Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Брасовский промышленно экономический техникум

Е.Г. Чапурина

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие по изучению дисциплины

Брянская область 2015

УДК 372.862
ББК 74.57
Ч 19

Чапурина, Е.Г. **Техническая механика**: учебное пособие по изучению дисциплины / Е.Г. Чапурина. – Локоть: Брасовский филиал ФГБОУ ВО Брянский ГАУ, 2015.- 64 с.

Учебное пособие по изучению дисциплины соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений»и предназначено для освоения студентами учебной дисциплины «Техническая механика». Лаконичное и четкое изложение материала, продуманный отбор необходимых тем позволяют быстро и качественно подготовиться к урокам и экзаменам по данной учебной дисциплине.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений»

Рецензенты:
Астахова О.М., преподаватель технических дисциплин (Брасовский филиал ФГБОУ ВО Брянский ГАУ)
Другова Г.Е., методист (Брасовский филиал ФГБОУ ВО Брянский ГАУ)

Рекомендовано к изданию решением учебно-методическим советом филиала ФГБОУ ВО «Брянский аграрный университет» - Брасовский промышленно-экономический техникум от 25.05.2015 года, протокол № 5.

Содержание: **стр.**

Раздел 1. Теоретическая механика

Тема 1.1. Основные понятия и аксиомы статики

Теоретическая механика — наука о механическом движении материальных твердых тел и их взаимодействии. Механическое движение понимается как перемещение тела в пространстве и во времени по отношению к другим телам, в частности к Земле.

Для удобства изучения теоретическую механику подразделяют на статику, кинематику и динамику.

Статика изучает условия равновесия тел под действием сил.

Кинематика рассматривает движение тел как перемещение в пространстве; характеристики тел и причины, вызывающие движение, не рассматриваются.

Динамика изучает движение тел под действием сил.

Понятие о силе и системе сил

Сила — это мера механического взаимодействия материальных тел междусобой. Взаимодействие характеризуется величиной и направлением, т.е. сила есть величина векторная, характеризующаяся точкой приложения , направлением (линией действия), величиной (модулем) . Силу измеряют в ньютонах.Силы, действующие на тело (или систему тел), делятся на внешние и внутренние. Внешние силы бывают активные и реактивные. Активные силы вызывают перемещение тела, реактивные стремятся противодействовать перемещению тела под действием внешних сил. Внутренние силы возникают в теле под действием внешних сил. Совокупность сил, действующих на какое-либо тело, называют системой сил.

Эквивалентная система сил — система сил, действующая так же, как заданная.

Уравновешенной (эквивалентной нулю) системой сил называется такая система, которая, будучи приложенной к телу, не изменяет его состояния. Систему сил, действующих на тело, можно заменить одной равнодействующей, действующей так, как система сил.

Аксиомы статики В результате обобщения человеческого опыта были установлены общие закономерности механического движения, выраженные в виде законов и теорем. Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений. Эти положения называют аксиомами статики.

Первая аксиома

Под действием уравновешенной системы сил абсолютно твердое тело или материальная точка находятся в равновесии или движутся равномерно и прямолинейно (закон инерции).

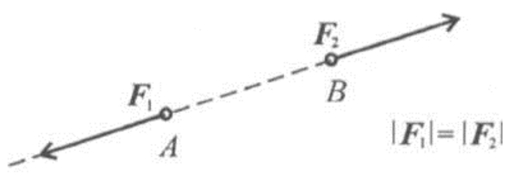


Рис. 1.1

Вторая аксиома

Две силы, равные по модулю и направленные по одной прямой в разные стороны, уравновешиваются (рис. 1.1).

Третья аксиома

Не нарушая механического состояния тела, можно добавить или убрать уравновешенную систему сил (принцип отбрасывания системы сил, эквивалентной нулю) (рис. 1.2).

[1)] Векторные величины обозначаются полужирным шрифтом, скалярные величины – обычным.

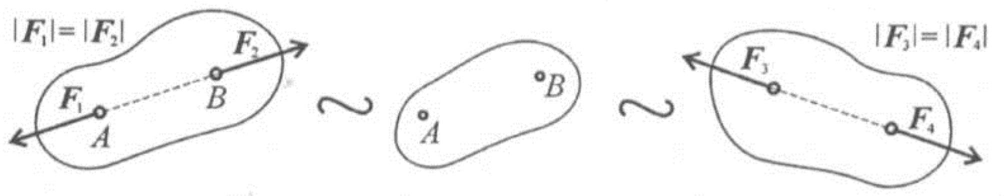


Рис. 1.2

Четвертая аксиома (правило параллелограмма сил)

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.3).

Вместо параллелограмма можно построить треугольник сил: силы вычерчивают одну за другой в любом порядке; равнодействующая двух сил соединяет начало первой силы с концом второй.

Пятая аксиома

При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие (рис. 1.4).

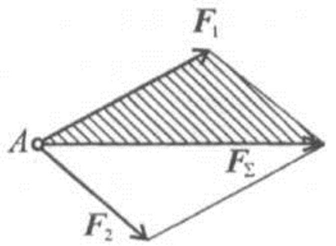


Рис. 1.3

Силы действующие и противодействующие всегда приложены к разным телам, поэтому они не уравновешиваются.

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равныпо модулю и направлены вдоль одной прямой в разные стороны.

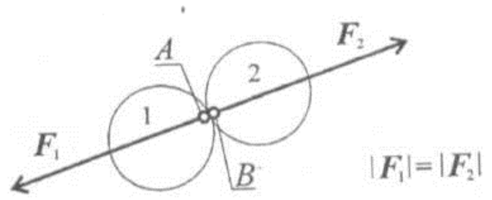


Рис. 1.4

Связи и реакции связей Все законы и теоремы статики справедливы для свободного твердого тела. Все тела делятся на свободные и связанные. Свободные тела — тела, перемещение которых не ограничено. Связанные тела — тела, перемещение которых ограничено другими телами.

Тела, ограничивающие перемещение других тел, называют связями.

Силы, действующие от связей и препятствующие перемещению, называют реакциями связей.

Реакция связи всегда направлена с той стороны, куда нельзя перемещаться.

Всякое связанное тело можно представить свободным, если связи заменить их реакциями (принцип освобождения от связей).Все связи можно разделить на несколько типов.

Связь — гладкая опора (без трения)

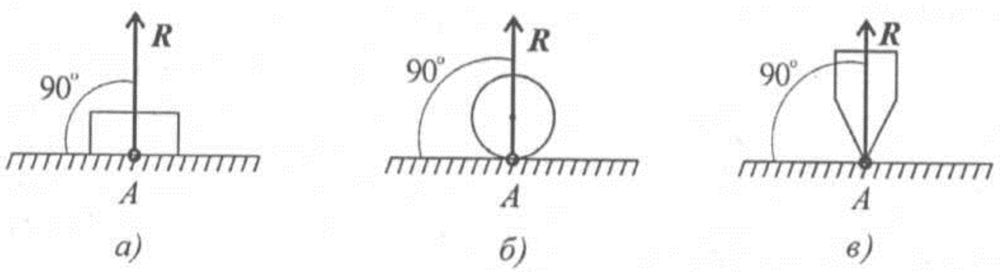


Рис. 1.5

Реакция опоры приложена в точке опоры и всегда направлена перпендикулярно опоре (рис. 1.5).

Гибкая связь (нить, веревка, трос, цепь)

Груз подвешен на двух нитях (рис. 1.6).

Реакция нити направлена вдоль нити от ела, при этом нить может быть только растянута.

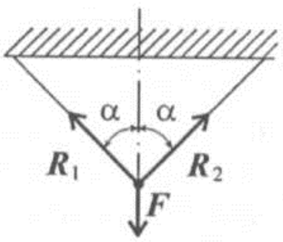


Рис. 1.6

Жесткий стержень

На схемах стержни изображают толстой сплошной линией (рис. 1.7).

Стержень может быть сжат или растянут. Реакция стержня направлена вдоль стержня. Стержень работает на растяжение или сжатие. Точное направление реакции определяют, мысленно убрав стержень и рассмотрев возможные перемещения тела без этой связи.

Возможным перемещением точки называется такое бесконечно малое мысленное перемещение, которое допускается в данный момент наложенными на него связями.

Убираем стержень 1, в этом случае стержень 2 падает вниз. Следовательно, сила от стержня 1 (реакция) направлена вверх. Убираем стержень 2. В этом случае точка Л опускается вниз, отодвигаясь от стены. Следовательно, реакция стержня 2 направлена к стене.

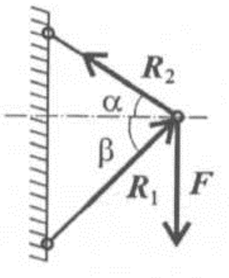


Рис. 1.7

Шарнирная опора

Шарнир допускает поворот вокруг точки закрепления. Различают два вида шарниров.

Подвижный шарнир

Стержень, закрепленный на шарнире, может поворачиваться вокруг шарнира, а точка крепления может перемещаться вдоль направляющей (площадки) (рис. 1.8).

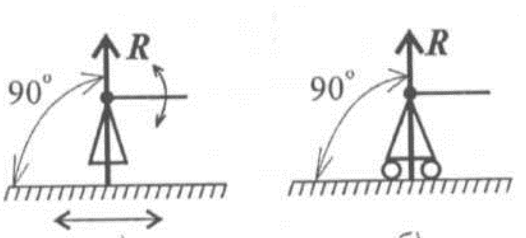


Рис. 1.8

Реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно опорной поверхности, т. к. не допускается только перемещение поперек опорной поверхности.

Неподвижный шарнир

Точка крепления перемещаться не может. Стержень может свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира, но неизвестна по направлению. Ее принято изображать в виде двух составляющих: горизонтальной и вертикальной (R_x\Ry) (рис. 1.9).

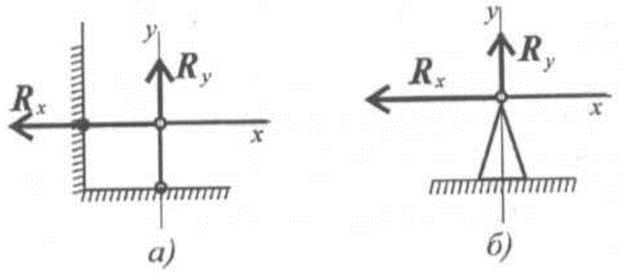


Рис. 1.9

Защемление или «заделка»

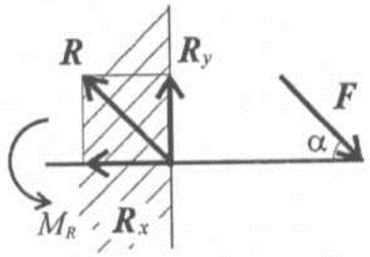


Рис. 1.10

Любые перемещения точки крепления невозможны.

Под действием внешних сил в опоре возникают реактивная сила и реактивный момент Mr, препятствующий повороту (рис. 1.10).

Реактивную силу принято представлять в виде двух составляющих вдоль осей координат

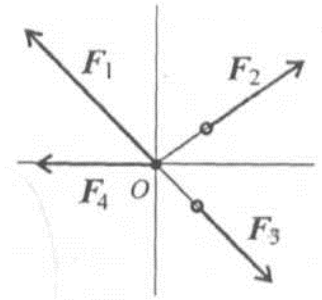
$R = R_x + R_y$.

Тема 1.2. Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей геометрическим способом

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется сходящейся .

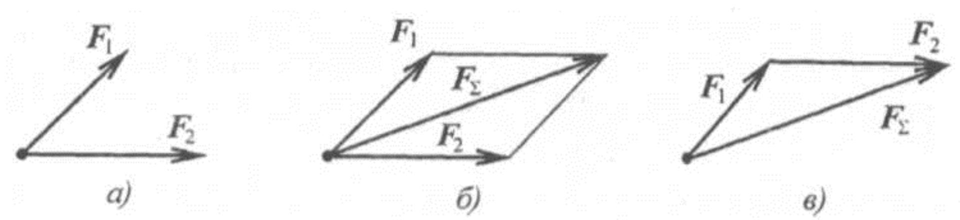
Необходимо определить равнодействующую системы сходящихся сил (F_1; F_2; F_3; …; F_n), n — число сил, входящих в систему.

По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.



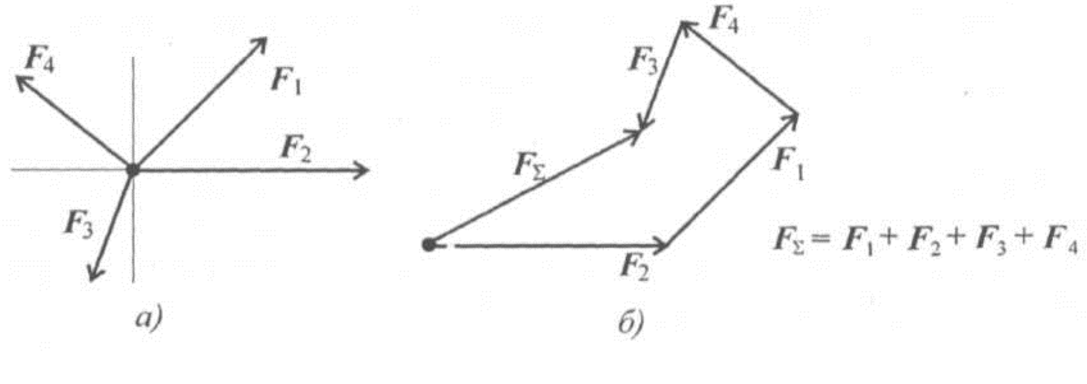
Равнодействующая сходящихся сил

Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить с помощью параллелограмма или треугольника сил (4-я аксиома).



Используя свойства векторной суммы сил, можно получить равнодействующую любой сходящейся системы сил, складывая последовательно силы, входящие в систему. Образуется многоугольник сил. Вектор равнодействующей силы соединит начало первого вектора с концом последнего.

При графическом способе определения равнодействующей векторы сил можно вычерчивать в любом порядке, результат (величина и направление равнодействующей) при этом не изменится.



Условие равновесия плоской системы сходящихся сил

При равновесии системы сил равнодействующая должна быть равна нулю, следовательно, при геометрическом построении конец последнего вектора долженсовпасть с началом первого.

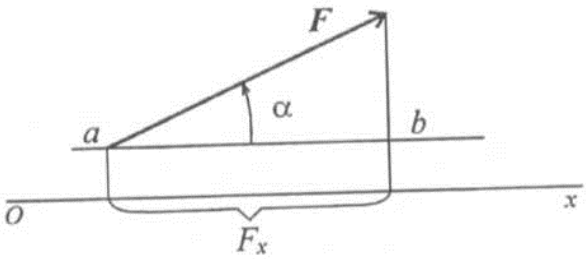
Если плоская система сходящихся сил находится в равновесии, многоугольник сил этой системы должен быть замкнут.

Если в системе три силы, образуется треугольник сил.

Определение равнодействующей аналитическим способом

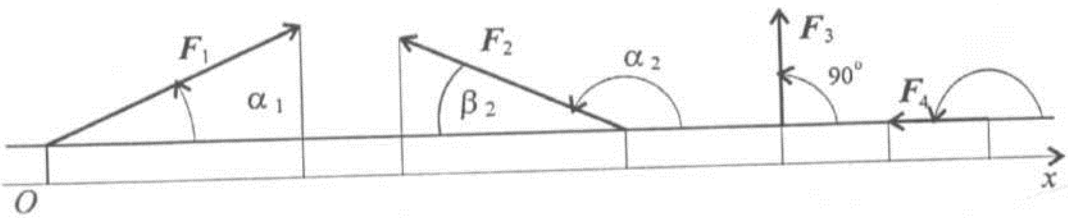
Проекция силы на ось

Проекция силы на ось определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора



$$\boxed{F_x = F\cos\alpha.}$$

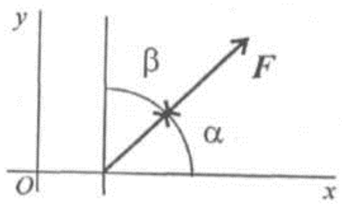
Величина проекции силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси. Таким образом, проекция имеет знак: положительный при одинаковом направлении вектора силы и оси и отрицательный при направлении в сторону отрицательной полуоси .



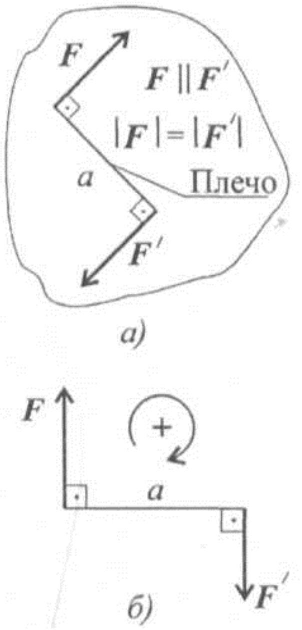
$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1 > 0$; $F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = - F_2 \cos \beta_2$;
$\cos\alpha_2 = \cos (180° - \beta_2) = - \cos\beta_2$;
$F_{3x} = F_3 \cos 90° = 0$; $F_{4x} = F_4 \cos 180° = - F_4$

Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси .

$F_x = F \cos a > 0$; $F_y = F \cos\beta = F \sin \alpha > 0$.



Тема 1.3. Пара сил и момент силы относительно точки

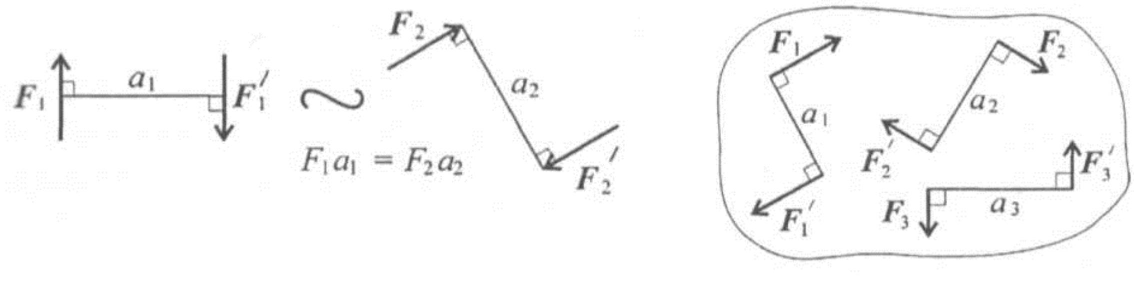


Парой сил называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны. Рассмотрим систему сил *(F;F'),* образующих пару. Пара сил вызывает вращение тела и ее действие на тело оценивается моментом. Силы, входящие в пару, не уравновешиваются, т.к. они приложены к двум точкам . Их действие на тело не может быть заменено одной силой (равнодействующей).Момент пары сил численно равен произведению модуля силы на расстояние между линиями действия сил (плечо пары).Момент считают положительным, если пара вращает тело по часовой стрелке: $M(F;F') = Fa;\ M > 0$.

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары.

Свойства пар (без доказательств):

1. Пару сил можно перемещать в плоскости ее действия.
2. Эквивалентность пар. Две пары, моменты которых равны,
3. эквивалентны (действие их на тело аналогично).
4. 3. Сложение пар сил. Систему пар сил можно заменить равнодействующей парой.
5. Момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов пар, составляющих систему.



$M_\Sigma = F_1\,\alpha_1 + F_2\,\alpha_2 + F_3\,\alpha_3 + \ldots + F_n\,\alpha_n;$ $M_\Sigma = \sum_0^n m_k$

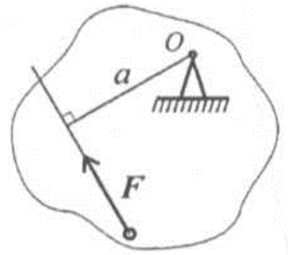
4. Равновесие пар.

Для равновесия пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы равнялась нулю:

$$M_\Sigma = 0 \Rightarrow \sum_0^n m_k = 0$$

Момент силы относительно точки

Сила, не проходящая через точку крепления тела, вызывает вращение тела относительно точки, поэтому действие такой силы на тело оценивается моментом.



Момент силы относительно точки численно равен произведению модуля силы на расстояние от точки до линий действия силы. Перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы (рис. 4.4), называется плечом силы. Обозначение момента Mo(F) или mo(F),m_o(F) = Fa.Единица измерения [mo(F)] = Н-м.

Момент считается положительным, если сила разворачивает тело по часовой стрелке.

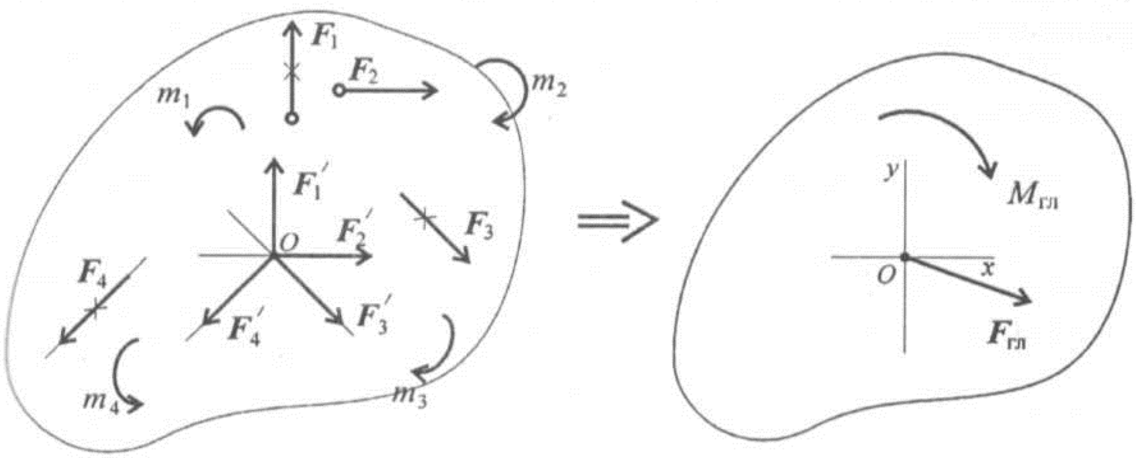
Тема 1.4. Плоская система произвольно расположенных сил

Линии действия произвольной системы сил не пересекаются в одной точке, поэтому для оценки состояния тела такую систему следует упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку — точку приведения. Применяют теорему Пуансо. При любом переносе силы в точку, не лежащую на линии ее действия, добавляют пару сил.

Появившиеся при переносе пары называют присоединенными парами.

Дана плоская система произвольно расположенных сил.

Переносим все силы в точку ^ О. Получим пучок сил в точке О, который можно заменить одной силой — главным вектором системы. Образующуюся систему пар сил можно заменить одной эквивалентной парой — главным моментом системы.



$$F_{гл} = \sum_0^n F_k$$

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной плоской системы сил. Проецируем все силы системы на оси координат и, сложив соответствующие проекции на оси, получим проекции главного вектора.

$$F_{глx} = \sum_0^n F_{kx}\ ;\ F_{глy} = \sum_0^n F_{ky}$$

По величине проекций главного вектора на оси координат находим модуль главного вектора:

$$F_{гл} = \sqrt{F_{глx}^2 + F_{глy}^2}\ \wedge$$

Главный момент системы сил равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно точки приведения.

$M_{глO} = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$;

$$M_{глO} = \sum_0^n m_O(F_k)$$

Таким образом, произвольная плоская система сил приводится к одной силе (главному вектору системы сил) и одному моменту (главному моменту системы сил).

Тема 1.5. Пространственная система сил

Пространственная система сил — система сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости.

Момент силы относительно оси

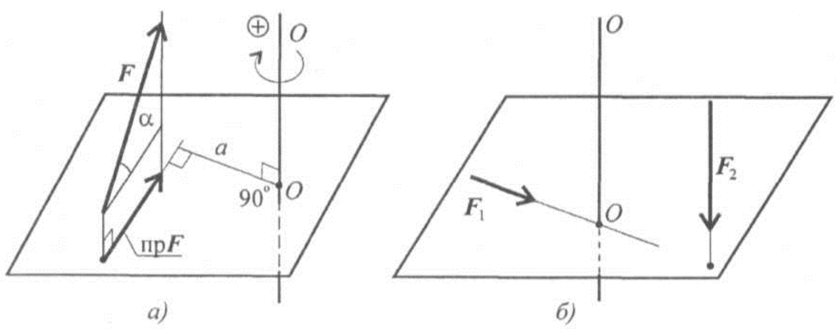
Момент силы относительно оси равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

M_{OO} (F) = пр F_a,

где a — расстояние от оси до проекции F;

пр F — проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси 00.

пр F = F cos a; M_{qo} (F) = F cosα · a



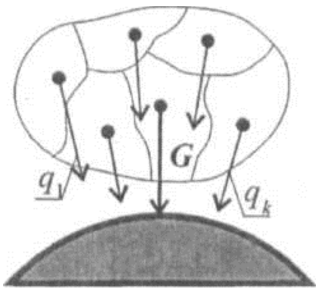
Момент считаем положительным, если сила разворачивает тело по часовой стрелке. Смотреть со стороны положительного направления оси.

Если линия действия силы пересекает ось или линия действия силы параллельна оси, моменты силы относительно этой оси равны нулю.

Силы и ось лежат в одной плоскости, они не смогут повернуть тело вокруг этой оси.

F_1 пересекает ось; $M_{OO}(F_1) = 0$;
$F_2 \parallel OO$; пр $F_2 = 0$; $M_{OO}(F_2) = 0$.

Тема 1.6. Центр тяжести тела и плоских фигур
Сила тяжести



Сила тяжести — равнодействующая сил притяжения к Земле, она распределена по всему объему тела. Силы притяжения, приложенные к частицам твердого тела, образуют систему сил, линии действия которых сходятся в центре Земли Поскольку радиус Земли значительно больше размеров любого земного тела, силы притяжения можно считать параллельными.

Центр тяжести однородных плоских тел (плоских фигур)

Очень часто приходится определять центр тяжести различных плоских тел и геометрических плоских фигур сложной формы. Для плоских тел можно записать: $V = Ah$,где A — площадь фигуры, h — ее высота.Тогда после подстановки в записанные выше формулы получим:

$$x_C = \frac{\sum_o^n A_k h x_k}{Ah} = \frac{\sum_o^n A_k x_k}{A}; \quad y_C = \frac{\sum_o^n A_k h y_k}{Ah} = \frac{\sum_o^n A_k y_k}{A}; \quad z_C = \frac{h}{2},$$

где $A_к$ — площадь части сечения; $x_к$, $y_к$ — координаты ЦТ частей сечения.

Выражение $\sum_o^n A_k x_k$ называют статическим моментом площади (S_y.).

Координаты центра тяжести сечения можно выразить через статический момент:

$$\sum_o^n A_k x_k = S_y; \quad x_C = \frac{S_y}{A}; \quad \sum_o^n A_k y_k = S_x; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называются центральными осями. Статический момент относительно центральной оси равен нулю.

Определение координат центра тяжести плоских фигур

Примечание. Центр тяжести симметричной фигуры находится на оси симметрии.

Центр тяжести стержня находится на середине высоты. Положения центров тяжести простых геометрических фигур могут быть рассчитаны по известным формулам (рис.: а) — круг; б) — квадрат, прямоугольник; в) — треугольник; г) — полукруг).

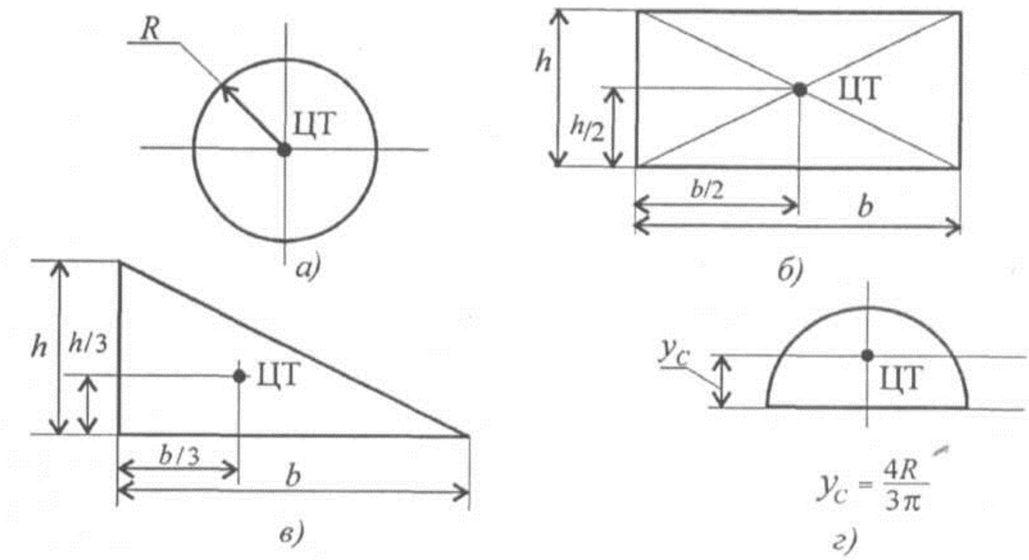


Рис.

Тема 1.7. Устойчивость равновесия

Устойчивым называется состояние, при котором заданный закон движения (или равновесия) не изменяется в течение некоторого заданного промежутка времени. Устойчивым может быть не только равновесие, существуют и динамически устойчивые процессы.

В механике различают следующие виды устойчивости равновесия твердого тела:

1) устойчивое;
2) неустойчивое;
3) безразличное.

Устойчивым называется равновесие, при нарушении которого ОЦТ тела повышается, то есть увеличивается запас потенциальной энергии тела. В устойчивом положении будет находиться гимнаст в висе на кольцах или рука, свободно висящая в плечевом суставе. При сколь угодно малом отклонении от положения равновесия в этом случае возникает момент силы тяжести (момент устойчивости Муст = P*Dh), возвращающий тело в прежнее положение.

Неустойчивым называется равновесие, при нарушении которого ОЦТ тела понижается, то есть запас потенциальной энергии тела уменьшается. При сколь угодно малом отклонении от положения равновесия в этом случае тоже возникает момент силы тяжести M= P*h, но это будет уже не удерживающий, а опрокидывающий момент, который все дальше будет отклонять тело от положения равновесия.

Безразличное равновесие характеризуется тем, что при любом положении тела состояние равновесия не нарушается, а высота положения ОЦТ над площадью опоры остается постоянной, то есть остается постоянным запас потенциальной энергии тела. Примером безразличного равновесия может служить положение мяча на горизонтальной плоскости. В спортивной практике примеров неустойчивого и безразличного равновесия практически не существует.

Ограниченно-устойчивое, когда равновесие устойчиво только в пределах колебания ОЦТ над опорой (в зоне AB). Чем больше величина площади опоры AB, тем больше запас устойчивости тела в динамике и больше момент устойчивости – $M_{уст}$:

$M_{уст}$=P*AB (1)

Устойчивость тела в статике выше при низком расположении ОЦТ, т.к. в данном случае произведению больше угол устойчивости. Опрокидывающий момент силы тяжести – $M_{опр}$ равен величины силы P на высоту H или любой другой силы на плечо её действия:

$M_{опр}$=P*H или F_x*H (2)

Соотношение момента устойчивости и опрокидывающего момента показывает запас статической устойчивости тела и характеризуется коэффициентом устойчивости –K:

K=$M_{уст}$/$M_{опр}$ (3)

Линия тяжести P может проходить не через середину площади опоры AB, тогда AC≠CB и запас устойчивости тела при отклонении его в сторону точки A или точки B будет не одинаков.

Тема 1.8. Основные понятия кинематики и динамики.

Кинематика точки

Кинематика рассматривает движение как перемещение в пространстве. Причины, вызывающие движение, не рассматриваются. Кинематика устанавливает способы задания движения и определяет методы определения кинематических параметров движения.

Основные кинематические параметры

Траектория

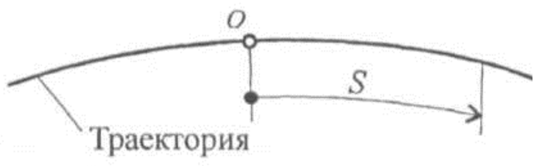
Линию, которую очерчивает материальная точка при движении в пространстве, называют траекторией. Траектория может быть прямой и кривой, плоской и пространственной линией. Уравнение траектории при плоском движении: y = f(x).

Пройденный путь

Путь измеряется вдоль траектории в направлении движения. Обозначение — S, единицы измерения — метры.

Уравнение движения точки

Уравнение, определяющее положение движущейся точки в зависимости от времени, называется уравнением движения.



Положение точки в каждый момент времени можно определить по расстоянию, пройденному вдоль траектории от некоторой неподвижной точки, рассматриваемой как начало отсчета. Такой способ задания движения называетсяестественным.

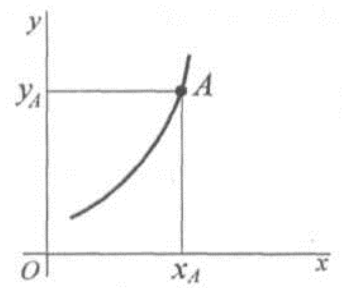
Таким образом, уравнение движения можно представить в виде S= f(t). Положение точки можно также определить, если известны ее координаты в зависимости от времени. Тогда в случае движения на плоскости должны быть заданы два уравнения:

$$\begin{cases} x = f_1\,(t); \\ y = f_2\,(t). \end{cases}$$

В случае пространственного движения добавляется и третья координата

$z = f_3\,(t)$.

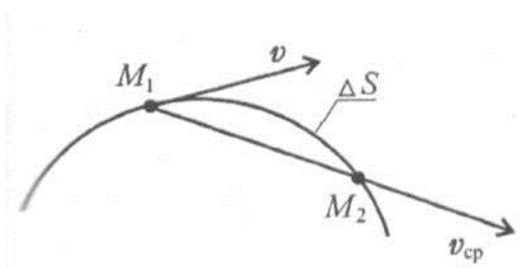
Такой способ задания движения называют координатным.



Скорость движения

Векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения по траектории, называется скоростью.

Скорость — вектор, в любой момент направленный по касательной к траектории в сторону направления движения.



Если точка за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то движение называют равномерным. Средняя скорость на пути AS определяется как $v_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ где ΔS — пройденный путь за время Δt; Δt — промежуток времени.

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то движение называют неравномерным.

В этом случае скорость — величина переменная и зависит от времени v=f(t).

При рассмотрении малых промежутков времени $(At \to 0)$ средняя скорость становится равной истинной скорости движения в данный момент. Поэтому скорость в данный момент определяют как производную пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

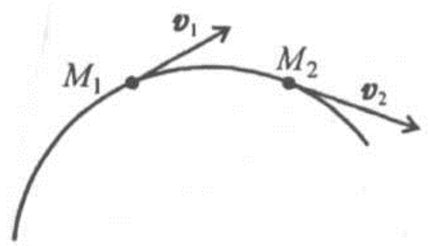
За единицу скорости принимают 1 м/с. Иногда скорость измеряют в км/ч, 1км/ч = 1000/3600 = 0,278 м/с.

Ускорение точки

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению, называется ускорением точки.

Скорость точки при перемещении из точки M_1 в точку M_2 меняется по величине и направлению. Среднее значение ускорения за этот промежуток времени

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени среднее ускорение превратится в ускорение в данный момент: $a = \frac{dv}{dt}$.Обычно для удобства рассматривают две взаимно перпендикулярно составляющие ускорения: нормальное и касательное.

Нормальное ускорение a_n характеризует изменение скорости по направлению и определяется как

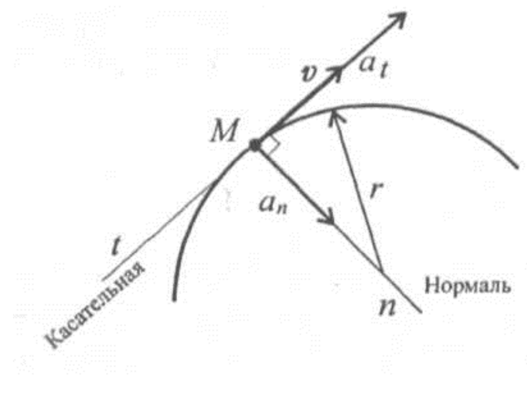
$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

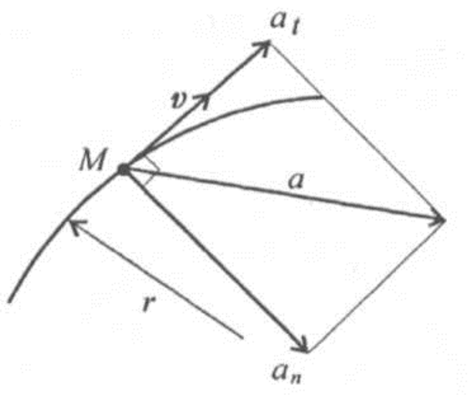
где r – радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение a_t характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории; при ускорении его направление совпадает с направлением скорости, а при замедлении оно направлено противоположно направлению век-гора скорости.Формула для определения касательного ускорения имеет вид: $$a_t = \frac{dv}{dt} = v' = S''.$$

Значение полного ускорения определяется как $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$





Анализ видов и кинетических параметров движений

Равномерное движение

Равномерное движение — это движение с постоянной скоростью:

v = const.

Для прямолинейного равномерного движения (рис. а)

$r = \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} = 0.\ a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = 0;$ Полное ускорение движения точки равно нулю: $a = 0$.При криволинейном равномерном движении (рис. б).

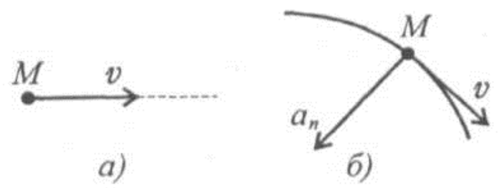


Рис.

$$r \neq \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^3}{r} \neq 0.$$

Полное ускорение равно нормальному ускорению: $a = a_n$.

Уравнение (закон) движения точки при равномерном движении можно получить, проделав ряд несложных операций.

Так как v = const, закон равномерного движения в общем виде является уравнением прямой: S = $So+vt$, где So — путь, пройденный до начала отсчета.

Равнопеременное движение

Равнопеременное движение — это движение с постоянным касательным ускорением:

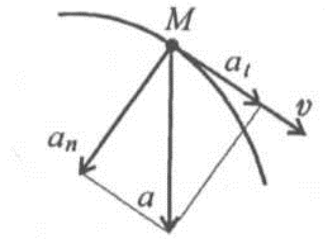
at — const.

Для прямолинейного равнопеременного движения

$r = \infty \Rightarrow a_n = 0;$ $a = a_t = \text{const}.$

Полное ускорение равно касательному ускорению. Криволинейное равнопеременное движение:

$a_n \neq 0;\ a_t = \text{const} \neq 0.$



Учитывая, что $a_t = \frac{dv}{dt}$; $a_t = const$ и сделав ряд преобразований: $dv = a_t dt;$ $\int_v dv = a_t \int_t dt,$ получим значение скорости при равнопеременном движении $v = v_0 + a_t t;$ $v = \frac{dS}{dt}.$

После интегрирования будем иметь закон равнопеременного движения в общем виде, представляющий уравнение параболы:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость движения;
So — путь, пройденный до начала отсчета;
a_t — постоянное касательное ускорение.

Неравномерное движение

При неравномерном движении численные значения скорости и ускорения меняются.

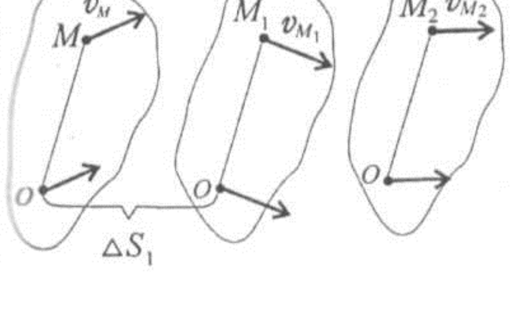
Уравнение неравномерного движения в общем виде представляет собой уравнение третьей $S = f(t^3)$ и выше степени.

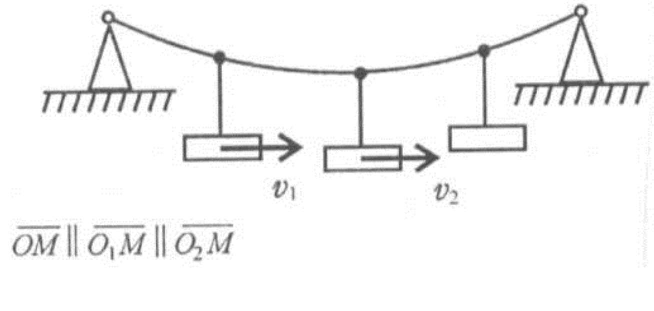
Поступательное движение

Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором всякая прямая линия на теле при движении остается параллельной своему начальному положению.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково: скорости и ускорения в каждый момент одинаковы. Поэтому для описания движения тела можно рассматривать движение одной его точки, обычно центра масс.

Поступательное движение может быть прямолинейным и криволинейным





Вращательное движение

При вращательном движении все точки тела описывают окружности вокруг общей неподвижной оси.

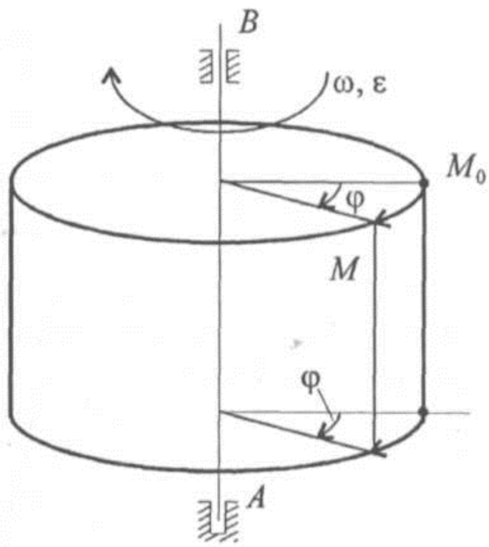
Неподвижная ось, вокруг которой вращаются все точки тела, называется осью вращения.

При этом каждая точка движется по окружности, радиус которой равен расстоянию точки до оси вращения. Точки на оси вращения не перемещаются.

Для описания вращательного движения тела вокруг неподвижной оси можно использовать только угловые параметры :

φ — угол поворота тела, [φ] = рад;

ω — угловая скорость, определяет изменение угла поворота в единицу времени, [ω] = рад/с.



Для определения положения тела в любой момент времени используется уравнение $\varphi = f/(t)$.Следовательно, для определения угловой скорости можно пользоваться выражением $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.Иногда для оценки быстроты вращения используют угловую частоту вращения n, которая оценивается в оборотах в минуту.Угловая скорость и частота вращенияфизически близкие величины: $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$.

Изменение угловой скорости во времени определяется угловым ускорением ε, [ε] = рад/с^2;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Движение материальной точки.

Свободная и несвободная точки

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-нибудь связями, называется свободной. Задачи решаются с помощью основного закона динамики. Материальные точки, движение которых ограничено связями, называются несвободными. Для несвободных точек необходимо определять реакции связей. Эти точки движутся под действием активных сил и ограничивающих движение реакций связей (пассивных сил). Несвободные материальные точки освобождаются от связей: связи заменяются их реакциями. Далее несвободные точки можно рассматривать как свободные (принцип освобождаемости от связей).

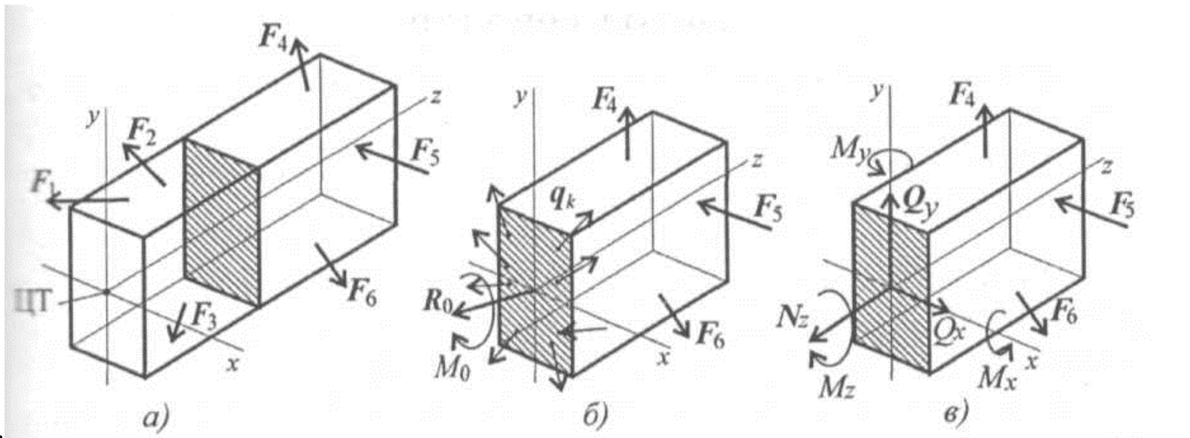
РАЗДЕЛ II Сопротивление материалов

Тема 2.1. Основные положения. Деформации, метод сечений

Элементы конструкции при работе испытывают внешнее воздействие, которое оценивается величиной внешней силы. К внешним силам относят активные силы и реакции опор. Под действием внешних сил в детали возникают внутренние силы упругости, стремящиеся вернуть телу первоначальную форму и размеры. Внешние силы должны быть определены методами теоретической механики, а внутренние определяются основным методом сопротивления материалов - методом сечений. В сопротивлении материалов тела рассматриваются в равновесии. Для решения задач используют уравнения равновесия, полученные в теоретической механике для тела в пространстве. Используется система координат, связанная с телом. Чаще продольную ось детали обозначают *z*, начало координат совмещают с левым краем и размещают в центре тяжести сечения.

Метод сечений.

Метод сечений заключается в мысленном рассечении тела плоскостью и рассмотрении равновесия любой из отсеченных частей. Если все тело находится в равновесии, то и каждая его часть находится в равновесии под действием внешних и внутренних сил. ^ Внутренние силы определяются из уравнений равновесия, составленных для рассматриваемой части тела. Рассекаем тело поперек плоскостью (рис.). Рассматриваем правую часть. На нее действуют внешние силы F_4 ; F_5 ; F_6 и внутренние силы упругости q_k ,распределенные по сечению. Систему распределенных сил можно заменить главным вектором Ro, помеченным в центр тяжести сечения, и суммарным моментом силM_o: $R_o = \sum_0^n q_k$; $M_o = \sum_o^n m_k$



.

Рис.

Разложив главный вектор R_o по осям, получим три составляющие:

$Ro = N_z + Q_y + Q_x$,

где N_z — продольная сила;
Q_x — поперечная сила по оси x;
Q_y — поперечная сила по оси y.

Главный момент тоже принято представлять в виде моментов пар сил в трех плоскостях проекции:

$M_o = M_X + M_y + M_г$,

M_x — момент сил относительно O_x ;
M_y — момент сил относительно O_y ;
M_z - момент сил относительно Oz.

Полученные составляющие сил упругости носят название внутренних силовых факторов. Каждый из внутренних силовых факторов вызывает определенную деформацию детали. Внутренние силовые факторы уравновешивают приложенные к этому элементу детали внешние силы. Используя шесть уравнений равновесия, можно получить величину внутренних силовых факторов:

$$N_z = \sum_o^n F_{kz};\quad M_z = \sum_o^n m_z(F_k);$$
$$Q_x = \sum_o^n F_{kx};\quad M_x = \sum_o^n m_x(F_k);$$
$$Q_y = \sum_o^n F_{ky};\quad M_y = \sum_o^n m_y(F_k).$$

Из приведенных уравнений следует, что:

N_z — продольная сила, равная алгебраической сумме проекций на ось Oz внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса: вызывает растяжение или сжатие;

Qx — поперечная сила, равная алгебраической сумме проекции на ось Ox внешних сил, действующих на отсеченную часть;

Q_y — поперечная сила, равная алгебраической сумме проекций на ось Oy внешних сил, действующих на отсеченную часть;

силы Q_x и Q_y вызывают сдвиг сечения;

M_z — крутящийся момент, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно продольной оси Oz вызывает скручивание бруса;

M_x — изгибающий момент, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси Ox;

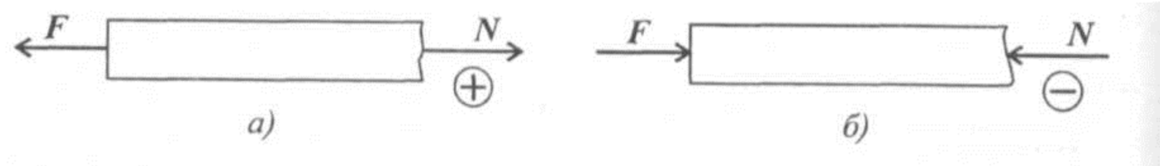
M_y — изгибающий момент, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси Oy;

моменты M_x и M_y вызывают изгиб бруса в соответствующей плоскости.

Тема 2.2. Растяжение и сжатие

Растяжением или сжатием называют вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор — продольная сила.

Продольные силы меняются по длине бруса. При расчетах после определения величин продольных сил по сечениям строится график — эпюра продольных сил. Условно назначают знак продольной силы.



Если продольная сила направлена от сечения, то брус растянут. Растяжение считают положительной деформацией.

Если продольная сила направлена к сечению, то брус сжат. Сжатие считают отрицательной деформацией .

Напряжения при растяжении и сжатии

При растяжении и сжатии в сечении действует только нормальное напряжение. Напряжения в поперечных сечениях могут рассматриваться как силы, приходящиеся на единицу площади. Таким образом, направление и знак напряжения в сечении совпадают с направлением и знаком силы в сечении .Исходя из гипотезы плоских сечений, можно предположить, что напряжения при растяжении и сжатии в пределах каждого сечения не меняются. Поэтому напряжение можно рассчитать по формуле

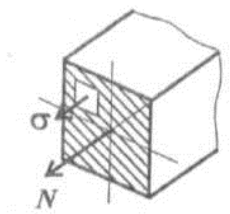
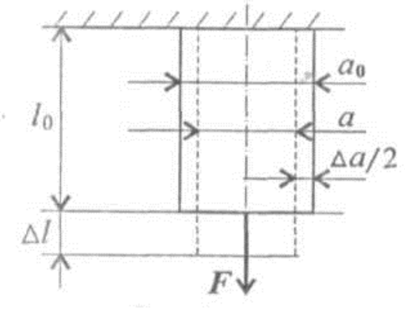


Рис.

$\sigma = \frac{N_z}{A}$,где N_z — продольная сила в сечении; A — площадь поперечного сечения.Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна, площади поперечного сечения.

Нормальные напряжения действуют при растяжении от сечения, а при сжатии к сечению. Размерность (единица измерения) напряжений — Н/м^2 (Па), однако это слишком малая единица, и практически напряжения рассчитывают в Н/мм^2 (МПа): 1 МПа = 10^6 Па = 1 Н/мм^2.

Продольные и поперечные деформации. Рассмотрим деформацию бруса под действием продольной силы F .



Начальные размеры бруса: l_o – начальная длина, a_o — начальная ширина.Брус удлиняется на величину Δl; Δl - абсолютное удлинение. При растяжении поперечные размеры уменьшаются, Δa — абсолютное сужение; $\Delta l > 0$; $\Delta a < 0$.При сжатии выполняется соотношение $\Delta l < 0$; $\Delta a > 0$.В сопротивлении материалов принято рассчитывать деформации в относительных единицах

:

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o}$; ε - относительное удлинение;

$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a_o}$; ε' – относительное сужение.

Между продольной и поперечной деформациями существует зависимость

$\varepsilon' = \mu\varepsilon$,

где μ — коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона, -характеристика пластичности материала.

Закон Гука

В пределах упругих деформаций деформации прямо пропорциональны нагрузке:

$F = k\Delta l$, где F — действующая нагрузка;

k — коэффициент.

В современной форме:

$\sigma = \frac{N}{A}$; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o}$.Получим зависимость $\sigma=E\varepsilon$, где E — модуль упругости, характеризует жесткость материала.

В пределах упругости нормальные напряжения пропорциональны относительному удлинению. Значение *E* для сталей в пределах $(2\div2{,}1) \cdot 10^5$ МПа.

При прочих равных условиях, чем жестче материал, тем меньше он деформируется:

$\downarrow\varepsilon = \frac{\sigma}{E\uparrow}$.

Формулы для расчета перемещений поперечных сечений бруса при растяжении и сжатии

Используем известные формулы.

Закон Гука σ=Eε.

Откуда $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

В результате получим зависимость между нагрузкой, размерами бруса и возникающей деформацией:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E};\ \sigma = \frac{N}{A};\ \Delta l = \frac{\sigma l}{E} \text{ или } \Delta l = \frac{Nl}{AE},$$

где Δl — абсолютное удлинение, мм;

σ - нормальное напряжение, МПа;

/ — начальная длина, мм;

E — модуль упругости материала, МПа;

N — продольная сила, Н;

A — площадь поперечного сечения, мм^2;

Произведение AE называют жесткостью сечения.

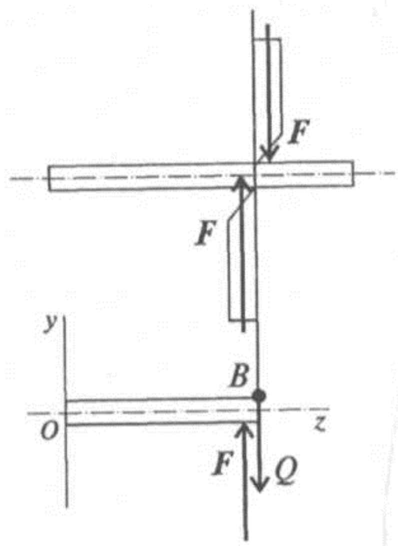
Тема 2.3. Практические расчеты на срез и смятие
Основные предпосылки расчетов и расчетные формулы

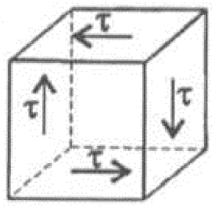
Детали соединений (болты, штифты, шпонки, заклепки) работают так, что можно учитывать только один внутренний силовой фактор — поперечную силу. Такие детали рассчитываются на сдвиг.

Сдвиг (срез)

Сдвигом называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор - поперечная сила.

Рассмотрим брус, на который действуют равные по величине, противоположно направленные, перпендикулярные продольной оси силы. Применим метод сечений и определим внутренние силы упругости из условия равновесия каждой из частей бруса: $\Sigma F_y = 0; F - Q = 0; F = Q$,где Q — поперечная сила. Естественно считать, что она вызовет появление только касательных напряжений т. Рассмотрим напряженное состояние в точке Bпоперечного сечения. Выделим элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда, к граням которого приложены напряжения.





Исходя из условия равновесия точки *B,* внутри бруса при возникновении касательного напряжения г на правой вертикальной площадке такое же напряжение должно возникнуть и на левой площадке. Они образуют пару сил. На горизонтальных площадках возникнут такие же напряжения, образующие такую же пару обратного направления.

Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом. Здесь действует закон парности касательных напряжений:

При сдвиге в окрестностях точки на взаимно перпендикулярных площадках возникают равные по величине касательные напряжения, направленные на соседних площадках либо от ребра, либо к ребру (рис.а).

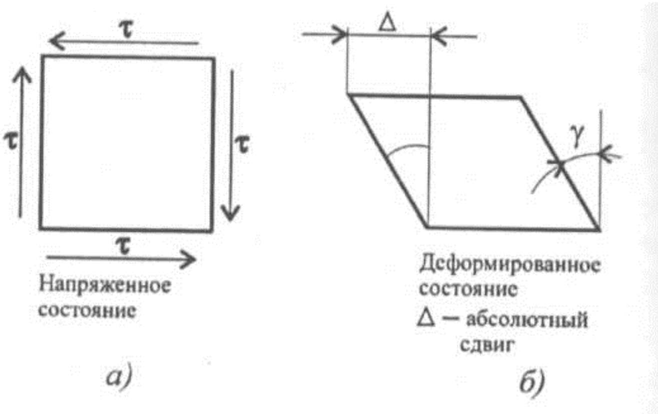


Рис.

В результате площадки сдвигаются на уголу, называемый углом сдвига. При сдвиге выполняется закон Гука, который в данном случае записывается следующим образом: $\tau = G\gamma$.Здесь τ — напряжение; G — модуль упругости сдвига; γ — угол сдвига. При отсутствии специальных испытаний *G* можно рассчитать по формуле $G \cong 0,4E$, *E* — модуль упругости при растяжении. *[G]* = МПа.

Расчет деталей на сдвиг носит условный характер. Для упрощения расчетов принимается ряд допущений:

при расчете на сдвиг изгиб деталей не учитывается, хотя силы, действующие на деталь, образуют пару;

при расчете считаем, что силы упругости распределены по сечению равномерно;

если для передачи нагрузки используют несколько деталей, считаем, что внешняя сила распределяется между ними равномерно.

Откуда формула для расчета напряжений имеет вид:

$\tau_c = \dfrac{Q}{A_c}$; $Q = \dfrac{F}{z}$,где τ_c — касательное напряжение;

Q — поперечная сила;
A_c — площадь сдвига;

F — внешняя сдвигающая сила;
z — количество деталей.

Условие прочности при сдвиге (срезе)

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c \le [\tau_c]},$$

$[\tau_c]$ — допускаемое напряжение сдвига, обычно его определяют по формуле
$[\tau_c] = (0{,}25 \div 0{,}35)\ \sigma_m$.

При разрушении деталь перерезается поперек. Разрушение детали под действием поперечной силы называют срезом.

Смятие

Довольно часто одновременно со сдвигом происходит смятие боковой поверхности в месте контакта в результате передачи нагрузки от одной поверхности к другой. При этом на поверхности возникают сжимающие напряжения, называемые напряжениями смятия, $\sigma_{см}$.

Расчет также носит условный характер. Допущения подобны принятым при расчете на сдвиг (см. выше), однако при расчете боковой цилиндрической поверхности напряжения по поверхности распределены не равномерно, поэтому расчет проводят для наиболее нагруженной точки (на рис. 23.46). Для этого вместо боковой поверхности цилиндра в расчете используют плоскую поверхность, проходящую через диаметр. На рис. показана примерная схема передачи давления на стержень заклепки.

Таким образом, условие прочности при смятии можно выразить соотношением

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \le [\sigma_{см}]\ ; A_{см} = d\delta,$$

где d — диаметр окружности сечения;
δ — наименьшая высота соединяемых пластин;
$A_{см}$ — расчетная площадь смятия; допускаемое напряжение смятия:
$[\sigma_{см}] = (0{,}35 \div 0{,}4)\sigma_т$;
F — сила взаимодействия между деталями.

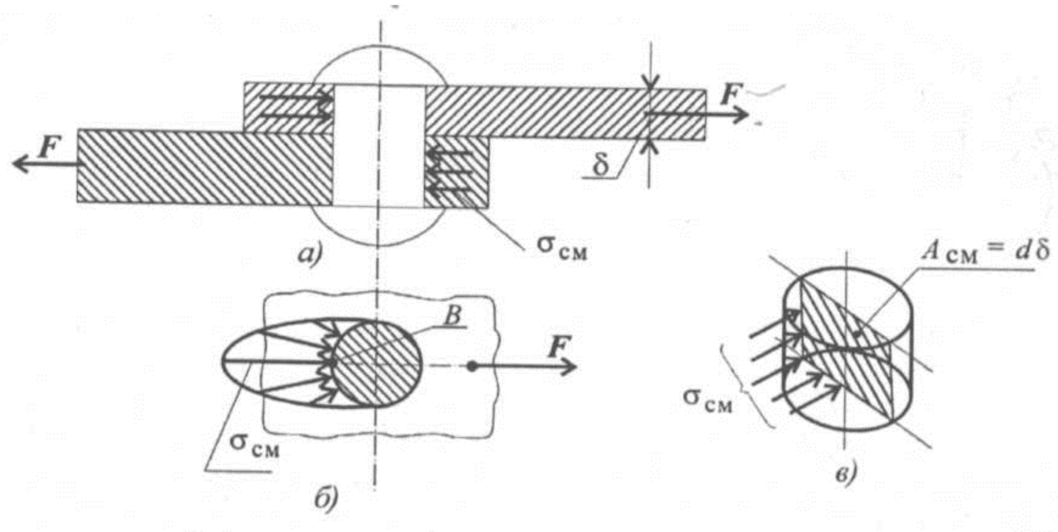


Рис.

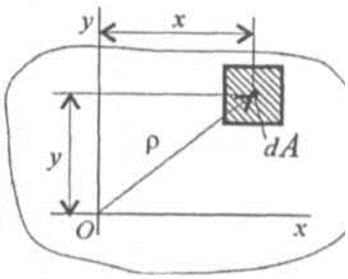
Тема 2.4. Геометрические характеристики плоских сечений

При растяжении, сжатии, смятии и сдвиге деталь сопротивляется деформации всем сечением одинаково. Здесь геометрической характеристикой сечения является площадь.

При кручении и изгибе сечение сопротивляется деформации не одинаково, при расчетах напряжений появляются другие геометрические характеристики сечения, влияющие на сопротивления сечения деформированию.

Статический момент площади сечения

Рассмотрим произвольное сечение.



Если разбить сечение на бесконечно малые площадки dA и умножить каждую площадку на расстояние до оси координат и проинтегрировать полученное выражение, получим статический момент площади сечения:1) относительно оси O_x $S_x = \int_A y dA$;2) относительно оси O_y $S_y = \int_A x dA$.

Для симметричного сечения статические моменты каждой половины площади равны по величине и имеют разный знак. Следовательно, статический момент относительно оси симметрии равен нулю.

Статический момент используется при определении положения центра тяжести сечения:

$$x_C = \frac{\sum_o^n A_k x_k}{\sum_o^n A_k};\quad y_C = \frac{\sum_o^n A_k y_k}{\sum_o^n A_k};\quad \sum_o^n A_k y_k \approx \int_A y dA.$$

Формулы для определения положения центра тяжести можно записать в виде

$$x_C = \frac{S_y}{A};\quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

Осевые моменты инерции

Осевым моментом инерции сечения относительно некоторой оси, лежащей в этой же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой оси:

1) осевой момент инерции сечения относительно оси *Ox*

$$J_x = \int_A y^2 dA;$$

2) осевой момент инерции сечения относительно оси *Oy*

$$J_y = \int_A x^2 dA.$$

Полярный момент инерции сечения

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой точки:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA,$$

где *p* — расстояние до полюса (центра поворота)

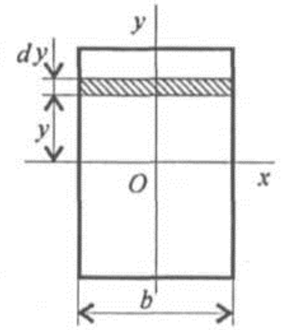
Поскольку $p^2 = x^2 - y^2$, получим: полярный момент инерции сечения равен сумме осевых:$J_p = J_x + J_y$.Осевые моменты инерции характеризуют сопротивление сечения повороту относительно соответствующей оси.

Полярный момент инерция характеризует сопротивление сечения повороту вокруг полюса (начала координат). Единицы измерения моментов инерции: м^4; см^4; мм^4.

Моменты инерции простейших сечений

Осевые моменты инерции прямоугольника

Представим прямоугольник высотой *h* и шириной *b* в виде сечения, составленного из бесконечно тонких полос. Запишем площадь такой полосы: *bdy=dA*. Подставим в формулу осевого момента инерции относительно оси *Ox:*



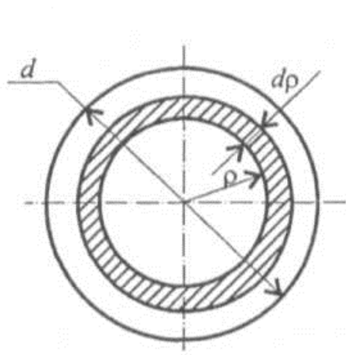
$$J_x = \int_A by^2 dy = b\int_A y^2 dy\ ; \quad J_x = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{2bh^3}{2^3 \cdot 3}\ ;$$

получим: $J_x = \dfrac{bh^3}{12}$.

По аналогии, если разбить прямоугольник на вертикальные полосы, рассчитать площади полос и подставить в формулу для осевого момента инерции относительно оси Оу, получим: $J_y = \int_A x^2 dA = \dfrac{hb^3}{12}$.

Очевидно, что при $h > b$ сопротивление повороту относительно оси Ox больше, чем относительно Oy.

Для квадрата: h = b; $J_x = J_y = \dfrac{h^4}{12}$.



Полярный момент инерции круга Для круга вначале вычисляют полярный момент инерции, затем - осевые. Представим круг в виде совокупности бесконечно тонких колец. Площадь каждого кольца можно рассчитать как площадь прямоугольника с длинной стороной, равной длине соответствующей окружности, и высотой, равной толщине кольца: $dA = 2\pi\rho d\rho$. Подставим это выражение для площади в формулу для полярного момента инерции:

$$J_p = \int_A \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho\ ; \quad J_p = \frac{2\pi d^4}{4 \cdot 2^4} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Получим формулу для расчета полярного момента инерции круга:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Подобным же образом можно получить формулу для расчета полярного момента инерции кольца:

$$J_p = \frac{\pi}{32}\left(d^4 - d_{вн}^4\right),$$

где d - наружный диаметр кольца; $d_{ВН}$ - внутренний диаметр кольца.

Если обозначить $d_{ВН} / d = c$, то

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}\left(1 - c^4\right).$$

Осевые моменты инерции круга и кольца

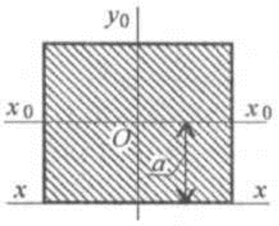
Используя известную связь между осевыми и полярным моментами инерции, получим:

$J_p = J_x + J_y$; $J_x = J_y = \frac{J_p}{2}$;

$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$ (круг); $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}\left(1 - c^4\right)$ (кольцо).

Моменты инерции относительно параллельных осей

Оси Охо и Ох параллельны.



При параллельном переносе прямоугольной системы осей y_oOx_oв новое положение y_oO_x значения моментов инерции J_X, J_y, J_{xy} заданного сечения меняются. Задается формула переход без вывода. $J_x = J_{xo} + Aa^2$,Здесь J_x – момент инерции относительно оси O_x;J_{xo} – момент инерции относительно оси Ox_o;

A — площадь сечения;

a — расстояние между осями O_x и Ox_o.

Главные оси и главные моменты инерции

Главные оси это оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения: минимальный ж максимальный.

Главные центральные моменты инерции рассчитываются относительно главных осей, проходящих через центр тяжести.

Тема 2.5. Поперечный изгиб прямого бруса

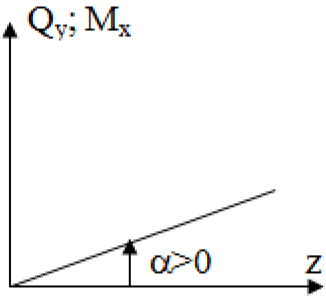
Поперечным изгибом называется такой вид деформирования бруса, при котором внешние нагрузки действуют перпендикулярно к его продольной оси. Деформация изгиба заключается в искривлении оси бруса. Брус с прямой осью, работающий на изгиб, называется балкой. Если плоскость действия внешних нагрузок проходит через ось балки и одну из главных центральных осей поперечного сечения, изгиб называется прямым. В этом случае ось балки искривляется в плоскости действия нагрузок и является плоской кривой.

В сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y

$$\begin{aligned} M_x &= \sum M_x^{вн} \\ Q_y &= \sum F_y^{вн} \end{aligned} \qquad (6.1)$$

Дифференциальные зависимости между q, Q_y и M_x имеют вид:

$$\frac{dQ}{dz} = tg\alpha = q; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$



1. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, - на эпюре Q_y скачок по модулю равный этой силе, на эпюре M_x – излом навстречу силе.

2. В сечении, где приложена сосредоточенная пара сил, - на эпюре M_x скачок по модулю равный этой паре сил. На эпюре Q_y это не сказывается.

3.Если на участке имеется равномерно распределенная нагрузка, то Q_y изменяется по линейному закону, M_x – по параболе, выпуклостью навстречу нагрузке q ($M_x = M_{экстр}$ – в сечении, где Q_y меняет свой знак).

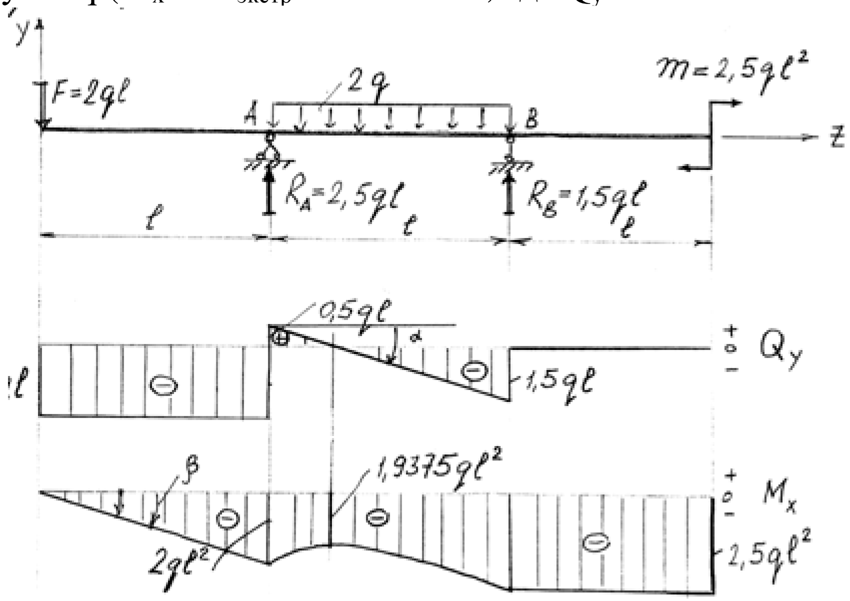
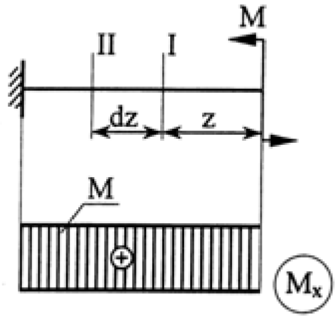


Рис. 6.1

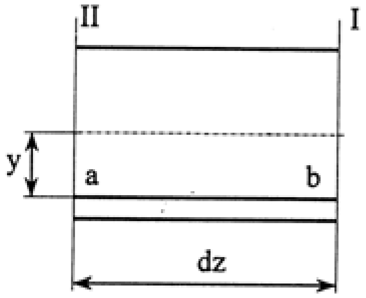
Изгиб называется чистым, если в сечении балки возникает только изгибающий момент M_x.

Расчет на прочность при изгибе

Нормальные напряжения



Из балки, нагруженной только изгибающим моментом вырежем фрагмент длинной *dz*,

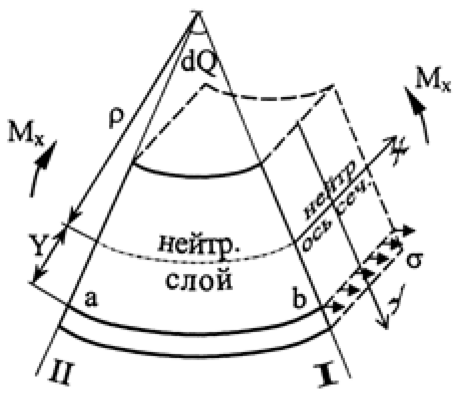


При изгибе кривизна оси балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{I_x}$$

относительное удлинение слоя *ab*

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$



Распределение нормальных напряжений: по ширине сечения равномерное (const), по высоте сечения

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y,$$

максимальные нормальные напряжения в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения.

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Условие прочности при изгибе балок по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max,\ min} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]_{p,c} \qquad (6.2)$$

Касательные напряжения

При поперечном изгибе в сечениях кроме M_x возникает поперечная сила Q_x, вызывающая касательные напряжения:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{\omega omc}}{J_x \cdot b}, \qquad (6.3)$$

где S_x^{omc} -статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно центральной оси *ox*.

Проверка балок по касательным напряжениям:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{J_x \cdot b} \leq [\tau]. \qquad (6.4)$$

Так в одном и том же поперечном сечении одновременно возникают и нормальные и касательные напряжения, производим проверку по главным напряжениям с использованием, например, III теории прочности

$$\sigma_{экв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \qquad (6.5)$$

Расчет на жесткость при изгибе

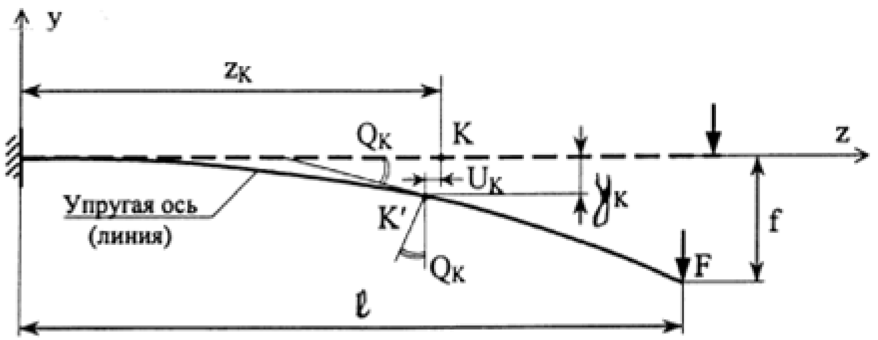
В большинстве случаев конструкции претерпевающие изгиб, кроме расчета на прочность, рассчитываются и на жесткость, при этом должно выполняться условие:

$f \le [f]$ (6.6)

где f – действительный прогиб (максимальное вертикальное перемещение элемента конструкции);

[f] – допустимый или предельный прогиб, устанавливаемый в зависимости от конкретного элемента конструкции, например по СНиП 2.02.07-85, [f]=*l*/120…*l*/160;

l – пролет балки (у консоли – двойной вылет).



Изгиб балки или рамы сопровождается искривлением ее оси. Перемещения балки в сечении z подразделяются на линейные – прогиб y и смещение z и угловые – угол поворота Q

$$\theta = \frac{dy}{dz}$$

Осевые перемещения, как правило, несоизмеримо малы, т.е. z<<y и ими пренебрегают.

Искомые перемещения при изгибе y и Q могут быть найдены следующими методами:

а) методом начальных параметров (МНП);

б) энергетическим методом.

Для балок с прямой осью и постоянным сечением деформации лучше определять по методу начальных параметров или по способу Верещагина. Без всяких ограничений можно применять метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии и интеграл Мора.

Тема 2.6. Сдвиг и кручение брусьев круглого сечения

Кручение круглого бруса происходит при нагружении его парами сил с моментами в плоскостях, перпендикулярных продольной оси. При этом образующие бруса искривляются и разворачиваются на угол γ называемый углом сдвига (угол поворота образующей Поперечные сечения разворачиваются на угол ір, называемый углом закручивания .Длина бруса и размеры поперечного сечения при кручении не изменяются.

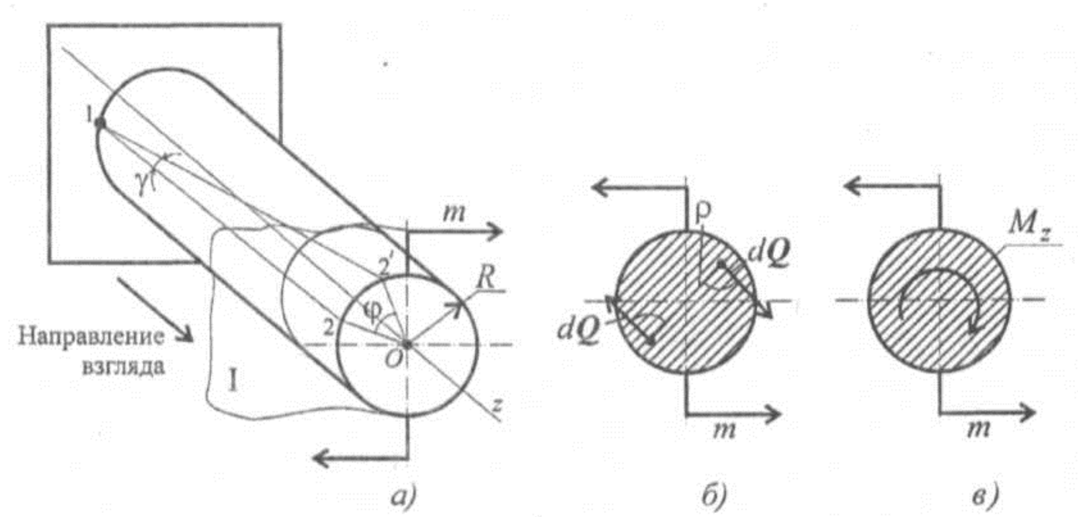
Связь между угловыми деформациями определяется соотношением $\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{R}$;

l - длина бруса;

R — радиус сечения.

Длина бруса значительно больше радиуса сечения, следовательно, φ»γ.

Угловые деформации при кручении рассчитываются в радианах.



Внутренние силовые факторы при кручении.

Кручением называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор - крутящий момент.

Внешними нагрузками также являются две противоположно натравленные пары сил.Рассмотрим внутренние силовые факторы при кручении круглого бруса .Для этого рассечем брус плоскостью I и рассмотрим равновесие сеченной части . Сечение рассматриваем со стороны отброшенной части.Внешний момент пары сил разворачивает участок бруса против часовой стрелки, внутренние силы упругости сопротивляются повороту. В каждой точке сечения возникает поперечная сила dQ . Каждая точка сечения имеет симметричную, где возникает поперечная сила, направленная в обратную сторону. Эти силыобразуют пару с моментом $dm=pdQ;$ p — расстояние от точки до центра сечения. Сумма поперечных сил в сечении равна нулю: $\Sigma dQ = 0$.С помощью интегрирования получим суммарный момент сил упругости, называемый крутящим моментом:

$$M_k = \int_A dm = \int_A \rho dQ .$$

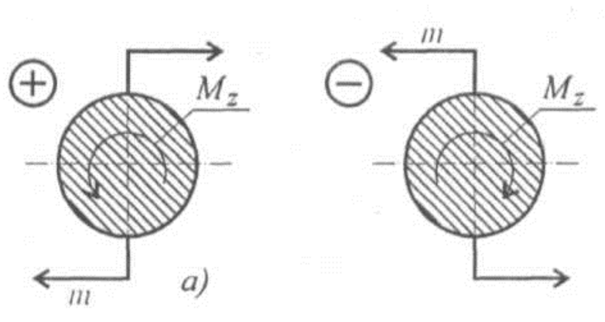
Практически крутящий момент определяется из условия равновесия отсеченной части бруса. Крутящий момент в сечении равен сумме моментов внешних сил, действующих на отсеченную часть:

$\sum m_z = 0$, т.е. $-m + M_z = 0$; $M_z = m = M_k$.

Эпюры крутящих моментов

Крутящие моменты могут меняться вдоль оси бруса. После определения величин моментов по сечениям строим график-эпюру крутящих моментов вдоль оси бруса.

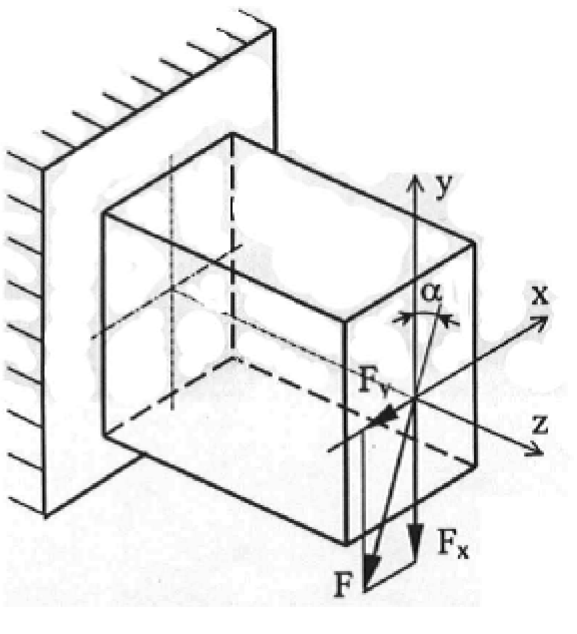
Крутящий момент считаем положительным, если моменты внешних пар сил направлены по часовой стрелке, в этом случае момент внутренних сил упругости направлен против часовой стрелки.

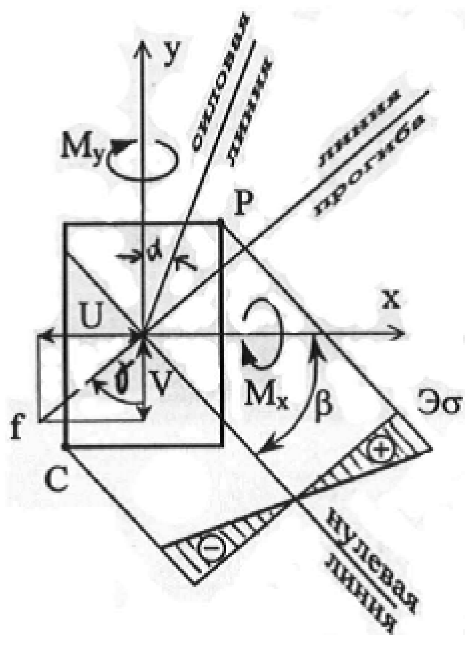


Порядок построения эпюры моментов аналогичен построению эпюр продольных сил. Ось эпюры параллельна оси бруса. значения моментов откладывают от оси вверх или вниз, масштаб построения выдерживать обязательно.

Тема 2.7. Сложное сопротивление
Косой изгиб

Косым изгибом называется разновидность сложного сопротивления, при которой плоскость действия результирующего изгибающего момента не совпадает ни с одной из плоскостей симметрии поперечного сечения .





Угол наклона нейтральной линии

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha \frac{I_x}{I_y}. \qquad (7.1)$$

Условия прочности

- для сечения произвольной формы

$$\sigma_p = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_p + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_p \le [\sigma]_p; \qquad (7.2)$$

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_c + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_c \le [\sigma]_c; \qquad (7.3)$$

- для сечений типа прямоугольник.

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma].; \qquad (7.4)$$

Перемещения и расчет на жесткость

$$f = \sqrt{v^2 + u^2}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{v}{u}. \qquad (7.5)$$

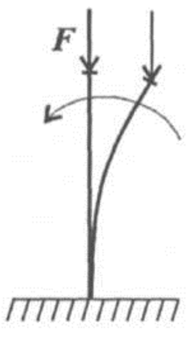
При плоском косом изгибе линия результирующего прогиба перпендикулярна к нейтральной линии.

Условие жесткости

$f_{max} \le [f]$.   (7.6)

Тема 2.8. Устойчивость центрально-сжатых стержней.

Относительно короткие и массивные стержни рассчитывают на сжатие, т.к. они выходят из строя в результате разрушения или остаточных деформаций. Длинные стержни небольшого поперечного сечения под действием осевых сжимающих сил изгибаются и теряют равновесие. Такие стержни работают на изгиб и сжатие.



Равновесие считают устойчивым, если за счет сил упругости после снятия внешней отклоняющей силы стержень восстановит первоначальную форму .Если упругое тело после отклонения от равновесного положения не возвращается к исходному состоянию, то говорят, что произошла потеря устойчивости, а равновесие было неустойчивым. Потерю устойчивости под действием центрально приложенной продольной сжимающей силы называют продольным изгибом.

На устойчивость равновесия влияет величина сжимающей силы. Наибольшее значение сжимающей силы, при которой прямолинейная форма стержня сохраняет устойчивость, называют критической силой. Даже при небольшом превышении критического значения силы стержень недопустимо деформируется и разрушается.

Расчет на устойчивость.

Расчет на устойчивость заключается в определении допускаемой сжимающей силы и в сравнении с ней силы действующей:

$F \le [F]$; $[F] = \frac{F_{кр}}{[s_y]}$; $F \le \frac{F_{кр}}{[s_y]}$, где F — действующая сжимающая сила;

[F] — допускаемая сжимающая сила, обеспечивает некоторый запас устойчивости;

$F_{кр}$ — критическая сила;

$[s_y]$ — допускаемый коэффициент запаса устойчивости.

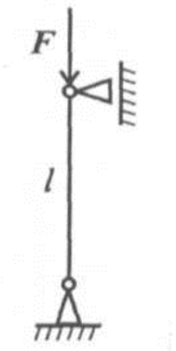
Обычно для сталей $[s_y] = 1{,}8 \div 3$; для чугуна $[s_y] = 5$; для дерева $[Sy] \approx 2{,}8$.

Способы определения критической силы

Расчет по формуле Эйлера

Для шарнирно закрепленного с обеих сторон стержня формула Эйлера имеет вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2},$$



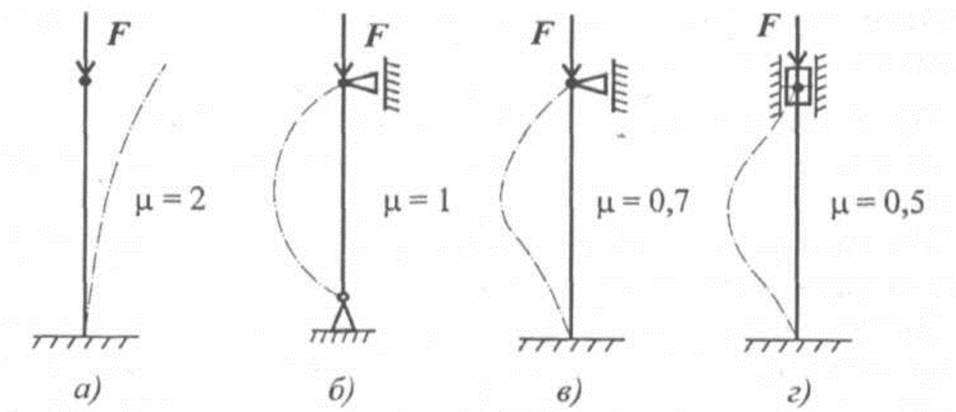
где E – модуль упругости;

$J_{\min}$ – минимальный осевой момент инерции стержня;

l – длина стержня. Потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости, поэтому в формулу входит минимальный из осевых моментов инерции сечения (J_x или J_y).

Длина стержня заменяется ее приведенным значением, учитывающим форму потери устойчивости в каждом случае: $l_{прив} = \mu д$, где μ — коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления стержня Формула для расчета критической силы для всех случаев

$$F_{кр} = \frac{\rho^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2}.$$



Критические напряжения.

Критическое напряжение — напряжение сжатия, соответствующее критической силе.

Напряжение от сжимающей силы определяется по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 A},$$

где $\sigma_{кр}$ — напряжение сжатия, при котором стержень еще устойчив. Корень квадратный из отношения минимального момента инерции сечения к площади поперечного сечения принято называть минимальным радиусом инерции $i_{\min}$:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}; \quad \frac{J_{\min}}{A} = i_{\min}^2.$$

Тогда формула для расчета критического напряжения перепишется в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}.$$

Отношение $\mu l / i_{\min}$ носит название гибкости стержня λ.

Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера выполняется только в пределах упругих деформаций.

Таким образом, критическое напряжение должно быть меньше предела упругости материала.

Предел упругости при расчетах можно заменять пределом пропорциональности. Таким образом, $\sigma_{кр} \le \sigma_y \approx \sigma_{пц}$, где σ_y — предел упругости; $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности материала; $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц}$. Откуда гибкость стержня: $\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$;

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$$ - предельная гибкость.

Предельная гибкость зависит от материала стержня.

В случае, если $\lambda < \lambda_{пред}$ в материале стержня возникают остаточные деформации. Поскольку в реальных конструкциях могут возникать пластические деформации, не приводящие к потере работоспособности, созданы эмпирические формулы для расчетов в этих случаях.

Расчет критического напряжения по формуле Ф. О. Ясинского для стальных стержней

Материал	σ, МПа	b, МПа	λ_0	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст2Сталь Ст3Сталь 20, Ст4Сталь 45Дюралю мин Д16ТСосн а, ель	2643103284494 0629,3	0,701,141,151,671, 830,194	6060605 230-	1051009685 5370

Критическое напряжение определяется по формуле $\sigma_{кр} = a — b\lambda$. где a и b — коэффициенты, зависящие от материала; их значения представлены в таблице.

Раздел 3. Статика сооружений

Тема 3.1.Основные положения и задачи раздела. Сооружения и их элементы

Сооружения весьма разнообразны. Поэтому они и классифицируются по-разному. Например, только по назначению сооружения делятся на промышленные, общественные, жилищные, транспортные, гидротехнические, подземные, сельскохозяйственные, военные и др.

В сооружениях используются элементы разных типов:

1) стержни – прямые или криволинейные элементы, поперечные размеры a и b которых намного меньше длины l (рис. 1.2 а, б, в);

2) плиты – элементы, толщина которых t меньше остальных размеров a и b; плиты могут быть прямыми (рис. 1.2 г), и кривыми в одном или двух направлениях (рис. 1.2 д, е);

3) массивные тела — элементы, все три размера которых одного порядка (рис. 1.2 ж).

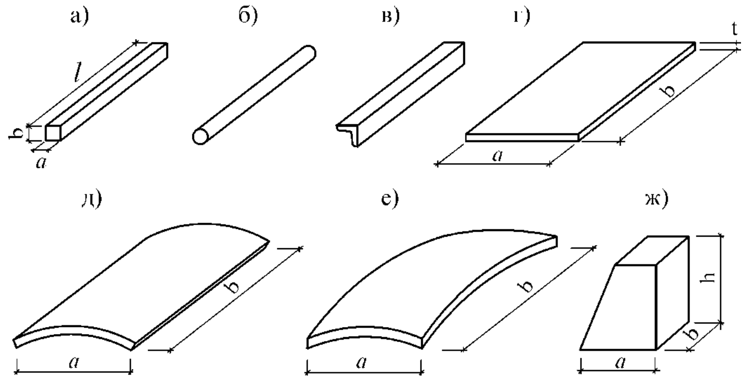


Рис. 1.2Простейшие сооружения, состоящие из таких элементов, можно подразделять на следующие типы – стержневые сооружения (рис. 1.3 а, б), складчатые сооружения(рис. 1.3 в), оболочки (рис. 1.3 г) и массивные сооружения – подпорные стенки (рис. 1.3 д) и каменные своды (рис. 1.3 е):

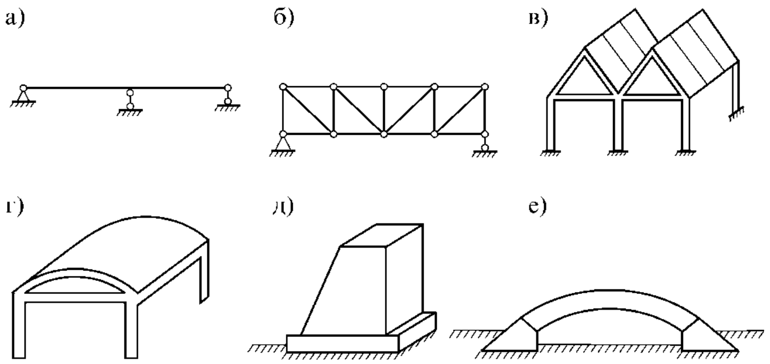


Рис. 1.3Современные строители научились возводить очень сложные сооружения, состоящие из разнообразных элементов различной формы и типа. Например, достаточно распространенным является сооружение, у которого основание массивное, средняя часть может состоять из колонн стержневого типа и плит, а верхняя часть – из плит или оболочек.

Тема 3.2. Исследование геометрической неизменяемости плоских стержневых систем

Стержневыми системами называются системы, состоящие из отдельных, обычно прямолинейных, стержней, соединенных между собой в узлах с помощью сварки, заклепок, болтов или других скреплений; одним из видов таких систем являются плоские фермы. В большинстве случаев соединения стержней фермы в узлах являются жесткими — не шарнирными. Точный расчет фермы с такими узлами весьма сложен, так как обычно она является много раз статически неопределимой системой. Если жесткие узлы фермы условно заменить шарнирными, то расчет ее значительно упрощается и при известных условиях может быть выполнен с помощью одних лишь уравнений статики. Опытные данные и теоретические исследования показывают, что такая замена допустима, так как при сосредоточенных нагрузках, приложенных в узлах, усилия, возникающие в шарнирной ферме, мало отличаются от усилий в ферме с жесткими узлами (в случае, когда стержни имеют достаточно большую длину). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться условной расчетной схемой фермы со стержнями, шарнирно соединенными в узлах.

Если заменить жесткие узлы системы, состоящей из трех стержней (изображенной на рис. 1.7, а), шарнирами, то система останется геометрически неизменяемой (рис. 1.7, б), т. е. такой, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

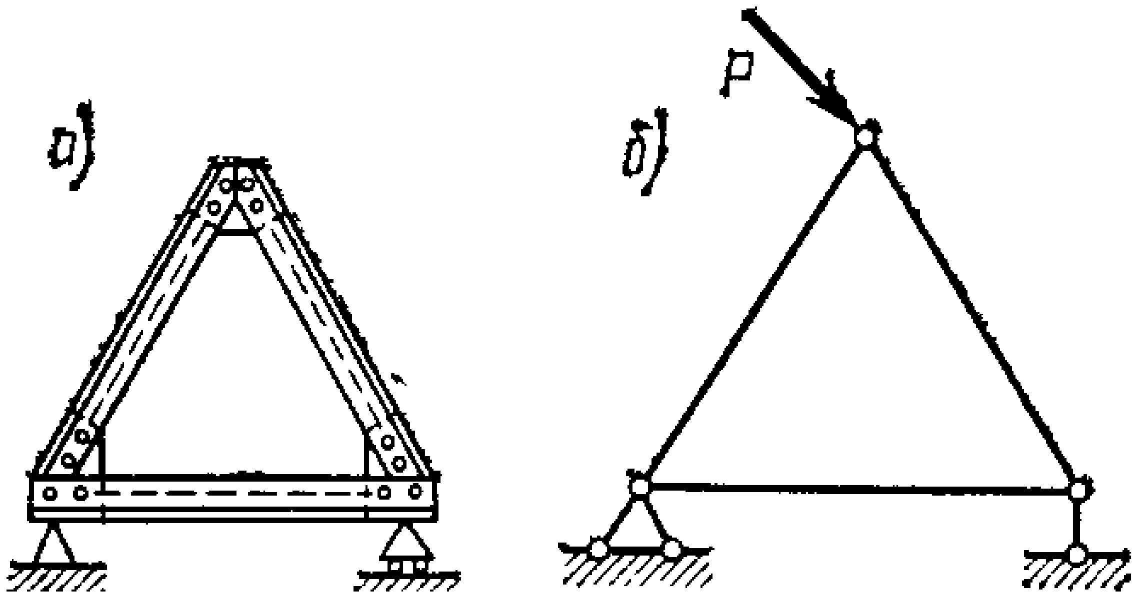


Рис. 1.7

Если же заменить жесткие узлы шарнирами в системе, состоящей из четырех стержней (изображенной на рис. 1.8, а), то получится система геометрически изменяемая (рис. 1.8, б), т. е. такая форма которой может меняться без деформации ее элементов.

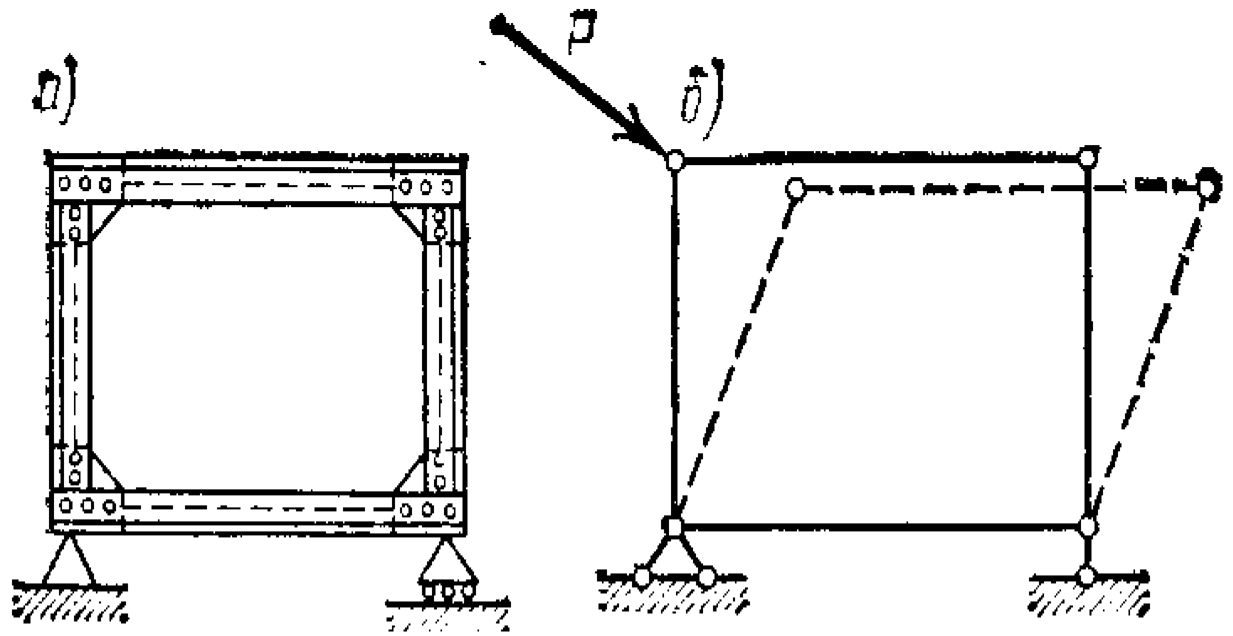


Рис. 1.8

Наипростейшей геометрически неизменяемой, сочлененной из отдельных элементов, шарнирной системой (фермой) является система, состоящая из трех стержней, соединенных шарнирами в треугольник (см. рис. 1.7, б). Установим, как может быть образована геометрически неизменяемая система, состоящая более чем из трех стержней, соединенных шарнирами.

Предварительно рассмотрим систему из двух стержней (рис. 1.9), лежащих на одной прямой и соединяющих узел *C* с двумя неподвижными точками *A* и *B*. Если разъединить стержни *AC* и *BC* в точке *C*, то конец *C* стержня *AC* переместится по окружности *m* — *m,* а конец *C* стержня *BC* — по окружности *n* — *n*. Эти окружности в точке *C* имеют общую касательную. Следовательно, если точка *C* одного из стержней получит весьма малое перемещение по перпендикуляру к *AB*, то другой стержень не сможет воспрепятствовать этому перемещению. Таким образом, рассматриваемая система является геометрически изменяемой, так как ее форма может меняться при неизменной длине стержней, т. е. при отсутствии деформаций ее элементов.

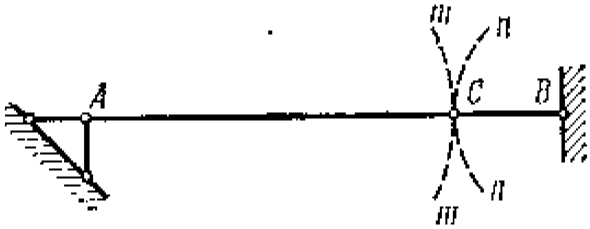


Рис. 1.9

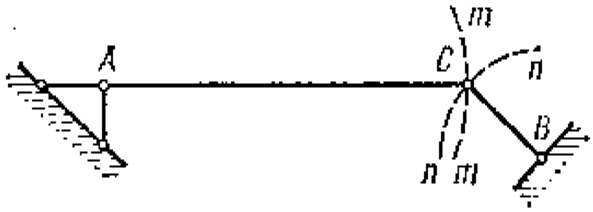


Рис. 1.10

Систему с двумя стержнями, лежащими на одной прямой (рис. 1.9), в дальнейшем будем называть мгновенно изменяемой, так как она в следующее мгновение после малого смещения точки С по перпендикуляру к прямой АВ превращается в неизменяемую систему.

Иная картина получается, если стержни АС и ВС не лежат на одной прямой (рис, 1.10); в этом случае окружности m — m и n — n не имеют общей касательной, а потому даже малое перемещение узла С невозможно без деформации стержней.

Под статически определимой системой понимается такая система, для которой усилия во всех ее элементах могут быть определены с применением лишь уравнений равновесия (т.е. число неизвестных равно числу независимых уравнений равновесия). Если этого сделать нельзя, то такая система называется статически неопределимой системой. В статически неопределимой системе число неизвестных больше числа полезных уравнений равновесия.

Разность между числом неизвестных усилий (реакций опор и внутренних силовых факторов) и числом независимых уравнений равновесия, которые могут быть составлены для рассматриваемой системы, называется степенью статической неопределимости системы. Связи, наложенные на систему, бывают внешними и внутренними. Подвнешними понимают ограничения, накладываемые на абсолютные перемещения точек системы, как единое целое. Внутренние же связи ограничивают взаимные (относительные) перемещения элементов системы. Статическая неопределимость системы может быть вызвана как внешними, так и внутренними связями.

Определение реакций в статически неопределимой системе называется раскрытия статической неопределимости. Методы расчета статически неопределимых систем основаны на определении перемещений в точках наложения связей. Любая наложенная связь (любое ограничение движения) позволяет составить дополнительное уравнение, называемое уравнением совместности перемещений. В результате появляется возможность сделать число уравнений равным числу неизвестных и решить полученную систему уравнений.

Тема 3.3. Многопролетные статически определимые (шарнирные) балки

В плоских балочных и рамных системах отдельные стержни могут быть соединены между собой жестко, с помощью шарниров, либо подвижными связями. Для определения внутренних усилий в стержнях можно составить условия равновесия каждого стержня, получив таким образом систему уравнений с неизвестными внутренними усилиями: концевыми значениями продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для каждого стержня. В статически определимых системах число составленных таким образом уравнений будет равно числу неизвестных, так что можно решить полученную систему уравнений относительно всех внутренних сил.

Однако такой способ расчетая вляется слишком громоздким. Анализ структуры системы и выявление присоединенных к основной частисистемы элементов позволяют вести расчет без решения полной системы уравнений с многими неизвестными. Присоединенной называется такая часть системы, которую можно удалить без нарушения неизменяемости оставшейся части.

Присоединенную систему можно рассчитать независимо от оставшейся части, причем опорные реакции присоединенной системы будут служить внешними силами для оставшейся. Для удобства расчета шарнирные балки рекомендуется расчленять на простые элементы, т.е. составлять схему взаимодействия балок (поэтажную схему). Нарисунке показана статически определимая многопролетная балка и этапы ее расчета.

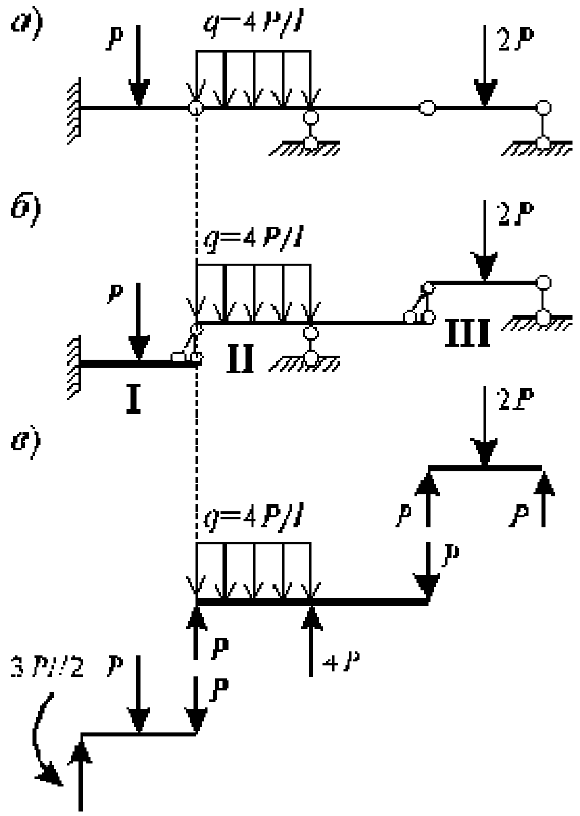


Рис.

Основной балкой в данном случаеявляется балка I, балка III является присоединенной, балка II присоединенная по отношению к балке I и основной по отношению к балке III (рис. *б*).

Степень изменяемости системы:

$n = 3\,D - C = 3{\times}3 - 9 = 0.$

Число степеней свободы системы определяется :

$W = 3\,D - 2\,Ш - C_0 = 3{\times}3 - 2{\times}2 - 5 = 0.$

Так как, в данном случае выполняются необходимое и достаточное условие, т.е. $n = 0$ и $W = 0$, то данная схема геометрически неизменяемая и статически определимая. Рассчитав последовательно присоединенную балку III, получим реакции, передающиеся от балки III к основной балке II. Далее рассчитываем балку II, как присоединенную и получимреакцию, передающуюся балке I. Определение внутренних усилий в каждой балке рассматривается самостоятельно, считая их статически определимыми системами.

Тема 3.4. Статически определимые плоские рамы

Плоской рамой называется стержневая система, элементы которой жестко или шарнирно соединены между собой, нагруженная в своей плоскости.

Вертикально (или под наклоном) расположенные стержни рамы называются стойками, а горизонтальные - ригелями. Жесткость узлов устраняет возможность взаимного поворота скрепленных стержней, то есть в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

Как и многие другие системы, рамы делятся на статически определимые и статически неопределимые (рис. б,в,д,е).

Промежуточный шарнир снижает степень статической неопределимости рамы на величину $m - 1$, где m - число стержней, сходящихся в шарнире. Если $m > 2$, то шарнир называется кратным (рис, д).

Для определения степени статической неопределимости плоской рамы можно воспользоваться формулой:

$$n = 3К - Ш,$$

где n - степень статической неопределимости; К - число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров; Ш - число шарниров в пересчете на одиночные.

Основание (земля) рассматривается как стержень.

Для рамы (рис., б) имеем:

К=1; Ш=0;

$$n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$$

Для рамы (рис.,д):

К=3; Ш=3

$$n = 3 \cdot 3 - 3 = 6$$

В более простых случаях, когда отсутствуют замкнутые контуры и промежуточные шарниры, то есть когда используются комбинации тех же опор, что и в балках (жесткая заделка, шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опоры), для определения степени статической неопределимости используется "балочная" формула:

$$n = r - S,$$

где r - число неизвестных реакций; S - число уравнений статики (для плоской рамы $S=3$).

В данной работе ограничимся рассмотрением простейших статически определимых рам трех видов:

1) с жесткой заделкой;

2) на двух шарнирных опорах (неподвижной и подвижной);

3) на двух шарнирно неподвижных опорах с простым промежуточным шарниром.

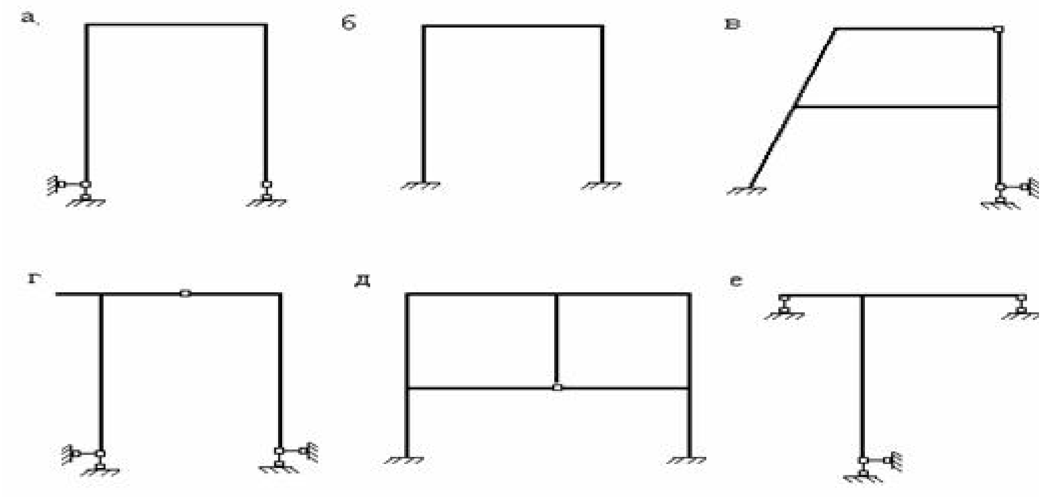


Рис.

Из шести внутренних силовых факторов в сечениях плоской рамы в общем случае возникают три: продольная сила N_z; поперечная сила Q_y; изгибающий момент M_x.

Правила знаков. Для N_z и Q_y сохраняются ранее принятые правила знаков.

$N_z > 0$, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, вызывает в данном сечении растяжение и $N_z < 0$- в противном случае.

$Q_y > 0$, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, стремится повернуть данное сечение по часовой стрелке и $Q_y < 0$ - в противном случае.

Ординаты эпюр N_z и Q_y (как, впрочем и M_x) откладывают, как и обычно, перпендикулярно к оси элементов рамы. Иногда положительные ты N_z и Q_y откладывают с внешней стороны рамы, а отрицательные – с внутренней, но рама часто имеет такую конфигурацию, при которой невозможно выделить внутреннюю и внешнюю стороны, поэтому в дальнейшем условимся: ординаты эпюр N_z и Q_y откладываются в произвольную сторону, но обязательно указывается знак.

Для изгибающих моментов специального правила знаков нет, а при вычислении момента в любом сечении знак принимается произвольно. Но результат вычислений всегда откладывается со стороны сжатого волокна элемента рамы. При этом знак на эпюре M_x никогда не указывается. Такое условие полностью соответствует характеру построения эпюр M_x в балках, где в соответствии с принятым для изгибающих моментов правилом знаков ординаты эпюр M_x всегда оказывались расположенными со стороны сжатых волокон балки.

Тема 3.5. Трехшарнирные арки

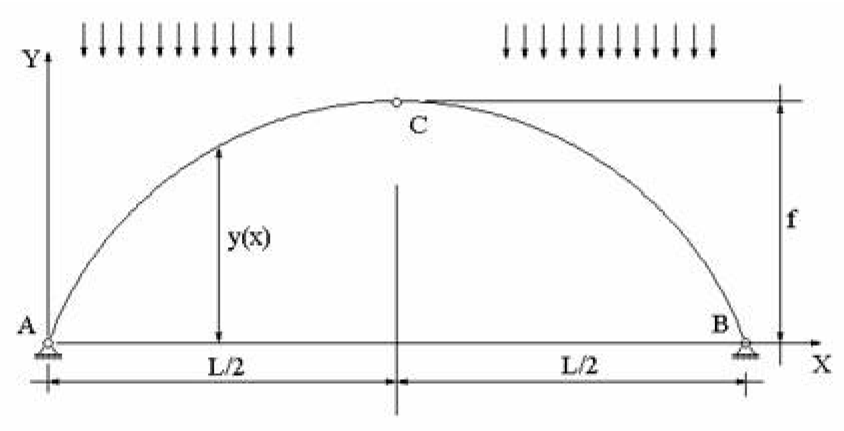


Рис.

Арка - система криволинейных стержней. К статически определимым системам относятся трехшарнирные арки, имеющие шарнирные опоры на краях и один промежуточный шарнир, чаще всего - центральный (рис.).

Пролет арки - расстояние между ее опорами L. Опору арки принято также называть пятой арки, центральный шарнир - замком арки, а расстояние f от прямой, соединяющей опорные шарниры до замка арки, - стрелой арки или стрелой подъема арки.

Арки относятся к распорным системам, т.е. таким системам, в опорах которых, в отличие от безраспорных систем, при действии только вертикальной нагрузки возникает ненулевое горизонтальное усилие, называемое распором.

Инженер-строитель может столкнуться с необходимостью выбора между безраспорной системой (балкой) и распорной системой (аркой) для выполнения перекрытия некоторого пролета, например, мостового. При этом арку сопоставляют ссоответствующей балкой, т.е. простой балкой на двух опорах, перекрывающей такой же пролет и находящейся под действием такой же вертикальной нагрузки, что и арка.

Ключ арки – место, в котором сечение, перпендикулярное к оси арки, является осью симметрии.

Ось арки – средняя линия, проходящая через центры тяжести сечений арки.

Равномерно распределенная нагрузка на единицу длины – нагрузка постоянной интенсивности, измеряемая на единицу длины оси арки.

Равномерно распределенная нагрузка на единицу проекции – нагрузка постоянной интенсивности, измеряемая на единицу проекции оси арки на какую-либо ось координат.

Продольная сила – направленная по касательной к оси арки проекция главного вектора системы сил, заменяющего в данном поперечном сечении действие отброшенной части арки на ее оставшуюся часть. Положительное направление продольной силы совпадает с направлением нормали к сечению арки и соответствует растяжению.

Поперечная сила – направленная вдоль оси, перпендикулярной к оси арки составляющая главного вектора системы сил, заменяющего в данном поперечном сечении действие отброшенной части арки, на ее оставшуюся часть. Положительное направление поперечной силы совпадает с направлением нормали к сечению, повернутой по часовой стрелке на прямой угол.

Изгибающий момент – взятый относительно оси поперечного сечения арки момент системы сил, заменяющий в данном поперечном сечении действие отброшенной части арки на ее оставшуюся часть. Положительный изгибающий момент растягивает нижние волокна в арке.

Частным случаем трехшарнирной арки является трехшарнирная арка с затяжкой (рис.).

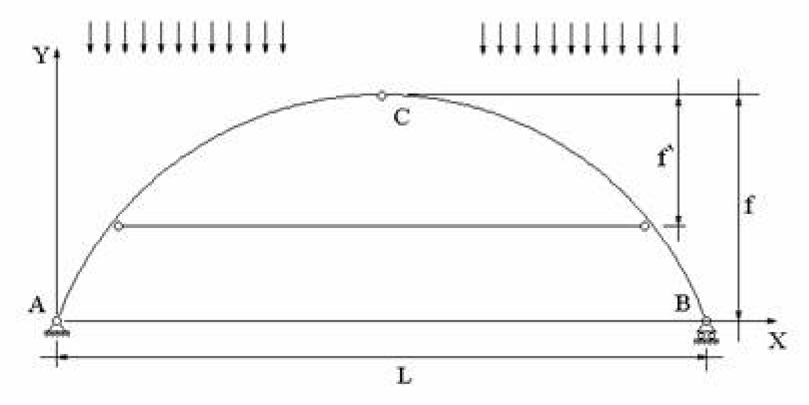


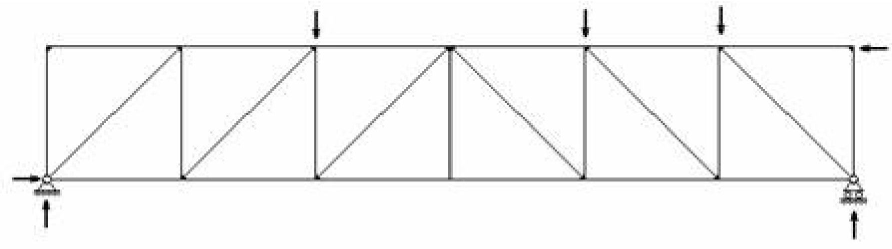
Рис.

Затяжка - горизонтальный стержень, предназначенный для полного или частичного восприятия горизонтального распора. Для того, чтобы система при наличии затяжки осталась статически определимой, одну опору арки делают катковой. В этом случае, при отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки горизонтальные реакции в опорах будут равными нулю, а затяжка будет воспринимать распор полностью.

При нагрузке определенного вида очертание арки можно задать таким, чтобы в ней не возникало изгибающих моментов. Такие арки называют арками рационального очертания.

Тема 3.6. Статически определимые плоские фермы

Фермой называется стержневая система , остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными.



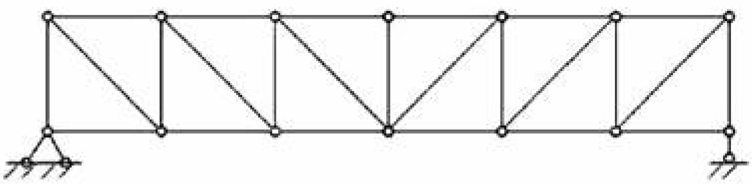
Иногда используются пространственные фермы, расчет которых обычно сводится к расчету нескольких плоских ферм.

Расстояние между осями опор фермы называется ее пролетом. Стержни, расположенные по внешнему контуру, называются поясными и образуют пояса. Вертикальные стержни, соединяющие пояса, называются стойками, наклонные –раскосами. Стойки и раскосы образуют решетку фермы. Расстояние между соседними узлами пояса фермы называется панелью.

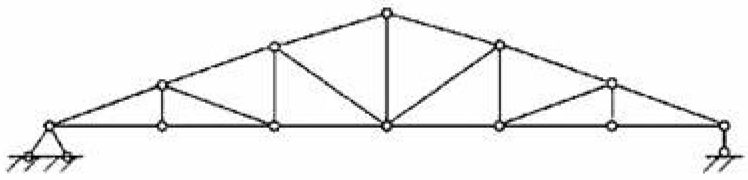
Классификацию ферм обычно проводят по пяти признакам:

1) характеру очертания внешнего контура; 2) типу решетки; 3) типу опирания фермы; 4) назначению; 5) уровню езды.

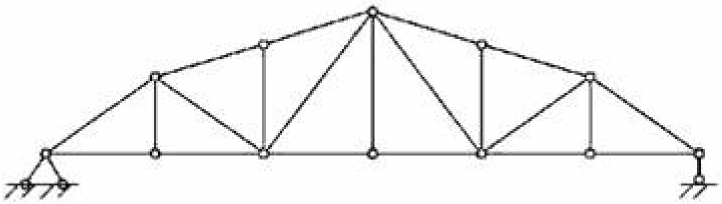
По характеру очертания различают фермы с параллельными поясами (рис. а), треугольные фермы (рис. б) и с ломанным, или полигональным расположением поясов (рис. в).



а)



б)



в)

Рис.

В зависимости от типа решетки различают фермы различных типов. Наиболее распространенными являются раскосные фермы (рис.а), фермы с треугольной решеткой (рис.б), фермы с полураскосной решеткой (рис.в) и фермы с ромбической решеткой (рис.г). Раскосы, идущие вверх от опор к середине фермы, называют восходящими раскосами , идущие наоборот - нисходящими раскосам.

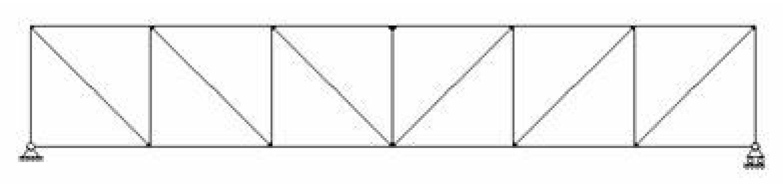


Рис.а

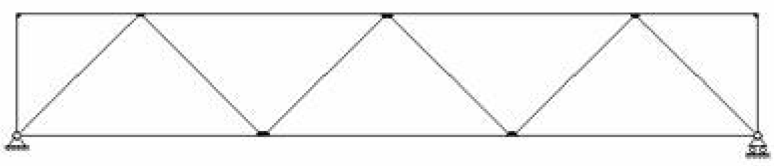


Рис.б

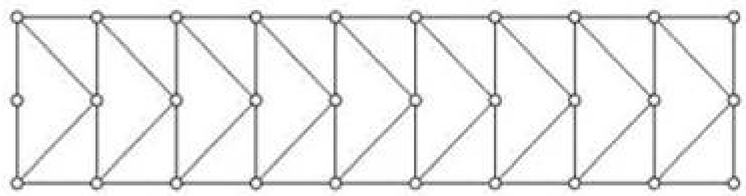


Рис.в

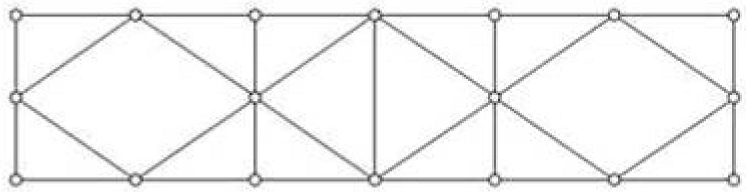


Рис.г

Тема 3.7. Определение перемещений в статически определимых плоских системах

Статически неопределимой называют такую систему, которая не может быть рассчитана по методу сечений с использованием лишь одних условий равновесия, так как она обладает лишними связями. В качестве лишних следует принимать те связи, которые необходимо отбросить из состава заданной, чтобы превратить ее в статически определимую и геометрически неизменяемую систему.

Главной особенностью статически неопределимых систем является наличие лишних связей в их структуре. Лишние связи сооружений можно удалять, не нарушая их геометрической неизменяемости. Например, удалением опорных вертикальных связей B и C неразрезная балка преобразуется в консольный стержень, введением цилиндрических шарниров K и L – в статически определимую двухпролётную составную балку (рис.а). Удалив из статически неопределимой фермы стержень 14 или 34, получим два варианта статически определимой шарнирно-стержневой системы с простой структурой (рис. б). Статически неопределимая двухшарнирная рама после удаления горизонтальной связи опоры B превращается в ломаный стержень, прикреплённый к диску "земля" шарниром A и вертикальной связью, ось которой не проходит через шарнир A. Введением цилиндрического шарнира C эта же рама преобразуется в статически определимую трёхшарнирнуюраму (рис. в).

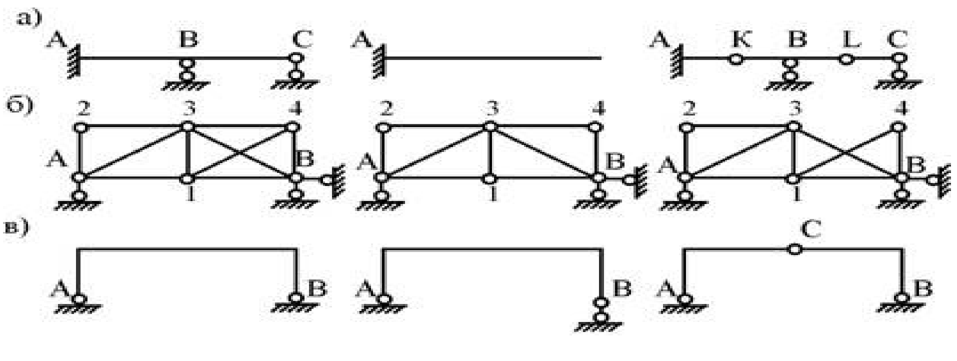


Рис.

Особенностью всех лишних связей, удалённых из статически неопределимых систем, показанных слева на рис. , является то, что реакции в них от внешних воздействий с помощью уравнений статики определить нельзя. Эти связи называются условно необходимыми. Вместе с тем, в составе рассмотренных сооружений имеются связи, усилия в которых определяются из условий равновесия: горизонтальная связь опоры A неразрывной балки (рис. а), стержни $A_{2,23}$, A_1, A_3 фермы (рис. б), вертикальные связи пятовых шарниров A и B рамы (рис. в). Такие связи называются абсолютно необходимыми. Их удаление превращает заданное сооружение в геометрически изменяющую или мгновенно изменяемую систему.

Степень статической неопределимости системы C легко установить путем вычитания из общего числа опорных стержней m число стержней, необходимых для сохранения геометрически неизменяемого прикрепления системы (одно - для одномерных; три - для плоских и шесть - для пространственных систем).

Тема 3.8. Основы расчета статически неопределимых систем по методу сил

Основной системой метода сил называется система, образованная из заданной расчётной схемы сооружения удалением лишних связей. Если удаляются все лишние связи, то заданное статически неопределимое сооружение преобразуется в статически определимое. В этом случае, вычислив каким-либо способом реакции в лишних связях от заданных воздействий (силовых, температурных, кинематических), мы задачу расчёта статически неопределимого сооружения сведём к известной задаче по определению напряжённо-деформированного состояния в статически определимом сооружении.

На плоскую стержневую систему с известными геометрическими размерами и заданной топологией (рис.а) независимо друг от друга действуют p вариантов силовых полей (постоянная и временные нагрузки). Будем считать, что в состав постоянной и временных нагрузок входят сосредоточенные силы и моменты, а также распределённые на различных участках нагрузки с заданными законами изменения интенсивностей, в том числе и равномерно распределённые нагрузки. Изменение жесткостных характеристик поперечных сечений вдоль осей элементов сооружения на изгиб EJ_k, сдвиг GA_k и растяжение–сжатие EA_k примем по ступенчато переменному закону.

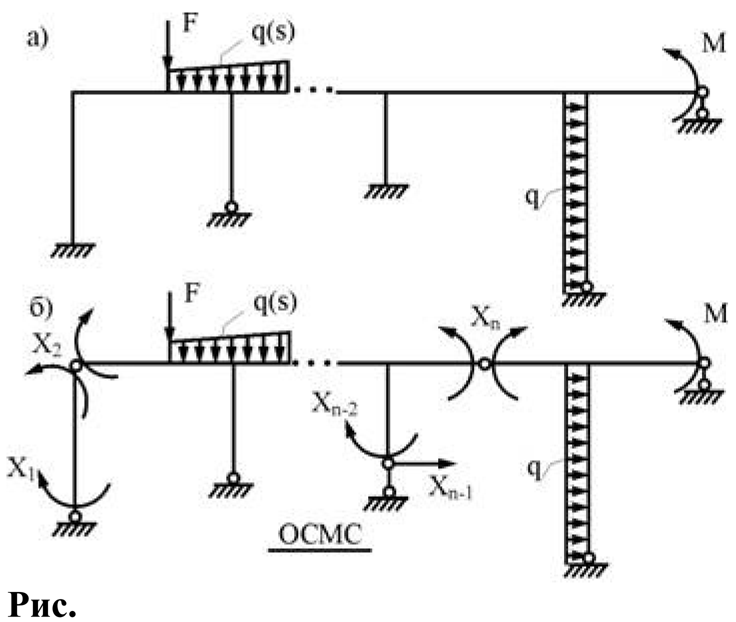


Рис.

Степень статической неопределимости заданного сооружения равна n, т.е. сооружение имеет n лишних связей. Образуем геометрически неизменяемую статически определимую основную систему метода сил (ОСМС), удалив из расчётной схемы сооружения n лишних связей (рис.б). Действие отброшенных связей заменим соответствующими реакциями $X_1, X_2, ..., X_j, \dots, X_n$. Эти реакции в дальнейшем будем называть неизвестными метода сил. Неизвестные метода сил $X_1, X_2, ..., X_j, \dots, X_n$ определим из условия эквивалентности напряжённо-деформированных состояний заданного сооружения (рис.а) и его основной системы метода сил (рис.б), т.е. из условия равенства нулю перемещений по направлению X_i ($i = 1, 2, \dots, n$)в основной системе метода сил от заданной нагрузки и неизвестных метода сил $X_1, X_2, ..., X_j, \dots, X_n$:

$\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, …, $\Delta_i = 0$, …, $\Delta_n = 0$.

Каждое из перемещений в соотношении в соответствии с принципом независимости действия сил представим как сумму перемещений отдельно от каждого неизвестного метода сил $X_1, X_2, ..., X_j, \dots, X_n$ и заданной нагрузки:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1^{(x_1)} + \Delta_1^{(x_2)} + \dots + \Delta_1^{(x_i)} + \dots + \Delta_1^{(x_j)} + \dots + \Delta_1^{(x_n)} + \Delta_{1F} = 0,\\
&\Delta_2^{(x_1)} + \Delta_2^{(x_2)} + \dots + \Delta_2^{(x_i)} + \dots + \Delta_2^{(x_j)} + \dots + \Delta_2^{(x_n)} + \Delta_{2F} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta_i^{(x_1)} + \Delta_i^{(x_2)} + \dots + \Delta_i^{(x_i)} + \dots + \Delta_i^{(x_j)} + \dots + \Delta_i^{(x_n)} + \Delta_{iF} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta_n^{(x_1)} + \Delta_n^{(x_2)} + \dots + \Delta_n^{(x_i)} + \dots + \Delta_n^{(x_j)} + \dots + \Delta_n^{(x_n)} + \Delta_{nF} = 0.
\end{aligned}$$

В i-й строке выражений записаны перемещения по направлению усилия X_i в основной системе метода сил, а именно: $\Delta_i^{(x_1)}$ – от неизвестного метода сил X_1; $\Delta_i^{(x_2)}$ – от неизвестного X_2; $\Delta_i^{(x_i)}$ – от X_i; $\Delta_i^{(x_j)}$ – от X_j; $\Delta_i^{(x_n)}$ – от X_n; Δ_{iF} – от заданной нагрузки. Каждое из упомянутых перемещений представим, повторно пользуясь принципом независимости действия сил, в виде:

$$\begin{aligned}
&\Delta_i^{(x_1)} = \delta_{i1} X_1,\\
&\Delta_i^{(x_2)} = \delta_{i2} X_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta_i^{(x_i)} = \delta_{ii} X_i,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta_i^{(x_j)} = \delta_{ij} X_j,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta_i^{(x_n)} = \delta_{in} X_n.
\end{aligned}$$

Из формул следует смысл коэффициентов δ_{ii} и δ_{ij}: δ_{ii} – перемещение по направлению усилия X_i от $X_i = 1$, δ_{ij} – перемещение по направлению усилия X_i от $X_j = 1$ в основной системе метода сил.

После подстановки соотношений получим систему канонических уравнений метода сил:

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1i}X_i + \ldots + \delta_{1j}X_j + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0, \\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2i}X_i + \ldots + \delta_{2j}X_j + \ldots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{ii}X_i + \ldots + \delta_{ij}X_j + \ldots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iF} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{ni}X_i + \ldots + \delta_{nj}X_j + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0.
\end{array}\right\}$$

В системе уравнений коэффициенты при неизвестных δ_{ii}, расположенные на главной диагонали, называются главными коэффициентами, коэффициенты δ_{ij} – побочными. Свободные члены системы канонических ний Δ_{iF} при силовом воздействии называются грузовыми коэффициентами. Побочные коэффициенты δ_{ij} и δ_{ji} подчиняются теореме о взаимности перемещений, т.е.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

Определив коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений и решив её, получим неизвестные метода сил X_1, X_2, ..., X_j, …, X_n, т.е. усилия в лишних связях.

Тема 3.9. Неразрезные балки

Неразрезной балкой называется статически неопределимая балка, опирающаяся в пролете на конечное число шарнирных опор. Крайние сечения неразрезной балки могут быть свободны, заделаны или шарнирно оперты. Одна из опор неразрезной балки имеет связь, препятствующую смещению балки вдоль ее оси.

Расчет неразрезной балки (рис.*а*) можно выполнить, как и любой статически неопределимой системы методом сил. Основную систему для расчета неразрезной балки получим, удалив из нее связи, препятствующие взаимному повороту смежных сечений балки над ее опорами, т.е. поместив шарниры в опорных сечениях балки (рис. *б*).

Неизвестными являются изгибающие моменты, возникающие в сечении неразрезной балки над опорами.

Выделим из основной системы четыре примыкающих друг к другу пролета со средней опорой номером *n* и построим единичные и грузовые эпюры (рис.). Из анализа единичных эпюр видно, что в любом каноническом уравнении только три единичных коэффициента будут отличны от нуля. Напишем одно из канонических уравнений в общем виде:

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{n,n}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{n,p} = 0\,. \tag{1}$$

Подсчитаем единичные и грузовые коэффициенты, применяя правило Верещагина «перемножения» эпюр:

$$\begin{aligned}
&\delta_{n,n-1} = \frac{1}{EJ_n}\cdot\frac{1\cdot l_n}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EJ_n};\\
&\delta_{n,n} = \frac{1}{EJ_n}\cdot\frac{1\cdot l_n}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{EJ_{n+1}}\cdot\frac{1\cdot l_{n+1}}{2}\cdot\frac{2}{3} = 2\cdot\left(\frac{l_n}{6EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}\right);\\
&\delta_{n,n+1} = \frac{1}{EJ_{n+1}}\cdot\frac{1\cdot l_{n+1}}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}};\\
&\Delta_{n,p} = \frac{1}{EJ_n}\cdot\Omega_n\cdot\frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EJ_{n+1}}\cdot\Omega_{n+1}\cdot\frac{b_n}{l_{n+1}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Подставим найденные коэффициенты в (1), получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{l_n}{6EJ_n}\cdot X_{n-1} + 2\cdot\left(\frac{l_n}{6EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}\right)\cdot X_n + \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}\cdot X_{n+1} =\\
&= -\frac{\Omega_n\cdot a_n}{EJ_n\cdot l_n} - \frac{\Omega_{n+1}\cdot b_{n+1}}{EJ_{n+1}\cdot l_{n+1}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

В случае балки постоянного сечения $J_1 = J_2 =...= J_n = J_{n+1}$ и введя обозначения $X_{n-1} = M_{n-1}$; $X_n = M_n$; $X_{n+1} = M_{n+1}$, получим:

$$M_{n-1}l_{n-1} + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{6\Omega_n a_n}{l_n} - \frac{6\Omega_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}}\,. \tag{4}$$

Это и есть уравнение трех моментов для неразрезной балки постоянного сечения. В этом уравнении неизвестными являются изгибающие моменты на опорах. Если у неразрезной балки все опоры шарнирные, то таких уравнений можно составить столько, сколько у балки промежуточных опор.

При наличии на концах балки нагруженных консолей, изгибающие моменты на крайних опорах войдут в уравнение трех моментов, как известные величины, а при отсутствии консолей эти моменты будут равны 0.

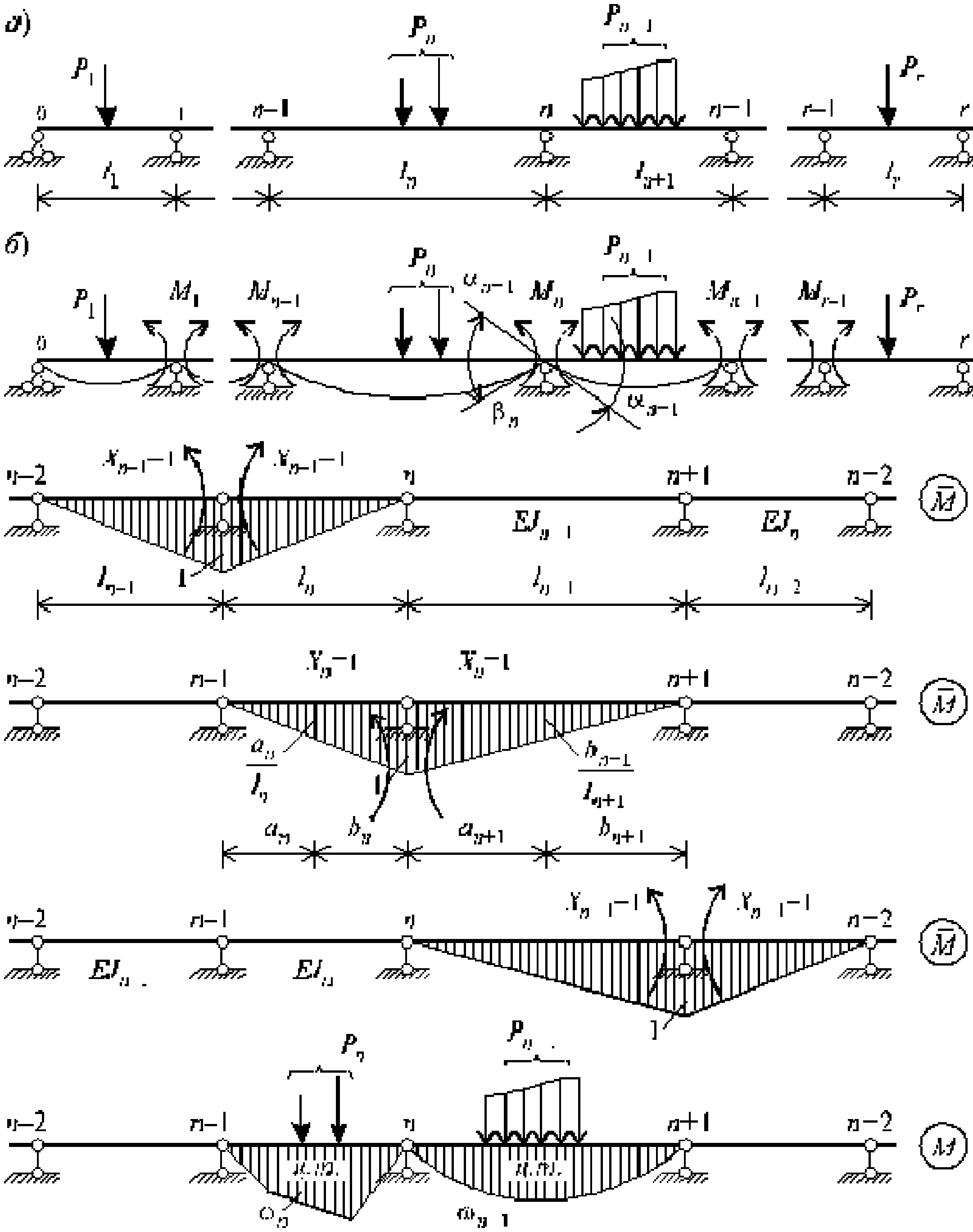


Рис.11.1

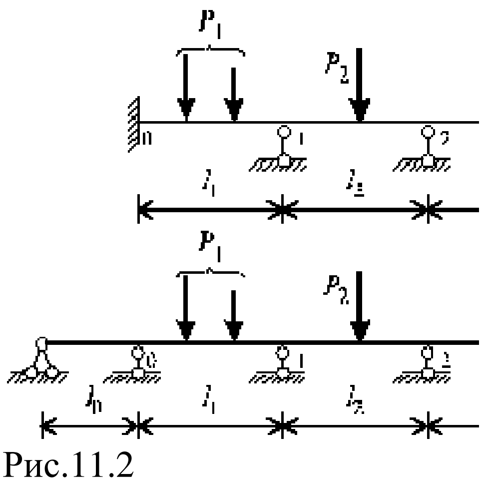


Рис.11.2

Если конец неразрезной балки защемлен, то для применения уравнения (11.4) необходимо, отбросив заделку, ввести с ее стороны дополнительный пролет l_0=0 (рис.11.2). Такая система будет деформироваться также, как балка с жесткой заделкой.

Решая совместно, составленные таким образом уравнения, найдем все неизвестные изгибающие моменты на опорах. Далее для построения эпюр *M* и *Q*, каждый пролет неразрезной балки рассматриваем как балку на двух шарнирных опорах, загруженных внешней нагрузкой и двумя опорными моментами. Ординаты эпюр могут быть подсчитаны по формулам:

$$M = M_P^0 + M_{n-1}\frac{l_n - x}{l_n} + M_n\frac{x}{l_n}, \qquad (11.5)$$

где M_P^0 и Q_P^0 - ординаты эпюр *M* и *Q* от внешней нагрузки в основной системе.

Тема 3.10. Подпорные стены

В общестроительном понятии подпорная стена - это конструкционное сооружение, удерживающее от обрушения и сползания находящийся за ней массив грунта на уклонах местности (откосах, склонах, выпуклостях и впадинах поверхности участка).

По конструктивному решению подпорные стены бывают:

А. Массивные подпорные стенки. Устойчивость на сдвиг и опрокидывание достигается собственно массой стенки (бетон, бутовая или кирпичная кладка). Массивные подпорные стены более материалоемкие и трудоемкие при возведении, чем тонкостенные, и могут применяться при соответствующем, технико-экономическом обосновании (например, при возведении их из местных материалов, отсутствии сборного железобетона и т. д.). Как правило, массивные подпорные стены имеют одинаковые размеры по высоте и ширине;

Б. Полумассивные. Устойчивость подпорной стенки обеспечивается комплексно: массой стенки и грунта лежащего на фундаментной плите. Такие стены обычно представляют собой конструкцию из армированного бетона;

В. Тонкоэлементные. Обычно состоят из связанных друг с другом железобетонных плит. Устойчивость стен этого типа обеспечивается в основном массой грунта над фундаментной плитой и лишь в небольшой степени собственным весом;

Г. Тонкие. Их устойчивость обеспечивается защемлением основания в грунте.

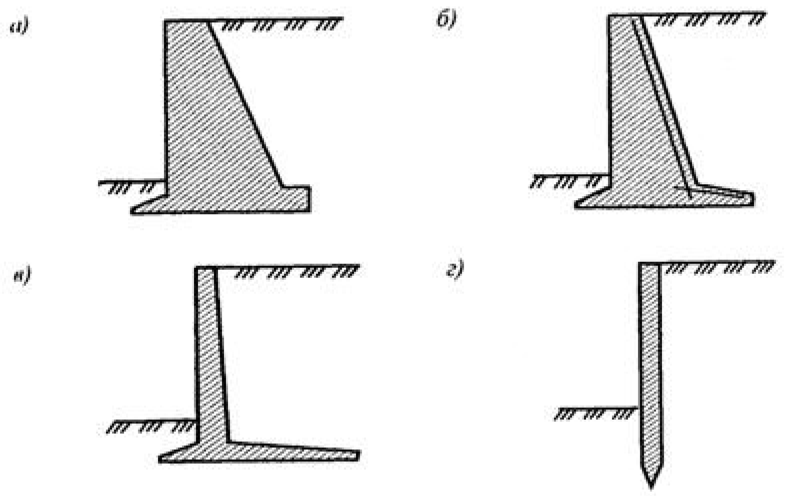


Рис. а - массивная неармированная; б – полумассивная армированная;
в - тонкоэлементная; г – тонкая

По расположению:

А. Отдельно стоящие;

Б. Связанные с примыкающими сооружениями (лестницы, пандусы, ниши для растений и т.д.).

По материалу изготовления:

железобетонные; бетонные; бутобетонные; из природного камня;

кирпичные; деревянные или металлические и т.д.

При прямолинейных очертаниях задней грани стены и поверхности засыпки интенсивность активного давления еа определяется по формуле:

еа = γ зас · z · ξа , (3.1)

где γ зас – удельный вес грунта засыпки, ;

z – глубина залегания рассматриваемой точки, м, от поверхности засыпки , в которой определяется величина еа;

ξа – коэффициент бокового активного давления грунта.

ξа = , (3.2)

где а = . (3.3)

Формулы (3.2.) – (3.5) приведены для положительных значений углов

ε и α. При отрицательных значениях ε и α знаки перед этими углами в указанных формулах меняются на обратные.

Расчет выполняется для 1 пог. м подпорной стены, поэтому размерность интенсивности давления – .

Величины горизонтальных еаг и вертикальных еав составляющих определяются по следующим формулам:

$e_{аг} = e_а \cdot \cos(\varepsilon + \delta)$; (3.4)

$e_{ав} = e_а \cdot \sin(\varepsilon + \delta)$; (3.5)

Величины равнодействующих определятся из следующих соотношений, кН:
$E_а = \cdot \gamma_{зас} \cdot H2 \cdot a$; (3.6)
$E_{аг} = E_а \cdot \cos(\varepsilon + \delta)$; (3.7)
$E_{ав} = E_а \cdot \sin(\varepsilon + \delta)$. (3.8)

В случае действия равномерно распределенной пригрузки q по поверхности засыпки ее заменяют эквивалентным ей по весу слоем грунта высотой

$h_{пр} =$ (3.9)

Тогда активное давление на уровне верха стенки определится по формуле:

$e_{а1} = \gamma_{зас} \cdot h_{пр} \cdot a$, (3.10)

а в уровне подошвы :

$e_{а2} = \gamma_{зас} \cdot (h_{пр} + H) \cdot a$, (3.11)

Равнодействующая трапецеидальной эпюры активного давления определится по формуле

$E_а = \cdot H$ (3.12)

и будет приложена к задней поверхности стены в точке, отстоящей по вертикали от подошвы на расстоянии

$h_о = \cdot$ (3.13)

Величина интенсивности пассивного давления $e_п$, действующего на переднюю грань фундамента подпорной стенки высотой d, определится из выражения

$e_п = \gamma_{зас} \cdot z \cdot \xi_п$, (3.14)

где z – ордината, отсчитываемая от поверхности грунта основания, м;
$\xi_п$ – коэффициент бокового давления отпора (пассивного давления), определяемый по формуле:$\xi_п = tq2\ (450 +)$, (3.15)
где φ- угол внутреннего трения грунта, лежащего в пределах глубины заложения d.

Коэффициент $\xi п$ определяется по формуле (3.15) при $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$, т.е. упрощенно, поскольку, как упоминалось выше, реализация отпора происходит при существенных перемещениях, превышающих, как правило, предельные. Поскольку в каждом конкретном случае величина перемещения для реализации полной величины отпора неизвестна, то его величина, во – первых, определяется упрощенным способом, во – вторых, вводом понижающего коэффициента 0,33.

Перечень рекомендуемой литературы

Основные источники:

1. Сетков В.И. Техническая механика для строительных специальностей: Учеб.пособие – М.:Академия, 2010

Дополнительные источники:

1. Мухин Н. В., Першин А. Н. Статика сооружений: Учебное пособие для техникумов. – М: «Высшая школа», 2006. – 343с.
2. Мухин Н. В. Статика сооружений в примерах. – М «Высшая школа», 2005. – 303 с.
3. Олофинская В. П. Техническая механика. Сборник тестовых заданий. – М.: «Форум Инфра», 2002. – 132 с.
4. Сетков В. И. Сборник задач по технической механике. Учебное пособие для техникумов. - М.: «Стройиздат», 2007. – 224с
5. Улитин Н. С., Першин А. Н. Сборник задач по технической механике: – М.: «Высшая школа», 2006. – 399с.
6. .Эрдеди А.А, Аникин И.В. Техническая механика: Учебник для техникумов. – М.: «Высшая школа», 2005. – 446с.

Учебное издание

Е.Г. Чапурина

Техническая механика

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 14.07.2015 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 3,72. Тираж 100 экз. Изд. № 3106.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ