применяется обозначение f_x, f_{xx}; для значения производной в точке — $f_x|_{x=x_0}$. Для частных производных обозначение то же, поэтому смысл обозначения определяют из контекста.

(Конечно, при этом необходимо не забывать, что служат все они для обозначения одних и тех же объектов)

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \overset{\overbrace{\cdot\,\cdot\,\cdots}^{n\ \text{РАЗ}}}{f}(x_0) = \mathrm{D}^n f(x_0) = f_{\underbrace{xx\ldots x}_{n\ \text{РАЗ}}}|_{x=x_0}.$$

Примеры

- Пусть $f(x) = x^2$.
- Тогда
- $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}(x + x_0) = 2x_0.$$

- Пусть $f(x) = |x|$. Тогда если $x_0 \neq 0$, то
- $$f'(x_0) = \operatorname{sgn} x_0,$$

где sgn обозначает функцию знака. А если $x_0 = 0$, то

$f'_+(x_0) = 1,\ f'_-(x_0) = -1,$ а, следовательно $f'(x_0)$ не существует.

Правила дифференцирования

Операция нахождения производной называется дифференцированием. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f+g)' = f' + g'$[2]
- $(fg)' = f'g + fg'$[3]
- $(Cf)' = Cf'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ …(g ≠ 0)
- $\left(\frac{C}{g}\right)' = -\frac{Cg'}{g^2}$ (g ≠ 0)

- Если функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [T_1; T_2]$$

, то $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Дифференцирование сложной функции

- $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx} = f'_g g'_x$

- Формулы производной произведения и отношения обобщаются на случай n-кратного дифференцирования (формула Лейбница):

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)},$ где C_n^k — биномиальные коэффициенты.

Следующие свойства производной служат дополнением к правилам дифференцирования:

- если функция дифференцируема на интервале (a, b), то она непрерывна на интервале (a, b). Обратное, вообще говоря, неверно (например, функция $y(x) = |x|$ на $[-1, 1]$);
- если функция имеет локальный максимум/минимум при значении аргумента, равном x, то $f'(x) = 0$ (это так называемая лемма Ферма);
- производная данной функции единственна, но у разных функций могут быть одинаковые производные.
- $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right) (\forall x \in D_f : f(x) > 0)$

Производная вектор-функции по параметру

Определим производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ по параметру:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

Если производная в точке t существует, вектор-функция называется дифференцируемой в этой точке. Координатными функциями для производной будут

$$x'(t),\ y'(t),\ z'(t).$$

Свойства производной вектор-функции (всюду предполагается, что производные существуют):

- $\frac{d}{dt}(\mathbf{r_1}(t) + \mathbf{r_2}(t)) = \frac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}$ — производная суммы есть сумма производных.
-
- $\frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{r}(t)) = \frac{df(t)}{dt}\mathbf{r}(t) + f(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ — здесь $f(t)$ — дифференцируемая скалярная функция.
-
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{r_1}(t)\mathbf{r_2}(t)) = \frac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}\mathbf{r_2}(t) + \mathbf{r_1}(t)\frac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}$ — дифференцирование скалярного произведения.
-

- $\frac{d}{dt}[\mathbf{r_1}(t)\mathbf{r_2}(t)] = \left[\frac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}\mathbf{r_2}(t)\right] + \left[\mathbf{r_1}(t)\frac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}\right]$ — дифференцирование векторного произведения.
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t),\mathbf{c}(t)) = \left(\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt},\mathbf{b}(t),\mathbf{c}(t)\right)+\left(\mathbf{a}(t),\frac{d\mathbf{b}(t)}{dt},\mathbf{c}(t)\right)+\left(\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t),\frac{d\mathbf{c}(t)}{dt}\right)$ — дифференцирование смешанного произведения

Способы задания производных

- Производная Джексона
  $D_x^q f(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$.

Цепное правило (**правило дифференцирования сложной функции**) позволяет вычислить производную композиции двух и более функций на основе индивидуальных производных. Если функция f имеет производную в точке x_0, а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0.

Одномерный случай

Пусть даны функции, определённые в окрестностях на числовой прямой, $f : U(x_0) \to V(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, и $g : V(y_0) \to \mathbb{R}$ Пусть также эти функции дифференцируемы: $f \in \mathcal{D}(x_0),\ g \in \mathcal{D}(y_0)$. Тогда их композиция также дифференцируема: $h = g \circ f \in \mathcal{D}(x_0)$, и её производная имеет вид:

$$h'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Замечание

В обозначениях Лейбница цепное правило для вычисления производной функции $y = y(x)$, где $x = x(t)$, принимает следующий вид:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференциал функции $z = g(y)$ в точке y_0 имеет вид:

$$dz = g'(y_0)\,dy,$$

где dy — дифференциал тождественного отображения $y \to y_0$:

$$dy(h) = h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Пусть теперь $y = f(x),\ x \in U(x_0),\ f \in \mathcal{D}(x_0)$. Тогда $dy = f'(x_0)\,dx$, и согласно цепному правилу:

$$dz = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)\,dx = g'(y_0)\,dy.$$

Таким образом, форма первого дифференциала остаётся одной и той же вне зависимости от того, является ли переменная функцией или нет.

Пример

Пусть $h(x) = (3x^2 - 5x)^7$. Тогда функция h может быть записана в виде композиции $h = g \circ f$, где

$$f(x) = 3x^2 - 5x,$$

$$g(y) = y^7.$$

Дифференцируя эти функции отдельно:

$$f'(x) = 6x - 5,$$

$$g'(y) = 7y^6,$$

получаем

$$h'(x) = 7(3x^2 - 5x)^6 \cdot (6x - 5).$$

Многомерный случай

Пусть даны функции $f : U(x_0) \subset \mathbb{R}^m \to V(y_0) \subset \mathbb{R}^n$, где $y_0 = f(x_0)$, и $g : V(y_0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Пусть также эти функции дифференцируемы: $f \in \mathcal{D}(x_0)$ и $g \in \mathcal{D}(y_0)$. Тогда их композиция тоже дифференцируема, и её дифференциал имеет вид

$$dh(x_0) = dg(y_0) * df(x_0).$$

В частности, матрица Якоби функции h является произведением матриц Якоби функций g и f :

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = \frac{\partial(h_1, \ldots, h_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}.$$

Следствия

Якобиан композиции двух функций является произведением якобианов индивидуальных функций:

$$\left|\frac{\partial(h_1,\ldots,h_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right| = \left|\frac{\partial(h_1,\ldots,h_p)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right|.$$

Для частных производных сложной функции справедливо

- $$\frac{\partial h(x_0)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h(y_0)}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad j = 1,\ldots m.$$

Пример

Пусть дана функция трёх переменных:

$$h(x,y,z) = \sin x + \cos^2(x+y+z) - \sqrt{2x^2+5y^3}$$

и требуется найти её частную производную по переменной x. Функция h может быть записана как:

$$h(x,y,z) = f(u,v,w),$$

где:

$$f(u,v,w) = u + v^2 + w,$$

$$u(x,y,z) = \sin x,$$

$$v(x,y,z) = \cos(x+y+z),$$

$$w(x,y,z) = -\sqrt{2x^2+5y^3}.$$

Тогда частная производная функции h по переменной x будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

Вычисляем производные:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial f}{\partial v} = 2v,\ \frac{\partial f}{\partial w} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x,\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin(x+y+z),\ \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2x}{\sqrt{2x^2+5y^3}}.$$

Подставляем найденные производные:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 1\cdot\cos x \quad + \quad 2\cdot\Big(\cos(x+y+z)\Big)\cdot\Big(-\sin(x+y+z)\Big) \quad + \quad 1\cdot\left(-\frac{2x}{\sqrt{2x^2+5y^3}}\right)$$

В итоге

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \cos x - \sin(2x+2y+2z) - \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5y^3}}.$$

Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ - функция от аргумента x в некотором интервале (a, b). Если в уравнении $y = f(x)$ y считать аргументом, а x - функцией, то возникает новая функция $x = \phi(y)$, где $f[\phi(y)] \equiv y$ - функция обратная данной.

Теорема (о дифференцировании обратной функции)

Для дифференцируемой функции с производной, отличной от нуля, *производная обратной функции* равна обратной величине производной данной функции, т.е.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Примеры

- $$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y,$$

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(Sin y)'} = \frac{1}{Cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-Sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-Sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \ln x \Rightarrow x = e^y,$
-

$$y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{y'\cdot e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Как мы знаем,

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Математический смысл этого определения понять не очень просто.

Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**. В результате выполнения этой операции мы по определенным правилам получаем другую **функцию**:

$$f'(x)=g(x)$$

В этом равенстве

$f(x)$ – функция, от которой мы берем производную,

$g(x)$ – функция, которая получается в результате этой операции.

Для того, чтобы каждый раз не искать **производные элементарных функций**, используя определение производной, существует **таблица производных элементарных функций**:

1. Производная константы равна нулю:

$$(C)'=0$$

2. Производная степенной функции:

$$\left(x^{n}\right)'=nx^{n-1}$$

Заметим, что n может принимать любые действительные значения.

Примеры.

1. $\left(x^{5}\right)'=5x^{4}$

2. $\left(\frac{1}{x^{4}}\right)'=\left(x^{-4}\right)'=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}$

3. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{3}$

3. Производная показательной функции:

$$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$$

Пример.

$$\left(3^{x}\right)'=3^{x}\ln 3$$

Частный случай этой формулы:

$$\left(e^{x}\right)'=e^{x}$$

4. Производная логарифма:

$$\left(\log_{a} x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$$

Частный случай этой формулы:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

5. Производные тригонометрических функций:

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^{2}x}$$

$$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^{2}x}$$

6. Производные обратных тригонометрических функций:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^{2}}$$

$$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^{2}}$$

Правила дифференцирования:

1. Производная суммы двух функций:

$$(u+v)'=u'+v'$$

2. Производная произведения двух функций:

$$(uv)'=u'v+v'u$$

3. Производная дроби:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

4. Производная произведения функции на число равна произведению числа на производную функции (число «выносится» за знак производной):

$$(Cf(x))'=C(f(x))'$$

Чтобы **правильно найти производную функции** $f(x)$, полезно придерживаться такого **алгоритма**:

1. Выделите, какие элементарные функции входят в состав уравнения функции.

2. Отделите в явном виде коэффициенты.

3. Если возможно, упростите выражение $f(x)$, используя свойства степени, свойства логарифмов или тригонометрические формулы в зависимости от того, какие элементарные функции входят в состав функции

4. Вспомните, чему равны производные этих функций или посмотрите в таблице производных.

5. Обратите внимание на то, какими арифметическими действиями связаны между собой элементарные функции, которые входят в состав функции $f(x)$ и вспомните **правило, по которому находится производная суммы, разности, произведения или частного двух функций.**

Пример 1. Найти производную функции:

$$f(x)=\log_2 x^4$$

Используя свойства логарифмов, упростим выражение в правой части уравнения функции:

$$\log_2 x^4 = 4\log_2 x$$

Таким образом:

$$\left(f(x)\right)' = \left(4\log_2 x\right)' = \frac{4}{x\ln 2}$$

Пример 2. Найти производную функции:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x}{\sqrt[4]{x}}$$

1. Упростим каждую дробь, используя свойства степени :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{x}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{2-\frac{1}{3}} + x^{1-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{3}{4}}$$

Мы видим, что наша функция представляет собой сумму степенных функций.

Следовательно:

$$\left(f(x)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' + \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y = x^2 + \frac{1}{3x^2} - \frac{2}{5x^3}$$

Сначала запишем каждое слагаемое в виде степени x и выделим в явном виде числовые коэффициенты:

$$y = x^2 + \frac{1}{3} \times x^{-2} - \frac{2}{5} \times x^{-3}$$

Теперь легко найти производную:

$$y' = \left(x^2\right)' + \frac{1}{3} \times \left(x^{-2}\right)' - \frac{2}{5} \times \left(x^{-3}\right)' = 2x + \frac{1}{3} \times \left(-2x^{-3}\right) - \frac{2}{5} \times \left(-3x^{-4}\right) = 2x - \frac{2}{3}x^{-3} + \frac{6}{5}x^{-4}$$

Пример 4. Найти производную функции:

$$f(x) = \frac{2^x}{\cos x + 1}$$

Мы видим, что наша функция представляет собой дробь, в числителе которой стоит степенная функция, а в знаменателе сумма косинуса и константы.

Найдем производную функции $f(x)$ по формуле производной дроби:

$$(f(x))' = \left(\frac{2^x}{\cos x+1}\right)' = \frac{\left(2^x\right)'(\cos x+1)-2^x(\cos x+1)'}{(\cos x+1)^2} = \frac{\left(2^x\right)\ln 2(\cos x+1)-2^x(--\sin x)}{(\cos x+1)^2}$$

Производные сложных функций

Пример

Задание. Найти производную функции $y = \sin\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)$

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(\sin\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)\right)' = \cos\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right) \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)'$$

В свою очередь производная $\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)'$ также берется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)'$$

$$y' = \cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

Ответ. $y' = \dfrac{\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Задача о приближенных вычислениях с помощью дифференциала обладает жёстким алгоритмом решения, и, следовательно, особых трудностей возникнуть не должно.

Пример

Задание. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1,02$, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x$. Необходимо вычислить ее значение в точке $x = 1,02$. Представим данное значение в виде следующей суммы:

$$x = x_0 + \Delta x$$

Величины x_0 и Δx выбираются так, чтобы в точке x_0 можно было бы достаточно легко вычислить значение функции и ее производной, а Δx было бы достаточно малой величиной. С учетом этого, делаем вывод, что $x = 1,02 = 1 + 0,02$, то есть $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$.

Вычислим значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ в точке $x_0 = 1$:

$$y(x_0) = y(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Далее продифференцируем рассматриваемую функцию и найдем значение $y'(x_0)$:

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Тогда

$$y'(1) = \frac{1}{2}$$

Итак,

$$y(1,02) = \operatorname{arctg} 1,02 = y(1 + 0,02) \approx y(1) + y'(1) \cdot \Delta x =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,02 \approx 0,7852 + 0,01 = 0,7952$$

Ответ. $\operatorname{arctg} 1,02 \approx 0,7952$

Дифференциал в точке находится по формуле:

$d[f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \Delta x$ – тоже можете переписать к себе в тетрадь.

Из формулы следует, что нужно взять первую производную: $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

И найти её значение в точке x_0:

$$f'(x_0) = f'(64) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{48}$$

Таким образом:

$$d\left[f(64)\right] = f'(64)\cdot\Delta x = \frac{1}{48}\cdot 3 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

Всё готово! Согласно формуле $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d\left[f(x_0)\right]$:

$$f(67)=\sqrt[3]{67}\approx 4+0{,}0625=4{,}0625$$

Найденное приближенное значение достаточно близко к значению $4{,}06154810045$, вычисленному с помощью микрокалькулятора.

Ответ: $\sqrt[3]{67}\approx 4{,}0625$

Пример

Вычислить приближенно $\sqrt[4]{620}$

Пример

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y=\sqrt{x^2+x+3}$ в точке $x=1{,}97$

Решение: Используем знакомую формулу: $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d\left[f(x_0)\right]$

В данном случае уже дана готовая функция: $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}$. Ещё раз обращаю внимание, что для обозначения функции вместо «игрека» удобнее использовать $f(x)$.

Значение $x=1{,}97$ необходимо представить в виде $x_0+\Delta x$. Ну, тут легче, мы видим, что число 1,97 очень близко к «двойке», поэтому напрашивается $x_0=2$. И, следовательно: $\Delta x=-0{,}03$.

Вычислим значение функции в точке $x_0=2$:

$$f(x_0)=f(2)=\sqrt{4+2+3}=\sqrt{9}=3$$

Используя формулу $d\left[f(x_0)\right]=f'(x_0)\cdot\Delta x$, вычислим дифференциал в этой же точке.

Находим первую производную:

$$f'(x)=(\sqrt{x^2+x+3})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+3}}\cdot(x^2+x+3)'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}$$

И её значение в точке $x_0=2$:

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{4+1}{2\sqrt{2^2+2+3}} = \frac{5}{2\cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Таким образом, дифференциал в точке:

$$d\left[f(2)\right] = f'(2)\cdot \Delta x = \frac{5}{6}\cdot(-0{,}03) = -0{,}025$$

В результате, по формуле $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + d\left[f(x_0)\right]$:

$$f(1{,}97) \approx 3 - 0{,}025 = 2{,}975$$

Вторая часть задания состоит в том, чтобы найти абсолютную и относительную погрешность вычислений.

Абсолютная и относительная погрешность вычислений

Абсолютная погрешность вычислений находится по формуле: $\Delta = \left|\textit{ТочноеЗначение} - \textit{ПриближенноеЗначение}\right|$

Знак модуля показывает, что нам без разницы, какое значение больше, а какое меньше. Важно, *насколько далеко* приближенный результат отклонился от точного значения в ту или иную сторону.

Относительная погрешность вычислений находится по формуле:

$$\delta = \frac{\left|\textit{ТочноеЗначение} - \textit{ПриближенноеЗначение}\right|}{\textit{ТочноеЗначение}}\cdot 100\%$$

, или, то же самое:

$$\delta = \frac{\Delta}{\textit{ТочноеЗначение}}\cdot 100\%$$

Относительная погрешность показывает, *на сколько процентов* приближенный результат отклонился от точного значения. Существует версия формулы и без домножения на 100%, но на практике я почти всегда вижу вышеприведенный вариант с процентами.

После короткой справки вернемся к нашей задаче, в которой мы вычислили приближенное значение функции $f(1{,}97) \approx 2{,}975$ с помощью дифференциала.

Вычислим точное значение функции с помощью микрокалькулятора: $f(1{,}97)=\sqrt{(1{,}97)^2+1{,}97+3}=2{,}975046218$, строго говоря, значение всё равно приближенное, но мы будем считать его точным. Такие уж задачи встречаются.

Вычислим абсолютную погрешность:

$$\Delta=|2{,}975046218-2{,}975|\approx 0{,}000046$$

Вычислим относительную погрешность:

$$\delta=\frac{|2{,}975046218-2{,}975|}{2{,}975046218}\cdot 100\%\approx 0{,}0016\%,$$

получены тысячные доли процента, таким образом, дифференциал обеспечил просто отличное приближение.

Ответ: $f(1{,}97)\approx 2{,}975$, абсолютная погрешность вычислений $\Delta\approx 0{,}000046$, относительная погрешность вычислений $\delta\approx 0{,}0016\%$

Геометрический смысл производной

Пример

Задание. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=x^3-x$ в точке $x_0=0$.

Решение. Из геометрического смысла производной получаем, что производная функции $y=f(x)$, вычисленная при заданном значении x_0, равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ox и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, то есть

$$f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$$

Найдем производную от заданной функции:

$$f'(x)=\left(x^3-x\right)'=3x^2-1$$

в точке $x_0=0$ имеем:

$$f'(0)=-1$$

Тогда окончательно получим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = -1$$

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = -1$

Механический смысл производной

Пример

Задание. Точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна скорость в момент времени $t = 1$?

Решение. Найдем скорость точки как первую производную от перемещения:

$$v(t) = x'(t) = \left(2t^3 - 3t\right)' = \left(2t^3\right)' - (3t)' = 2 \cdot \left(t^3\right)' - 3 \cdot (t)' = 2 \cdot 3t^2 - 3 \cdot 1 = 6t^2 - 3$$

В момент времени $t = 1$ скорость равна

$$v(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 6 - 3 = 3$$

Ответ. $v(1) = 3$

Уравнение касательной, нормали и угол между прямыми

Пример

Задание. Записать уравнение касательной к графику функции $y = x^2 \ln x$ в точке $x_0 = e$

Решение. Найдем значение функции в заданной точке:

$$y(e) = e^2 \ln e = e^2$$

Найдем производную заданной функции по правилу дифференцирования произведения:

$$y' = \left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \ln x + x^2 (\ln x)'$$

$$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2x \ln x + x$$

Вычислим её значение в заданной точке

$$y'(e) = 2e \ln e + e = 2e \cdot 1 + e = 3e$$

Используя формулу

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

запишем уравнение касательной:

$$y = e^2 + 3e(x - e)$$

$$y = e^2 + 3ex - 3e^2$$

$$y = 3ex - 2e^2$$

Ответ. Уравнение касательной: $y = 3ex - 2e^2$

Производные высших порядков

Пример

Задание. Найти производную второго порядка от функции $y(x) = \sin^3 x$

Решение. Находим первую производную как производную сложной функции:

$$y'(x) = \left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$$

Вторую производную находим как от произведения, предварительно вынеся по правилам дифференцирования коэффициент 3 за знак производной. Также будем учитывать, что первый множитель - $\sin^2 x$ - есть сложной функцией:

$$y''(x) = (y'(x))' = \left(3\sin^2 x \cos x\right)' = 3\left(\sin^2 x \cos x\right)' =$$

$$= 3\left[\left(\sin^2 x\right)' \cos x + \sin^2 x\,(\cos x)'\right] =$$

$$= 3\left[2\sin x \cdot (\sin x)' \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x)\right] =$$

$$= 3\left(2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x - \sin^3 x\right) = 3\left(\sin 2x \cos x - \sin^3 x\right)$$

Ответ. $y''(x) = 3\left(\sin 2x \cos x - \sin^3 x\right)$

Механическое смысл второй производной

Пример

Задание. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $s(t) = -0,5t^3 + t + 2$ (м). Найти ускорение $a(t)$ точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Ускорение заданной точки найдем, взяв вторую производную от перемещения по времени:

$$a(t) = s''(t)$$

Первая производная

$$s'(t) = \left(-0,5t^3 + t + 2\right)' = \left(-0,5t^3\right)' + (t)' + (2)' =$$

$$= -1,5t^2 + 1 + 0 = -1,5t^2 + 1 \text{ (м/с)}$$

вторая производная

$$a(t) = s''(t) = \left(-1,5t^2 + 1\right)' = \left(-1,5t^2\right)' + (1)' = -3t \text{ (м/с}^2\text{)}$$

В момент времени $t = 2$ с

$$a(2) = -3 \cdot 2 = -6 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Ответ. $a(2) = -6$ (м/с^2)

Дифференциалы высших порядков

Пример

Задание. Найти дифференциал третьего порядка функции $y(x) = 4x^3 - 12x + 5$

Решение. По формуле

$$d^3y = y'''(x)dx^3$$

Найдем третью производную заданной функции:

$$y'(x) = (4x^3 - 12x + 5)' = (4x^3)' - (12x)' + (5)' =$$

$$4(x^3)' - 12(x)' + 0 = 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 1 = 12x^2 - 12$$

$$y''(x) = (y'(x))' = (12x^2 - 12)' = (12x^2)' - (12)' =$$

$$= 12(x^2)' - 0 = 12 \cdot 2x = 24x$$

$$y'''(x) = (y''(x))' = (24x)' = 24(x)' = 24$$

Тогда

$$d^3y = 24dx^3$$

Ответ. $d^3y = 24dx^3$

Производная функции, заданной неявно

Пример

Задание. Найти производную неявно заданной функции:

$$2x^3+4y^2-2xy^3+5x^2y-2y=-1$$

Решение. Продифференцируем обе части данного выражения по x, учитывая, что y функция от x и производная от неё берется как от сложной функции.

$$\left(2x^3+4y^2-2xy^3+5x^2y-2y\right)'=(-1)'$$

$$6x^2+8yy'-\left(2y^3+6xy^2y'\right)+\left(10xy+5x^2y'\right)-2y'=0$$

Выразим из этого равенства y'

$$6x^2+8yy'-2y^3-6xy^2y'+10xy+5x^2y'-2y'=0$$

$$8yy'-6xy^2y'+5x^2y'-2y'=-6x^2+2y^3-10xy$$

$$y'\left(8y-6xy^2+5x^2-2\right)=-6x^2+2y^3-10xy$$

$$y'=\frac{-6x^2+2y^3-10xy}{8y-6xy^2+5x^2-2}$$

Ответ. $y'=\dfrac{-6x^2+2y^3-10xy}{8y-6xy^2+5x^2-2}$

Производная функции, заданной параметрически

Пример

Задание. Найти производную y'_x от функции заданной параметрически

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}$$

Решение. Найдем производные x'_t и y'_t

$$x'_t=(t-\sin t)'=(t)'-(\sin t)'=1-\cos t$$

$$y'_t=(2-\cos t)'=(2)'-(\cos t)'=0+\sin t=\sin t$$

Подставляя найденные значения x'_t и y'_t в формулу

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

получим

$$y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

Ответ. $y'_x = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$

Логарифмическое дифференцирование

Пример

Задание. Найти производную функции $y(x) = (\sin x)^x$

Решение. Применим логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y(x) = \ln(\sin x)^x$$

$$\ln y(x) = x \ln(\sin x)$$

Тогда, продифференцировав левую и правую часть, будем иметь:

$$(\ln y(x))' = (x \ln(\sin x))'$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (x)' \cdot \ln\sin x + x \cdot (\ln\sin x)' =$$

$$= 1 \cdot \ln\sin x + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \ln\sin x + \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x =$$

$$= \ln\sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x$$

Отсюда получаем, что

$$y'(x) = y(x)(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x) = (\sin x)^x \cdot (\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$$

Ответ. $y'(x) = (\sin x)^x \cdot (\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)$

Формулы Маклорена и Тейлора

Основные ссылки - теоретический материал и примеры решений (10 шт).

Пример

Задание. Разложить в ряд Тейлора функцию $y(x)=x^2+4x-1$ в точке $x_0=2$.

Решение. Найдем производные:

$$y'(x)=(x^2+4x-1)'=2x+4,\ y'(2)=2\cdot2+4=8$$

$$y''(x)=(2x+4)'=2,\ y''(2)=2$$

$$y'''(x)=(2)'=0,\ldots$$

Итак, $y^{(n)}(x)=0$, $y^{(n)}(2)=0$, $n\geq3$. Значение функции в точке

$$y(2)=2^2+4\cdot2-1=11$$

Таким образом,

$$y(x)=11+\frac{8}{1!}(x-2)+\frac{2}{2!}(x-2)^3+\frac{0}{3!}(x-2)^3+0+\ldots=$$

$$=11+8(x-2)+(x-2)^2$$

Ответ. $y(x)=11+8(x-2)+(x-2)^2$

Задание. Разложить по степеням $(x-1)$ функцию $y=x^4-3x^2+2x+2$

Решение. Воспользуемся формулой Тейлора, для этого вычислим значение функции и ее производных в точке $x_0=1$:

$$y(1)=1^4-3\cdot1^2+2\cdot1+2=2$$

$$y'(1)=\left(x^3-3x^2+2x+2\right)'\Big|_{x=1}=\left(4x^3-6x+2\right)\Big|_{x=1}=$$

$$=4\cdot1^3-6\cdot1+2=0$$

$$y''(1)=(12x^2-6)\Big|_{x=1}=12\cdot1^2-6=6$$

$$y'''(1) = (24x)\Big|_{x=1} = 24 \cdot 1 = 24$$

$$y^{IV}(1) = (24)\Big|_{x=1} = 24$$

$$y^{V}(1) = 0$$

Таким образом, получили, что $y^{(n)}(1) = 0, n \geq 5$.

Подставляя все найденные значения в формулу Тейлора, получим:

$$y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2 =$$

$$= 2 + \frac{0}{1!} \cdot (x-1) + \frac{6}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{24}{3!} \cdot (x-1)^3 + \frac{24}{4!} \cdot (x-1)^4 =$$

$$= 2 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

Ответ. $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$

При построении графика функции необходимо провести ее предварительное исследование. Примерная схема исследования функции с целью построения ее графика имеет следующую структуру:

1.Область определения $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ функции.

2.Четность, нечетность функции.

3.Точки пересечения с осями.

4.Асимптоты функции.

5.Экстремумы и интервалы монотонности.

6.Точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости.

7.Сводная таблица.

Пример

Задание. Исследовать функцию $y(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$ и построить ее график.

Решение. 1) Область определения функции.

$D(y): x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

2) Четность, нечетность

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-(-x)-1}{(-x)^2-2\cdot(-x)}=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x}\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}$$

Функция общего вида.
3) Точки пересечения с осями.
а) с осью $Ox: y=0$:

$$\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}=0\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

то есть точки $A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right), A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$

б) с осью $Oy: x=0$: в данной точке функция неопределенна.
4) Асимптоты.
а) вертикальные: прямые $x=0$ и $x=2$ - вертикальные асимптоты.
б) горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}=1$$

то есть прямая $y=1$ - горизонтальная асимптота.
в) наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{x(x^2-2x)}=0$$

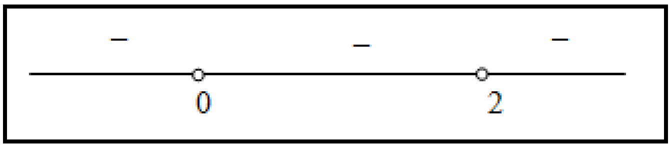
Таким образом, наклонных асимптот нет.
5) Критические точки функции, интервалы возрастания, убывания.

$$y'=\left(\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}\right)'=\frac{(2x-1)(x^2-2x)-(x^2-x-1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-4x^2-x^2+2x-(2x^3-2x^2-2x^2+2x-2x+2)}{(x^2-2x)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-5x^2+2x-2x^3+4x^2-2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}$$

Найдем точки, в которых первая производная равна нулю или не существует: $y' \neq 0$ для любого x из области определения функции; y' не существует при $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.



Таким образом, функция убывает на всей области существования. Точек экстремума нет.

6) Точки перегиба, интервалы выпуклости, вогнутости.

$$y'' = (y')' = \left(\frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}\right)' =$$

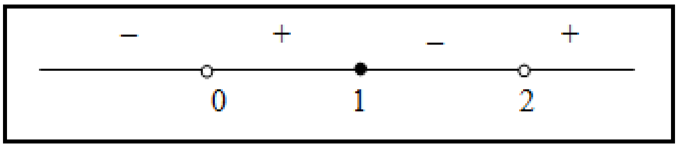
$$= \frac{(-2x+2)(x^2-2x)^2 - (-x^2+2x-2)\cdot 2(x^2-2x)(2x-2)}{(x^2-2x)^4} =$$

$$= \frac{(-2x+2)(x^2-2x) - (-x^2+2x-2)\cdot 2(2x-2)}{(x^2-2x)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3+6x^2-4x+4x^3-12x^2+16x-8}{(x^2-2x)^3} =$$

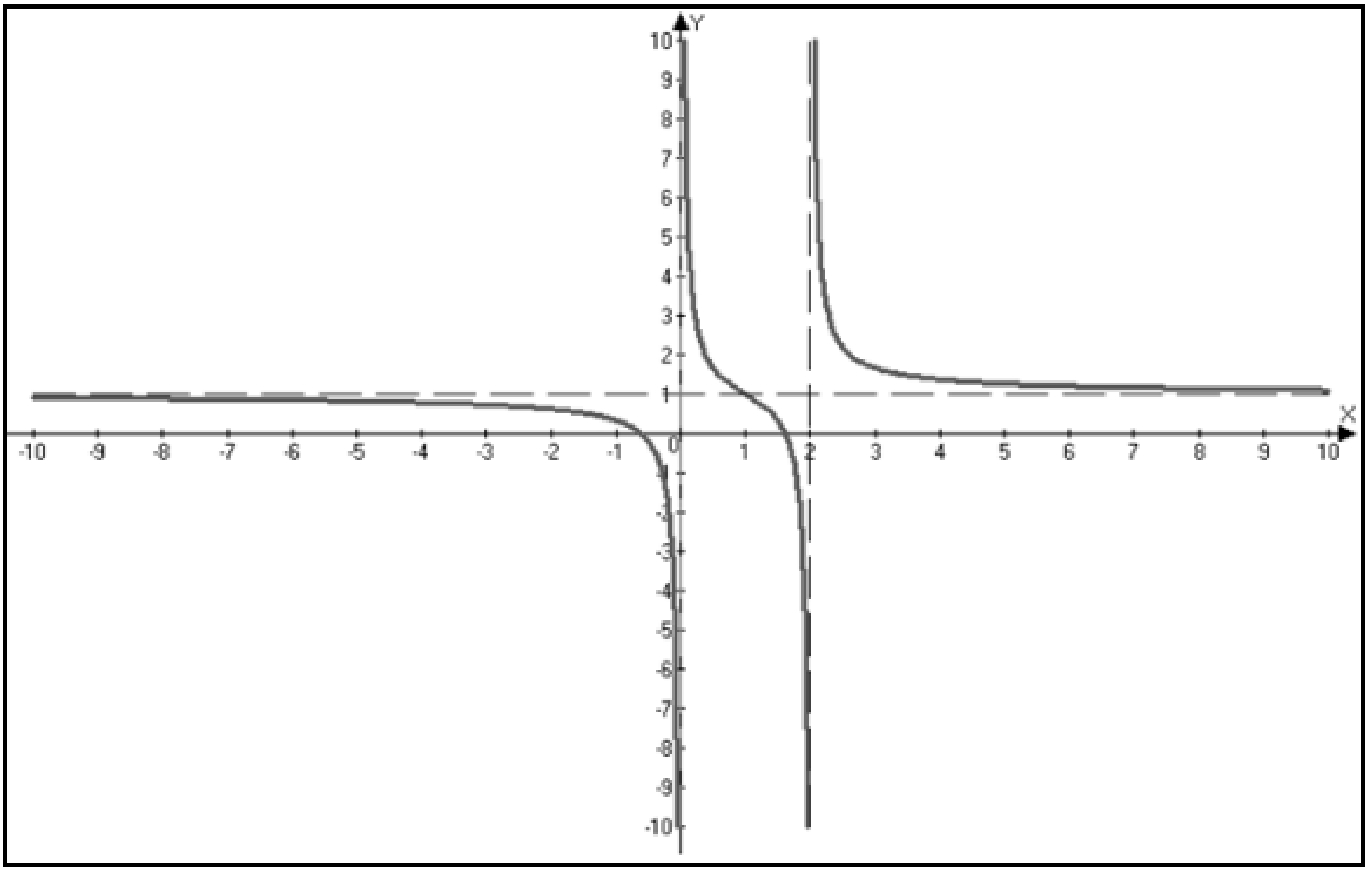
$$= \frac{2x^3-6x^2+12x-8}{(x^2-2x)^3}$$

Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует: $y'' = 0 : x = 1$; при $x = 0$ и $x = 2$ вторая производная не существует.



Таким образом, на промежутках $(0;1)$ и $(2;+\infty)$ функция вогнута, а на промежутках $(-\infty;0)$ и $(1;2)$ - выпукла. Так как при переходе через точку $x = 1$ вторая производная поменяла знак, то эта точка является точкой перегиба.

7) Эскиз графика



Пример

Провести полное исследование функции и построить её график.

$$y = f(x) = xe^{-x^2}$$

Решение:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой: $D(f) = \Re$.

$f(-x) = -xe^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -(xe^{-x^2}) = -f(x)$, значит, данная функция является нечетной, её график симметричен относительно начала координат.

Очевидно, что функция непериодическая.

2) Асимптоты, поведение функции на бесконечности.

Так как функция непрерывна на $\Re$, то вертикальные асимптоты отсутствуют

Для функции, содержащей экспоненту, типично **раздельное** исследование «плюс» и «минус бесконечности», график симметричен – либо и слева и справа есть асимптота, либо её нет. Поэтому оба бесконечных предела можно оформить под единой записью. В ходе решения используем <u>***правило Лопиталя:***</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(xe^{-x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

Прямая $y=0$ (ось OX) является горизонтальной асимптотой графика при $x\to\pm\infty$.

Обратите внимание, как я хитро избежал полного алгоритма нахождения наклонной асимптоты: предел $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ вполне легален и проясняет поведение функции на бесконечности, а горизонтальная асимптота обнаружилась «как бы заодно».

Из непрерывности на $\Re$ и существования горизонтальной асимптоты следует тот факт, что функция *ограничена сверху* и *ограничена снизу*.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства.

Здесь тоже сокращаем решение:

График $f(x) = xe^{-x^2}$ проходит через начало координат.

Других точек пересечения с координатными осями нет. Более того, интервалы знакопостоянства очевидны, и ось можно не чертить: $e^{-x^2} > 0$, а значит, знак функции зависит только от «икса»:

$f(x) = xe^{-x^2} > 0$, если $x > 0$;

$f(x) < 0$, если $x < 0$.

! Настоятельно рекомендую оформлять черновой шаблон графика по ходу исследования!

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = (xe^{-x^2})' = (x)'\cdot e^{-x^2} + x\cdot(e^{-x^2})' = e^{-x^2} + x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2} = 0$$

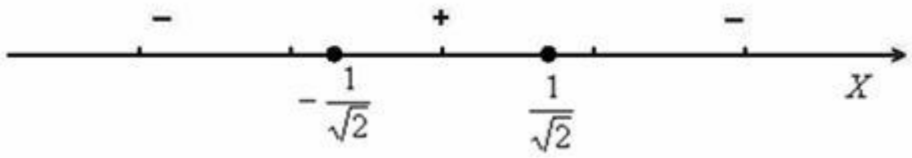
$$1-2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}71$ – критические точки.

Точки симметричны относительно нуля, как оно и должно быть. Определим знаки производной:



Функция возрастает на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и убывает на интервалах $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$

В точке $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ функция достигает максимума:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2e}}\approx 0{,}43.$$

В силу свойства $f(-x)=-f(x)$ (нечётности функции) минимум можно не вычислять:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$$

Поскольку функция убывает на интервале $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то, очевидно, на «минус бесконечности» график расположен **под** своей асимптотой. На интервале $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ функция тоже убывает, но здесь всё наоборот – после перехода через точку максимума $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ линия приближается к оси OX уже сверху.

Из вышесказанного также следует, что график функции является выпуклым на «минус бесконечности» и вогнутым на «плюс бесконечности».

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=((1-2x^2)e^{-x^2})'=(1-2x^2)'\cdot e^{-x^2}+(1-2x^2)\cdot(e^{-x^2})'=$$
$$=-4xe^{-x^2}+(1-2x^2)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2x(2+1-2x^2)e^{-x^2}=-2x(3-2x^2)e^{-x^2}=0$$

$x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1{,}2$ – критические точки.

Симметрия точек сохраняется, и, скорее всего, мы не ошибаемся.

Определим знаки $f''(x)$:

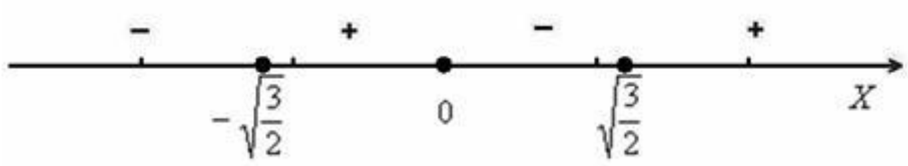


График функции является выпуклым на $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ и вогнутым на $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right)$.

Выпуклость/вогнутость на крайних интервалах подтвердилась.

Во всех критических точках существуют перегибы графика. Найдём ординаты точек перегиба, при этом снова сократим количество вычислений, используя нечётность функции:

$$f(0) = 0$$

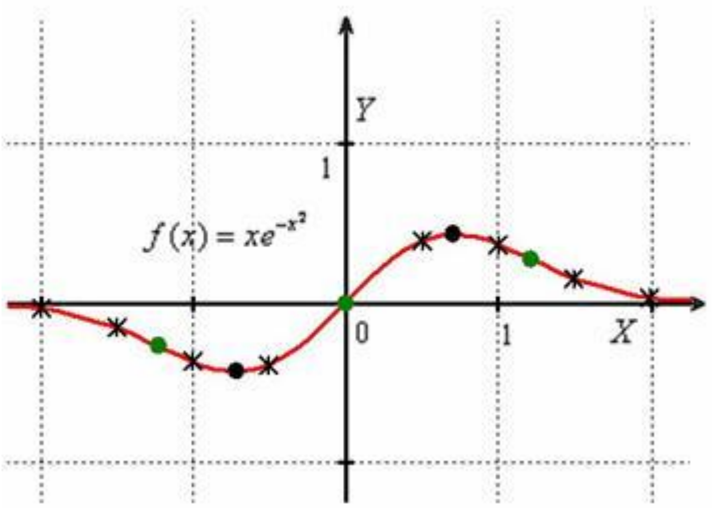
$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2e^3}} \approx 0{,}27$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2e^3}}$$

6) Дополнительные точки целесообразно рассчитать только для правой полуплоскости:

x	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0,39	0,37	0,16	0,04

Выполним чертёж:



Пример. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = x^3 - \frac{x^4}{4}$

Решение: проведём исследование функции:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, $D(f) = \Re$.

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{(-x)^4}{4} = -x^3 - \frac{x^4}{4}$$

$$f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x),$$

значит, данная функция не является четной или нечетной.

Функция непериодическая.

2) Асимптоты графика, поведение функции на бесконечности.

Так как функция непрерывна на $\Re$, то вертикальные асимптоты отсутствуют.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3 - \frac{x^4}{4}}{x} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^2 - \frac{x^3}{4} \right) = \mp\infty$$

Значит, наклонные асимптоты также отсутствуют.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^3 - \frac{x^4}{4} \right) = -\infty$$

функция не ограничена снизу.

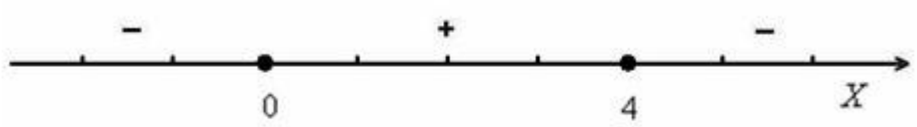
3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График $f(x)$ проходит через начало координат.

С осью OX: $f(x) = x^3 - \frac{x^4}{4} = x^3 \cdot (1 - \frac{x}{4}) = 0$

$x = 0,\ x = 4$

Определим знаки $f(x)$:



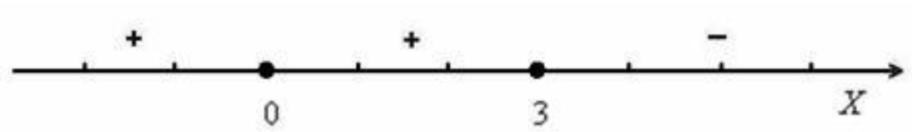
$f(x) > 0$, если $x \in (0; 4)$,
$f(x) < 0$, если $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)' = 3x^2 - x^3 = x^2(3 - x) = 0$$

$x = 0, x = 3$ – критические точки.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$ и убывает на $(3; +\infty)$.

В точке $x = 3$ функция достигает максимума:

$$f(3) = 27 - \frac{81}{4} = 6\frac{3}{4}$$

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x) = (3x^2 - x^3)' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x) = 0$$

$x = 0, x = 2$ – критические точки.

Определим знаки $f''(x)$:

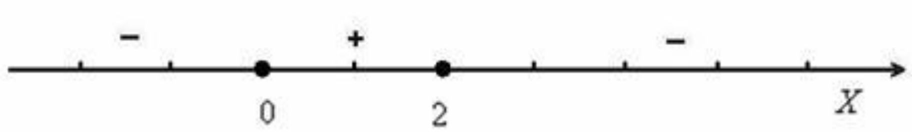


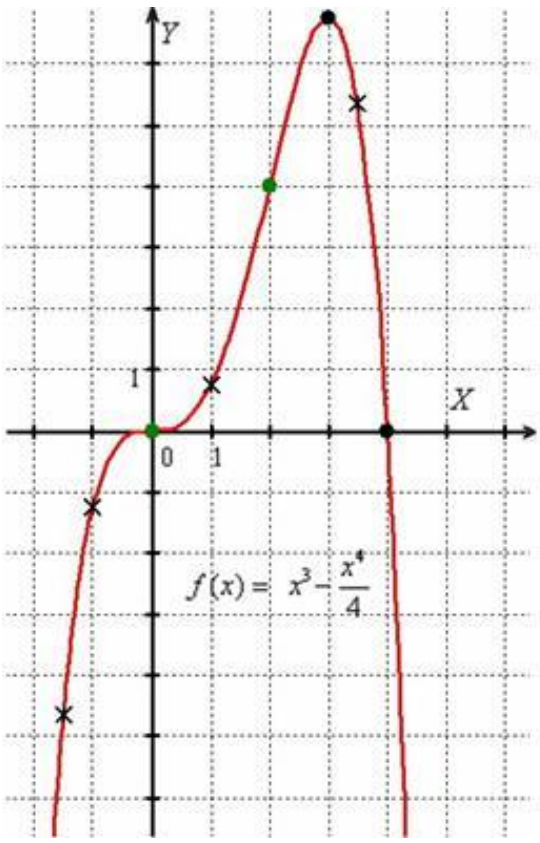
График функции является выпуклым на $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и вогнутым на $(0; 2)$.

В обеих критических точках существуют перегибы графика.
$f(0)=0, \quad f(2)=8-4=4$

6) Найдем дополнительные точки:

x	$-1{,}5$	-1	1	$3{,}5$	$4{,}5$
$f(x)$	$-4{,}6$	$-1{,}3$	$0{,}7$	$5{,}4$	$-11{,}4$

Выполним чертёж:



Пример : $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

Решение: проведем исследование функции:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, $D(f)=\Re$.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+3}=\frac{x^2}{x^2+3}=f(x)$$

$f(-x)=f(x)$, значит, данная функция является четной, ее график симметричен относительно оси ординат.

Очевидно, что функция непериодическая.

2) Асимптоты, поведение функции на бесконечности.
Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальные асимптоты отсутствуют.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2+3}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}^{\to 0}} = 1$$

Прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x\to\pm\infty$.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции проходит через начало координат.

$f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}>0$ на всей области определения.

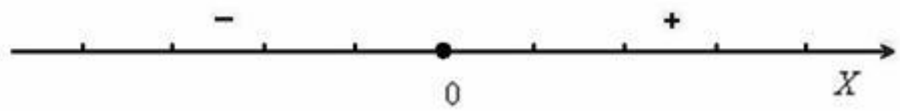
4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot(x^2+3)-x^2\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{2x\cdot(x^2+3)-x^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2+3-x^2)}{(x^2+3)^2} = \frac{6x}{(x^2+3)^2} = 0$$

$x=0$ – критическая точка.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(0;+\infty)$ и убывает на $(-\infty;0)$.

В точке $x=0$ функция достигает минимума: $f(0)=0$.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x) = 6\cdot\left(\frac{x}{(x^2+3)^2}\right)' = 6\cdot\frac{(x)'\cdot(x^2+3)^2 - x\cdot((x^2+3)^2)'}{(x^2+3)^4} = 6\cdot\frac{(x^2+3)^2 - x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4} =$$

$$= 6\cdot\frac{x^2+3-4x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{6(3-3x^2)}{(x^2+3)^3} = \frac{18(1-x^2)}{(x^2+3)^3} = 0$$

$x=\pm 1$ – критические точки.

Определим знаки $f''(x)$:

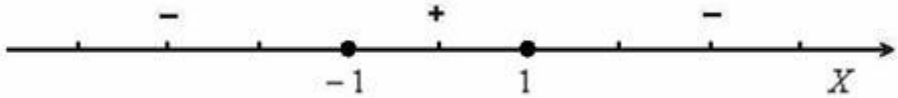
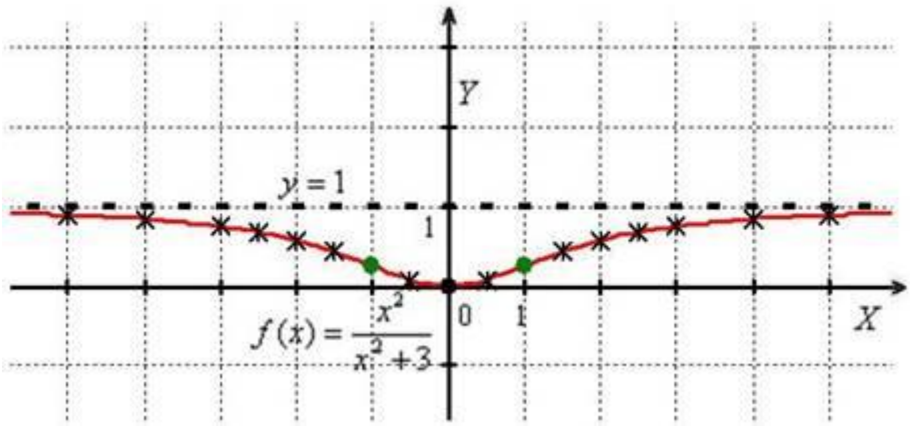


График $f(x)$ является выпуклым на $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ и вогнутым на $(-1;1)$.

В обеих критических точках существуют перегибы графика: $f(\pm 1) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$.

6) Найдем дополнительные точки и выполним чертёж:

x	0,5	1,5	2	2,5	3	4	5	6
$f(x)$	0,08	0,43	0,57	0,68	0,75	0,84	0,89	0,92



Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке [a;b].

Запишем алгоритм, позволяющий находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1.Находим область определения функции и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок [a;b].

2.Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке [a;b] (обычно такие точки встечаются у функций с аргументом под знаком модуля и у степенных функций с дробно-рациональным показателем). Если таких точек нет, то переходим к следующему пункту.

3.Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок [a;b]. Для этого,находим производную функции, приравниваем ее к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни. Если стационарных точек нет или ни одна из них не попадает в отрезок, то переходим к следующему пункту.

4.Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при x=a и x=b.

5.Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее - они и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции соответственно.

Разберем алгоритм при решении примера на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

- на отрезке *[1;4]*;
- на отрезке *[-4;-1]*.

Решение.

Областью определения функции является все множество действительных чисел, за исключением нуля, то есть $D(y)\colon \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Оба отрезка попадают в область определения.

Находим производную функции по правилу дифференцирования дроби:

$$y' = \left(\frac{x^3 + 4}{x^2}\right)' = \frac{(x^3 + 4)' \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot (x^2)'}{x^4} =$$
$$= \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

Очевидно, производная функции существует во всех точках отрезков *[1;4]* и *[-4;-1]*.

Стационарные точки определим из уравнения

$$\frac{x^3 - 8}{x^3} = 0 .$$

Единственным действительным корнем является *x=2*. Эта стационарная точка попадает в первый отрезок *[1;4]*.

Для первого случая вычисляем значения функции на концах отрезка и в стационарной точке, то есть при *x=1*, *x=2* и *x=4*:

$$y(1) = \frac{1^3 + 4}{1^2} = 5$$

$$y(2) = \frac{2^3 + 4}{2^2} = 3$$

$$y(4) = \frac{4^3 + 4}{4^2} = 4\frac{1}{4}$$

Следовательно, наибольшее значение функции

$\max\limits_{x\in[1;\,4]} y = y(1) = 5$ достигается при *x=1*, а наименьшее значение

$\min\limits_{x\in[1;\,4]} y = y(2) = 3$ – при *x=2*.

Для второго случая вычисляем значения функции лишь на концах отрезка *[-4;-1]* (так как он не содержит ни одной стационарной точки):

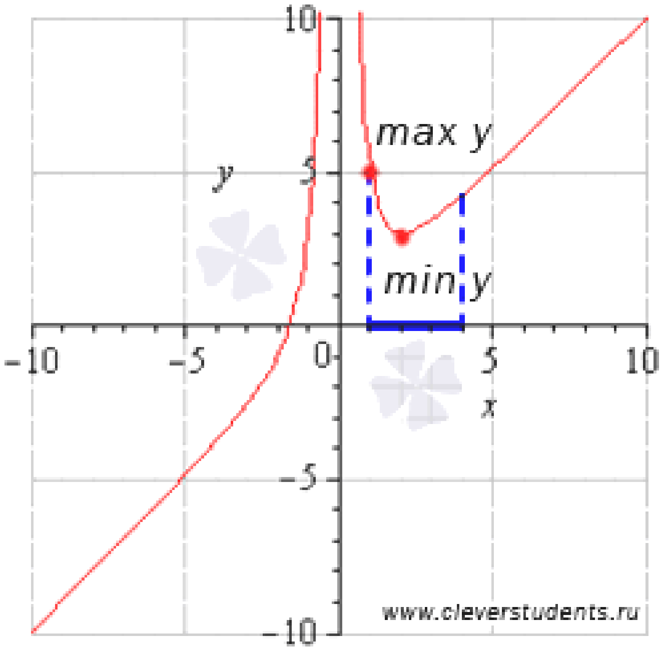
$$y(-4) = \frac{(-4)^3 + 4}{(-4)^2} = -3\frac{3}{4}$$

$$y(-1) = \frac{(-1)^3 + 4}{(-1)^2} = 3$$

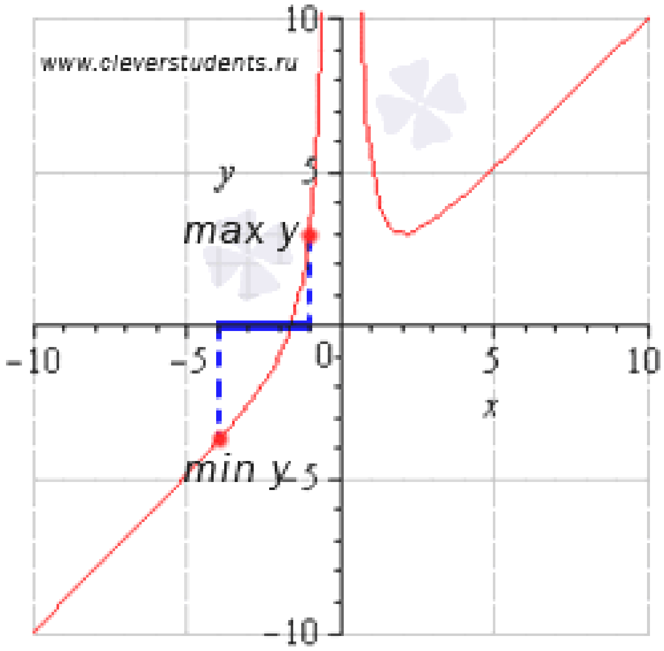
Следовательно,

$$\max_{x\in[-4;\,-1]} y = y(-1) = 3, \quad \min_{x\in[-4;\,-1]} y = y(-4) = -3\frac{3}{4}.$$

Графическая иллюстрация



для отрезка [1; 4]



для отрезка [-4; -1]

Расчетно-графическая работа

I

Найти производные функции

1. $a) y = x^2 + \frac{1}{x} - \sqrt{x^3}$; $b) y = \frac{Sin^2 3x}{\sqrt{x}} + \ln \sqrt[3]{x}$; $c) xy^2 + 6Siny - e^{x+y} = 0$

2. $a) y = x^5 + \frac{1}{x^6} - \sqrt{x^3}$; $b) y = \frac{tg^2 3x}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$; $c) y^3 + x^2 + \ln(x-y) - 5 = 0$

3. $a) y = 2x^5 + \frac{1}{x^3} - \ln x$; $b) y = \frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{x+1}} + Sin\sqrt{x}$; $c) y = (Sinx)^x$

4. $a) y = 3x^{-2} + \frac{1}{x^{-3}} - \sqrt[5]{x^2}$; $b) y = \frac{\arcsin^2 x}{\ln\sqrt{x+1}} + Sin4x$; $c) y = (Cosx)^x$

5. $a) y = x^{-5} + \frac{1}{x^{-3}} + \arccos x$; $b) y = \frac{\arcsin\ x}{\ln\sqrt{x^2+1}} + Sinx \cdot tgx$; $c) y = (\ln x)^x$

6. $a) y = (x^2 + \sqrt{x^3})^2$; $b) y = Sin3x \cdot tg^2 x$; $c) y = (tgx)^x$

7. $a) y = (3x^2 + \sqrt{x})^2$; $b) y = ctg3x \cdot tg^2 x$; $c) x = Sin^2 t, y = Cos^2 \frac{t}{2}$

8. $a) y = (3x^2 + x)^3$; $b) y = \ln x \cdot tg^2 x$; $c) y = \arccos 2t, x = \arcsin t$

9. $a) y = \sqrt{x} + x^4 + \frac{1}{x^5} - \ln x$; $b) y = x^5 \cdot tg^2 3x$; $c) y = \sqrt{t}, x = at$

10. $a) y = \frac{1}{x^2}\sqrt{x} + + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $b) y = \frac{3Sinx}{\sqrt{x+1}} + ctg\sqrt[3]{x}$; $c) y = (3x)^x$

11. $a) y = x\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$; $b) y = \frac{\arcsin^3 x}{\ln\sqrt{x^2+1}} + x \cdot tgx$; $c) y = 2t + 3, \quad y = \sqrt{t^2+1}$

12. $a) y = x\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$; $b) y = \frac{\ln^3 x}{\ln\sqrt{x^2+1}} + tg3x$; $c) 3\ln(x^2 + y) - 8y = 0$

13. $a) y = \sqrt{x}\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + x^{-3} + \frac{1}{x^6}$; $b) y = \frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}$; $c) y = (5x)^x$

14. $a) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} + x^{-3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $b) y = \frac{(\arcsin\ x - 3x)}{\sqrt{x^2+1}}$; $c) y = 3\sin 2t, \quad x = e^{t^2}$

15. $a) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x}} - 3x^{-3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $b) y = \frac{(x-3x)^4}{\sqrt{x^2+1}}$; $c) x = arctg(2t+1), \quad y = tg3t$

16. $a) y=\frac{x^4}{\sqrt[7]{x}}-\frac{1}{x}\cdot 3x^{-3}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; $b) y=\frac{(x-3x)^4}{\arccos 2x}$; $c) 3x^2+6y^2-8\sin^2 x+10y=0$

17. $a) y=e^x-\frac{1}{x}x^{-3}+\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$; $b) y=\frac{\ln^2\sqrt{x}}{\arccos 2x}$; $c) 5x^3-8y^3+3x=0$

18. $a) y=a^x-\frac{1}{x}+\frac{x^4}{\sqrt[3]{x^2}}$; $b) y=\sqrt{x+3}\cdot\arccos 5x$; $c) 2xy+6y^2-8\cos y-2y=0$

19. $a) y=-\frac{1}{x}-a^x+\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$; $b) y=\sqrt{x^2+3}\cdot 2\arccos^4 x$; $c) y=3Sin2t, x=2Cos3t$

20. $a) y=-\frac{1}{x^3}-\cos x+\frac{\sqrt{x^3}}{x}$; $b) y=3Sin^3 2x\sqrt{x\ \ +3}$; $c) 3\sin(x+2y)-\cos x=5$

II

Исследовать функции методами дифференциального исчисления и построить график

1. а) $y=2x^3-9x^2+12x-5$; б) $y=\ln(1+x^2)$

2. а) $y=x^3-6x^2+9x+1$; б) $y=\frac{3x^2}{x+1}$

3. а) $y=x^3-3x^2-9x+10$; б) $y=\frac{1}{e^x-1}$

4. а) $y=x^3+3x^2-9x-10$; б) $y=\frac{4x^3}{9(3-x^2)}$

5 . а) $y=x^3+6x^2+9x+2$; б) $y=x^3e^{-x}$

6. а) $y=2x^3-3x^2-12x+5$; б) $y=\frac{x^2+4}{x}$

7. а) $y=2x^3+3x^2-12x-8$; б) $y=\frac{e^x}{x}$

8 . а) $y=2x^3+9x^2+12x+7$; б) $y=\frac{x^2+5}{x+2}$

9 . а) $y=2x^3-15x^2+36x-32$; б) $y=\frac{x}{e^x}$

10. а) $y=2x^3-3x^2-36x+20$; б) $y=\frac{2}{x}+3x^2$

11. а) $y=2x^3+3x^2-36x-21$; б) $y=\frac{x^2+9}{x}$

12. а) $y=2x^3+15x^2+36x+32$; б) $y=\frac{2x}{e^x}$

13. а) $y=2x^3-15x^2+24x+4$; б) $y=\sqrt[3]{x}-2$

14. а) $y=2x^3-9x^2-24x+61$; б) $y=\frac{x^2+16}{x+3}$

15. а) $y=2x^3+9x^2-24x-56$; б) $y=x-\ln(x+1)$

16. а) $y=2x^3+15x^2+24x-2$; б) $y=\frac{x^2+25}{x}$

17. а) $y=x^3-9x^2+24x-18$; б) $y=2x\ln x$

18. а) $y=x^3-3x^2-24x+26$; б) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$

19 . а) $y=x^3+3x^2-24x-21$; б) $y=\frac{x^2+27}{x+3}$

20 . а) $y=x^3+9x^2+24x+17$: б) $y=\sqrt[3]{x^2}-x$

III

Вычислить приближенно результат округлить до двух знаков после запятой.

1. $\sqrt[4]{620}$

2. $tg47°$

3. Вычислить значение функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ в точке $x_0=1{,}04$

4. Вычислить значение функции $f(x) = \arcsin x$ в точке $x_0 = 0{,}08$

5. $\sqrt[3]{8{,}2}$

6. Вычислить значение функции $f(x) = x^3 + 3x - 1$ в точке $x_0 = 1{,}003$

7. $arctg\,1{,}01$

8. $\sqrt[3]{27{,}3}$

9. $\sin 32^0$

10. $\sqrt[4]{15{,}8}$

11. $arctg\,1{,}03$

12. $\lg 13$

13. $e^{2{,}02}$

14. $2^{3{,}3}$

15. $\arcsin 0{,}8$

16. $(3,02)^4 + (3,02)^3$

17. $\ln(tg\,47^0)$

18.Найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ в точке

$x = 1{,}03$

19. Найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt{5x - 1}$ в точке $x = 1{,}99$

20. $(8{,}2)^{2/3}$

IV
Решить задачу, используя понятия наибольшего наименьшего значения функции

1. Каковы должны быть размеры прямоугольника наибольшей площади, вписанного в круг радиуса 6 *см*?

2.Проволока длиной 40 *см* согнута в прямоугольник. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?.

3.Канал, ширина которого 27 *м*, под прямым углом впадает в другой канал шириной 64 *м*. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?

4.Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна S=24π $(м^2)$

5.Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна $l=\sqrt{3}(\text{м})$.

6.Турист идет из пункта А, находящегося на шоссейной дороге , в пункт В, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от А до В по прямой составляет 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт В, если его скорость передвижений по шоссе 5км/ч, а по бездорожью 3км/ч?

7.Объем правильной треугольной призмы равен $V=16(\text{м}^3)$. Какова должна быть длина стороны основания призмы, чтобы ее полная поверхность была наименьшей?

8.Открытый чан имеет форму цилиндра объема $V=27\pi(\text{м}^3)$. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

9.Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20*см*. Какова должна быть высота воронки, чтобы его объем был наибольшим?

10.Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 *(см*^{3}*),* причем стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

11.Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

12.Требуется изготовить полотняный шатер, имеющий форму прямого кругового конуса заданной вместимости $V=\frac{9}{2}\pi(\text{м}^3)$.Каковы должны быть размеры конуса(высота и радиус основания), чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

13.Из прямоугольного листа жести размером 24×9*см* требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наименьшей?

14.Найти прямоугольник наибольшей площади, если сумма длин его катета и гипотенузы постоянна и равна 4(см).

15.Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

16. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

17.Какое положительное число, будучи сложенным с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

18.Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 *см*. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь бала наибольшей?

19. Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой 72 *м*. Каковы должны быть размеры огорода, чтобы его площадь была максимальной?

20.Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 $м^2$ и разделить этот участок забором на две конгруэнтные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

Литература

1. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для сред. проф. учеб. заведений М.: Высш. шк., 2009

2. Карасев А.И. и др. Курс высшей математики для экон. вузов (в 2-х частях). Ч. 1-2 М.: Высш. Школа, 1982

3. Н.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов М.: Высш. шк., 1997

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике М.: Наука, 1978

5.Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. Т. 1: учеб. пособие для втузов М.: Интеграл-Пресс, 2002

6. Фихтенгольц Г.М. Математический анализ: учебник Лань, 2011

7. Шипачёв В.С. Высшая математика: учеб. Для вузов М.: Высш. Школа, 1998

Учебное издание

Рыжик Валентина Николаевна

«ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 19.02.2015 г. Формат 60 х 84 1/16.
Бумага офсетная. Усл. п. л.3,02 . Тираж 50 экз. Изд. № 2904.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365, Брянская обл. Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА