

ФГБОУ ВО «Брянский государственный
аграрный университет»

Факультет среднего профессионального образования

Дьяченко О.В.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

для студентов специальностей 20.04.02 Пожарная безопасность,
23.02.03 Техническое обслуживание и ремонт автомобильного
транспорта, 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет
(по отраслям), 35.02.08 Электрификация
и автоматизация сельского хозяйства

Брянская область
2015

УДК 51(07)

ББК 22.1

Д 93

Дьяченко, О.В. **Теоретический курс по математике:** учебное пособие. / О.В. Дьяченко. – Брянск.: Издательство Брянский ГАУ, 2015. - 116 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов 2-3 курсов факультета среднего профессионального образования, содержит теоретический материал по дисциплине «Математика».

Рецензент: преподаватель математики факультета СПО Л.Н. Холодкова.

Рекомендована цикловой методической комиссией общеобразовательных, гуманитарных и социально-экономических, математических и общих естественно-научных дисциплин протокол № 2 от 15 сентября 2015 г.

© Брянский ГАУ, 2015

© Дьяченко О.В., 2015

Содержание

Раздел 1 Комплексные числа	4
Тема 1.1 Формы комплексного числа	4
Раздел 2 Линейная алгебра	14
Тема 2.1. Матрицы. Определители матриц. СЛАУ	14
Раздел 3. Математический анализ	27
Тема 3.1. Дифференциальное и интегральное исчисление	27
Тема 3.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения	36
Тема 3.3. Ряды	45
Раздел 4. Основы дискретной математики	62
Тема 4.1. Множества и отношения	62
Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики	68
Тема 5.1. Элементы комбинаторики и вероятность событий	68
Тема 5.2. Случайные величины и ее числовые характеристики.	84
Раздел 6. Основные численные методы	96
Тема 6.1. Численное интегрирование	96
Список литературы	115

Раздел 1. Комплексные числа

Тема 1.1. Формы комплексного числа

1. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над ними
2. Тригонометрическая, показательная форма комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение следующего вида: $z = x + iy$ Комплексное число в алгебраической форме, где $x, y \in \mathbb{R}$; i — это **мнимая единица**, определяемая равенством $i^2 = -1$.

Основные термины:

$x = \operatorname{Re} z$ — **действительная часть комплексного числа** z ;

$y = \operatorname{Im} z$ — **мнимая часть комплексного числа** z ;

$\bar{z} = x - iy$ — **комплексно сопряженное число** числу z ;

$-z = -x - iy$ — **противоположное число** числу z ;

$0 = 0 + 0i$ — **комплексный ноль**;

Примеры

$$1) z = 1 + i \Rightarrow \operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = 1, \bar{z} = 1 - i, -z = -1 - i;$$

$$2) z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \operatorname{Re} z = -1, \operatorname{Im} z = \sqrt{3}, \bar{z} = -1 - \sqrt{3}i, -z = 1 - \sqrt{3}i;$$

$$3) z = 5 + 0i = 5 \Rightarrow \operatorname{Re} z = 5, \operatorname{Im} z = 0, \bar{z} = 5 - 0i = 5, -z = -5 - 0i = -5$$

\Rightarrow если $\operatorname{Im} z = 0$, то $z = x$ — действительное число;

$$4) z = 0 + 3i = 3i \Rightarrow \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = 3, \bar{z} = 0 - 3i = -3i, -z = -0 - 3i = -3i$$

\Rightarrow если $\operatorname{Re} z = 0$, то $z = iy$ — **чисто мнимое число**.

Комплексные равенства

$$1) z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases};$$

$$2) \quad z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z = 0 \end{cases} .$$

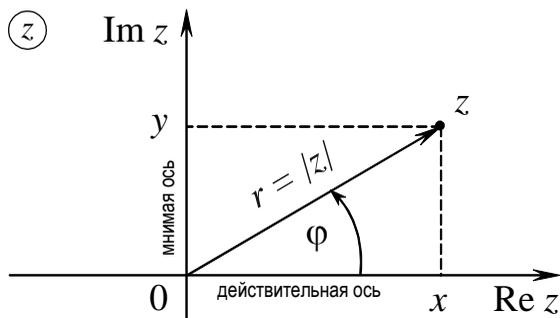
Одно комплексное равенство равносильно системе двух действительных равенств. Эти действительные равенства получаются из комплексного равенства разделением действительных и мнимых частей.

Примеры

$$1) \quad x + iy = -3 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} ;$$

$$2) \quad x^2 + i(y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} .$$

Геометрическое изображение комплексных чисел



$$\forall z = x + iy \Leftrightarrow (x, y)$$

Комплексное число z изображается точкой (x, y) на комплексной плоскости или радиус-вектором этой точки.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное действительное число $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Геометрически модуль комплексного числа — это длина вектора, изображающего число z , или полярный радиус точки (x, y) .

Аргумент комплексного числа z — это угол между положительным направлением действительной оси и вектором z (геометрически — это полярный угол точки (x, y)).

Обозначение $\varphi = \arg z$, причем $\arg z \in [0, 2\pi)$, или $(-\pi, \pi]$. Для вычисления аргумента комплексного числа используется формула

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}}$$

Аргумент комплексного числа, причем, при определении угла φ по его тангенсу обязательно нужно учитывать, в какой четверти на комплексной плоскости расположено число z :

$$\left[\begin{array}{l} \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ если } z \in \text{I или IV четверти,} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, \text{ если } z \in \text{II или III четверти.} \end{array} \right.$$

Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа

Так как геометрически очевидно, что $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, то

$$\boxed{z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Запись $z = x + iy$ называется **алгебраической формой комплексного числа** z ; запись $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется **тригонометрической формой комплексного числа** z .

Арифметические действия над комплексными числами

Сложение (вычитание) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

то есть при сложении (вычитании) комплексных чисел складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

Примеры

$$1) (1+i) + (2-3i) = 1+i+2-3i = 3-2i;$$

$$2) (1+2i) - (2-5i) = 1+2i-2+5i = -1+7i.$$

Умножение комплексных чисел в алгебраической форме

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$, то есть умножение комплексных чисел в алгебраической форме проводится по правилу алгебраического умножения двучлена на двучлен с последующей заменой $i^2 = -1$ и приведением подобных по действительным и мнимым слагаемым.

Пример

$$1) (1+i) \cdot (2-3i) = 2-3i+2i-3i^2 = 2-3i+2i+3 = 5-i;$$

Умножение комплексных чисел тригонометрической форме

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$$

Произведение комплексных чисел в тригонометрической форме, то есть при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Пример

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 6(0 + i \cdot 1) = 6i.$$

Основные свойства умножения

- 1) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ — коммутативность;
- 2) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ — ассоциативность;
- 3) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ — дистрибутивность относительно сложения;
- 4) $z \cdot 0 = 0$; $z \cdot 1 = z$;
- 5) $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Деление комплексных чисел

Деление — это обратная умножению операция, по-

этому если $z \cdot z_2 = z_1$ и $z_2 \neq 0$, то $z = \frac{z_1}{z_2}$.

При выполнении деления в алгебраической форме числитель и знаменатель дроби умножаются на число,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

комплексно сопряженное знаменателю: Деление комплексных чисел в алгебраической форме.

При выполнении деления в тригонометрической форме модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Примеры

$$1) \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i+2i-3i^2}{2^2-3^2i^2} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - i \frac{1}{13},$$

$$2) \frac{3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1,5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Возведение комплексного числа в натуральную степень

Возведение в натуральную степень удобнее выполнять в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n = \\ &= \underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_n \left(\cos(\underbrace{\varphi + \varphi + \dots + \varphi}_n) + i \sin(\underbrace{\varphi + \varphi + \dots + \varphi}_n) \right) = \\ &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

В результате получается **формула Муавра**:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Формула Муавра, то есть при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример

Вычислить $(1+i)^{10}$.

Решение:

$$\begin{aligned}1 + i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \\(1 + i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) = 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right) = \\&= 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32(0 + i \cdot 1) = 32i.\end{aligned}$$

Замечания

1. При выполнении операций умножения и возведения в натуральную степень в тригонометрической форме могут получаться значения углов φ за пределами одного полного оборота. Но их всегда можно свести к углам $\varphi \in [0; 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi; \pi]$ сбрасыванием целого числа полных оборотов по свойствам периодичности функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

2. Значение $\begin{cases} \varphi = \arg z \\ \varphi \in [0; 2\pi) \text{ или } \varphi \in (-\pi; \pi] \end{cases}$ называют главным значением аргумента комплексного числа z ; при этом значения всех возможных углов φ обозначают $\text{Arg } z$; очевидно, что $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа

Корнем степени n из комплексного числа z , где $n \in \mathbb{N}$, называется комплексное число ω , такое что $\omega^n = z \Rightarrow$

$$\sqrt[n]{z} = \omega \Leftrightarrow \omega^n = z.$$

Примеры

$$\sqrt{1} = \pm 1, \text{ так как } (\pm 1)^2 = 1;$$

$$\sqrt{-4} = \pm 2i, \text{ так как } (\pm 2i)^2 = 4i^2 = -4;$$

$$\sqrt[4]{1} = \pm 1 \text{ или } \pm i, \text{ так как } (\pm 1)^4 = 1 \text{ и } (\pm i)^4 = 1.$$

Из определения очевидно следует, что операция извлечения корня из комплексного числа является многозначной.

Если использовать формулу Муавра, то нетрудно доказать следующее утверждение:

$\sqrt[n]{z}$ существует при $\forall z$ и если $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений, вычисляемых по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Извлечение корня натуральной степени из комплексного числа, где $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

$\sqrt[n]{|z|}$ — арифметический корень на \mathbb{N} .

Все значения $\sqrt[n]{z}$ расположены регулярным образом на окружности радиусом $\sqrt[n]{|z|}$ с начальным углом $\frac{\varphi}{n}$ и углом регулярности $\frac{2\pi}{n}$.

Примеры

1)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-1} &= \sqrt[3]{1(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) = \\ &= \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} = \omega_k, \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \cos \frac{\pi+2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2\pi}{3} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 = -1,$$

$$\omega_2 = \cos \frac{\pi+4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+4\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sqrt[3]{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -1, \\ \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Ответ:

Показательная форма комплексного числа

Показательной формой комплексного числа

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется форма $z = r \cdot e^{i\varphi}$ Показательная форма комплексного числа, где $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Примеры

$$1) z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}};$$

$$2) z = 3 + 0i = 3(\cos 0 + i \sin 0) = 3 \cdot e^{i0};$$

$$3) z = 0 + 4i = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 4e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Действия над комплексными числами в показательной форме выполняются по правилам действий со степенями:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, n-1.$$

Примеры

Пусть $z_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

$$z_2 = -\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Тогда $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 4\sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right)} = \sqrt{2} e^{-i\frac{13\pi}{12}} = \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}$$
;

$$z_1^8 = \left(2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^8 = (2\sqrt{2})^8 e^{-i\frac{8\pi}{4}} = 2^{12} e^{-i2\pi} = 2^{12} \cdot e^{-i0} = 2^{12}$$
;

$$\sqrt[5]{z_2} = \sqrt[5]{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{5\pi + 2\pi k}{5}} = \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{5}\right)} = \omega_k, \quad \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt[5]{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[5]{2} (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ), \\ \omega_1 = \sqrt[5]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2} (\cos 102^\circ + i \sin 102^\circ), \\ \omega_2 = \sqrt[5]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2} (\cos 174^\circ + i \sin 174^\circ), \\ \omega_3 = \sqrt[5]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2} (\cos 246^\circ + i \sin 246^\circ), \\ \omega_4 = \sqrt[5]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2} (\cos 318^\circ + i \sin 318^\circ), \end{array} \right.$$

Числа $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[5]{2}$.

Раздел 2. Линейная алгебра

Тема 2.1. Матрицы. Определители матриц. СЛАУ

1. Матрицы. Действия над матрицами. Определители, их свойства
2. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Метод обратной матрицы

Действия над матрицами

Определение. Прямоугольная таблица из m , n чисел, содержащая m – строк и n – столбцов, вида:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \text{ называется матрицей размера } m \times n$$

Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*. Положение элемента a_{ij} в матрице характеризуются двойным индексом: первый i – номер строки; второй j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Сокращенно матрицы обозначают заглавными буквами: $A, B, C \dots$

Определение. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$, называется *квадратной*. Число строк (столбцов) квадратной матрицы называется *порядком матрицы*.

Замечание. Мы будем рассматривать матрицы, элементами которых являются числа. В математике и ее приложениях встречаются матрицы, элементами которых являются другие объекты, например, функции, векторы.

Замечание. Матрица – специальное математическое понятие. С помощью матриц удобно записывать различные преобразования, линейные системы и т.д., поэтому матрицы часто встречаются в математической и технической литературе.

Определение. Матрица размера $1 \times n$, состоящая из одной строки, называется **матрицей – строкой**. Матрица размера $t \times 1$, состоящая из одного столбца, называется **матрицей – столбцом**.

Определение. **Нулевой матрицей** называют матрицу, все элементы которой равны нулю.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n :



Диагональ квадратной матрицы, идущая от верхнего левого элемента таблицы к правому нижнему, называется **главной диагональю матрицы** (на главной диагонали стоят элементы вида a_{ii}).

Диагональ, идущая от правого верхнего элемента к левому нижнему, называется **побочной диагональю матрицы**.

Рассмотрим некоторые частные виды квадратных матриц.

1) Квадратная матрица называется **диагональной**, если все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

2) Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется *единичной*. Обозначается:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Для квадратной матрицы вводится понятие: *определитель матрицы*. Это определитель, составленный из элементов матрицы. Обозначается: $|A|$ или $\det A$

Ясно, что определитель единичной матрицы равен 1: $|E| = 1$

Замечание. Неквадратная матрица определителя не имеет.

Определение. Матрица, полученная из данной заменой ее строк столбцами с теми же номерами, называется *транспонированной к данной*.

Матрицу, транспонированную к A , обозначают A^T .

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение. Две матрицы одного и того же размера называются *равными*, если равны все их соответственные элементы.

Рассмотрим основные действия над матрицами.

Сложение матриц.

Операция сложения вводится только для матриц одинакового размера.

Определение. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов слагаемых матриц, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Обозначается сумма матриц $A + B$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad \qquad 2 \times 3 \qquad \qquad 2 \times 3$

Умножение матриц на действительное число

Определение. Чтобы умножить матрицу на число k , надо умножить на это число каждый элемент матрицы: если $A = (a_{ij})$, то $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$

Пример.

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 9 & 0 & -21 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

Матрицу A назовем *согласованной* с матрицей B , если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , т.е. для согласованных матриц матрица A имеет размер $m \times n$, матрица B имеет размер $n \times k$. Квадратные матрицы согласованы, если они одного порядка.

Определение. Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица C размера $m \times k$, элемент которой a_{ij} , расположенный в i -ой строке и j -ом столбце, равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Обозначим: $C = A \bullet B$.

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$C = A \bullet B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

Произведение $B \times A$ не имеет смысла, т.к. матрицы 2×3 2×2

B и A не согласованы.

Замечание. Если $A \times B$ имеет смысл, то $B \times A$ может не иметь смысла.

Замечание. Если имеет смысл $A \times B$ и $B \times A$, то, вообще говоря $A \times B \neq B \times A$, т.е. умножение матриц не обладает переместительным законом.

Замечание. Если A – квадратная матрица и E – единичная матрица того же порядка, то $A \times E = E \times A = A$.

Отсюда следует, что единичная матрица при умножении играет роль единицы.

Отметим, что в результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица–множимое и столько столбцов, сколько их имеет матрица–множитель.

Можно показать, что, если A и B – две квадратные матрицы одного порядка с определителями $|A|$ и $|B|$, то определитель матрицы $C = A \times B$ равен произведению определителей перемножаемых матриц, т.е.

Элементарные преобразования переводят систему уравнений в равносильную ей.

Для решения СЛАУ применяется три метода: метод Гаусса, метод Крамера и матричный метод.

Метод Гаусса

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных) применим для решения систем линейных уравнений, в которых число неизвестных может быть либо равно числу уравнений, либо отлично от него.

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

1-ый шаг метода Гаусса.

На первом шаге исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент $a_{11} \neq 0$. Назовем его ведущим элементом. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11} . Получим уравнение:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \quad (2)$$

$$\text{где } a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} ; \quad j = 1, 2, 3 ; \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при x_1 (соответственно a_{21} и a_{31}).

Система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \quad (3)$$

Верхний индекс (1) указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы.

2-ой шаг метода Гаусса.

На втором шаге исключим неизвестное x_2 из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Выберем его за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \quad (4)$$

$$\text{где } a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на $a_{33}^{(1)}$. Получим уравнение:

$$a_{33}^{(2)} \cdot x_3 = b_3^{(2)}$$

Предполагая, что $a_{33}^{(2)} \neq 0$, находим

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_3^3$$

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ \quad \quad \quad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_3 = b_3^{(3)} \end{cases} \quad (5)$$

Система вида (5) называется **треугольной**.

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют **прямым ходом метода Гаусса**.

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют **обратным ходом метода Гаусса**.

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2 . Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1 .

В общем случае для системы m линейных уравнений с n неизвестными проводятся аналогичные преобразования. На каждом шаге исключается одно из неизвестных из всех уравнений, расположенных ниже ведущего уравнения.

Отсюда другое название метода Гаусса – *метод последовательного исключения неизвестных*.

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида $0 = b$, где $b \neq 0$, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система m линейных уравнений с n неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

Треугольная система имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1 \\ \quad \quad \quad x_2 + \dots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \quad \quad \quad \dots \dots \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_n = d_n \end{array} \right.$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится в результате проведения обратного хода метода гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \quad \quad \quad x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \quad \quad \quad \dots \dots \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_k + \dots + c_{kn}x_n = d_k \end{array} \right.$$

Такая система имеет бесчисленное множество решений. Чтобы найти эти решения, во всех уравнениях системы члены с неизвестными x_{k+1}, \dots, x_k переносят в правую часть. Эти неизвестные называются свободными и придают им произвольные значения. Из полученной треугольной системы находим x_1, \dots, x_k , которые будут выражаться через свободные неизвестные.

Метод Крамера

Запишем алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

1. Вычисляем определитель основной матрицы системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и убеждаемся, что он отличен от нуля.

2. Находим определители $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

которые являются определителями матриц, полученных из матрицы A заменой k -ого столбца ($k = 1, 2, \dots, n$) на столбец свободных членов.

3. Вычисляем искомые неизвестные переменные x_1, x_2, x_3 по формулам $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

4. Выполняем проверку результатов, подставляя x_1, x_2, x_3 в исходную СЛАУ. Все уравнения системы должны обратиться в тождества. Можно также вычислить произведение матриц $A \cdot X$, если в результате получилась матрица, равная B , то решение системы найдено верно. В противном случае в ходе решения была допущена ошибка.

Матричный метод

Поговорим о матричном методе решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \text{ которые в матричной форме}$$

записываются как $A \cdot X = B$, где

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

основная матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных переменных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов.

Сначала опишем суть матричного метода, остановимся на условии применимости этого метода, далее подробно разберем решения нескольких примеров.

Сразу оговоримся, что решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом и решение СЛАУ с помощью обратной матрицы есть одно и то же.

Пусть для матрицы A порядка n на n существует обратная матрица A^{-1} . Умножим обе части матричного уравнения $A \cdot X = B$ слева на A^{-1} (порядки матриц $A \cdot X$ и B позволяют произвести такую операцию, смотрите статью операции над матрицами, свойства операций). Имеем $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как для операции умножения матриц подходящих порядков характерно свойство ассоциативности, то последнее равенство можно переписать как $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, а по определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = E$ (E – единичная матрица порядка n на n), поэтому $X = A^{-1}B$.

Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Другими словами, решение СЛАУ

находится с помощью обратной матрицы A^{-1} .

Мы знаем, что квадратная матрица A порядка n на n имеет обратную матрицу A^{-1} только тогда, когда ее определитель не равен нулю. Следовательно, систему n линей-

ных алгебраических уравнений с n неизвестными можно решать матричным методом только тогда, когда *определитель* основной матрицы системы *отличен от нуля*.

Составим **алгоритм нахождения обратной матрицы**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \|A_{ij}\|^T.$$

цы с использованием равенства

1. Вычисляем определитель матрицы A и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица A необратима).

2. Строим $\|A_{ij}\|$ - матрицу из алгебраических дополнений элементов a_{ij} .

3. Транспонируем матрицу $\|A_{ij}\|$, тем самым получаем $\|A_{ij}\|^T$.

4. Умножаем каждый элемент матрицы $\|A_{ij}\|^T$ на число $\frac{1}{|A|}$. Этой операцией завершается нахождение обратной матрицы A^{-1} .

5. Проводим проверку результата, вычисляя произведения $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$. Если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, то обратная матрица найдена верно, в противном случае где-то была допущена ошибка.

Раздел 3. Математический анализ

Тема 3.1. Дифференциальное и интегральное исчисление

1. Нахождение производных различных функций.
2. Вычисление интегралов различными методами.

Вспомним производные всех основных элементарных функций, которые уже были изучены ранее.

Таблица производных основных элементарных функций

$C' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(x^2)' = 2x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Нахождение производных многих других элементарных функций (более сложных, не входящих в эту таблицу) осуществляется на основе следующих правил вычисления производных (*правил дифференцирования функций*):

$$1. (u + v)' = u' + v' ;$$

$$2. (u - v)' = u' - v' ;$$

$$3. (C \cdot u)' = C \cdot u' ;$$

$$4. (u \cdot v)' = u' \cdot v + uv' ; \quad 5. \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – любые две дифференцируемые функции, а C – любая константа.

Производная сложной функции

Пусть $y = y(u)$, а $u = u(x)$ – любые две дифференцируемые функции своих аргументов, а их производная вычисляется по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x \Leftrightarrow y' = y'_u \cdot u'$. Формула представляет собой *правило вычисления производной (правило дифференцирования) сложной функции*.

Производная функции, заданной неявно

Если функция $y = f(x)$ задана в неявном виде, то есть задана уравнением $F(x; y) = 0$ (в этом уравнении y не выражен через x , и выразить его не удастся), то при нахождении производной y' такой функции поступают следующим образом:

1 способ

Найти производную от функции, заданной неявно

$$3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$$

1) На первом этапе навешиваем штрихи на обе части: $(3x^2y^2 - 5x + \sin y)' = (3y - 1)'$

2) Используем правила линейности производной $3(x^2y^2)' - 5(x)' + (\sin y)' = 3(y)' - (1)'$

3) Непосредственное дифференцирование.

Производная от функции равна её производной:

$$(y)' = y'$$

Как дифференцировать $(\sin y)' = ?$. Используем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$(\sin y)' = \cos y \cdot y' = y' \cos y$$

Произведение дифференцируем по обычному правилу $(uv)' = u'v + uv'$:

$$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)'$$

Обратите внимание, что $(y^2)'$ – тоже сложная функция

$$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$$

$$3((x^2)'y^2 + x^2(y^2)') - 5 + \cos y \cdot y' = 3y' - 0$$

$$3(2xy^2 + x^2 \cdot 2yy') - 5 + y' \cos y = 3y'$$

$$6xy^2 + 6x^2yy' - 5 + y' \cos y = 3y'$$

$$6x^2yy' + y' \cos y - 3y' = 5 - 6xy^2$$

$$(6x^2y + \cos y - 3)y' = 5 - 6xy^2$$

$$y' = \frac{5 - 6xy^2}{6x^2y + \cos y - 3}$$

2 способ

Найдем производную неявной функции

$3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$ вторым способом.

Переносим все слагаемые в левую часть:

$$3x^2y^2 - 5x + \sin y - 3y + 1 = 0$$

И рассматриваем функцию двух переменных:

$$z = F(x, y) = 3x^2y^2 - 5x + \sin y - 3y + 1$$

Тогда нашу производную можно найти по форму-

ле
$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Найдем частные производные:

$$F'_x = (3x^2y^2 - 5x + \sin y - 3y + 1)'_x = 6xy^2 - 5 + 0 - 0 + 0 = 6xy^2 - 5$$

$$F'_y = (3x^2y^2 - 5x + \sin y - 3y + 1)'_y = 6x^2y - 0 + \cos y - 3 + 0 = 6x^2y + \cos y - 3$$

Таким образом:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{6xy^2 - 5}{6x^2y + \cos y - 3} = \frac{5 - 6xy^2}{6x^2y + \cos y - 3}$$

Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ – некоторая заданная функция, а $y' = f'(x)$ – ее производная. Тогда $(y')' = y''$ – производная второго порядка от функции y . Применяют и другие обозначения этой производной:

$$(y')' = y'' = y''_{x^2} = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \ddot{y}$$

Далее,

$$(y'')' = y''' = y'''_{x^3} = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \ddot{\ddot{y}}$$

– производная третьего порядка от функции y . И т.д. Кстати, обычную производную $y' = f'(x)$ часто

называют *производной первого порядка*.

Физический смысл производной второго порядка

Если $y = f(x)$ – уравнение движения точки по ее траектории (см. рис. 4.3), то, как мы знаем, ее производная $y' = f'(x)$ (производная первого порядка) представляет собой скорость $v(x)$ движения точки (мгновенную скорость движения) – см. (1.7). Но тогда производная второго порядка $y'' = (y')' = v'(x)$ будет иметь смысл «скорость изменения скорости» движения точки. В физике такая величина называется ускорением. Поэтому

$$y'' = f''(x) = v'(x) = a(x)$$

– ускорение движения точки в момент x . В этом и состоит физический смысл производной второго порядка.

Интегральное исчисление

В дифференциальном исчислении ставилась задача: для данной функции найти ее производную. В интегральном исчислении ставится обратная задача: по производной функции найти саму функцию.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая заданная функция.

Определение. *Всякая функция $y = F(x)$, производная $y' = F'(x)$ которой совпадает с функцией $y = f(x)$, называется первообразной для функции $y = f(x)$. То есть если $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x)$ будет первообразной для функции $f(x)$ (а $f(x)$ будет производной от своей первообразной $F(x)$).*

Таким образом, найдя какую-либо первообразную $F(x)$ для данной функции $f(x)$, мы сразу можем записать для нее и множество других первообразных:

$$F(x) + C \quad (C - \text{неопределенная константа})$$

Это выражение представляет собой *множество всех первообразных для функций $f(x)$* . Это множество Лейбниц обозначил специальным символом

$$\int f(x)dx$$

и назвал *неопределенным интегралом от функции $f(x)$* . Здесь знак \int - *знак неопределенного интеграла*; $f(x)$ - *подинтегральная функция*; $f(x)dx$ - *подинтегральное выражение*; x - *переменная интегрирования*.

$$\text{Можно записать и так } \int f(x)dx = F(x) + C$$

Таким образом, *отыскивая (вычисляя) неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, мы тем самым ищем все первообразные $F(x) + C$ для подинтегральной функции $f(x)$* .

Основные свойства неопределенных интегралов.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

3. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс неопределенная константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. Нахождение функции $F(x)$ по ее дифференциалу $dF(x)$:

если $dF(x) = f(x)dx$, то $F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \quad (k - \text{константа, } k \neq 0)$$

6. Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx$$

Таблица основных неопределенных интегралов

$\int 0 \cdot dx = C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin}x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a} \right + C$		

Основные методы интегрирования

Основных методов интегрирования, то есть основных методов вычисления неопределенных интегралов, *четыре*:

- 1) Непосредственное интегрирование.
- 2) Интегрирование с помощью подстановки (с помощью замены переменной интегрирования).
- 3) Интегрирование по частям.
- 4) Приближенное интегрирование.

Определенный интеграл

Определенные интегралы, как и неопределенные интегралы, введены в математику Ньютоном и Лейбницем. К понятию неопределенного интеграла их привела проблема нахождения первообразных для заданной функции, то есть задача, обратная задаче нахождения производных функций. А к понятию определенного интеграла их привела совсем другая проблема - проблема точного решения ряда фундаментальных для практики числовых задач, к рассмотрению которых мы сейчас и переходим.

1. Задача о вычислении площади произвольной криволинейной трапеции.

$$S = \int_a^b f(x) dx - \text{площадь криволинейной трапеции}$$

2. Задача о вычислении пути при переменной скорости движения.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt - \text{перемещение } s, \text{ пройденное точкой по}$$

траектории ее движения

3. Задача о нахождении работы переменной силы

$$A = \int_a^b F(x) dx - \text{ работа } A, \text{ которую совершит пере-}$$

менная сила $F = F(x)$, если её точка приложения x переместится вдоль оси ox из положения a в положение b .

4. Задача о нахождении объема производства при заданной производительности труда

$$R = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt - \text{ объем } R \text{ произведенной продукции с}$$

момента времени t_1 до момента времени t_2 , где t_1 и t_2 - заданные числа.

Свойства определенных интегралов:

$$1) \int_a^b f(x) dx = A - \text{ число (число } A \text{ может быть любого}$$

знака).

$$2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz = (\dots) = A$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \int_a^b 0 \cdot dx = 0$$

$$5) \int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a$$

$$6) \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$7) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$8) \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \dots \pm \int_a^b f_n(x)dx$$

$$9) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k - \text{любая константа})$$

10) Если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

11) Пусть $m = [f(x)]_{\text{наим}}$ и $M = [f(x)]_{\text{наиб}}$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$. Тогда

$$m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b)$$

Это неравенство часто используется для прикидки

(грубой оценки) величины $\int_a^b f(x)dx$.

Тема 3.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Понятие о дифференциальных уравнениях. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

4. Дифференциальные уравнения второго порядка вида $y''=f(x)$

Определение 1. Уравнение, содержащее хотя бы одну из производных y', y'', y''', \dots неизвестной функции $y = y(x)$, называется дифференциальным уравнением для этой функции. Сама функция y и её аргумент x могут входить, а могут и не входить в дифференциальное уравнение. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

Таким образом,

$F(x; y; y') = 0$ - общий вид дифференциального уравнения первого порядка;

$F(x; y; y'; y'')$ - общий вид дифференциального уравнения второго порядка, и т.д.

Определение 2. Решением (частным решением) дифференциального уравнения на некотором промежутке $[a; b]$ оси ox называется любая функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех $x \in [a; b]$ дифференциальному уравнению, то есть обращающая его в тождество (верное числовое равенство $0=0$). Графики частных решений $y = f(x)$ дифференциального уравнения называется его интегральными кривыми.

Определение 3. Решить дифференциальное уравнение (любого порядка) – это значит найти все его частные решения, то есть найти все функции $y = f(x)$, удовлетворяющие этому уравнению. Формула, содержащая все (или почти все) частные решения дифференциального уравнения, называется его общим решением. Частные решения, не содержащиеся в общем решении, называются особыми решениями дифференциального уравнения.

А теперь сделаем следующее важное замечание. Функция $y = f(x)$, являющаяся частным решением данного дифференциального уравнения, может быть им лишь для

тех x , для которых определена и она, и все её производные, входящие в дифференциальное уравнение. Вносит свои ограничения и сама структура дифференциального уравнения (что-то в нем может находиться под корнем, что-то под логарифмом и т.д.). А так как у разных функций, вообще говоря, разные области определения (особенно с учетом областей определения их производных), то разные частные решения $y = f(x)$ дифференциального уравнения удовлетворяют этому уравнению, вообще говоря, на разных числовых множествах оси ox .

Схема получения общего решения любого дифференциального уравнения первого порядка такова:

$$F(x; y; y') = 0 \Rightarrow \quad | \text{интегрируем} \quad \text{уравнение} | \quad \Rightarrow \\ \Phi(x; y; C) = 0 \Rightarrow y = y(x; C)$$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Если дифференциальное уравнение первого порядка $F(x; y; y') = 0$ задано вместе с начальным для него условием $y(x_0) = y_0$, то говорят, что для этого уравнения задана *задача Коши*:

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Решить её - это значит найти те частные решения $y = f(x)$ дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$, которые еще удовлетворяют и заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Схема решения задачи Коши такова:

1. Решаем дифференциальное уравнение $F(x; y; y') = 0$ и находим все его решения. То есть находим общее решение (общий интеграл) $y = y(x; C)$ и возможные осо-

бые решения $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$; ...

2. Подставляем начальные значения $x = x_0$ и $y = y_0$ в общее решение и находим соответствующее значение (значения) константы C :

$$y_0 = y(x_0; C) \Rightarrow C = (C_1; C_2; \dots)$$

3. Подставляем каждое из найденных значений C в общее решение $y = y(x; C)$ и получаем частные решения

$$y = y(x; C_1); \quad y = y(x; C_2); \dots,$$

являющиеся решением задачи Коши. Это те решения этой задачи, которые выделяются из общего решения дифференцированного уравнения $F(x; y; y') = 0$.

4. Проверяем, нет ли среди особых решений $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$; ... дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$ таких, которые удовлетворяют начальному условию $y(x_0) = y_0$. Если такие найдутся, они тоже будут решениями задачи Коши (2.1).

Основные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка и их решение

1. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

Это - дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x)$$

Решение такого уравнения очевидно: всякая функция y , удовлетворяющая этому уравнению, является первообразной для функции $f(x)$. А значит, любое частное решение $y = y(x)$ этого уравнения может быть найдено в результате интегрирования функции $f(x)$:

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C$$

Формула представляет собой общее решение урав-

нения. Она содержит в себе все частные решения этого уравнения. Особых решений у уравнения нет.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это – дифференциальные уравнения вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Решение таких уравнений производится по следующей схеме.

1) Сначала находим такие числовые значения y , при которых $f_2(y) = 0$:

$$f_2(y) = 0 \Rightarrow y = (y_1; y_2 \dots)$$

Функции ($y = y_1$; $y = y_2 \dots$) являются, очевидно, частными решениями уравнения, ибо при подстановке каждой из них в это уравнение получим тождество $0=0$.

2) Теперь находим все остальные решения $y = y(x)$ уравнения, для которых $f_2(y) \neq 0$. Делаем это по схеме:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \Leftrightarrow$$

\Leftrightarrow | разделим выражения с x и y (разделим переменные x и y) | \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx \Leftrightarrow | \text{интегрируем обе части} | \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx \Leftrightarrow F_2(y) = F_1(x) + C$$

Полученное равенство $F_2(y) = F_1(x) + C$ представляет собой общее решение уравнения в неявном виде (его общий интеграл). Если в нем можно выразить y , приводим его к явному виду $y = y(x; C)$.

3. Однородные дифференциальные уравнения

Это – дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Такие уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными после введения новой известной функции $z = \frac{y}{x}$. Действительно, пусть

$$\frac{y}{x} = z; \text{ тогда } y = zx; y' = z'x + zx' = z'x + z$$

$$z'x + z = f(z) \Leftrightarrow z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

А это - уравнение вида $z' = f_1(x) \cdot f_2(z)$ при $f_1(x) = \frac{1}{x}$ и $f_2(z) = f(z) - z$, то есть уравнение с разделяющимися переменными для новой неизвестной функции z . Найдя все его решения $z = z(x)$, затем по формуле $y = zx$ найдем и все решения $y = y(x)$ исходного уравнения.

4. Линейные однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Это – уравнения вида

$$y' + p(x)y = 0$$

Линейным оно называется потому, что и неизвестная функция y , и её производная y' входят в это уравнение линейно (в первой степени) - аналогично тому, как входят x и y в линейную функцию $y = kx + b$. А добавка «однородное» связана с тем, что правая часть уравнения представляет собой нуль. Если же там будет не нуль, то такое уравнение будет называться линейным неоднородным.

Уравнение является заодно и уравнением с разделяющимися переменными вида при $f_1(x) = -p(x)$ и $f_2(y) = y$. Из этого следует схема его решения:

1) $f_2(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Таким образом, одно частное

решение уравнения (тривиальное решение) мы уже имеем: это функция $y = 0$.

2) Найдем общее решение уравнения:

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Leftrightarrow | \text{разделяем переменные } x \text{ и } y | \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow | \text{интегрируем обе части} | \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| = F(x) + C \Leftrightarrow \Leftrightarrow |y| = e^{F(x)+C} \Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^{F(x)} \Leftrightarrow y = \pm e^C \cdot e^{F(x)} \Leftrightarrow y = Ce^{F(x)} \Leftrightarrow y = Cy_0(x)$$

Итак, общее решение уравнения имеет вид $y = Cy_0(x)$, где $y_0(x) = e^{F(x)}$ - одно из частных решений этого уравнения (оно выделяется из общего решения, если положить в нем $C=1$). Заметим, что и тривиальное решение $y = 0$ уравнения содержится в его общем решении (получается из него при $C=0$). Таким образом, в общем решении $y = Cy_0(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения содержатся все его частные решения. Структура общего решения уравнения показывает, что достаточно найти какое – либо частное решение $y_0(x)$ этого уравнения. После этого по формуле можно записать и его общее решение.

Дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка, таков:

$$F(x; y; y'; y'') = 0$$

Простейшим из дифференциальных уравнений второго порядка является уравнение вида $y'' = f(x)$.

Общее решение этого уравнения, содержащее все его частные решения, находится его последовательным двукратным интегрированием:

$$y'' = f(x) \Leftrightarrow (y')' = f(x) \Leftrightarrow y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1 \Leftrightarrow y = \int (F(x) + C_1)dx = \int F(x)dx + C_1 \int dx = \Phi(x) + C_1 x + C_2$$

Это общее содержит две неопределенные константы C_1 и C_2 .

Аналогичной будет ситуация и с решением любого дифференциального уравнения второго порядка. Действительно, если для нахождения общего решения дифференциального уравнения первого порядка $F(x; y; y') = 0$ это уравнение необходимо было один раз проинтегрировать, то для нахождения общего решения уравнения второго порядка это уравнение, как и простейшее уравнение, нужно проинтегрировать дважды. То есть схема получения общего решения любого дифференциального уравнения второго порядка в принципе такова:

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \Leftrightarrow | \text{дважды интегрируем} | \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Phi(x; y; C_1; C_2) = 0 \Leftrightarrow y = y(x; C_1; C_2)$$

Кроме полученного по схеме общего решения $F(x; y; C_1; C_2) = 0$ (неявного) или $y = y(x; C_1; C_2)$ (явного) у дифференциального уравнения могут быть и особые решения $y = f_1(x); y = f_2(x); \dots$, которые тоже не должны быть потеряны.

Решение дифференциальных уравнений второго порядка представляет собой, естественно, гораздо более сложную задачу, чем решение уравнений первого порядка. Подготовить и провести двукратное интегрирование дифференциального уравнения второго порядка, то есть получить его решение в квадратурах, удаётся далеко не для всякого уравнения. Чаще всего это удаётся для уравнений,

допускающих понижение своего порядка. То есть для уравнений второго порядка, допускающих своё преобразование в уравнение первого порядка. Среди таких уравнений отметим следующие.

1. Уравнения, не содержащие функции y .

Это – уравнения вида:

$$F(x; y'; y'') = 0 \text{ (в уравнении нет } y \text{)} .$$

Если ввести новую неизвестную функцию p , зависящую от x , по формуле

$$y' = p \text{ (} p = p(x) \text{)}$$

$$\text{и учесть, что } y'' = (y')' = p' ,$$

то уравнение второго порядка преобразуется в уравнение первого порядка $F(x; p; p') = 0$

Интегрируя его (если это удастся), найдем его общее решение $p = p(x; C_1)$, а значит, согласно, получим:

$$y' = p(x; C_1)$$

Интегрируя теперь уже уравнение, получим:

$$y = \int p(x; C_1) dx = \Phi(x; C_1) + C_2$$

Это и есть общее решение уравнения.

Заметим, что если у уравнения окажутся особые решения $p = p_1(x)$; $p = p_2(x)$; ..., то будут особые решения

$$y = \int p_1(x) dx = f_1(x) + C_1^* ;$$

$$y = \int p_2(x) dx = f_2(x) + C_2^* ; \quad \dots$$

и у уравнения. Причем, в силу произвольности констант C_1^* ; C_2^* ; ..., их будет бесчисленное количество.

2. Уравнения, не содержащие аргумента x .

Это – уравнения вида:

$$F(y; y'; y'') = 0$$

Такое уравнение можно преобразовать в уравнение первого порядка с помощью той же замены $y' = p$, только

здесь функция p должна зависеть от y : $p = p(y)$. А так как y зависит от x , то и p зависит от x , только сложным образом ($p = p(y(x))$ – сложная функция от x). С учетом этого получаем:

$$y' = P(p = p(y)); \text{ тогда}$$

$$y'' = (y')' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p$$

С учетом выражений для y' и y'' уравнение примет вид:

$$F(y; p; p \frac{dp}{dy}) = 0$$

Интегрируя его (если это удастся), найдем его общее решение $p = p(y; C_1)$. А учитывая, что $p = y'$, получим:

$$y' = p(y; C_1)$$

Это – еще одно дифференциальное уравнение, только уже для функции y . Интегрируя его, получим его общее решение, а значит, и общее решение исходного уравнения второго порядка:

$$\Phi(x; y; C_1; C_2) = 0$$

Тема 3.3. Ряды

1. Числовые ряды. Свойства числовых рядов
2. Достаточные признаки сходимости
3. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды
4. Степенные ряды. Область и радиус сходимости ряда

5. Ряд Тейлора и Маклорена
6. Разложение элементарных функций в степенные ряды

Определение. Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$,

представляющее собой сумму бесконечного числа слагаемых, называется *рядом*. Если слагаемые (члены) ряда $(a_1; a_2; a_3; \dots)$ – числа, то ряд называется *числовым*. А если они являются функциями, то ряд является *функциональным*.

Ключевым понятием любого ряда является его сумма, то есть сумма всех тех слагаемых, которые содержатся в ряде. Так как в нем бесконечное число слагаемых, то его сумму нельзя получить прямым сложением всех слагаемых – так, как мы это делаем при складывании конечного числа слагаемых. Действительно, процесс суммирования членов ряда не будет иметь конца, и мы, таким образом, сумму ряда никогда не найдем. Поэтому и к определению, и к нахождению суммы ряда должен быть применен какой-то другой подход.

И этот подход состоит в следующем. Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

- сумма первых n слагаемых ряда, которую называют n -ой частичной суммой ряда. В частности,

$$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \dots$$

С изменением n будет меняться и частичная сумма S_n , причем при увеличении n она будет включать в себя все больше и больше слагаемых ряда. Тогда сумму всего этого ряда естественно определить как предел суммы S_n при $n \rightarrow \infty$. То есть, *по определению*,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_\infty = S$$

- сумма ряда. В обозначении S_∞ суммы ряда значок ∞ указывает на то, что речь идет о сумме бесконечного числа слагаемых. Впрочем, этот значок обычно опускают и сумму ряда обозначают просто символом S .

Сумма ряда S_∞ , как и всякий предел, может существовать, а может и не существовать, может быть бесконечной, а может быть и конечной. Если сумма ряда существует и конечна, ряд называется *сходящимся*. А если эта сумма равна $\pm \infty$ или она не существует вообще, то ряд называется *расходящимся*.

Имеются способы выяснения вопроса о том, сходится или расходится данный числовой ряд. Если удалось установить, что ряд сходится, то у него есть конечная сумма S . Иногда её можно найти точно. Но чаще – только приближенно по формуле $S = S_\infty \approx S_n$, где S_n – сумма первых n слагаемых ряда. Смысл формулы состоит в том, что при нахождении суммы сходящегося ряда суммируется лишь некоторая часть его слагаемых (первые n слагаемых), а остальные просто отбрасываются. Результат будет получаться тем точнее, чем больше n . Есть и возможность оценки погрешности, допускаемой при замене $S = S_\infty$ на S_n .

1. Очевидные свойства числовых рядов

а) Отбрасывание у ряда конечного числа его членов или, наоборот, добавление к ряду конечного числа новых слагаемых не влияет на его сходимость - расходимость (а влияет только на величину его суммы, если она существует и конечна).

б) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = S$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n = Ca_1 + Ca_2 + Ca_3 + \dots = CS$$

То есть умножение (деление) всех членов ряда на некоторое число C не влияет на его сходимость – расходимость, а влияет только на его сумму, которая увеличивается (уменьшается) в соответствующее число раз (в C раз).

в). Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, причем

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_a \pm S_b.$$

2. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Теорема. Для сходимости любого числового ряда необходимо, чтобы $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то есть чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Из теоремы следует, что *если a_n не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд сходитьсь не может – он заведомо расходится.*

Примечание. Условие $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости числового ряда. Это значит, что оно еще не гарантирует сходимости ряда. Иначе говоря, возможна ситуация, когда при $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и тем не менее ряд расходится.

Классическим примером такого ряда является *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Необходимое условие сходимости $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для этого ряда очевидным образом выполняется. И тем не менее этот ряд расходится, так как его сумма $S = \infty$.

3. Положительные числовые ряды. Достаточные

признаки сходимости.

Определение. Числовой ряд называется *положительным*, если все его слагаемые a_n – положительные числа. Частичная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ такого ряда при любом значении n тоже, естественно, положительна, причем с увеличением номера n она монотонно возрастает. Следовательно, имеются всего две возможности:

1) $S_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$;

2) $S_n \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$, где S – некоторое положительное число.

В первом случае ряд расходится, во втором сходится. Какая из этих двух возможностей реализуется, зависит, очевидно, от поведения слагаемых a_n ряда при $n \rightarrow \infty$. Если эти слагаемые стремятся к нулю, причем делают это достаточно быстро, то ряд будет сходиться. А если они не стремятся к нулю, или стремятся к нему, но недостаточно быстро, то ряд будет расходиться.

Например, у гармонического ряда слагаемые $a_n = \frac{1}{n}$ хоть и убывают, стремясь к нулю, но делают это довольно медленно. Поэтому гармонический ряд оказался расходящимся. А вот у положительного ряда слагаемые стремятся к нулю гораздо быстрее, поэтому он оказался сходящимся.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots$$

называется *обобщенным гармоническим рядом* (при $\alpha = 1$ это будет обычный гармонический ряд). Если исследовать его на сходимость – расходимость аналогично

тому, как исследовался гармонический ряд, то можно установить что обобщенный гармонический ряд расходится при $\alpha \leq 1$ (его сумма $S = +\infty$) и сходится при $\alpha > 1$ (его сумма S – конечное положительное число). И это понятно: при $\alpha \leq 1$ слагаемое $\frac{1}{n^\alpha}$ обобщенного гармонического ряда

убывают медленнее слагаемых $\frac{1}{n}$ гармонического ряда. А

так как гармонический ряд расходится (скорость убывания его слагаемых недостаточна для сходимости), то тем более при $\alpha \leq 1$ будет расходиться и обобщенный гармонический ряд. А при $\alpha > 1$ слагаемые $\frac{1}{n^\alpha}$ ряда будут, очевидно,

убывать быстрее, чем слагаемые $\frac{1}{n}$ гармонического ряда.

И этой возросшей скорости убывания оказывается достаточно для сходимости ряда.

Можно эти соображения изложить строже, в виде так называемого признака сравнения положительных числовых рядов.

Его суть в следующем. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

- два произвольных положительных числовых ряда.

И пусть $b_n > a_n$ для всех $n=1,2,\dots$. То есть – ряд с большими членами, чем ряд. Тогда очевидно, что:

1) Если ряд с большими членами сходится, то и ряд с меньшими членами сходится.

2) Если ряд с меньшими членами расходится (его сумма равна $+\infty$), то и ряд с большими членами тоже рас-

ходится (его сумма тем более равна $+\infty$).

3) Если ряд с бóльшими членами сходится (его сумма равна $+\infty$), то про ряд с меньшими членами ничего сказать нельзя.

4) Если ряд с меньшими членами сходится (его сумма – число), то про ряд с бóльшими членами ничего сказать нельзя.

Замечание 1. В формулировке всех четырех пунктов признака сравнения можно условие $b_n > a_n$, с помощью которого сравниваются ряды и которое должно выполняться для всех $n=1,2,3,\dots$, заменить на это же условие $b_n > a_n$, справедливое не для всех n , а лишь начиная с некоторого номера N , то есть для $n > N$, ибо отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Замечание 2. Признак сравнения положительных числовых рядов допускает обобщение. А именно, если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = L \quad (0 < L < \infty),$$

то есть если

$$b_n \sim La_n \text{ при } n \rightarrow \infty$$

(b_n эквивалентны La_n при $n \rightarrow \infty$), то положительные числовые ряды сходятся или расходятся одновременно. Данное замечание оставим без доказательства.

Признак Даламбера. Этот признак состоит в следующем. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - положительный числовой ряд. Найдем предел q отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Французский математик и механик 19-го века Даламбер доказал, что при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; при $q > 1$ он расходится; при $q = 1$ вопрос о сходимости - расходимости ряда остается открытым.

Интегральный признак Коши. Этот признак состоит в следующем. Если члены a_n положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонно убывают, то этот ряд и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} a_x dx$ сходятся или расходятся одновременно. Здесь $a_x = f(x)$ - непрерывная монотонно убывающая функция, принимающая при $x = n$ значения a_n членов ряда.

4. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \text{ где } a_n > 0 \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{)}$$

называется знакопередающимся. Сходимость – расходимость знакопередающихся рядов устанавливается по признаку Лейбница. Он формулируется следующим образом.

Если члены знакопередающегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине, стремясь при этом к нулю, то есть если

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots, \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то знакопередающийся ряд сходится, причем его сумма S заключена в интервале $0 < S < a_1$, то есть не превосходит первого члена ряда.

Примечание. Признак Лейбница позволяет не только устанавливать сходимость – расходимость знакопере-

дующегося ряда, но и позволяет, при условии его сходимости, находить сумму S с любой заданной точностью. Действительно, сложив в ряде какое-либо число N его первых слагаемых и отбросив остальные, мы фактически отбросим знакопередающийся ряд, начинающийся со слагаемого a_{N+1} , сумма которого, по признаку Лейбница, не будет превосходить этого первого отброшенного слагаемого. Значит, и ошибка при вычислении суммы S знакопередающегося ряда не будет превосходить первого из отброшенных слагаемых этого ряда. Этим обстоятельством широко пользуются для приближенного нахождения сумм сходящихся знакопередающихся рядов с нужной точностью.

5. Числовые ряды с произвольными по знакам слагаемыми.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - числовой ряд с произвольными по знакам слагаемыми. Наряду с этим рядом рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то есть ряд, составленный из модулей слагаемых исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Справедлива следующая теорема:

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то автоматически сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, причем сходимость последнего называется *абсолютной*.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может сходиться несмотря на то, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назы-

вается *условной*.

Абсолютно и условно сходящиеся ряды кардинально различаются по характеру своей сходимости. А именно, любая перестановка слагаемых в абсолютно сходящемся ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не меняет его суммы. А вот если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то за счет соответствующей перестановки слагаемых его сумму можно сделать какой угодно.

Действительно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно,

то сумма S' его положительных слагаемых и сумма S'' модулей его отрицательных слагаемых – два конечных положительных числа. При любой перестановке слагаемых эти суммы не меняются, а следовательно, не меняется и сумма $S = S' - S''$ всего ряда. А вот если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $S' = +\infty$ и $S'' = +\infty$, а $S = S' - S''$ – конечное число. Но тогда имеется возможность отдельно из положительных и отдельно из отрицательных слагаемых ряда набрать любую сумму. А значит, и итоговую сумму всего ряда можно сделать какой угодно.

Определение 1. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots,$$

слагаемыми которого являются функции, называется функциональным.

Если зафиксировать аргумент x , то каждая функция $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) станет числом, а ряд (2.1) станет числовым рядом. При одних значениях x этот ряд может оказаться сходящимся, при других – расходящимся.

Определение 2. *Областью сходимости функцио-*

нального ряда называется множество всех тех значений x , при которых ряд сходится. Остальные значения x составляют его *область расходимости*.

Нас, естественно, в первую очередь будут интересовать области сходимости функциональных рядов, а также суммы рядов в их областях сходимости.

Пусть D – область сходимости данного функционального ряда. На практике область D может выглядеть по-разному: быть промежутком или интервалом оси ox , представлять собой всю ось ox или единственную ее точку, даже быть пустым множеством (последний случай – неинтересный). Для каждого $x \in D$ этот ряд имеет конечную сумму $S=f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots = f(x) \quad (x \in D)$$

При исследовании любого функционального ряда встают две основные задачи:

- 1) Определение его области сходимости D .
- 2) Определение его суммы $f(x)$ для $x \in D$.

Не менее интересна и обратная проблема: подобрать такой функциональный ряд из возможно более простых слагаемых $u_n(x)$, чтобы он в своей области сходимости D имел сумму, совпадающую с заданной функцией $f(x)$. Эта проблема называется проблемой разложения заданной функции $f(x)$ в функциональный ряд. Качество решения этой проблемы будет тем выше, чем проще подберется этот ряд; чем быстрее он будет сходиться; тем шире будет его область сходимости D .

Важность решения этой проблемы очень велика. Ведь разлагаемая в функциональный ряд функция $f(x)$ может быть сложной и даже не выразимой через элементарные функции. Например, она может быть первообразной для некоторой функции $g(x)$, для которой неопределенный интеграл

$$\int g(x)dx = f(x) + C$$

является неберущимся. А слагаемые $u_n(x)$ функционального ряда, сумма которого будет равна $f(x)$, могут, наоборот, оказаться достаточно простыми элементарными функциями, легко анализируемыми и вычисляемыми. Поэтому получив разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots (x \in D)$$

нужной нам функции $f(x)$ в такой функциональный ряд, мы в итоге получим возможность для $x \in D$ оперировать не с самой функцией $f(x)$, а с ее составляющими $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., которые и проще, и удобнее самой функции.

1) Для степенных рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

2) Для обобщенных степенных рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

Степенные ряды. Ряды Маклорена и Тейлора

Проанализируем положительный числовой ряд, составленный из его модулей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n = |a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + |a_3| \cdot |x|^3 + \dots$$

Применим к нему признак Даламбера. Для этого найдем q (см. (1.26)):

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|;$$

Введем обозначение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}, \text{ откуда } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Тогда выражение для q примет вид:

$$q = \frac{|x|}{R}$$

Согласно признаку Даламбера:

1) Если $q < 1$, то есть если $|x| < R$, или, что одно и то же, если $-R < x < R$, то ряд (3.1) сходится. А вместе с ним сходится, причем абсолютно, и ряд (2.5).

2) Если $q > 1$, то есть $|x| > R$ или, что одно и то же, если $x > R$ или $x < -R$, то ряд (3.1) расходится. Заметим, что при этом и ряд (2.5) тоже не будет сходиться, ибо условие

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1 \text{ для любого положительного ряда } \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

означает, что начиная с некоторого номера N , то есть при n

$> N$, отношение $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ становится больше 1 и остается тако-

вым для любых $n > N$. А это значит, что для $n > N$ будет $b_{n+1} > b_n$. То есть начиная с номера N члены b_n положи-

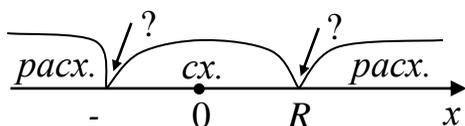
тельного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ растут, а значит, заведомо не стремят-

ся к нулю. Получается нарушенным необходимое условие

сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n$, а заодно – и степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ибо слагаемые первого из них – просто модули последнего. То есть действительно при $x > R$ и $x < -R$ ряд (2.5) будет расходиться.

Итак, выводы:

Степенной ряд сходится при $-R < x < R$; расходится при $x > R$ и $x < -R$; при $x = \pm R$ он может как сходиться, так и расходиться (рис. 7.2).



Рис

Величина R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. А интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* этого степенного

ряда. Областью сходимости D степенного ряда, таким образом, является его интервал сходимости $(-R; R)$ и, возможно, его концы.

Степенные ряды обладают замечательным свойством: внутри их интервалов сходимости $(-R; R)$ их можно почленно дифференцировать и интегрировать. Это значит, что если

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = f(x), \quad (-R < x < R)$$

то

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$(-R < x < R)$; (3.6)

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^d x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_c^d =$$

$$= a_0 x \Big|_c^d + a_1 \frac{x^2}{2} \Big|_c^d + a_2 \frac{x^3}{3} \Big|_c^d + \dots \quad (-R < c \leq x \leq d < R).$$

Эти факты примем без доказательства. Ограничимся лишь приведением примеров их использования.

Рассмотрим теперь общую проблему разложения любой заданной функции $f(x)$ в степенной ряд. Для этого обратимся к формуле Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$$

Здесь

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c \in (0; x)$$

- остаточный член формулы Маклорена, записанный в форме Лагранжа.

Допустим, что функция $f(x)$ имеет при $x = 0$ производные любого порядка. И допустим, что для некоторого множества значений аргумента x $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда переходя в формуле Маклорена к пределу при $n \rightarrow \infty$, для этих значений x получим:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Формула представляет собой не что иное, как разложение

функции $f(x)$ в степенной ряд. Этот ряд называется *рядом Маклорена*. Разложение верно и может быть использовано лишь для тех x , для которых $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Можно доказать и много других разложений различных функций в степенной ряд Маклорена. Например:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty, x - \text{в радианах})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty, x - \text{в радианах})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$(-1 < x < 1, \alpha - \text{любое})$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Обобщенные степенные ряды. Ряд Тейлора.

Сделав замену $x - x_0 = t$, получим обычный степенной ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

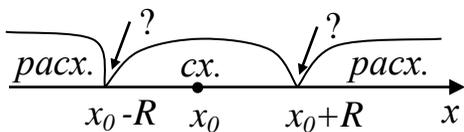
Он, как мы знаем, сходится на интервале $-R < t < R$, где

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

- радиус сходимости ряда. Тогда эта величина R определяет и интервал сходимости обобщенного степенного ряда:

$$-R < t < R \Leftrightarrow -R < x - x_0 < R \Leftrightarrow x_0 - R < x < x_0 + R$$

То есть областью сходимости ряда является интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ и, возможно, его концы (рис. 7.3).



Рис

Различные функции $f(x)$ можно раскладывать не только в обычные степенные ряды, используя разложе-

ние Маклорена, но и в обобщенные степенные ряды. А именно, если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0 , то для такой функции можно записать разложение вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots$$

Это разложение называется *разложением функции $f(x)$ в степенной ряд Тейлора*. Оно вытекает из формулы Тейлора и справедливо для всех x , для которых остаточный член

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad c \in (x_0; x)$$

этой формулы стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Обычно это выполняется для всех x , входящих в интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ сходимости ряда Тейлора.

Сравнивая разложение функции $f(x)$ в ряд Маклорена и разложение этой же функции в ряд Тейлора, видим, что разложение Маклорена использует в качестве опорной точки значение $x = 0$, а разложение Тейлора – произвольное значение $x = x_0$. Поэтому говорят, что разложение

Маклорена – это разложение функции в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$, а разложение Тейлора – это разложение функции в степенной ряд в окрестности точки $x = x_0$. С удалением x от опорной точки (от нуля для ряда Маклорена и от x_0 для ряда Тейлора) сходимость каждого из этих рядов ухудшается (идет медленнее). А при достаточно больших x , выходящих за интервалы их сходимости, разложение заданной функции $f(x)$ в эти ряды становится заведомо несправедливым.

Раздел 4. Основы дискретной математики

Тема 4.1. Множества и отношения

Множества и операции над ними.

Основные понятия теории множеств

Определение. Множеством M называется объединение в единое целое определенных различных однотипных объектов a , которые называются **элементами** множества.

$$a \in M$$

Множество можно описать, указав какое-то свойство, присущее всем элементам этого множества.

Замечание. Вообще говоря, понятие множества считается первичным (исходным) понятием, и, как такое, не определяется. Приведённое выше определение следует, скорее, считать уточнением понятия множества.

Множество, все элементы которого являются числами, называется **числовым**. В дальнейшем мы будем, прежде всего, рассматривать именно такие множества. Множество, элементами которого являются другие множества, называется *классом* или *семейством*.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным. При подсчёте количества элементов учитываются только различные (неповторяющиеся) элементы.

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается символом \emptyset .

Множество может быть задано перечислением (списком) своих элементов, порождающей процедурой или описанием характеристических свойств (предикатом), которым должны обладать его элементы. Причём в последнем случае необходимо формулировать описание характеристических свойств элементов множества достаточно корректно, для того, чтобы множество было определено вполне однозначно. Добавим, что многие числовые множества могут быть заданы всеми тремя указанными способами (например, множество чётных однозначных чисел).

Пример 1. Некоторые примеры множеств, заданных различными способами.

а) $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}$.

б) $M_2 = \{x \mid x \in Z, -4 < x < 9\}$.

в) $M_3 = \{x \mid x = 2n + 1, n \in N\}$.

Мощностью конечного множества M называется количество его элементов. Обозначается $|M|$. Если $|A| = |B|$, то множества A и B называются равномошными.

Определение. Если все элементы множества A являются также элементами множества B , то говорят, что множество A **включается (содержится)** в множестве B и обозначается $A \subset B$

Определение. Если $A \subseteq B$, то множество A называется **подмножеством** множества B (также говорят, что B покрывает A). Если при этом $A \neq B$, то множество A называется **собственным подмножеством** множества B и обозначается $A \subset B$.

Замечание. Не следует считать равносильными отношения принадлежности (\in) и вхождения одного множества в другое (\subseteq). Можно привести следующий пример. Пусть A – множество всех студентов данной группы, а B – множество всех учебных групп данного института. Здесь $A \in B$, но $A \not\subseteq B$, поскольку элементы этих множеств разнородны. Этот пример показывает также, что элементами множеств могут являться другие множества.

Для трех множеств A, B, C справедливы следующие соотношения:

$$A \subseteq A; \quad A \not\subseteq A;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C;$$

Связь между включением и равенством множеств устанавливается следующим соотношением:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

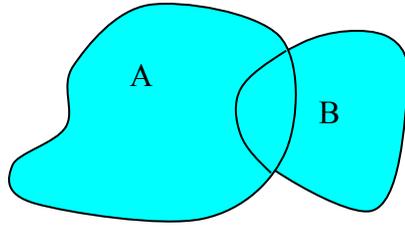
Здесь знак \wedge обозначает **конъюнкцию** (логическое «и»).

В заключение добавим, что Г. Кантор предложил использовать понятие «универсального множества» (*универсум*), как бы противоположного понятию пустого множества \emptyset . По мысли Кантора, универсальное множество U содержит все мыслимые множества, и при этом оно само содержится во множестве своих подмножеств в качестве элемента. В дальнейшем смысл и содержание понятия универсального множества будут раскрыты более подробно.

2. Операции над множествами и их свойства.

Определение. **Объединением** множеств A и B называется множество C , элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A и B .

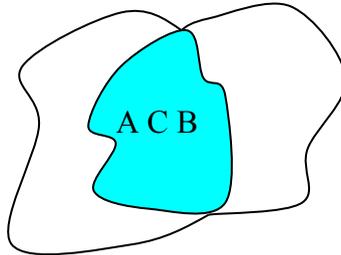
Обозначается $C = A \cup B$.



Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Вэйна**.

Определение. Пересечением множеств A и B называется множество C , элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B .

Обозначение $C = A \cap B$.



Для множеств A , B и C справедливы следующие свойства:

$$A \cap A = A \cup A = A; A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A;$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

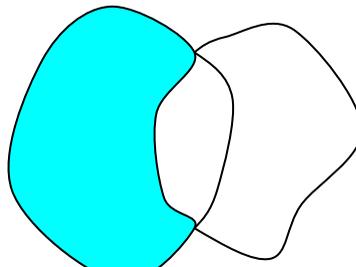
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (A \cap B) = A; A \cap (A \cup B) = A;$$

$$A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset;$$

Определение. Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

Обозначается: $C = A \setminus B$.

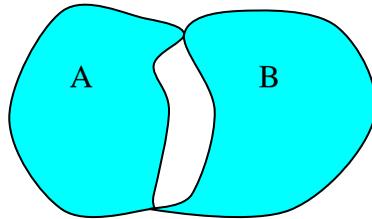


А В

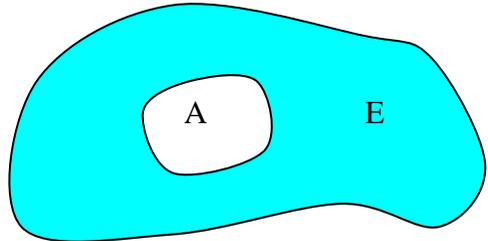
Определение. Симметрической разностью множеств A и B называется множество C , элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B .

Обозначается: $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Определение. C_E называется дополнением множества A относительно множества E , если $A \subseteq E$ и $C_E = E \setminus A$.



Для множеств A , B и C справедливы следующие соотношения:

$$A \setminus B \subseteq A; A \setminus A = \emptyset; A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$$

$$A \Delta B = B \Delta A; A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C); (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C); (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C); A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C);$$

$$A \cup C_E A = E; A \cap C_E A = \emptyset; C_E E = \emptyset; C_E \emptyset = E; C_E C_E A = A;$$

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B; C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B;$$

Пример 2. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера - Вэйна.

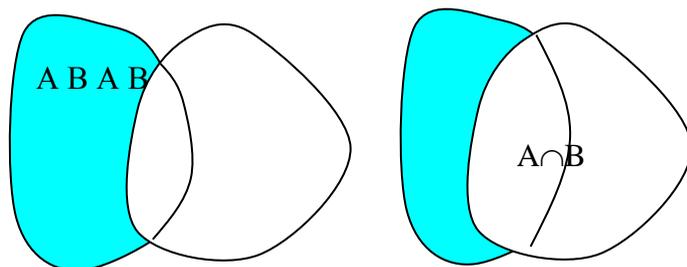
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Из записанных выше соотношений видно, что

$$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \emptyset \cup (A \setminus B) = A \setminus B$$

Что и требовалось доказать.

Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера – Вэйна:



Пример 3. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Если некоторый элемент $x \in A \setminus (B \cup C)$, то это означает, что этот элемент принадлежит множеству A, но не принадлежит множествам B и C.

Множество $A \setminus B$ представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Множество $A \setminus C$ представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству C.

Множество $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ представляет собой множество элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат ни множеству B , ни множеству C .

Таким образом, тождество можно считать доказанным.

Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 5.1. Элементы комбинаторики и вероятность событий

1. Перестановки. Размещения. Сочетания
2. Вероятность событий. Виды событий. Вычисление вероятности событий.

Комбинаторика - это часть так называемой *дискретной математики*, изучающая разнообразные соединения элементов. Под элементами понимаются любые однотипные вещи: предметы, буквы, числа, живые существа и т.д. Различают 3 вида соединений элементов:

- *Размещения*;
- *Перестановки*;
- *Сочетания*.

1. Размещения. Пусть рассматривается совокупность из n упорядоченных, т.е. пронумерованных, элементов $(a_1; a_2; \dots a_n)$. Будет составлять из этих n элементов всевозможные *упорядоченные группы* по m элементов в каждой группе, где m – любое натуральное число, не превос-

ходящее n . Эти группы будем считать различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или даже только порядком следования элементов в группе (у каждого элемента в упорядоченной группе есть свое учитываемое место). Такие группы называются *размещениями из n элементов по t элементов в каждом размещении*. Их общее число обозначается символом A_n^m , и находится оно по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Напомним, что выражение $n!$ называется эн-факториал, и определяется оно так:

$$0!=1; 1!=1; 2!=1\cdot 2=2; 3!=1\cdot 2\cdot 3=6; 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24; \dots n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$$

Для примера подсчитаем общее количество всех возможных размещений из трех элементов ($a_1; a_2; a_3$) по одному, по два и по три элемента. Причем сделаем это и непосредственно, составив все эти размещения и пересчитав их, и по формуле:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \left[\begin{array}{c} a_1 a_2 \\ a_1 a_3 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_3 \\ a_3 a_1 \\ a_3 a_2 \end{array} \right] A_3^1 = 3; \quad \left[\begin{array}{c} a_1 a_2 a_3 \\ a_1 a_3 a_2 \\ a_2 a_1 a_3 \\ a_2 a_3 a_1 \\ a_3 a_1 a_2 \\ a_3 a_2 a_1 \end{array} \right] A_3^2 = 6; \quad A_3^3 = 6$$

Эти же результаты дает и формула:

$$A_3^1 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3; \quad A_3^2 = \frac{3!}{1!} = \frac{6}{1} = 6; \quad A_3^3 = \frac{3!}{0!} = \frac{6}{1} = 6$$

2. Перестановки. Перестановками из данной совокупности n элементов $(a_1; a_2; \dots a_n)$ называются различным образом упорядоченные (по разному переставленные) комбинации *всех этих элементов*. Их общее количество обозначается символом P_n . Так как перестановки – это по сути размещения из n элементов по n элементов в каждом размещении, то

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

3. Сочетания. Сочетаниями из n элементов по m элементов в каждом сочетании называются (в отличие от размещений) всевозможные *неупорядоченные группы* по m элементов в каждой группе. Неупорядоченные - это значит, что важно, какие элементы содержатся в каждом сочетании, а в каком порядке они там находятся – это неважно. Различные размещения отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Общее их количество обозначается символом C_n^m , и находится оно по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Выводя формулы для общего числа размещений, перестановок и сочетаний, мы полагали, что в каждом из указанных соединений любой из элементов совокупности $(a_1; a_2; \dots a_n)$ может встретиться только один раз. То есть повторять в них элементы нельзя. Если же повторять их всё же можно, то мы придём к *размещениям, перестановкам и сочетаниям с повторениями*.

4. Размещения с повторениями. Пусть исходная совокупность элементов составляет всего три элемента ($a_1; a_2; a_3$). Составим из них все возможные размещения с повторениями по два элемента в каждом размещении и пересчитаем их. Очевидно, их будет 9 с тремя размещения $a_1a_1; a_2a_2; a_3a_3$ с повторяющимися элементами. Если обозначить общее число всех возможных размещений из трёх элементов по два в каждом размещении символом \tilde{A}_3^2 , то получим: $\tilde{A}_3^2=9$.

Впрочем, мы могли подсчитать это число и иначе. Составляя любое размещение из двух элементов, на первое место в таком размещении можно поставить любой из данных трёх элементов (три варианта). На второе место – тоже любой из трёх элементов (тоже три варианта). Комбинируя каждый элемент, стоящий на первом месте, с каждым элементом, стоящим на втором месте, получим $3^2=9$ всех возможных комбинаций. То есть $\tilde{A}_3^2=3^2=9$.

А теперь легко понять, что если всех элементов не три, а n , и из них составляются все возможные размещения с повторениями по m элементов в каждом размещении, то их общее число \tilde{A}_n^m найдётся по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

5. Сочетания с повторениями. Опять начнём с частного случая. А именно, подсчитаем \tilde{C}_3^2 – общее число всех возможных сочетаний с повторениями из трёх элементов ($a_1; a_2; a_3$) по два элемента в каждом сочетании. Этих сочетаний, очевидно, будет 6, оба элемента разные, и ещё три сочетания $a_1a_1; a_2a_2; a_3a_3$ с повторяющимися элементами. То есть $\tilde{C}_3^2=6=C_4^2$. И вообще, можно доказать, что

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

6. Перестановки с повторениями. Пусть среди элементов $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ содержится лишь k различных элементов ($k < n$), причём первый из них повторяется n_1 раз, второй n_2 раз, ... k -ый n_k раз. Очевидно, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Тогда число всех возможных перестановок из таких n элементов обозначается символом $P_n(n_1; n_2; \dots; n_k)$ и находится по формуле:

$$P_n(n_1; n_2; \dots; n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

В самом деле, если бы все n элементов были разными, то число всех возможных перестановок из них было бы равно $P_n = n!$. Но среди них разных элементов лишь k , остальные $n - k$ элементов повторяют эти k элементов. В частности, первый из этих k элементов повторяется n_1 раз. Сделав любую перестановку из этих n_1 одинаковых элементов (не трогая остальных!) мы ничего не нарушим ни в какой перестановке из n элементов. А вот если бы все эти n_1 повторяющихся элементов были разными, то сделав любую их перестановку, мы получили бы другую перестановку из n элементов. Количество всех возможных перестановок из n_1 элементов равно $n_1!$. Значит, наличие этих n_1 одинаковых элементов уменьшает в $n_1!$ раз общее количество всех возможных перестановок из n элементов по сравнению с тем случаем, когда все n элементов были бы разными. Тот же эффект производит наличие второго повторяющегося n_2 раз элемента, третьего, ... k -ого.

Случайное событие и вероятность его появления

Определение. Событие A называется случайным, если заранее, до производства испытания (эксперимента, наблюдения) неизвестно, произойдет оно или нет.

Примеры:

1) Испытание - покупка лотерейного билета; случайное событие A – выигрыш по этому билету.

2) Испытание - выстрел стрелка по мишени; случайное событие A – попадание стрелка в мишень.

3) Испытание - подбрасывание монеты; случайное событие A - выпадение орла.

4) Испытание - приход студента на экзамен; случайное событие A – сдача им экзамена.

5) Испытание- посадка в землю семени; случайное событие A – прорастание семени.

Интересующее нас случайное событие A может иметь как большую возможность (много шансов) для своего появления, так и не очень. Если известно, что в повторяемых испытаниях событие A наступает часто – у него, естественно, будет большая возможность появления в каждом отдельном испытании. А если редко - то небольшая.

Возникает естественная задача *численной оценки* (оценки числом) степени возможности появления в отдельном испытании любого интересующего нас случайного события A . Для решения этой задачи в теории вероятностей разработано понятие *вероятности* $p(A)$ появления случайного события A в единичном испытании. Связывается это понятие *со средней долей* появления события A в сериях повторных испытаний.

Пусть n – число повторных испытаний (число купленных лотерейных билетов, число выстрелов по мишени, и т.д.), а k_{cp} – среднее число появлений события A в этих n повторных испытаний (среднее число выигрышных биле-

тов из n купленных билетов, среднее число попаданий в мишень при n выстрелах по мишени, и.т.д.). Тогда, по определению, в качестве *вероятности* $p(A)$ появления события A в одном испытании принимается величина

$$p(A) = \frac{k_{cp}}{n}$$

То есть $p(A)$ – это *средняя доля* появлений события A в повторных испытаниях.

Кстати, если известен средний процент $C_{cp} \%$ появления события A в повторных испытаниях, то среднюю долю появления события A , а следовательно, и его вероятность $p(A)$ появления в каждом отдельном испытании можно получить и по такой, формуле:

$$p(A) = \frac{C_{cp} \%}{100\%}$$

Пусть, например, случайное событие A - это попадание стрелка в мишень. И пусть из опытов известно, что из каждых 10 выстрелов (испытаний) стрелок попадает в цель в среднем 7 раз. Тогда средняя доля попадания стрелка в мишень при повторении выстрелов равна

$$\frac{k_{cp}}{n} = \frac{7}{10} = 0,7. \text{ Это и есть вероятность } p(A) \text{ попадания}$$

стрелка в мишень с одного выстрела: $p(A) = 0,7$.

Можно рассудить и по-другому: если стрелок попадает в мишень в среднем 7 раз из 10, то это значит, что он в среднем попадает 70 раз из 100, то есть в среднем в 70% выстрелов. А значит, $C_{cp} \% = 70\%$, откуда по формуле (1.2) получаем: $p(A) = 0,7$. То есть получаем тот же самый ре-

зультат.

Обратно, зная, что вероятность $p(A)$ попадания стрелка в мишень с одного выстрела (в одном испытании) равна 0,7 и делаем вывод, что средняя доля попаданий такого стрелка в мишень при повторных выстрелах равна 0,7. А это значит, что этот стрелок попадает в мишень *в среднем* 7 раз из 10, или 70 раз из 100, или 700 раз из 1000, то есть *в среднем* в 70 % выстрелов.

На практике, то есть с помощью реально проводимых испытаний, среднюю долю появления события A , а следовательно, и вероятность $p(A)$ появлений события A в одном испытании можно, очевидно, найти лишь приближенно, ибо реальная доля появлений события A в сериях повторных испытаний от серии к серии меняется. Для достаточно надежного определения этой доли должно быть произведено много повторных испытаний (чем больше, тем лучше). Но в некоторых случаях указанную долю, а значит, и вероятность $p(A)$ появления события A в одном испытании можно найти чисто умозрительно, без производства повторных испытаний. Причем найти не приближенно, а точно.

Пусть, например, нам известны все возможные исходы одного испытания, а, следовательно, мы знаем и их общее число n (полагаем, что n - число конечное). И пусть все эти исходы заведомо *равновозможны*. Равновозможность исходов означает отсутствие каких-либо преимуществ по появлению у каждого исхода испытания по сравнению с любым другим возможным исходом. Равновозможные исходы испытания при повторении испытаний появляются в среднем одинаково часто.

Далее, пусть известно число m тех исходов, которые благоприятствуют появлению интересующего нас события A (это значит, что известно общее число m тех исходов испытания, при осуществлении которых автоматически по-

является событие A). При повторении испытаний равно-возможные исходы испытания будут наступать в среднем одинаково часто. А значит, если испытаний будет n , то каждый из возможных исходов испытания появится в среднем один раз. Тогда событие A в любых n испытаниях будет появляться в среднем m раз. То есть $k_{cp} = m$. А тогда получаем:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

Формула называется *классической формулой*. Напомним, что в ней n – число всех возможных исходов испытания, а m – число благоприятствующих событию A исходов. Ее можно применять лишь в том случае, когда все n возможных исходов испытания *равновозможны*. Классическая формула позволяет находить вероятности случайных событий без производства испытаний, чисто умозрительно. Причем находить эти вероятности *точно*.

Пример 1. Пусть испытание – это подбрасывание монеты, а событие A – это выпадение орла. В этом испытании два возможных исхода – орел и решка. То есть $n = 2$. В силу симметрии монеты эти два исхода равновозможны. Из них лишь один исход благоприятствует событию A ($m=1$). Тогда по классической формуле получаем:

$$p(A) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Полученный результат очевидным образом верен. Действительно, при повторных бросаниях симметричной монеты орел будет выпадать *в среднем* в 50% бросаний (эта цифра будет другой, если только монета не симметрична, например, погнута). И по формуле получаем то же самое: $p(A) = 0,5$.

Кстати, если подбрасываемую монету нельзя считать симметричной (она как-то деформирована, так что

симметрия ее сторон нарушена), то и в этом случае $n = 2$ – число всех возможных исходов испытания (орел и решка), а $m = 1$ – единственный благоприятствующий событию A исход (орел). Но в данном случае классическую формулу применять нельзя, ибо исходы испытания (орел и решка) не равновозможны. Тогда для определения вероятности $p(A)$ выпадения орла при подбрасывании монеты остается один путь: бросать монету много раз (повторять испытания) и искать опытным путем $C_{cp}\%$ – средний процент появления события A (выпадения орла). После нахождения этого среднего процента можно будет найти искомую вероятность $p(A)$ – вероятность выпадения герба при одном бросании данной монеты. Естественно, что таким путем $p(A)$ можно найти лишь приближенно (тем точнее, чем больше будет произведено повторных бросаний монеты).

Основные свойства вероятности случайного события

1. Вероятность $p(A)$ появления случайного события A представляет собой *число*. Это число является *мерой возможности* появления события A при производстве испытания. В частности, вероятность $p(A)$ определяет *средний процент* $C_{cp}\%$ появления события A в повторных испытаниях:

$$C_{cp}\% = p(A) \cdot 100\% \quad (1.5)$$

Чем больше $p(A)$, тем возможнее (вероятнее) появление события A в одном испытании, и тем чаще оно будет появляться при повторении испытаний. Например, если $p(A)=0,3$, то это означает, что событие A будет появляться *в среднем* в 30% испытаний (в среднем 30 раз из 100 или 3 раза из 10 испытаний). То есть в каждом испытании у события A имеется 3 шанса из 10 (30 шансов из 100) за то,

что оно появится.

2. Для любого случайного события A

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

3. Если появление события A в испытании невозможно, то вероятность $p(A)$ его появления при осуществлении испытания равна нулю: $p(A) = 0$.

Действительно, сколько бы раз мы ни повторяли испытание, невозможное событие не появится ни разу. Таким образом, $C_{cp} \% = 0\%$, а значит получаем: $p(A) = 0$.

4. Если $p(A) = 0$, то событие A невозможно (или возможно, но лишь чисто теоретически). Действительно,

если $p(A) = 0$, то $\frac{S_A}{S} = 0$, откуда $S_A = 0$. А это будет в том

случае, если область A отсутствует вообще (и значит, событие A невозможно), или эта область A имеется, но ее площадь S_A равна нулю (например, область A – это некоторая фиксированная точка на области S). В последнем случае событие A , имея нулевую вероятность, все – таки возможно. Но за его появление имеется один шанс, а против его появления – бесконечное количество шансов (одна точка области S против бесчисленного количества остальных точек этой области). Ясно, что практических возможностей для своего появления у такого события A нет. Событие A возможно, но лишь чисто теоретически.

5. Если появление события A в испытании достоверно (событие A произойдет обязательно), то вероятность $p(A)$ его появления при осуществлении испытания равна единице: $p(A) = 1$.

Действительно, достоверное событие будет появляться в каждом испытании, а значит, в 100% испытаний. То есть в этом случае $C_{cp} \% = 100\%$. Тогда получаем: $p(A) = 1$.

6. Если $p(A) = 1$, то событие A или достоверно (произойдет обязательно), или практически достоверно (непоявление события A возможно, но лишь чисто теоретически). Например, таким практически достоверным событием A , имеющим единичную вероятность, будет попадание брошенной наудачу точки на некоторую заданную точку области S .

Классификация событий. Сумма и произведение событий

Определение 1. Два случайных события A и B называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события A и B называются совместными.

Пример 1. Попадание A и непопадание B стрелка в мишень при одном выстреле – события несовместные.

Пример 2. Попадание A стрелка в мишень в первом выстреле и промах B во втором – события совместные.

Определение 2. Два случайных события A и B называются независимыми, если возможность (вероятность) появления каждого из них не зависит от того, появится или не появится другое событие. В противном случае события A и B называются зависимыми.

Отметим сразу, что несовместные события всегда зависимы. Действительно, пусть A и B – несовместные события. Тогда при появлении события A появление события B невозможно, а значит $p(B) = 0$. А при непоявлении события A появление события B возможно, и тогда $p(B) \neq 0$. Таким образом, вероятность (возможность) появления события B зависит от того, появится или не появится событие A . Следовательно, несовместные события A и B дей-

ствительно являются зависимыми.

А вот если события A и B совместные, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми. Подтвердим это на примере.

Пример 3. Пусть из колоды игральных карт (36 карт) вынимают наудачу одну за одной две карты. И пусть событие A состоит в том, что первая вынутая карта окажется тузом, а событие B – что и вторая карта окажется тузом. Рассмотрим два варианта испытания:

- а) первая вынутая карта возвращается в колоду;
- б) первая вынутая карта не возвращается в колоду.

Очевидно, что в обоих вариантах события A и B совместны. Исследуем их на зависимость –независимость.

а) В этом варианте вероятность появления события B (вынимания второго туза) не зависит, очевидно, от того, произошло или не произошло перед этим событие A (вынимание первого туза) и равна $p(B)=4/36=1/9$. Следовательно, в варианте а) имеем совместные и независимые события A и B .

б) В этом варианте, если событие A произошло, то $p(B)=3/35$ (останется 35 карт, и из них три туза). А если событие A не произошло (первая вынутая карта тузом не оказалась), то $p(B)=4/35$ (останется 35 карт, и из них четыре туза) Следовательно, в варианте б) имеем *совместные и зависимые события A и B* .

Определение 3. События $(A_1; A_2; \dots A_n)$ называются попарно несовместными, если появление каждого из них исключает появление любого другого (то есть если любая пара из группы событий $(A_1; A_2; \dots A_n)$ несовместна). В противном случае события $(A_1; A_2; \dots A_n)$ называются совместными.

Определение 4. События $(A_1; A_2; \dots A_n)$ называются независимыми в совокупности, если каждое из этих событий и любое другое событие, состоящее в появлении и

непоявлении остальных событий, являются событиями независимыми. В противном случае события $(A_1; A_2; \dots A_n)$ называются зависимыми.

Пример 4. Пусть из коробки, содержащей три шара (синий, красный, зелёный) наудачу по одному вынимают три шара, каждый раз опуская вынутый шар в коробку. И пусть $(A; B; C)$ – события, состоящие в вынимании последовательно синего, красного и зелёного шара. Очевидно, что эти три события – *совместные и независимые в совокупности*.

Если же вынутые шары в коробку не возвращать, то события $(A; B; C)$ – *совместные и зависимые*.

Сумма и произведение событий

Определение 5. Суммой случайных событий $(A_1; A_2; \dots A_n)$ называется событие B

$A_1 + A_2 + \dots + A_n = B$, состоящее в появлении хотя бы одного из складываемых событий (или A_1 , или A_2 , ... или A_n).

Таким образом, в теории вероятности знак сложения (+) означает союз «или».

Определение 6. Произведением случайных событий $(A_1; A_2; \dots A_n)$ называется событие C

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = C$, состоящее в появлении всех перемножаемых событий (и A_1 , и A_2 , ... и A_n).

Таким образом, в теории вероятности знак умножения (\cdot) означает союз «и».

Пример 1. Пусть $(A_1; A_2; A_3)$ – события, состоящее в попадании в мишень первого, второго и третьего стрелков соответственно. Тогда $B = A_1 + A_2 + A_3$ – событие, состоящее в попадании в мишень хотя бы одного из стрелков, а $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ – событие, состоящее в попадании в мишень всех трёх стрелков.

Суммы и произведения событий обладают следующими очевидными свойствами:

$A+B=B+A$ – переместительный закон сложения.
 $(A+B)+C=A+(B+C)$ – сочетательный закон сложения.
 $A \cdot B=B \cdot A$ – переместительный закон умножения. (3.4)
 $(A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C)$ – сочетательный закон умноже-

ния.

$(A+B) \cdot C=A \cdot C+B \cdot C$ – распределительный закон сложения и умножения.

Свойства для случайных событий полностью аналогичны соответствующим свойствам для чисел. Но есть и отличные свойства:

$A+A=A$; 2) $A \cdot A=A$; 3) $(A+B) \cdot A=A$; 4) $(AB) \cdot A=AB$

Определение 7. Символом \bar{A} обозначается событие, противоположное событию A . То есть \bar{A} – это непоявление события A .

Формулы сложения и умножения вероятностей.

Формулы сложения и умножения вероятностей – это формулы для нахождения вероятностей сумм и произведений событий. Наиболее просто и наглядно устанавливаются эти формулы с помощью геометрической интерпретации вероятности случайного события.

Формула сложения вероятностей двух несовместных событий.

Пусть A и B – любые несовместные события, то $p(A+B) = p(A) + p(B)$

Формула сложения вероятностей двух совместных событий.

Пусть A и B – любые два совместные события, то $p(A+B) = p(A)+p(B)-p(AB)$

Формула умножения вероятностей двух зависимых событий.

$p(B/A)$ – вероятность появления события B при

условии, что произошло событие A

$p(B/\bar{A})$ – вероятность появления события B при условии, что не произошло событие A

Введенные вероятности $p(B/A)$ и $p(B/\bar{A})$ называются *условными вероятностями события B* . Эти вероятности будут одинаковыми, если события A и B независимы (друг от друга), и неодинаковыми, если события A и B друг от друга зависимы. Кстати совершенно аналогично понимаются условные вероятности $p(A/B)$ и $p(A/\bar{B})$ события A .

Таким образом, если события A и B зависимые, то

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B/A)$$

$$p(AB) = p(B) \cdot p(A/B)$$

Формула умножения вероятностей двух независимых событий.

Если события A и B независимы, то $p(B/A) = p(B/\bar{A}) = p(B)$; $p(A/B) = p(A/\bar{B}) = p(A)$.

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Формулы сложения вероятностей для произвольного числа любых событий

Полученные выше формулы сложения вероятностей для двух случайных событий можно обобщить и на совокупность из нескольких событий.

Формулы для *вероятности суммы произвольного числа любых случайных событий*:

$$p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) -$$

если события $(A_1; A_2; \dots; A_n)$ попарно несовместны.

$p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n)$ - если события $(A_1; A_2; \dots; A_n)$ совместны

Формулы умножения вероятностей для произвольного числа любых событий

Формулы вероятности произведения произвольного числа любых случайных событий:

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdots p(A_n) -$$
 если события $(A_1; A_2; \dots; A_n)$ независимы в совокупности
$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 A_2) \cdots p(A_n / A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1})$$
 - если события $(A_1; A_2; \dots; A_n)$ зависимы

Формула полной вероятности и формула Байеса.

Определение. События $(B_1; B_2; \dots; B_n)$ образуют полную группу событий, если:

- а) они попарно несовместны;
- б) одно из них при производстве испытания обязательно произойдет.

Пример 1. События $(B_1; B_2; \dots; B_6)$, представляющие собой выпадение единицы, двойки, ... шестерки при бросании игральной кости, составляют, очевидно, полную группу событий.

$$\begin{aligned} p(A) &= p(B_1 A + B_2 A + \dots + B_n A) = \\ &= p(B_1) \cdot p(A / B_1) + p(B_2) \cdot p(A / B_2) + \dots + p(B_n) \cdot p(A / B_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n p(B_k) \cdot p(A / B_k) - \text{называется формулой полной} \end{aligned}$$

вероятности.

Примечание. Во многих практических задачах роль событий полной группы играют некоторые предположения (гипотезы). Поэтому события $(B_1; B_2; \dots; B_n)$ обычно называют *гипотезами*.

Вероятность находят по *формуле Байеса*:

$$p(B_k / A) = \frac{p(B_k) \cdot p(A / B_k)}{p(A)} \quad (k=1, 2 \dots n)$$

$$p(A \cdot B_k) = p(A) \cdot p(B_k / A) = p(B_k) \cdot p(A / B_k) \quad (k=1, 2 \dots n)$$

Тема 5.2. Случайные величины и ее числовые характеристики

1. Случайные события. Виды событий. Случайные величины и ее функция распределения

2. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Вторым основным понятием теории вероятностей, наряду с понятием случайного события, является понятие *случайной величины* (случайного числа).

Определение 1. *Величина X называется случайной, если в результате испытания (измерения) она примет значение, которое заранее неизвестно и которое зависит от случайных причин, учесть которые заранее невозможно.*

Например, оценка, которую студент получит на предстоящем экзамене - случайная величина; сумма выигрыша в лотерею – случайная величина; ошибка измерения, допускаемая измерительным прибором – случайная величина, и т. д.

Не следует путать случайное событие со случайной величиной. Например, сдача экзамена – это случайное событие, а оценка на экзамене – случайная величина; выигрыш в лотерею – случайное событие, а сумма выигрыша – случайная величина, и т. д.

Случайные величины делятся на два основных класса - *дискретные* и *непрерывные*.

Определение 2. *Случайная величина называется дискретной (прерывистой), если её возможные значения,*

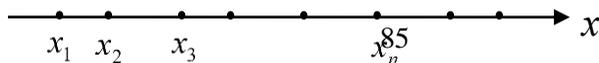


Рис.

нанесенные на числовую ось, выглядят на ней в виде отдельных, изолированных друг от друга, точек ($x_1; x_2; x_3; \dots$), которые можно пронумеровать. Число этих возможных значений ($x_1; x_2; x_3; \dots$) дискретной случайной величины X может быть как конечным, так и бесконечным.

Пример 1. Оценка X , которую получит студент на предстоящем экзамене – дискретная случайная величина. Действительно, её возможные значения (2, 3, 4, 5) на числовой оси представляются в виде отдельных, изолированных друг от друга, точек. Их число, кстати, конечно (равно четырем).

Пример 2. Число вызовов, поступающих за некоторое время (например, за сутки) на телефонную станцию – дискретная случайная величина X . Действительно, её возможные значения (0; 1; 2; 3; ...) – это отдельные, изолированные друг от друга, точки числовой оси. Их число, заметим, теоретически бесконечно.

Определение 3. Случайная величина X называется *непрерывной*, если она может принять любое значение x из некоторого числового промежутка $[a; b]$ или интервала $(a; b)$ числовой оси (конечного или бесконечного).

Таким образом, возможные значения непрерывной случайной величины X заполняют *сплошь* (непрерывно) некоторый промежуток или интервал числовой оси (рисун

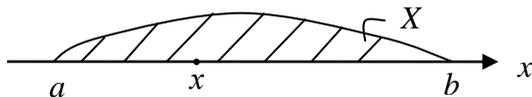


Рис. 2.2

нок 2.2). При этом предполагается, что вероятность принятия величин

величиной X своего значения на любом бесконечно малом участке этого промежутка или интервала *бесконечно мала*.

Дискретные случайные величины и их числовые характеристики

Дискретная случайная величина X считается заданной, если известен список $(x_1; x_2; x_3; \dots x_n)$ всех её возможных значений, а также известны вероятности $(p_1; p_2; p_3; \dots p_n)$ принятия ею этих её возможных значений. Эти данные оформляются в виде таблицы,

X	$x_1 x_2 x_3 \dots x_n$
p	$p_1 p_2 p_3 \dots p_n$

(1.1)

которая называется *законом распределения* дискретной случайной величины X .

Отметим, что сумма вероятностей $p_1+p_2+\dots+p_n$ представляет собой, согласно формуле (4.10) главы 1 для попарно несовместных событий, вероятность принятия случайной величиной X хотя бы одного из своих возможных значений (или x_1 , или x_2 , ... или x_n). То есть представляет собой вероятность достоверного события – события, которое произойдет обязательно. Но вероятность достоверного события равна единице. Таким образом:

$$p_1+p_2+\dots+p_n=1 \quad (1.2)$$

Это равенство должно выполняться в любом законе распределения (1.1).

Пример1. В лотерее разыгрываются 200 лотерейных билетов. Из них 2 билета содержат выигрыш по 1000 рублей, 5 билетов по 500 рублей, 10 билетов по 300 рублей и 25 билетов по 100 рублей. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Искомый закон распределения очевиден:

X	0	100	300	500	1000
p	0,79	0,125	0,05	0,025	0,01

На практике обычно важно знать не столько сам закон распределения дискретной случайной величины (таблицу), сколько некоторые суммарные (обобщающие) числовые характеристики этой случайной величины, характеризующие её в целом. В частности, на практике наиболее важно знать:

- а) среднее значение x_{cp} случайной величины;
- б) степень разброса её возможных значений ($x_1; x_2; \dots x_n$) вокруг её среднего значения x_{cp} .

Начнем с того, что найдем среднее значение x_{cp} дискретной случайной величины X . Пусть таблица (1.1) – закон её распределения. Представим себе, что будет проведено N повторных испытаний. Так как ($p_1; p_2; \dots p_n$) – вероятности появления значений ($x_1; x_2; \dots x_n$) случайной величины X , то согласно формуле (1.1) главы 1 эти значения появятся в среднем ($p_1N; p_2N; \dots p_nN$) раз соответственно. Тогда среднее из всех этих N значений будет, очевидно, таким:

$$x_{cp} = \frac{x_1 \cdot p_1N + x_2 \cdot p_2N + \dots + x_n \cdot p_nN}{N} = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k \quad (1.3)$$

Это среднее значение дискретной случайной величины X является *наиболее ожидаемым её значением* для каждого отдельного испытания, и потому называется *математическим ожиданием* случайной величины X . Оно обозначается символом $M(X)$. Итак,

$$M(X) = x_{cp} = \sum_{k=1}^n x_k p_k = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n \quad (1.4)$$

- математическое ожидание (среднее значение) дискретной случайной величины X . Вокруг математического ожидания группируются реальные средние значения случайной величины X в различных сериях испытаний.

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1. Математическое ожидание неизменной (постоянной) величины C равно самой этой постоянной:

$$M(C)=C \quad (1.5)$$

2. Постоянный множитель (константу) можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=C \cdot M(X) \quad (1.6)$$

И смысл доказанного свойства (1.6) понятен: если изменить (увеличить или уменьшить) в C раз все возможные значения случайной величины X , то в это же число раз изменится и её среднее значение.

3. Математическое ожидание суммы любых двух дискретных случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y) \quad (1.8)$$

4. Математическое ожидание разности любых двух дискретных случайных величин X и Y равно разности их математических ожиданий:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y) \quad (1.14)$$

5. Математическое ожидание произведения двух дискретных случайных величин X и Y , *если эти величины независимы*, равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) \quad (1.16)$$

Из свойства (1.16) следует, что и математическое ожидание произведения нескольких *взаимно независимых* случайных величин $(X_1; X_2; \dots X_p)$ равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_p) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_p) \quad (1.19)$$

Перейдем теперь к вопросу о том, как охарактеризовать степень разброса возможных значений $(x_1; x_2; \dots x_n)$ дискретной случайной величины X вокруг её математического ожидания (вокруг её среднего значения) $M(X) = x_{cp}$.

На первый взгляд может показаться, что для оценки указанного разброса следует вычислить все возможные отклонения значений случайной величины X от её $M(X)$, то есть вычислить разности

$$x_1 - M(X); x_2 - M(X); \dots x_n - M(X)$$

и найти, с учетом вероятностей $(p_1; p_2; \dots p_n)$ этих разностей, их среднее значение. То есть найти $M[X - M(X)]$. Однако такой путь ничего не дает, так как эта величина всегда равна нулю:

$$M[X - M(X)] = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0 \quad (1.20)$$

Этот результат объясняется тем, что одни возможные отклонения X от $M(X)$ положительны, другие отрицательны, так что их среднее значение в результате их взаимного погашения равно нулю. Это обстоятельство указывает на целесообразность замены отклонений $X - M(X)$ их абсолютными величинами $|X - M(X)|$ или их квадратами $(X - M(X))^2$. Первый из этих вариантов предполагает опе-

рирование с абсолютными величинами (модулями), что не очень удобно. Поэтому общепринятым является второй путь. А именно, вычисляют $M[X - M(X)]^2$ - среднее значение квадрата отклонения величины X от её среднего значения $M(X)$, которое называют *дисперсией* $D(X)$ величины X . А затем, извлекая квадратный корень из дисперсии $D(X)$, находят среднее отклонение X от $M(X)$ уже без квадрата этого отклонения. В нем знак отклонения X от $M(X)$ уже не учитывается (этот знак всегда плюс).

Указанный $\sqrt{D(X)}$ называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины X и обозначается символом $\sigma(X)$. Величина $\sigma(X)$ показывает, на сколько в среднем отклоняется X от $M(X)$, если не учитывать знак отклонения X от $M(X)$. Итак,

$$D(X) = M[X - M(X)]^2; \sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad (1.21)$$

- дисперсия $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ величины X .

Обе эти величины характеризуют степень разброса значений величины X вокруг её среднего значения $M(X)$.

Действительно, чем сильнее разбросаны значения X вокруг $M(X)$, тем больше числовые значения $X - M(X)$ отклонений X от $M(X)$. А значит, тем больше квадраты $[X - M(X)]^2$ этих отклонений. Но тогда тем больше среднее значение $M[X - M(X)]^2$ квадратов этих отклонений. То есть тем больше дисперсия $D(X)$ случайной величины X . А значит, тем больше и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ величины X . А чем меньше разброс значений случайной величины X вокруг её математического ожидания $M(X)$ (то есть чем кучнее они вокруг $M(X)$ расположе-

ны), тем меньше величины $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Из этих двух числовых характеристик случайной величины X важнейшей является $\sigma(X)$ в силу её наиболее ясного смысла ($\sigma(X)$ – это среднее отклонение X от $M(X)$ без учета знака этого отклонения). А дисперсия $D(X)$ является вспомогательной величиной, по которой затем определяется среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Если (1.1) – закон распределения дискретной случайной величины X , то случайная величина $Z = [X - M(X)]^2$ имеет, очевидно, следующий закон распределения:

$[X - M(X)]^2$	$[x_1 - M(X)]^2$	$[x_2 - M(X)]^2$...	$[x_n - M(X)]^2$
P	p_1	p_2	...	p_n

И тогда, согласно определению (1.21) дисперсии $D(X)$ и формуле (1.4), получаем следующую формулу для практического подсчета дисперсии $D(X)$:

$$D(X) = \sum_{k=1}^n [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k \quad (1.23)$$

Исходя из определения дисперсии (1.21), для её практического вычисления можно получить и другую, так называемую *упрощенную*, формулу. Используя свойства математического ожидания, получим:

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2X \cdot M(X) + (M(X))^2] = \\ &= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - [M(X)]^2 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Итак,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \quad (1.25)$$

- *упрощенная формула* для дисперсии $D(X)$. Читается эта формула так: *дисперсия дискретной случайной величины X равна математическому ожиданию квадрата этой величины*

минус квадрат её математического ожидания. При этом:

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k ; M(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot p_k \quad (1.26)$$

После вычисления дисперсии $D(X)$ находится и $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ - среднее квадратическое отклонение величины X .

Для сравнения $\sigma(X)$ с $M(X)$ вводится величина

$$V(X)\% = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \cdot 100\% , \quad (1.27)$$

которая называется *коэффициентом вариации* величины X . Она показывает, какую долю в процентах составляет для случайной величины X её среднее отклонение от среднего по отношению к самому среднему.

Пример 2. дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	0	3	6
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Найти её числовые характеристики $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $V(X)\%$.

Решение.

1) Найдем $M(X)$. Используя формулу (1.4), получим:

$$M(X) = \sum_{k=1}^3 x_k p_k = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 2.$$

2) Найдем $D(X)$. Используя основную формулу (1.23), получаем:

$$D(X) = \sum_{k=1}^3 (x_k - 2)^2 p_k = (0-2)^2 \cdot \frac{1}{2} + (3-2)^2 \cdot \frac{1}{3} + (6-2)^2 \cdot \frac{1}{6} = 5;$$

Заметим, что то же самое значение $D(X)=5$ мы получим, если используем упрощенную формулу (1.25) и выражения (1.26):

$$M(X)=2; M(X^2)=0^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = 9; D(X)=9 - 2^2 = 5$$

3) Найдем $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5} \approx 2,236.$$

4) Найдем $V(X)\%$:

$$V(X)\% = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \cdot 100\% \approx \frac{2,236}{2} \cdot 100\% \approx 112\% .$$

Таким образом, среднее значение $x_{\text{ср}}$ данной случайной величины X равно $M(X)=2$. То есть принимая три возможных значения (0; 3; 6), случайная величина X в среднем принимает значение 2. Найденное значение не совпадает со средним арифметическим этих чисел (с 3) и оказалось ближе к 0, нежели к 6. Это произошло потому, что вероятность $\left(\frac{1}{2}\right)$ значения 0 гораздо больше вероятности $\left(\frac{1}{6}\right)$ значения 6. А это значит, что при повторных испытаниях значение 0 будет встречаться гораздо чаще (втрое чаще), чем значение 6. Поэтому и среднее из значений, принимаемых случайной величиной X , будет сдвинуто от среднего арифметического (от числа 3) в сторону нуля. Точно так же средний балл аттестата зрелости выпускника школы ближе к трем, чем к пяти, если в этом аттестате больше троек, чем пятерок.

Далее, среднее отклонение $\sigma(X)$ величины X от её среднего значения $M(X)=2$ оказалось равным $\approx 2,236$. И это

тоже хорошо объяснимо. Действительно, у случайной величины X три возможных значения (0; 3; 6) при $x_{cp}=M(X)=2$. Отклонения этих значений от их среднего значения $x_{cp}=2$ составляют (без учета знака отклонения) соответственно (2; 1; 4). Из этих трех отклонений средним оказалось $\sigma(X)\approx 2,236$. Оно наиболее близко к 2, то есть наиболее близко к отклонению значения 0 от $x_{cp}=2$. И это оправдано, так как значение 0 величины X при повторных испытаниях будет встречаться чаще других значений.

Наконец, величина коэффициента вариации величины X показывает, что $\sigma(X)\approx 2,236$ (среднее отклонение от среднего) по отношению к $M(X)=2$ (к самому среднему) составляет $\approx 112\%$.

Свойства дисперсии дискретной случайной величины.

Для нахождения $\sigma(X)$ и $V(X)\%$ нужно предварительно найти $D(X)$ – дисперсию величины X . При её нахождении полезно знать и использовать свойства дисперсии. Эти свойства таковы:

1. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю:*

$$D(C) = 0 \quad (1.28)$$

2. *Постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате:*

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X) \quad (1.29)$$

3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) \quad (1.30)$$

4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) \quad (1.31)$$

Следствие 1 свойств 1– 4: для любой дискретной случайной величины X и для любой константы C

$$D(X + C) = D(X) \quad (1.32)$$

Следствие 2 свойств 1– 4: если $(X_1; X_2; \dots; X_p)$ – взаимно независимые случайные величины, то

$$D(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_p) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_p) \quad (1.33)$$

Раздел 6. Основные численные методы

Тема 6.1. Численное интегрирование

1. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона
2. Вычисление интегралов приближенными методами.

Классификация методов. Ставится задача вычислить определенный интеграл вида

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

где $f(x)$ – непрерывная функция на интервале $[a, b]$.

Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл удастся вычислить непосредственно с помощью неопределенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница. Она состоит в том, что определенный интеграл равен приращению первообразной $F(x)$ на отрезке интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Однако на практике этой формулой часто нельзя воспользоваться по двум основным причинам:

- 1) вид функции $f(x)$ не позволяет аналитически выразить первообразную $F(x)$ через элементарные функции;
- 2) подынтегральная функция $f(x)$ задана таблично.

В этих случаях используют приближенные, методы интегрирования.

Сущность большинства приближенных методов вычисления определенных интегралов состоит в замене подынтегральной функции $f(x)$ аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$, для которой можно легко записать первообразную в элементарных функциях, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R$$

где R – погрешность вычисления интеграла.

С целью уменьшения погрешности, связанной с аппроксимацией подынтегральной функции, интервал интегрирования $[a, b]$ разбивают на n отрезков и на каждом частичном отрезке заменяют подынтегральную функцию аппроксимирующей функцией $\varphi_i(x)$. Тогда приближенное значение интеграла определяется суммой частичных интегралов от функций $\varphi_i(x)$, взятых в пределах от x_{i-1} до x_i :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x)dx$$

Используемые на практике методы численного интегрирования можно сгруппировать в зависимости от способа аппроксимации подынтегральной функции. Ниже приведем краткую характеристику классов наиболее распространенных методов.

Методы Ньютона-Котеса основаны на полиномиальной аппроксимации (интерполяции) подынтегральной функции. Методы этого класса отличаются друг от друга степенью используемого полинома, от которого зависит количество узлов, где необходимо вычислять функцию $f(x)$. В методах Ньютона-Котеса отрезок интегрирования разбивается, как правило, на отрезки равной длины, величина которых определяется как $h = (b - a) / n$ и называется *шагом интегрирования*. Алгоритмы этих методов просты и легко поддаются программной реализации.

Сплайновые методы базируются на аппроксимации подынтегральной функции сплайнами. Методы различаются по типу выбранных сплайнов. Такие методы имеет смысл использовать в задачах, где алгоритмы сплайновой аппроксимации применяются для обработки данных.

В *методах наивысшей алгебраической точности* используют неравноотстоящие узлы, расположенные так, чтобы обеспечить минимальную погрешность интегрирования при заданном количестве узлов. Методы различаются способом выбора узлов. Наиболее широкое применение получили *методы Гаусса*, в которых узлы интегрирования выбираются как корни полиномов Лежандра.

В *методах Монте-Карло* узлы выбираются с помощью генератора случайных чисел, результат в итоге носит вероятностный характер. Методы оказываются особенно

эффективны при вычислении кратных интегралов.

Независимо от выбранного метода в процессе численного интегрирования необходимо вычислить приближенное значение интеграла и оценить погрешность R .

Погрешность, возникающая при численном интегрировании, также как и при численном дифференцировании, имеет два основных источника. Первым источником погрешности является приближенная замена подынтегральной функции аппроксимирующей функцией – погрешность аппроксимации. Как будет показано ниже, погрешность аппроксимации уменьшается с увеличением количества отрезков разбиения интервала интегрирования n за счет более точной аппроксимации подынтегральной функции. Другой источник погрешности – неточности в вычислении подынтегральной функции в узловых точках и ошибки округления. Эта погрешность возрастает с ростом n и с некоторого значения n^* начинает преобладать над погрешностью аппроксимации. Это обстоятельство должно предостеречь от выбора чрезмерно большого числа n .

Интерполяционные методы Ньютона-Котеса.

Способ получения формул для вычисления приближенного значения интеграла в методах Ньютона-Котеса состоит в следующем. Разобьем интервал интегрирования $[a, b]$ на n элементарных отрезков. Точки разбиения $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ будем называть узлами интегрирования, а расстояния между узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$ – шагами интегрирования. В частном случае шаг интегрирования может быть постоянным $h = (b - a) / n$. На каждом частичном отрезке интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$ будем аппроксимировать подынтегральную функцию интерполяционным полиномом. В этом случае вычисление частичных интегралов

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx$$

в формуле α не составит труда.

Методы прямоугольников. Рассмотрим сначала простейшие методы из класса методов Ньютона-Котеса, в которых подынтегральную функцию $f(x)$ на отрезке интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$ заменяют полиномом нулевой степени, т.е. константой: $f(x) \approx \varphi_i(x) = c_i$. Подставляя $\varphi_i(x)$ в

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx$$

формулу α и выполняя интегрирование, получаем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \sum_{i=1}^n c_i x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{i=1}^n c_i h_i$$

Таким образом, приближенное значение интеграла определяется суммой площадей прямоугольников, одна из сторон которых есть длина отрезка интегрирования h_i , а другая – аппроксимирующая константа. Отсюда происходит и название методов.

➤ **Замечание.**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \sum_{i=1}^n c_i x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{i=1}^n c_i h_i$$

К формуле можно также прийти, если заменить определенный интеграл интегральной суммой, непосредственно опираясь на определение понятия определенного интеграла.

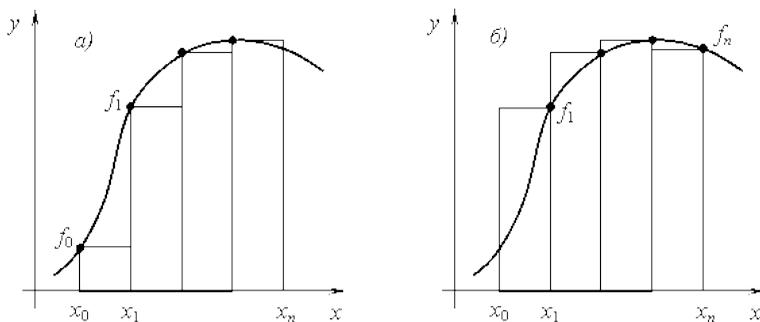


Рис. 1. Методы левых и правых прямоугольников

Заметим, что замена подынтегральной функции константой неоднозначна, так как константу c_i можно выбрать равной значению подынтегральной функции в любой точке интервала интегрирования.

Выбирая константу c_i равную значению подынтегральной функции в левой или правой границах отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ приходим к формулам *левых* и *правых* *прямоугольников*, соответственно:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f_{i-1} = h_1 f_0 + h_2 f_1 + \dots + h_n f_{n-1},$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f_i = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_n f_n.$$

В этих формулах введены обозначения $f_{i-1} = f(x_{i-1})$, $f_i = f(x_i)$, которыми мы будем пользоваться и в дальнейшем.

В случае постоянного шага интегрирования рассмотренные формулы приобретают вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f_{i-1} = h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f_i = h(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$$

Наиболее широко на практике используется формула *средних прямоугольников*, в которой значение константы C_i (высота прямоугольника) выбирается равной значению подынтегральной функции в средней точке \bar{x}_i отрезка интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f(\bar{x}_i), \quad \bar{x}_i = x_{i-1} + h_i / 2$$

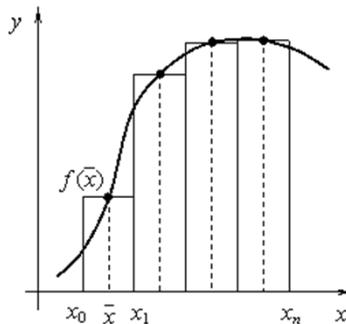


Рис. 2. Метод средних прямоугольников

В случае постоянного шага интегрирования, когда $h_i = h$, формула средних прямоугольников будет иметь следующий вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i),$$

где $\bar{x}_i = a + h(i - 1/2)$.

Из трех рассмотренных методов прямоугольников метод средних прямоугольников является наиболее точным.

➤ **Замечание.** Если подынтегральная функция $f(x)$ задана не аналитическим выражением, а таблично, то формула средних прямоугольников оказывается неприменима (без привлечения дополнительной интерполяции), так как значения функции известны лишь в узловых точках. В этом случае пользуются либо формулами левых или правых прямоугольников, либо используют другие методы.

Метод трапеций. На частичном отрезке интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$ заменим подынтегральную функцию $f(x)$ интерполяционным полиномом первой степени, т.е. прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i) :

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Поставляя это выражение в формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx$$

и выполняя интегрирование по частичным отрезкам, при-

ходим к формуле трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i (f_{i-1} + f_i)$$

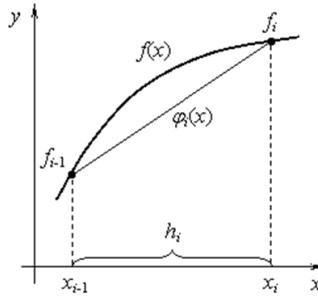


Рис. 3. Метод трапеций

Название метода связано с тем, что интеграл по отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ заменяется площадью трапеции с основаниями, равными значениям функции $f(x)$ на краях отрезка, и высотой, равной h_i .

В случае постоянного шага интегрирования формула трапеций принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f_{i-1} + f_i) = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n]$$

Для удобства вычислений и оптимизации вычислительных погрешностей эту формулу часто записывают следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right)$$

➤ **З а м е ч а н и е .** Несмотря на то, что в методе трапеций используется более высокий порядок интерполяции

подынтегральной функции (кусочно-линейная интерполяция), по сравнению с методом прямоугольников, который использует интерполяцию нулевого порядка (кусочно-постоянная), точность метода трапеций оказывается ниже точности метода средних прямоугольников. Более высокая точность метода средних прямоугольников объясняется «удачным» выбором узловых точек, в которых вычисляется высота элементарного прямоугольника.

Метод Симпсона (метод парабол). Разобьем интервал интегрирования $[a, b]$ на четное число n равных отрезков с шагами h . На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, содержащем три узла, заменим подынтегральную функцию интерполяционным полиномом второй степени, т.е. параболой

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} (x - x_i) + \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2h^2} (x - x_i)^2$$

Интегрируя это выражение на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, получим

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} (x - x_i) + \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2h^2} (x - x_i)^2 dx = \\ &= \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \end{aligned}$$

Приближенное значение интеграла на интервале $[a, b]$ получим суммированием частичных интегралов (5.21) по всем отрезкам $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} (f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}) =$$

$$= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

Полученное соотношение называется *формулой Симпсона* или *формулой парабол*.

Если подынтегральную функцию $f(x)$ интерполировать полиномом второй степени на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ с привлечением дополнительной точки $x_{i-\frac{1}{2}}$ – середины отрезка, то в этом случае число отрезков разбиения n может быть произвольным (не обязательно четным), а формула Симпсона в этом случае будет иметь вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} \sum_{i=1}^n \left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i \right) = \frac{h}{6} \left(f_0 + 4f_{\frac{1}{2}} + 2f_1 + 4f_{\frac{3}{2}} + \dots + 2f_{n-1} + 4f_{n-\frac{1}{2}} + f_n \right).$$

Напомним, что $f_i = f(x_i)$, $f_{i-\frac{1}{2}} = f(x_i - h/2)$.

➤ **Замечание 1.** Первая формула пригодна для вычисления интегралов от функций, заданных как аналитическим выражением, так и таблично, тогда как вторая формула применима только в тех случаях, когда подынтегральная функция задана аналитически.

➤ **Замечание 2.** Формулы, используемые для приближенного вычисления интеграла, называются *квадратурными формулами*. Нетрудно заметить, что все полученные нами формулы имеют следующую структуру:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f_i,$$

где f_i – значения подынтегральной функции в узловых

точках; A_i – весовые коэффициенты, независимые от функции $f(x)$.

Погрешность формул Ньютона-Котеса. Рассмотрим подробно один из возможных способов оценки погрешности формул численного интегрирования на примере метода средних прямоугольников. Для этого запишем выражение для интеграла на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, полученное методом средних прямоугольников

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = h f(\bar{x}_i) + R_i$$

откуда

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - h f(\bar{x}_i)$$

Для оценки погрешности интегрирования R_i разложим подынтегральную функцию $f(x)$ в ряд Тейлора около средней точки \bar{x}_i

$$f(x) = f(\bar{x}_i) + (x - \bar{x}_i) f'(\bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} f''(\bar{x}_i) + \dots$$

В малой окрестности точки x в разложении можно ограничиться небольшим количеством членов ряда. Поэтому, подставляя в формулу вместо функции $f(x)$ ее тейлоровское разложение и интегрируя его почленно, можно вычислить интеграл с любой заданной точностью

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = h f(\bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\bar{x}_i) + \frac{(x - \bar{x}_i)^3}{2 \cdot 3} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\bar{x}_i) + \dots =$$

$$= h f(\bar{x}_i) + \frac{h^3}{24} f''(\bar{x}_i) + \dots$$

При интегрировании и подстановке пределов получаем, что все интегралы от членов ряда, содержащих нечетные степени $(x - \bar{x}_i)$, обращаются в нуль.

Подставляя полученное соотношение в формулу, получим

$$R_i = \frac{h^3}{24} f''(\bar{x}_i) + \dots$$

При малой величине шага интегрирования h основной вклад в погрешность R_i будет вносить первое слагаемое, которое называется *главным членом погрешности* R_{0i} вычисления интеграла на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$

$$R_{0i} = \frac{h^3}{24} f''(\bar{x}_i)$$

Главный член полной погрешности для интеграла на всем интервале $[a, b]$ определится путем суммирования погрешностей на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$R_0 = \sum_{i=1}^n R_{0i} = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\bar{x}_i)$$

На основании можно получить оценку для абсолютного значения погрешности:

$$|R_0| \leq \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n M_2 = \frac{h^3}{24} n M_2 = \frac{1}{24} (b-a) h^2 M_2,$$

где $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

Формула представляет собой теоретическую оценку погрешности вычисления интеграла методом средних прямоугольников, эта оценка является априорной, так как не требует знания значения вычисляемого интеграла. Степень шага h , которой пропорциональна величина R_0 , называется *порядком метода интегрирования*. Метод средних прямоугольников имеет второй порядок точности.

Аналогично можно получить априорные оценки погрешностей других методов. Приведем здесь лишь окончательные результаты:

- методы левых и правых прямоугольников – $|R_0| \leq \frac{1}{2} (b-a) h M_1$;
- методы средних прямоугольников – $|R_0| \leq \frac{1}{24} (b-a) h^2 M_2$;
- метод трапеций – $|R_0| \leq \frac{1}{12} (b-a) h^2 M_2$;
- метод Симпсона – $|R_0| \leq \frac{1}{180} (b-a) h^4 M_4$;
- метод Симпсона – $|R_0| \leq \frac{1}{2880} (b-a) h^4 M_4$.

Методы левых и правых прямоугольников являются методами первого порядка. Методы средних прямоугольников и трапеций имеют второй порядок точности, при этом метод трапеций обладает вдвое большей по абсолютной величине погрешностью по сравнению с методом средних прямоугольников. Поэтому, если подынтегральная

функция задана аналитически, то предпочтительнее из методов второго порядка применять метод средних прямоугольников вследствие его меньшей погрешности. Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности с очень малым численным коэффициентом. Формула Симпсона позволяет получить очень высокую точность, если четвертая производная подынтегральной функции не слишком велика. В противном случае, методы второго порядка точности могут дать большую точность, чем метод Симпсона.

Например, для функции $f(x) = -25x^4 + 45x^2 - 7$ формула трапеций при $n = 2$ для интеграла в пределах $[-1, 1]$ дает точный результат, равный 4, тогда как по формуле Симпсона получим результат, несовпадающий даже по знаку ($-\frac{8}{3}$).

Вычисление интеграла с заданной точностью.

Используя приведенные выше оценки можно априори (до проведения расчета) определить шаг интегрирования h , при котором погрешность вычисленного результата гарантированно не превысит допустимый уровень погрешности ε . Однако на практике пользоваться априорными оценками погрешности не всегда удобно. Тогда контроль за точностью получаемого результата можно организовать следующим образом. Пусть вычисления проводились с постоянным шагом h , $I^{(h)}$ – вычисленное с шагом h приближенное значение интеграла I . Если затем вычислить приближенное значение $I^{(h/2)}$ с шагом $h/2$, то в качестве оценки погрешности последнего вычисленного значения можно рассматривать величину

$$|I^{(h/2)} - I| \approx |I^{(h/2)} - I^{(h)}|.$$

При необходимости вычислить результат с заданной точ-

ностью ε вычисления повторяют с последовательно уменьшающимся (вдвое) шагом до тех пор, пока не выполнится условие

$$|I^{(h/2)} - I^{(h)}| \leq \varepsilon.$$

Можно применить указанное правило для контроля за локальной погрешностью на каждом частичном интервале. При этом длина очередного интервала $h_i = x_i - x_{i-1}$, посредством последовательного уменьшения (или увеличения) начальной длины вдвое, устанавливается такой, чтобы выполнялось неравенство

$$|I_i^{(h/2)} - I_i^{(h)}| \leq \varepsilon \frac{h_i}{b-a}.$$

Тогда в худшем случае ошибка вычисленного значения интеграла на всем интервале интегрирования не будет превосходить сумму локальных погрешностей $\sum \varepsilon h_i / (b-a) = \varepsilon$, т.е. не будет превосходить заданного уровня погрешности.

Способ вычисления интеграла с автоматическим выбором шага имеет то преимущество, что он «приспосабливается» к особенностям подынтегральной функции: в областях резкого изменения функции шаг уменьшается, а там, где функция меняется слабо, — увеличивается. Такого рода алгоритмы называются *адаптивными*, т.е. приспособляющимися. Использование адаптивных алгоритмов позволяет сократить затраты машинного времени без потери точности.

Особые случаи численного интегрирования.

а) *Интегрирование разрывных функций.* Если подынтегральная функция в некоторых внутренних точках c_i ($i = 1, 2, \dots$) интервала интегрирования терпит разрыв

первого рода (скачок), то интеграл вычисляют численно для каждого участка непрерывности отдельно и результат складывают. Например, в случае одной точки разрыва $x = c$ ($a < c < b$) имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Для вычисления каждого из интегралов в правой части можно использовать любой из рассмотренных выше методов.

б) *Несобственные интегралы*. Напомним, что к такому типу интегралов относятся интегралы, которые имеют хотя бы одну бесконечную границу интегрирования или подынтегральную функцию, обращающуюся бесконечность хотя бы в одной точке интервала интегрирования.

Рассмотрим сначала интеграл с бесконечной границей интегрирования, например, интеграл вида

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Один из универсальных способов вычисления такого интеграла состоит в следующем. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{+\infty} f(x) dx,$$

где A – некоторое большое число. Вычисление первого интеграла на конечном отрезке $[a, A]$ не вызывает вопросов. Выбор числа A производят таким образом, чтобы в преде-

лах допустимой погрешности вторым интегралом можно было пренебречь.

В случае, когда подынтегральная функция обращается в бесконечность в некоторой точке $x = c$ ($a < c < b$), то интеграл приближенно можно представить в виде суммы двух интегралов

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

где δ – малая величина. На отрезках $[a, c - \delta]$ и $[c + \delta, b]$ подынтегральная функция не содержит особенностей и указанные интегралы могут быть вычислены любым из рассмотренных выше методов.

➤ **Замечание.** При вычислении несобственных интегралов не стоит забывать о том, что иногда подходящая замена переменной интегрирования позволяет вообще избавиться от особенности. Так, например, при вычислении интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

имеется особенность в точке $x = 0$, где подынтегральная функция обращается в бесконечность. При этом заменой переменной $x = t^2$ приходим к интегралу

$$I = 2 \int_0^1 \cos t^2 dt,$$

который не имеет особенностей и вычисляется с требуемой точностью по любой квадратурной формуле.

Вычисление кратных интегралов. Для вычисления кратных интегралов вида

$$\iiint_G \dots \int f(x, y, \dots, z) dx dy \dots dz$$

также используются численные методы. Ограничимся здесь рассмотрением двойных интегралов

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

Если областью интегрирования G является прямоугольник: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, то для вычисления двойного интеграла можно использовать любую из рассмотренных выше формул. Например, применение формулы средних прямоугольников дает следующий результат

$$\iint_{ac}^{bd} f(x, y) dx dy = \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$$

Если область интегрирования G непрямоугольная, например,

$$I = \int_a^{b \varphi_2(x)} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx dy$$

то её можно привести к прямоугольному виду с помощью замены

$$t = \frac{y - \varphi_1(x)}{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

С повышением кратности интегралов резко возрастает объем вычислений и рассмотренный подход становится неэффективным. Например, если мы разбиваем интервал изменения каждой переменной всего на десять частей, то для вычисления тройного интеграла нам потребуется вычислить сумму тысячи слагаемых, а при вычислении 10-кратного интеграла, потребуется сумма, количество слагаемых в которой

определяется числом 10^{10} . Вычисление такой суммы затруднительно даже на самых быстродействующих современных компьютерах. В этом случае применяют другие методы численного интегрирования, среди которых особое место занимает метод статистических испытаний.

Список литературы

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.- М.: Юрайт, 2013.
2. Пехлецкий И.Д. Математика.- М.: Академия, 2014
3. Комогорцев В.Ф. Линейная алгебра с основами аналитической геометрии на плоскости.- Брянск: БГСХА, 2013.
4. Комогорцев В.П. Математический анализ.- Брянск: БГСХА, 2014.

Учебное издание

Дьяченко Ольга Викторовна

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС
ПО МАТЕМАТИКЕ**

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 3.11.2015 г. Формат 60x84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 6,74. Тираж 25 экз. Изд. № 3799.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ