Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Трубчевский аграрный колледж-филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Брянский государственный аграрный университет"

Саликова Т.С.

Методические рекомендации по решению задач по дисциплине «Техническая механика» для обучающихся специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

Брянская область, 2019 г.

УДК 531.8 (07)

ББК 30.12

С 16

Саликова, Т. С. Методическое пособие по решению задач по дисциплине «Техническая механика» специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования / Т. С. Саликова. - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2019. - 57 с.

Составитель:

Саликова Т.С. - преподаватель информационных систем Трубчевского филиала ФГБОУ ВО Брянский ГАУ, высшая квалификационная категория

Методическое пособие по решению задач по учебной дисциплине «Техническая механика» подготовлено на основе требований к результатам освоения программы подготовки специалистов среднего звена.

Методическое пособие по решению задач дисциплины предусматривает примеры решения задач по разделам дисциплины: теоретическая механика (статика, кинематика, динамика) и сопротивление материалов.

Учебное пособие предназначено для студентов и преподавателей средних специальных учебных заведений.

Методическое пособие печатаются по решению методического совета филиала, протокол №3 от 04.02.2019 г.

Рецензент:

Лопаткин В.В. – заместитель директора по воспитательной работе, председатель цикловой методической комиссии, преподаватель Трубчевского филиала высшей квалификационной категории, Почетный работник среднего профессионального образования Российской Федерации.

© Брянский ГАУ, 2019

© Саликова Т.С., 2019

Содержание

Решение задач по технической механике

Примеры решения задач по теоретической механике

Принципы и способы решения задач теоретической механики рассмотрены на простейших примерах, где необходимо определить какие-либо силовые факторы, действующие на тело, скорость, ускорение, работу, мощность и другие физические величины. На основе результатов расчетов с использованием приемов теоретической механики приступают к решению задач методами сопротивления материалов, а затем переходят к расширенным практическим вопросам, которые ставит раздел "Детали машин".

Решение задачи с использованием метода кинетостатики

Определить силу натяжения в канате крановой установки, поднимающей груз G с ускорением a.

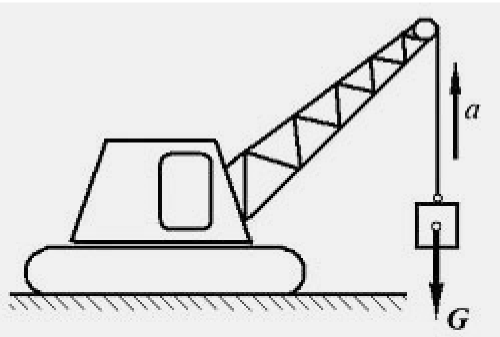
Исходные данные:

Масса груза m = 5 *тонн*;

Ускорение груза a = 2 $м/сек^2$;

Ускорение свободного падения принять равным g = 10 $м/сек^2$;

Силой сопротивления воздуха пренебречь.



Решение:

Для решения задачи используем метод кинетостатики (принцип Д'Аламбера), который основывается на введении понятия силы инерции и приведении подвижной системы к состоянию условного равновесия. Это позволяет использовать для решения задач Кинематики способы и методы Статики.

Чтобы понять сущность этого принципа, представьте себе просмотр киносюжета, кадры которого сняты при малой скоростью съемки, и движение тел на экране словно состоит из отдельных прерывистых фрагментов (или - как передвигается робот - урывками). Т. е. движение тела рассматривается состоящим из отдельных крохотных моментов, и в каждый такой микро-момент тело находится в состоянии равновесия под действием движущей силы и силы инерции, сопротивляющейся движению.

Следует отметить, что сила инерции – понятие условное. Тем не менее, инертность тел – явление известное всем, поскольку, например, тяжелый шар трудно сдвинуть с места, а когда он, все-таки, покатится, его трудно остановить.

Итак, для решения этой задачи следует рассмотреть условие равновесия груза, который поднимается с ускорением $\boldsymbol{a}$ под действием некоторой системы сил. Реально к грузу приложены две силы – сила натяжения каната, и сила тяжести груза. Очевидно, что эти силы не равны по величине, поскольку груз поднимается с ускорением, значит, сила натяжения в канате больше силы тяжести.

Введем в систему упомянутую выше силу инерции, которая условно уравнивает разницу между силой натяжения в канате и силой тяжести, тогда груз будет находиться в условном равновесии.

Составим уравнение этого равновесия: $\boldsymbol{F_к - G - F^{ин} = 0}$,

где: $\boldsymbol{F_к}$ – сила натяжения каната (тяга крановой установки),

$\boldsymbol{G}$ – вес груза,

$\boldsymbol{F^{ин}}$ – сила инерции.

Очевидно, что условие равновесия будет соблюдаться, если искомая сила $\boldsymbol{F_к}$ будет равна сумме сил тяжести и инерции.

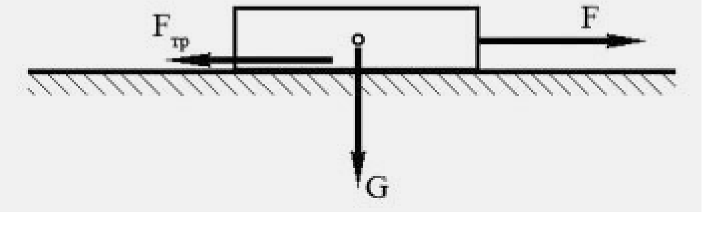
Силу тяжести $\boldsymbol{G}$ и силу инерции $\boldsymbol{F^{ин}}$ можно вычислить, используя второй закон Ньютона, как произведение массы тела на ускорение, вызываемое этими силами: $G = mg$, где m – масса тела в *кг*, g – ускорение свободного падения; $F_{ин} = ma$, тогда:

$$\boldsymbol{F_к = G + F^{ин} = mg + ma = m(g + a)} = 5000 \times (10 + 2) = 60\,000\ Н = 60\ кН.$$

Задача решена.

Решение задачи на трение

Определить силу F, необходимую для равномерного перемещения бруса по горизонтальной шероховатой поверхности.



Исходные данные:

Коэффициент трения между брусом и поверхностью ***f*** = 0,6;

Масса бруса ***m*** = 12 *кг*;

Ускорение свободного падения ***g*** принять равным 10 м/сек^2.

Решение:

Эта задача решается с использованием законов движения тел под действием сил трения скольжения.

Для того, чтобы тело равномерно перемещалось по поверхности без ускорения, сила трения должна быть равна силе тяги (т. е. искомой силе F): $F = F_{тр}$. Поскольку поверхность горизонтальная, сила трения равна весу тела, умноженному на коэффициент трения:

$$\boldsymbol{F_{тр} = fG}, \quad \text{где: } G = mg \text{ - вес тела.}$$

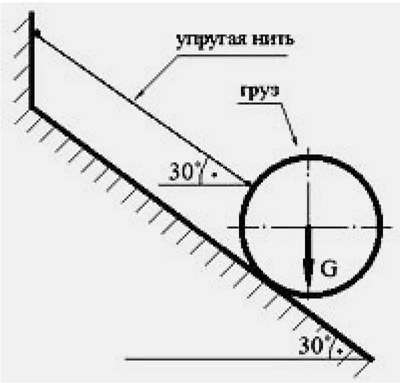
Тогда:

$$\boldsymbol{F = F_{тр} = fG} = 0{,}6 \times 12 \times 10 = 72\ Н.$$

Задача решена.

***

Решение задачи из раздела Статика



Найти силу натяжения упругой нити, удерживающей груз в состоянии равновесия на идеально гладкой наклонной плоскости.

Исходные данные:

Вес груза ***G*** = 100 *Н*,

угол наклона поверхности указан на рисунке.

Решение:

Поскольку груз находится в равновесии, решение задачи возможно с применением методов Статики, т. е. с на основе анализа причин, по которым тело находится в неподвижном состоянии *(в равновесии)*.

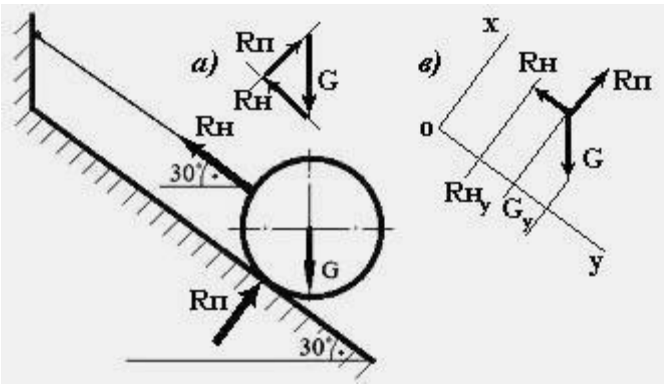
Итак, сначала необходимо определить – под влиянием каких сил груз находится в состоянии равновесия.

Кроме силы тяжести $\boldsymbol{G}$, на груз наложены две связи, ограничивающие его перемещение: гибкая связь (упругая нить) и наклонная плоскость. Реакция гибкой связи $\boldsymbol{R_н}$ направлена вдоль линии этой связи (вдоль нити), а реакция плоскости $\boldsymbol{R_п}$ всегда перпендикулярна этой плоскости и приложена в точке касания телом плоскости *(см. схему)*.

Задача может быть решена двумя методами.

Определив направление реакций, можно решить эту задачу ***графическим методом***, построив силовой треугольник, который будет замкнутым, поскольку векторная сумма сил равна нулю (равновесие груза).

Для построения векторной цепочки (в нашем случае – треугольник) откладываем силу тяжести груза $\boldsymbol{G}$ в определенном масштабе (поскольку нам известны и направление, и величина этой силы).



Для реакций мы знаем лишь их направление (величина сил неизвестна). От концов вектора силы $\boldsymbol{G}$ откладываем отрезки прямых, параллельные реакциям, и точка пересечения этих прямых позволит нам получить искомый треугольник сил. Теперь можно определить величину любой из реакций, измерив ее длину на чертеже линейкой и умножив на масштаб чертежа, который задает сила $\boldsymbol{G}$. Порядок построений показан на *рисунке а*).

Аналитическим методом эта задача решается с помощью уравнений равновесия, исходя из условия, что сумма проекций всех сил на любую координатную ось равна нулю. Разумеется, необходимо выбрать удобную систему координат, тогда для решения задачи потребуется минимальное количество уравнений.

В нашем случае можно любую из координат расположить так, чтобы одна из неизвестных реакций была ей перпендикулярна, тогда проекция этой силы на данную координатную ось будет равна нулю.

Поскольку нам необходимо найти силу натяжения нити (реакция $\boldsymbol{R_н}$), то расположим координатную ось $\boldsymbol{y}$ так, чтобы реакция плоскости ($\boldsymbol{R_п}$) была ей перпендикулярна *(рис. в)*. Тогда реактивная сила R_n проецируется в точку, т. е. в ноль, и для решения задачи потребуется лишь сумма проекций сил G и $R_н$ на ось y:

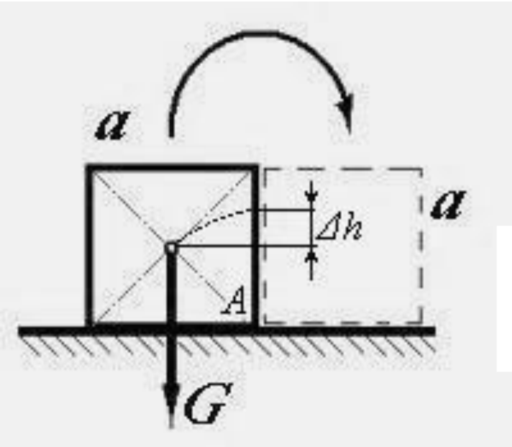
$\Sigma F_y = 0 \quad => \quad R_н - G\cos 60^\circ = 0$, откуда найдем искомую реакцию $R_н$:

$$R_н = G\cos 60^\circ = 100 \times 0{,}5 = 50\ Н.$$

Задача решена двумя методами.

Пример решения задачи из раздела Динамика

Какую работу W необходимо совершить, чтобы повалить кубический предмет на боковую грань?



Исходные данные:

Длина грани кубического предмета (ящика) a = 1 м;

Масса кубического предмета m = 100 кг;

Центр тяжести кубического предмета расположен в точке пересечения диагоналей;

Ускорение свободного падения принять равным g = 10 м/сек^2

Решение:

Как известно, работа любой силы равна произведению модуля этой силы на величину перемещения тела, вызванного действием этой силы. Искомая работа W равна работе по преодолению силы тяжести при подъеме центра масс ящика на высоту Δh, равную разности между половиной диагонали боковой грани ящика и половиной длины его стороны, т.е. – вся работа заключается в постановке ящика на ребро A.

Длину диагонали грани можно найти по теореме Пифагора, или с применением тригонометрических зависимостей.

Тогда:

$$W = mg\Delta h = mga(\sqrt{2} - 1)/2 = 100\times10\times1\times(1{,}414 - 1)/2 \approx 207\ Дж$$

***

Пример решения задачи из раздела кинематика

Автомобиль движется между городами Брянск и Орел с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ = 60 км/час.

Определить частоту вращения $\boldsymbol{n}$ колес автомобиля и сколько оборотов $\boldsymbol{n_l}$ сделает каждое колесо в течение поездки, если диаметр колеса $\boldsymbol{d}$ = 0,6 м *(считать, что колеса автомобиля катятся без пробуксовки)*.

Расстояние между городами принять равным $\boldsymbol{l}$ = 180 км.

Решение:

Для определения числа оборотов каждого колеса по пути следования, надо всю длину маршрута *(180 км = 180 000 м)* разделить на длину окружности колеса *($l_к = \pi d$)*, тогда:

$$n_l = 180\,000/\pi d \approx 95541\ оборотов.$$

Для определения частоты вращения колеса можно определить время в пути автомобиля между городами

($t = S/v$ = 3 часа, т. е. 180 минут) и, разделив количество оборотов $\boldsymbol{n_l}$, совершенных колесом в пути на это время, определить число оборотов $\boldsymbol{n}$ колеса за одну минуту.

Получим:

$$n = 95541/180 \approx 530\ об/мин.$$

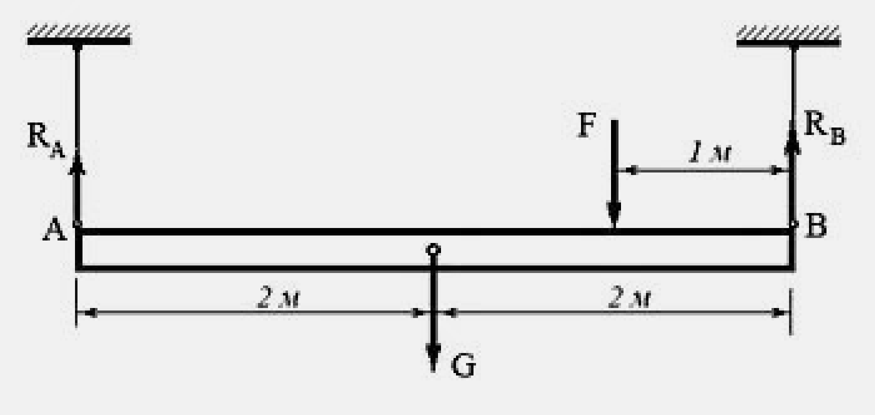
Задача решена.

***

Пример решения задачи из Статики

Балка висит на гибких связях горизонтально, нагружена собственным весом G, силой F и находится в состоянии равновесия.

Определить реакцию гибкой связи R_A.



Исходные данные:

Вес балки G = 1200 Н;

Сила F = 600 Н;

Расположение гибких связей и силовых факторов приведено на схеме.

Решение:

Из условия равновесия балки: сумма моментов всех приложенных к ней сил относительно любой точки балки равна нулю. Поскольку по условию задания нас интересует лишь реакция R_A, то уравнение моментов составляем относительно точки B *(момент неизвестной силы R_B относительно этой точки равен нулю)*, при этом силы, стремящиеся повернуть балку вокруг точки B по часовой стрелке, мы считаем положительными, против часовой стрелки – отрицательными.

Тогда:

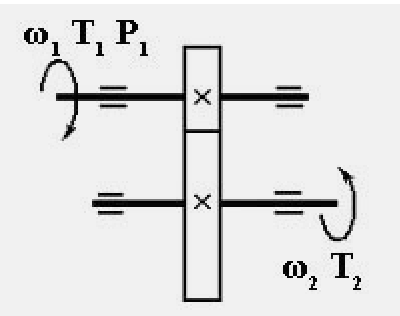
$$4R_A - 2G - F = 0, \quad \text{откуда:} \quad R_A = (2G + F)/4 = 750\ H.$$

Задача решена.

***

Решение задачи из раздела Динамика

Для изображенной на схеме передачи определить вращающий момент T_2 на ведомом валу.



Исходные данные:

Мощность на ведущем валу P_1 = 8 кВт;

Угловая скорость ведущего вала ω_1 = 40 рад/сек;

Коэффициент полезного действия передачи η = 0,97;

Передаточное число передачи u = 4.

Решение:

Сначала определим мощность P_2 на ведомом валу редуктора, с учетом потерь *(исходя из величины КПД):*

$$P_2 = \eta P_1 = 0{,}97 \times 8000 = 7760\ Вт$$

Для определения мощности ведомого вала необходимо знать его угловую скорость ω_2, которая определяется из соотношения $u = \omega_1/\omega_2$, где $u = 4$ - передаточное число передачи. Получаем: $\omega_2 = \omega_1/u$ = 10 рад/сек.

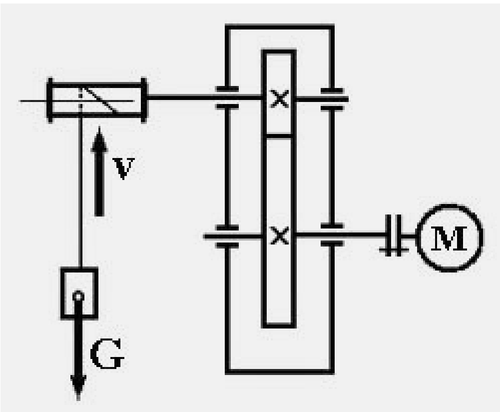
Вращающий момент равен отношению мощности ведомого вала к его угловой скорости:

$$T_2 = P_2/\omega_2 = 7760/10 = 776\ Нм$$

Задача решена.

***

Задача из раздела динамика



Лебедка состоит из цилиндрической передачи и барабана, к которому посредством троса прикреплен груз G. Определить требуемую мощность $P_м$ электродвигателя лебедки, если скорость подъема груза должна составлять v = 4 м/сек.

Исходные данные:

Вес груза G = 1000 Н;

Скорость подъема груза v = 4 м/сек;

КПД барабана лебедки $\eta_б$ = 0,9;

КПД цилиндрической передачи $\eta_ц$ = 0,98;

Элементы конструкции приведены на схеме.

Решение:

Определим мощность на выходе из привода, необходимую для подъема груза с данной скоростью:

$$P_2 = Gv = 1000 \times 4 = 4000\ Вт.$$

Чтобы найти требуемую мощность электродвигателя для лебедки необходимо определить КПД всей передачи:

$$\eta_п = \eta_б \times \eta_ц = 0{,}9 \times 0{,}98 = 0{,}882.$$

Требуемая мощность электродвигателя:

$$\boldsymbol{P_м = P_2 / \eta_п} = 4000/0{,}882 \approx \mathbf{4535\ Вт}.$$

Задача решена.

Пример решения задачи по статике

На этой странице рассмотрены принципы и способы решения задач статики, в которых необходимо определить неизвестные реакции, возникающие в опорах пространственной конструкции или рамы.

В основе решения таких задач лежит основной метод, используемый статикой, опирающийся на условие равновесия тел.

Расчет пространственной конструкции (рамы)

Задача:

Пространственная конструкция представлена одной деталью и закреплена так, что является статически определимой. На конструкцию действуют сосредоточенные активные силы $\boldsymbol{G}$ = *26 Н* и $\boldsymbol{P}$ =*18 Н*, а также пара сил с моментом $\boldsymbol{M}$ = *3,2 Н×м*. (*см. рисунок 1*).

В неподвижном состоянии конструкция удерживается с помощью опор $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и стержня $\boldsymbol{EH}$. Опора $\boldsymbol{A}$ выполнена в виде подпятника, опора $\boldsymbol{B}$ – в виде цилиндрического шарнира. Координаты точек приложения активных сил и их направления задаются с помощью размеров $\boldsymbol{a}$ =*0,15 м*, $\boldsymbol{b}$ = *0,38 м*, $\boldsymbol{c}$ = *0,43 м* и угла $\boldsymbol{\alpha}$ = *50˚*.

Начало системы координат, связанной со схемой конструкции, находится в точке $\boldsymbol{A}$.

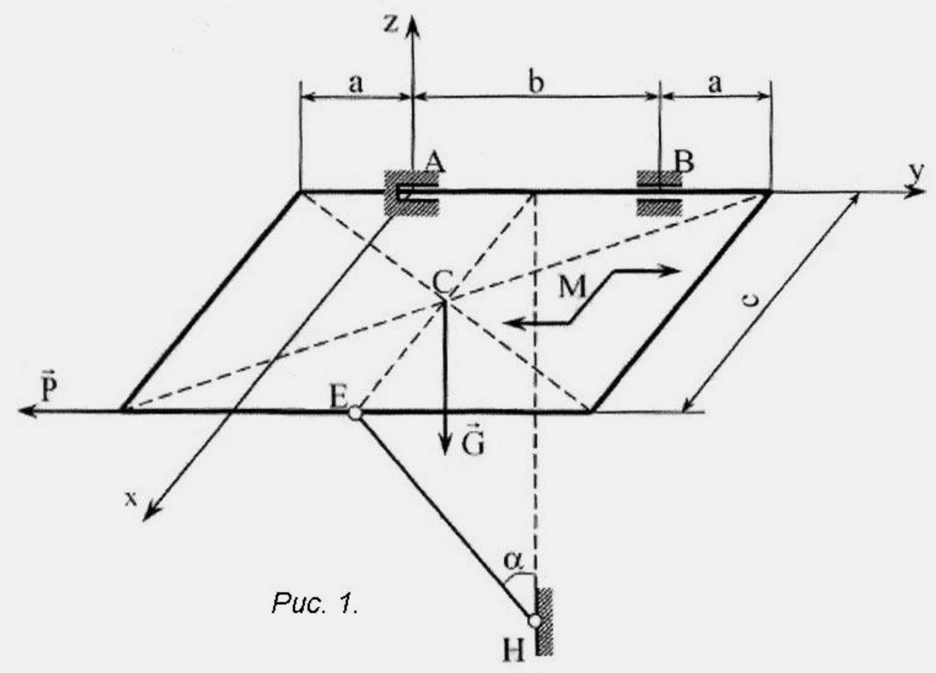


Рис. 1.

В задании *предлагается определить* значения компонентов реакций опор R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}, R_{Bz}, S, которые необходимы для удержания конструкции в статическом равновесии (здесь S – усилие в стержне EH).

Решение:

1. Рассмотрим, какие компоненты реакций опор присутствуют в заданной конструкции.

Опора A представлена в виде подпятника, поэтому в ней присутствуют все три компоненты - R_{Ax},R_{Ay} и R_{Az}, направление которых принимаем согласно схеме на *рис. 1*.

Опора B представлена в виде цилиндрического шарнира, следовательно, в ней присутствуют только две компоненты реакции - R_{Bx} и R_{Bz}, направленные перпендикулярно оси шарнира.

Усилие S в стержне EH направлено вдоль оси стержня под углом $\alpha = 50^\circ$ к оси Z в плоскости XZ.

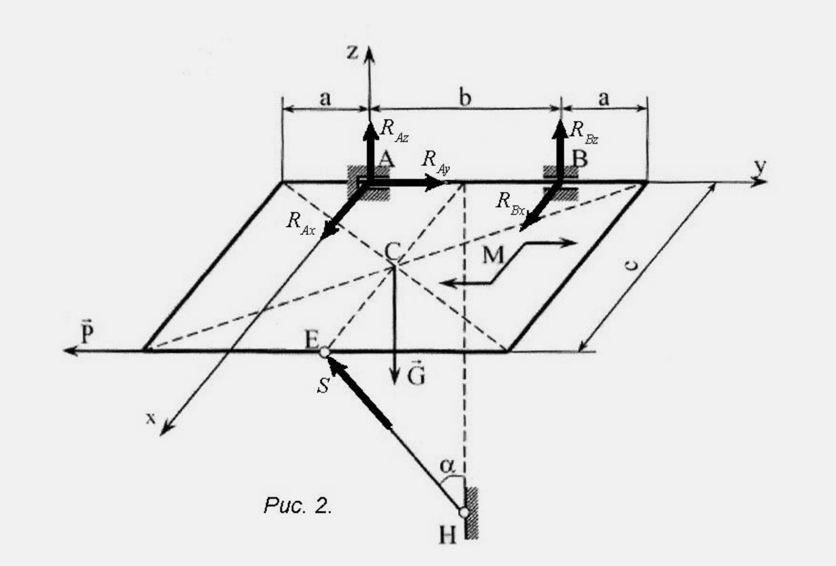


Рис. 2.

2. Для определения искомых компонент реакций опор составим уравнения равновесия для данной конструкции относительно выбранной системы координат.

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$R_{Ay} - P = 0, \text{ откуда следует, что } R_{Ay} = P = 18\ H.$$

$$\sum M_{iy} = 0$$

$$S \times c \times \cos\alpha - G \times c/2 = 0, \text{ откуда следует: } S = G/2 \times \cos\alpha = 26/2 \times 0{,}6428 = 20{,}22\ H.$$

$$\sum M_{iz} = 0$$

$$P \times c + R_{Bx} \times b + M = 0, \text{ откуда:}$$

$$R_{Bx} = (-P \times c - M)/b = -(18 \times 0{,}43 + 3{,}2)/0{,}38 = -28{,}79\ H.$$

Знак минус указывает, что направление силы R_{Bx} на схеме выбрано не верно, т. е. она направлена в противоположную сторону.

$$\sum M_{iX} = 0$$

$$R_{Bz} \times b - G \times b/2 + S \times \cos\alpha \times b/2 = 0, \text{ откуда:}$$

$$R_{Bz} = (G \times b/2 - S \times \cos\alpha \times b/2)/b = (26 - 20{,}22 \times 0{,}6428)2 = 6{,}50\ H.$$

$$\sum F_{iX} = 0$$

$$R_{Ax} + R_{Bx} + S \times \sin\alpha = 0, \text{ откуда:}$$

$$R_{Ax} = -R_{Bx} - S \times \sin\alpha = -(-28{,}79) - 20{,}22 = 8{,}57\ H.$$

$$\sum F_{iZ} = 0$$

$$R_{Az} + R_{Bz} - G + S \times \cos\alpha = 0, \text{ откуда:}$$

$$R_{Az} = -R_{Bz} + G - S \times \cos\alpha = -6{,}50 + 26 - 20{,}22 \times 0{,}6428 = 6{,}50\ H.$$

Ответ *(см. схему на рис. 2)*:

R_{Ax} = *8,57 Н*;

R_{Ay} = *18 Н*;

R_{Az} = *6,50 Н*;

R_{Bx} = *-28,79 Н*;

R_{Bz} = *6,50 Н*;

S = *20,22 Н*.

Пример решения задачи по статике

На этой странице рассмотрены принципы и способы решения задач статики, в которых необходимо определить неизвестные реакции, возникающие в опорах плоской конструкции или рамы. В основе решения таких задач лежит основной метод, используемый статикой, опирающийся на условие равновесия тел.

Расчет плоской конструкции

Задача:

Плоская статически определимая конструкция состоит из двух частей ***AC*** и ***BC***, соединенных шарнирно в узле ***C*** (*см. рисунок 1*).

Опора ***A*** неподвижна и представляет собой жесткую заделку, а опора ***B*** выполнена в виде подвижного шарнира, размещенного на наклонной плоскости. К конструкции приложена сосредоточенная сила ***F*** = *73 Н*, нагрузка интенсивностью ***q*** = *75 Н/м*, равномерно распределенная на отрезке длиной ***b***, и пара сил с моментом ***M*** = *3,5 Н×м*.

Направление линий действия реакции опоры ***B*** и силы ***F*** определяются углами $\alpha = 37^\circ$ и $\beta = 41^\circ$. Размеры элементов конструкции: ***a*** = *0,35 м*, ***b*** = *0,19 м*, ***c*** = *0,54 м*.

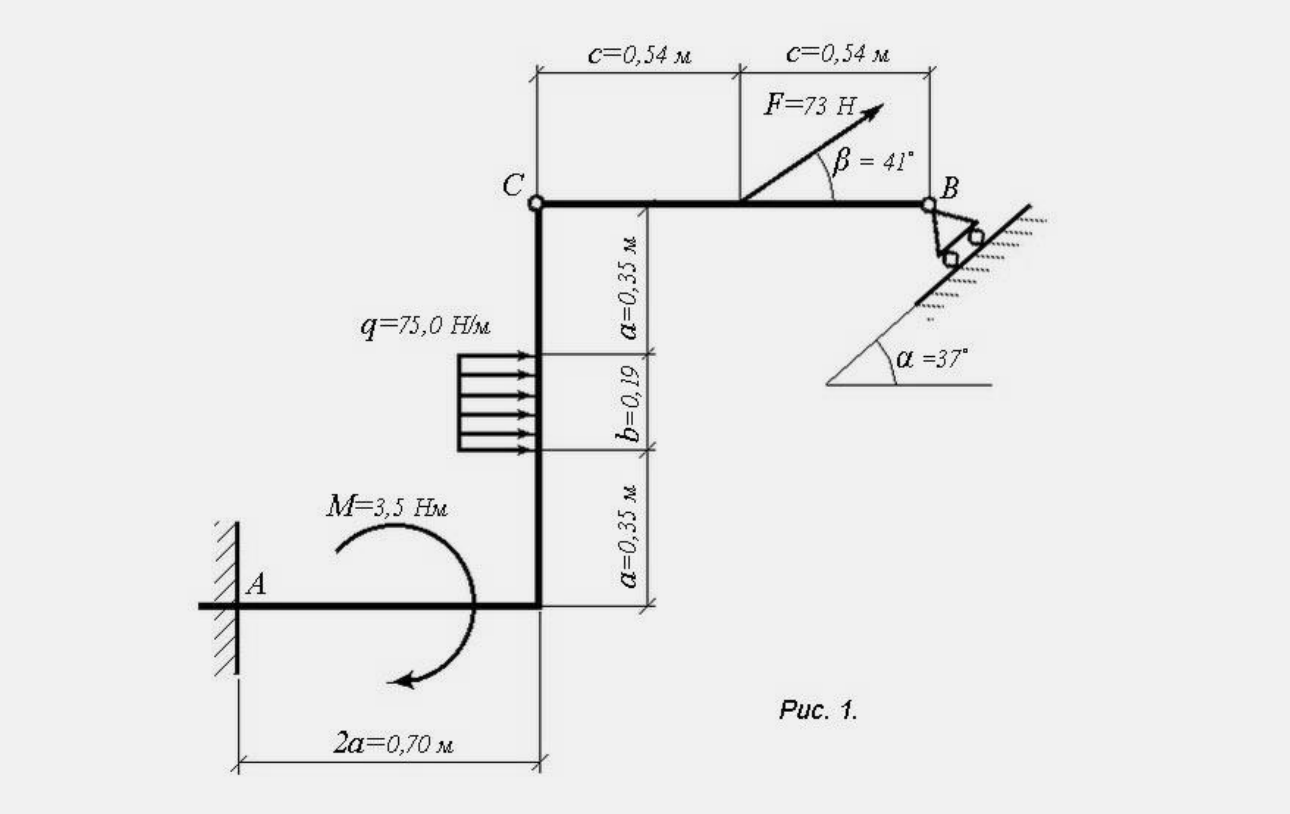


Рис. 1.

В задании *предлагается определить* реакции опор ***A*** и ***B*** плоской конструкции, состоящей из двух частей, соединенных шарнирно в точке ***C***, а также силы, возникающие в самом шарнире ***C***.

Решение:

1. Отбросим нижнюю часть конструкции до шарнира ***C***, заменив ее реакцией $\boldsymbol{R_C}$. Реакцию $\boldsymbol{R_C}$ разложим на составляющие $\boldsymbol{R_{Cx}}$ и $\boldsymbol{R_{Cy}}$, спроецировав ее на оси ***X*** и ***Y***. Поскольку опора ***B*** является шарнирно-подвижной и размещена на наклонной плоскости ($\alpha = 37^\circ$), момент в шарнире ***C*** возникать не будет, а реакция $\boldsymbol{R_B}$ направлена по перпендикуляру к наклонной плоскости и приложена к центру шарнира ***B*** (см. рис. 2).

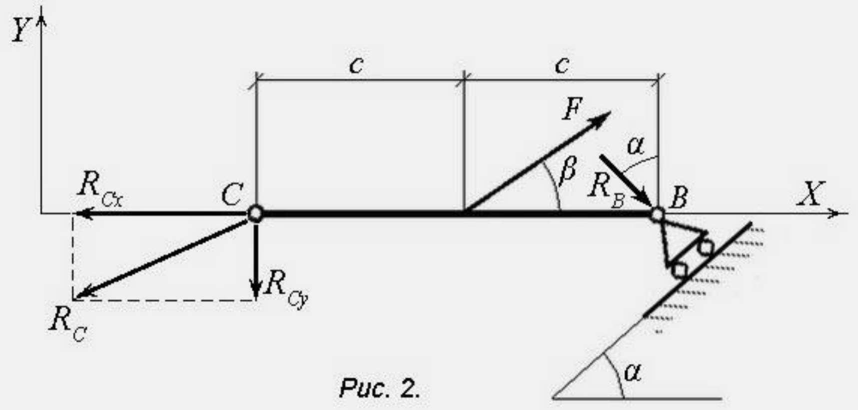


Рис. 2.

2. Определим реакции опор $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}$, составив уравнения равновесия сил и моментов сил относительно этих опор для звена $\boldsymbol{CB}$ заданной конструкции.

$$\sum M_C = 0$$

$$F \times \sin\beta \times c - R_B \times \cos\alpha \times 2c = 0,$$

откуда следует:

$$R_B = F \times \sin\beta /(2 \times \cos\alpha) = 73 \times 0{,}6560 /(2 \times 0{,}7986) = 29{,}98\ H.$$

Суммарная реакция опоры $\boldsymbol{B}$: $R_B = 29{,}98\ H.$

Реакцию R_{Cx} определим из условия равновесия проекций сил на ось $\boldsymbol{X}$:

$$\sum F_X = 0$$

$$F \times \cos\beta + R_B \times \sin\alpha - R_{Cx} = 0, \text{ откуда:}$$

$$R_{Cx} = F \times \cos\beta + R_B \times \sin\alpha = 73 \times 0{,}7547 + 29{,}98 \times 0{,}6018 = 73{,}14\ H.$$

Реакцию $R_{Cв}$ определим из условия равновесия проекций сил на ось $\boldsymbol{Y}$:

$$\sum F_Y = 0$$

$$F \times \sin\beta - R_{Cy} - R_B \times \cos\alpha = 0,$$

откуда:

$$R_{Cy} = F \times \sin\beta - R_B \times \cos\alpha = 73 \times 0{,}6560 - 29{,}98 \times 0{,}7986 = 23{,}95\ H.$$

Суммарную реакцию опоры $\boldsymbol{C}$ определим, используя теорему Пифагора:

$$R_C = \sqrt{(R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2)} = \sqrt{(73{,}14^2 + 23{,}95^2)} = 76{,}96\ H.$$

Суммарная реакция опоры $\boldsymbol{C}$: $R_C = 76{,}96\ H.$

3. Отбросим от заданной конструкции верхнее звено до опоры $\boldsymbol{C}$, заменив его известной нам реакцией R_C, при этом направление данной реакции изменим на противоположное (*см. рис. 3*). Разложим R_C, как и в предыдущем случае, на проекции вдоль осей $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$.

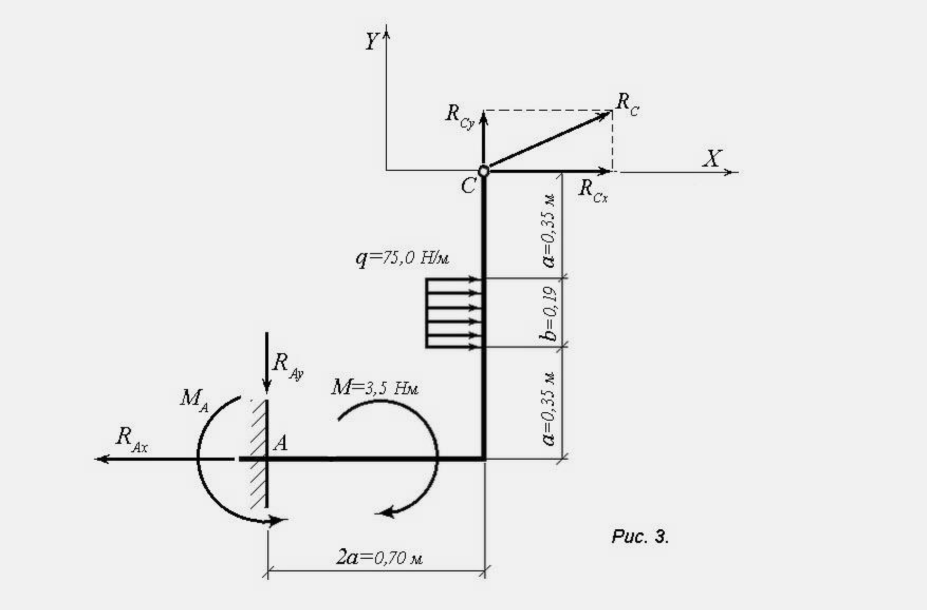


Рис. 3.

4. Рассмотрим равновесие этой части конструкции и определим неизвестные реакции в опоре ***A***.

Поскольку опора ***A*** представлена в виде жесткой заделки, ее реакция может быть представлена силой $\boldsymbol{R_A}$ и моментом (парой сил) $\boldsymbol{M_A}$, которые по условию задания следует определить.

Реактивную силу $\boldsymbol{R_A}$ разложим на проекции $\boldsymbol{R_{Ax}}$ и $\boldsymbol{R_{Ay}}$ по осям ***X*** и ***Y***.

5. Для определения неизвестных реакций опоры ***A*** составим уравнение равновесия элемента конструкции:

$$\sum \boldsymbol{F_X} = 0$$

$$\boldsymbol{q \times b + R_{Cx} - R_{Ax}} = 0,$$

откуда находим:

$$\boldsymbol{R_{Ax}} = 75 \times 0{,}19 + 73{,}14 = 87{,}39\ Н.$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y} = 0$$

$$\boldsymbol{R_{Cy} - R_{Ay}} = 0,\ \text{откуда:}\ \boldsymbol{R_{Ay} = R_{Cy}} = 23{,}95\ Н.$$

Суммарная реакция $\boldsymbol{R_A}$ определится по теореме Пифагора:

$$\boldsymbol{R_A = \sqrt{(R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2)}} = \sqrt{(87{,}39^2 + 23{,}95^2)} = 90{,}61\ Н.$$

6. Для определения неизвестного момента $\boldsymbol{M_A}$ составим уравнение равновесия моментов сил относительно опоры ***A***:

$$\sum \boldsymbol{M_A} = 0$$

$$\boldsymbol{M_A - M + R_{Cy} \times 2a - R_{Cx}(a+b+a) - qb(a + b/2)} = 0,$$

откуда находим момент $\boldsymbol{M_A}$:

$$\boldsymbol{M_A = M - R_{Cy} \times 2a + R_{Cx}(a+b+a) + qb(a + b/2)} = 3{,}5 - 23{,}95 \times 0{,}70 + 73{,}14(0{,}35+0{,}19+0{,}35) + 75 \times 0{,}19(0{,}35+0{,}19/2) = 58{,}17\ Н \times м.$$

Ответ:

- $\boldsymbol{R_B}$ = *29,98 Н*;
- $\boldsymbol{R_C}$ = *76,96 Н*;
- $\boldsymbol{R_A}$ = *90,61 Н*;
- $\boldsymbol{M_A}$ = *58,17 Н×м*

Пример решения задачи по кинематике

В приведенном на этой странице примере решения задачи рассматривается расчет плоского механизма, состоящего из нескольких звеньев. Для каждого звена определяются кинематические параметры - угловые и линейные перемещения, скорости и ускорения.

Расчет плоского механизма

Задача:

Задан плоский механизм, состоящий из трех звеньев *I, II,* и *III*, обладающий одной степенью свободы и испытывающий вращение (*см. рис. 1*).

Положение звеньев механизма в момент времени $\boldsymbol{t = t_1}$ определяется углами $\boldsymbol{\alpha}$ = *60˚* и $\boldsymbol{\beta}$ = *20˚*, а также другими углами, отмеченными на схеме.

Звено *I* является активным и в момент времени $\boldsymbol{t_1}$ его движение задано значением угловой скорости $\boldsymbol{\omega_1}$ = *3,5 рад/с* и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ = *8,2 рад/с*^{2}.

Размерные параметры механизма: $\boldsymbol{a}$ = *0,30 м*, $\boldsymbol{b}$ = *0,40 м*, $\boldsymbol{c}$ = *0,95 м*.

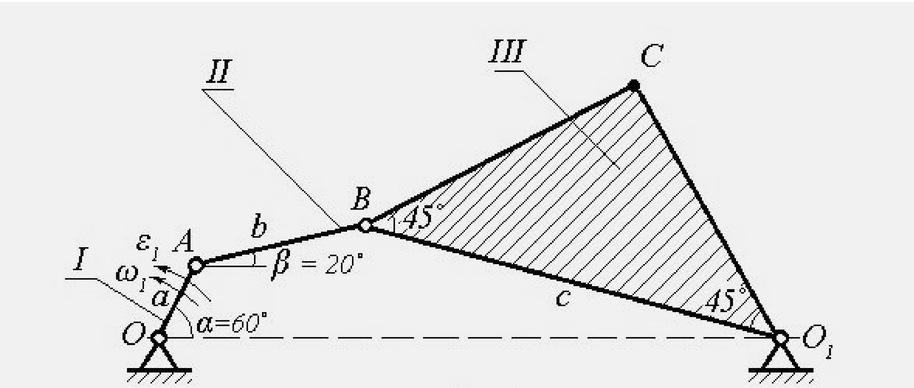


Рис. 1.

Определить в момент времени $\boldsymbol{t_1}$ модули угловых скоростей $\boldsymbol{\omega_2}$ и $\boldsymbol{\omega_3}$, угловых ускорений $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_3}$ звеньев *II* и *III*, а также модули скоростей $\boldsymbol{v_A, v_B, v_C}$ и ускорений $\boldsymbol{a_A}$, $\boldsymbol{a_B}$, $\boldsymbol{a_C}$ точек ***A***, ***B***, ***C***.

Решение:

1. Для решения задачи механизм в целом представляется как последовательное сочленение его звеньев. Движение каждого «последующего» звена зависит от координат, скорости и ускорения его активной точки, которая является точкой его сочленения с «предыдущим» звеном. Эта точка рассматривается в качестве полюса.

2. Определим скорости и ускорения точки A первого звена (звена OA) заданного механизма, которое совершает вращательное движение относительно неподвижной шарнирной опоры O.

Скорость V_A точки A определится, как произведение длины звена OA на угловую скорость ω_1этого звена. При этом вектор скорости будет направлен по перпендикуляру к звену OA в сторону вращения (*см. рис. 2*):

$$V_A = \omega_1 \times OA = \omega_1 \times a = 3{,}5 \times 0{,}3 = 10{,}5 \text{ м/с}.$$

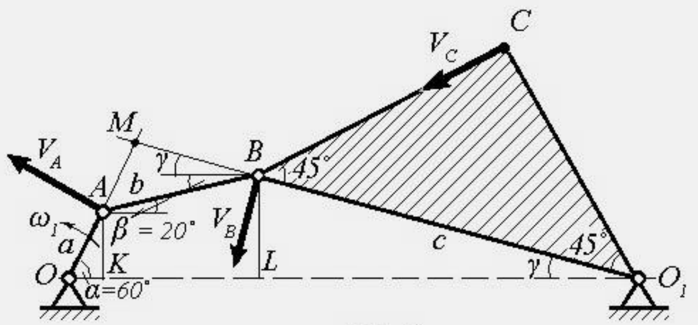


Рис. 2.

Касательное ускорение точки A определится, как произведение длины звена OA на угловое ускорение ε_1 этого звена:

$$a_{\tau A} = \varepsilon_1 \times OA = \varepsilon_1 \times a = 8{,}2 \times 0{,}3 = 2{,}46 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение определим по формуле:

$$a_{nA} = \omega_1^2 OA = \omega_1^2 \times a = 3{,}5^2 \times 0{,}3 = 3{,}675 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки A находим по формуле:

$$a_A = \sqrt{(a_{\tau A}^2 + a_{nA}^2)} = \sqrt{(2{,}46^2 + 3{,}675^2)} = 4{,}42 \text{ м/с}^2.$$

2. Определим кинематические параметры звена BC (*звено II*). Звено AB перемещается плоскопараллельно, при этом его крайние точки A и B совершают вращательное движение относительно точек O и O_1 соответственно вместе с крайними звеньями механизма.

Кроме того, в момент времени t_1 звено AB совершает вращательное движение относительно полюса M (*см. рис. 2*), расположенного в точке пересечения перпендикуляров к мгновенным линейным скоростям этих точек в данный момент времени. Модуль скорости точки B может быть определен из соотношения:

$$V_A/AM = V_B/MB = \omega_2.$$

Чтобы определить расстояние от точки B до полюса вращения необходимо вычислить угол γ между стороной BO_1 звена *III* и горизонталью. Для этого выполним геометрические построения и вычислим синус данного угла, как соотношение BL/BO_1 (*см. рис. 2*), а затем определим величину этого угла по справочным данным.

$$\sin\gamma = BL/BO_1 = BL/c, \text{ при этом } BL = a\times\sin\alpha + b\times\sin\beta,$$

тогда:

$$\sin\gamma = a\times\sin\alpha + b\times\sin\beta/c = 0{,}30\times 0{,}8660 + 0{,}40\times 0{,}3420/0{,}95 = 0{,}3966,$$

откуда находим:

$$\gamma = 23{,}36^\circ.$$

Тогда угол MBA будет равен: $\angle MBA\ 20^\circ + \gamma = 44{,}46^\circ$,

угол MAB будет равен: $\angle MAB = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$,

а угол AMB определится, исходя из того, что сумма всех углов равна180°:

$\angle AMB = 180^\circ - 44{,}46^\circ - 40^\circ = 95{,}54^\circ$.

Теперь, используя теорему синусов, можно определить расстояния от полюса M до точек A и B, после чего вычислить угловую скорость звена AB и модуль линейной скорости точки B.

$$\sin\angle AMB/b = \sin\angle MAB/MB = \sin\angle MBA/AM = \sin 95{,}54^\circ/0{,}40 = 2{,}3885.$$

$$MB = \sin\angle MAB/2{,}3885 = \sin 40^\circ/2{,}3885 = 0{,}269 \text{ м}.$$

$$AM = \sin\angle MBA/2{,}3885 = \sin 44{,}46^\circ/2{,}3885 = 0{,}293 \text{ м}.$$

Угловая скорость ω_2 звена относительно мгновенного центра вращения M будет равна:

$$\omega_2 = V_A/AM = V_B/MB = 10{,}5/0{,}293 = 35{,}84 \text{ рад/с},$$

откуда можно найти линейную скорость точки B:

$$V_B = MB\times\omega_2 = 0{,}269\times 35{,}84 = 9{,}64 \text{ м/с}.$$

Поскольку точка M является полюсом касательных ускорений звена AB, можно записать:

$$\varepsilon_2 = a_{\tau A}/AM = 2{,}46/0{,}293 = 8{,}40 \text{ рад/с}^2,$$

а исходя из того, что $a_{\tau A}/AM = a_{\tau B}/MB$, находим касательное ускорение точки B:

$$a_{\tau B} = a_{\tau A}\times M_B/AM = 2{,}46\times 0{,}269/0{,}293 = 2{,}26 \text{ м/с}^2.$$

3. Зная линейную скорость точки B, принадлежащей третьему звену BCO_1, можно определить кинематические параметры точек этого звена в данный момент времени.

Мгновенная угловая скорость ω_3 звена *III*:

$$\omega_3 = V_B/c = 9{,}64/0{,}95 = 10{,}15\ рад/с.$$

Нормальное ускорение a_{nB} точки B определим по формуле:

$$a_{nB} = \omega_3^2 \times BO_1 = \omega_3^2 \times c = 10{,}15^2 \times 0{,}95 = 97{,}87\ м/с^2.$$

Модуль полного ускорения точки B находим по формуле:

$$a_B = \sqrt{(a_{\tau B}^2 + a_{nB}^2)} = \sqrt{(2{,}26^2 + 97{,}87^2)} = 97{,}90\ м/с^2.$$

Модуль углового ускорения звена *III* определяем из соотношения:

$$\varepsilon_3 = a_B/c = 97{,}9/0{,}95 = 103{,}05\ рад/с^2.$$

4. Кинематические параметры точки C звена *III* в данный момент времени:

Линейная скорость точки C:

$$V_C = CO_1 \times \omega_3 = c \times \sin 45^\circ \times \omega_3 = 0{,}95 \times 0{,}7071 \times 10{,}15 = 6{,}82\ м/с.$$

Касательное ускорение точки C определится, как произведение длины звена CO_1 на угловое ускорение ε_3 этого звена:

$$a_{\tau C} = \varepsilon_3 \times CO_1 = \varepsilon_3 \times c \times \sin 45^\circ = 103{,}05 \times 0{,}95 \times 0{,}7071 = 69{,}22\ м/с2.$$

Нормальное ускорение a_{nC} точки C определим по формуле:

$$a_{nC} = \omega_3^2 \times CO_1 = \omega_3^2 \times c \times \sin 45^\circ = 10{,}15^2 \times 0{,}95 \times 0{,}7071 = 97{,}87\ м/с^2.$$

Модуль полного ускорения точки C находим по формуле:

$$a_C = \sqrt{(a_{\tau C}^2 + a_{nC}^2)} = \sqrt{(69{,}22^2 + 97{,}87^2)} = 119{,}87\ м/с^2.$$

Ответ:

- $\omega_2 = 35{,}84$ *рад/с*;
- $\omega_3 = 10{,}15$ *рад/с*;
- $\varepsilon_2 = 8{,}40$ *рад/с*^{2};
- $\varepsilon_3 = 103{,}05$ *рад/с*^{2};
- $v_A = 10{,}5$ *м/с*;
- $v_B = 9{,}64$ *м/с*;
- $v_C = 6{,}82$ *м/с*;
- $a_A = 4{,}42$ *м/с*^{2};
- $a_B = 97{,}90$ *м/с*^{2};
- $a_C = 119{,}87$ *м/с*^{2}.

Пример решения задачи по кинематике

На примере решения данной задачи показывается, как определяются геометрические и кинематические параметры точки в произвольный момент времени при ее перемещении в пространстве по заданным уравнениям движения.

Расчет кинематических параметров движения точки

Задача:

Движение точки M в плоскости xOy задано параметрически с помощью функций:

$$x = A + Bkt \quad \text{и} \quad y = 3A - 4Bk^2t^2,$$

где **t** – время, отсчитываемое от начала движения;**A** = 0,65 м, **B** = 1,85 м, **k** = 1,71 рад/с – параметры, характеризующие движение точки **M**.

Тогда можно записать:

$$x = 0{,}65 + 1{,}85 \times 1{,}71 \times t \quad \text{и} \quad y = 3 \times 0{,}65 - 4 \times 1{,}85 \times 1{,}712 \times t^2 \text{ или:}$$

$$x = 0{,}65 + 3{,}1635 \times t \quad \text{и} \quad y = 1{,}95 - 21{,}64 \times t^2.$$

Определить в момент времени $t_1 = 1{,}33$ *с* следующие кинематические и геометрические параметры движения точки и ее траектории:

1) абсолютное значение скорости v_M точки M;

2) алгебраическую величину a_τ касательного ускорения;

3) модуль нормального ускорения a_n;

4) модуль полного ускорения a;

5) радиус кривизны R участка траектории из ближайшей окрестности точки M;

6) координаты x_C и y_C центра кривизны для данного участка траектории.

Решение:

1. Абсолютное значение скорости точки M в момент времени $t_1 = 1{,}33$ *с* можно определить, вычислив значение проекций ее скорости на оси координат и произведя их алгебраическое сложение. Чтобы определить проекции v_x и v_y скорости точки M, вычислим первые производные от функций движения точки:

$$v_x = d_x/dt = 3{,}1635 \text{ м/с};$$

$$v_y = dy/dt = 43{,}28 \times t_1 = 57{,}56 \text{ м/с}.$$

Тогда модуль скорости точки $\boldsymbol{M}$ в момент времени $t_1 = 1{,}33\ с$ определится по формуле:

$$v_M = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = \sqrt{(3{,}1635^2 + 57{,}56^2)} = 57{,}65\ м/с.$$

2. Модуль полного ускорения точки $\boldsymbol{M}$ в момент времени $t_1 = 1{,}33\ с$ можно определить, вычислив значение проекций ускорения на оси координат и произведя их алгебраическое сложение.

Чтобы определить проекции ускорения a_x и a_y найдем вторые производные от функций движения точки:

$$a_x = d^2x/dt^2 = 0\ м/с;$$

$$a_y = d^2y/dt^2 = 43{,}28\ м/с^2.$$

Очевидно, что модуль полного ускорения точки $\boldsymbol{M}$ будет равен: $a = a_y = 43{,}28\ м/с^2$.

3. Для кривой на декартовой плоскости, заданной уравнением $y = y(x)$, кривизна k вычисляется по формуле:

$$k(x) = |y''|/[\sqrt{(1 + y'^2)}]^3,$$

где y' и y'' – соответственно первая и вторая производная функции $y = y(x)$.

Преобразуем заданные уравнения движения точки к виду $y = y(x)$, исключив из них параметр t:

$$x = A + Bkt, \text{ откуда } \quad t = (x - A)/Bk = x/Bk - A/Bk$$

и подставим во второе уравнение:

$$y = 3A - 4Bk^2t^2 = 3A - 4Bk^2[(x - A)/Bk]^2 = (5A - 4x^2 + 8Ax)/B = (- 4x^2 + 5{,}2x + 3{,}25)/1{,}85 = - 2{,}16x^2 + 2{,}81x + 1{,}76.$$

Полученное уравнение является уравнением траектории движения точки $\boldsymbol{M}$.

Тогда $k(x) = 4{,}32/[\sqrt{1+(4{,}32x + 2{,}81)^2}]^3$;

Если учесть, что $x = 0{,}65 + 3{,}1635\times t$, то в момент времени $t_1 = 1{,}33\ с$ $x = 4{,}86$.

Получим:

$$k(x) = 4{,}42/13515{,}3 = 0{,}00033\ .$$

Кривизна траектории связана с радиусом кривизны соотношением $k = 1/R$, откуда следует, что радиус кривизны будет равен:

$$R = 1/k = 1/0{,}00033 = 3030{,}3\ м.$$

4. По радиусу кривизны траектории R и скорости v_M движения точки можно определить значение нормального ускорения точки в данный момент времени:

$$a_n = v_M^2/R = 57{,}65^2/3030{,}3 = 1{,}097\ м/с^2.$$

5. Касательное ускорение определим, используя теорему Пифагора:

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2,$$

откуда находим:

$$a_\tau = \sqrt{(a^2 - a_n^2)} = \sqrt{(43{,}28^2 - 1{,}097^2)} = 43{,}26\ м/с^2.$$

Модуль касательного ускорения точки можно определить и другим способом:

$$a_\tau = |dv/dt| = 43{,}28^2 t/\sqrt{(3{,}1635^2 + 57{,}56^2)} = 43{,}24\ м/с^2.$$

Поскольку результаты расчетов совпадают, можно сделать вывод, что они выполнены правильно.

6. Координаты x_C и y_C центра кривизны для данного участка траектории могут быть определены решением системы уравнений:

$$y_C - y = -(x_C - x)/y';$$

$$(x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 = R^2.$$

или, подставив значения переменных для момента времени t_1:

$$y_C - -36{,}33 = -(x_C - 4{,}86)/(4{,}32\times 4{,}86 + 2{,}81);$$

$$(x_C - 4{,}86)^2 + (y_C - -36{,}33)^2 = 3030{,}3^2.$$

Выразив x_C из первого уравнения через y_C, получим:

$$x_C = -23{,}8 y_C - 859{,}8 \qquad (1).$$

Подставив это значение во второе уравнение системы, получим выражение:

$$(23{,}8 y_C - 859{,}8)^2 + 2\times 4{,}86\times(23{,}8 y_C - 859{,}8) + 4{,}86^2 + (y_C + 36{,}33)^2 = 3030{,}3^2,$$

или, после преобразования:

$$y_C^2 - 71{,}65 y_C - 14895{,}6 = 0,$$

из которого определим координату y_C:

$$y_C = (152{,}49; \quad -80{,}85)$$

Подставив значения y_C в уравнение *(1)*, получим значения координаты x_C:

$$x_C = (152{,}49; \quad -80{,}85)$$

Ответ:

- $v_M = 57{,}65\ м/с;$
- $a_\tau = 43{,}24\ м/с^2;$
- $a_n = 1{,}097\ м/с^2;$
- $a = 43{,}28\ м/с^2;$
- $R = 3030{,}3\ м;$
- $x_C = (-4489{,}06; \quad 1064{,}43);$
- $y_C = (152{,}49; \quad -80{,}85).$

Решение задач по динамике

Примеры решения задач по динамике и кинетостатике

Как и в предыдущей статье, на этой странице приведены основные принципы решения задач технической механики на примере простейших заданий, в которых необходимо определить какие-либо силовые факторы, скорость, ускорение и т. п.

Динамика является разделом технической механики, изучающим силовое взаимодействие между телами и результаты этого взаимодействия - ускорением, скоростью и перемещением тел в пространстве.

***

Задача

Определить силу тяги на крюке трактора, если ускорение, с которым трактор ведет прицеп, $\boldsymbol{a} = 0{,}2$ *м/с*^{2}.

Масса прицепа $\boldsymbol{m} = 0{,}5$ *тонн*, сопротивление движению $\boldsymbol{F} = 1{,}5$ *кН*.

Решение.

Задача решается с применением метода кинетостатики (принципа Даламбера).

Реально на прицеп действует сила сопротивления движению (трение качения, трение в подшипниках колес и т.п.), которая зависит от массы прицепа, коэффициента трения и конструктивных особенностей ходовой части прицепа, а также сила тяги со стороны трактора. Даламбер предложил для условного уравновешивания системы сил ввести понятие силы инерции, которая всегда направлена в сторону, противоположную ускорению прицепа. Все эти силы создают уравновешенную систему, т. е. сумма всех сил в каждый момент времени равна нулю.

Исходя из этого, можно составить уравнение равновесия и определить силу тяги на крюке трактора:

$$\boldsymbol{F + F_{ИН} – F_{Т} = 0},$$

где: $\boldsymbol{F}$ – сила сопротивления движению (задана); $\boldsymbol{F_{ИН} = ma} = 500\ кг \times 0{,}2\ м/с^2 = 100\ Н = 0{,}1\ кН$ **– сила инерции;** $\boldsymbol{F_Т}$ **– сила на крюке трактора** ***(которую нужно определить)*****.**

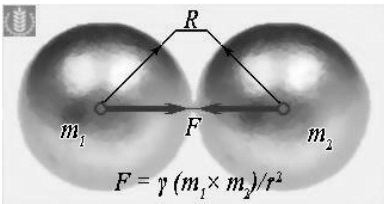
$$\boldsymbol{F_Т = F + F_{ИН} = 1{,}5\ кН + 0{,}1\ кН = 1{,}6\ кН}.$$

Задача решена.

***

Задача

Определить силу тяготения двух соприкасающихся медных шаров радиусом $\boldsymbol{R} = 1$ *м* каждый.



Решение.

Решение задачи основывается на законе всемирного тяготения, согласно которому все тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma\,(m_1 \times m_2)/r^2,$$

где: F – сила притяжения между шарами, m_1 и m_2 – масса шаров *(очевидно, что они равны между собой)*, r – расстояние между центрами масс шаров (в данном случае оно равно $2R$ – двум радиусам шаров), γ — гравитационная постоянная $= 6{,}67 \times 10^{-11}$ *м*^{3}*/(кг • сек*^{2}*)*.

Массы шаров можно найти, подсчитав их объем (объем шара $V = 4/3\ \pi R^3$) и умножив на удельную плотность меди $\rho = 8{,}93$ *г/см*^{3} $= 8930$ *кг/м*^{3}.

Тогда получим:

$$F = \gamma\,(m_1 \times m_2)/r^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times (8930 \times 4/3 \times 3{,}14 \times 1^3)^2/(2 \times 1)^2 \approx 0{,}0231\ Н.$$

Задача решена.

***

Задача

Определить ускорение свободного падения тел на Луне. Принять радиус Луны $R = 1740$ *км* и массу ее $M = 7{,}33 \times 10^{22}$ *кг*.

Решение.

Задача решается с применением закона всемирного тяготения и второго закона Ньютона, согласно которым:

$$F = \gamma\,(M \times m)/R^2 \quad \text{и} \quad F = m \times a,$$

где: F – сила притяжения между Луной и любым телом на ее поверхности, M – масса Луны, m – масса любого тела на поверхности Луны, a – ускорение свободного падения на Луне, R – радиус Луны, γ — гравитационная постоянная $= 6{,}67 \times 10^{-11}$ *м*^{3}*/(кг • сек*^{2}*)*. Приравниваем уравнения, и получим:

$$(M \times m)/R^2 = m \times a \quad (m\ \text{в обеих частях сокращается}).$$

Откуда:

$$a = \gamma\,M/R^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}33 \times 10^{22} / 1740\,000^2 = 1{,}61\ м/с^2$$

Задача решена.

***

Задача

К одному концу веревки, перекинутой через неподвижный блок, привязан груз массой m = *20 кг*. С каким ускорением движется груз, если к другому концу веревки приложена сила F_T = *220 Н*? Трение не учитывать.

Решение.

Задача может быть решена с использованием методов кинетостатики (принцип Даламбера). На груз действуют три силы – сила тяжести, сила тяги, приложенная к концу веревки, и сила инерции. Все эти три силы условно уравновешивают друг друга в каждый данный момент времени. В виде уравнения это утверждение выглядит так:

$$F_T + F_{ИН} - G = 0,$$

где: F_T – сила тяги на конце веревки (задана); $F_{ИН} = ma$ – сила инерции (здесь a – искомое ускорение груза); $G = mg$ = *20×9,81 = 196,2 Н* – сила тяжести.

Подставив все эти значения в формулу, выразим a и определим его:

$$a = (F_T - mg)/m = (220 - 196{,}2)/20 = 1{,}19\ м/с^2$$

Задача решена.

***

Задача

Определить скорость вагона массой m = *25 тонн* к началу торможения, если он остановился за время t = *2 минуты* под действием средней силы торможения F = *4 кН*.

Решение.

Задача на уравнение ускоренного (в данном случае – замедленного) прямолинейного движения. Для решения используется формула, определяющая зависимость между конечной, начальной скоростью, ускорением и промежутком времени:

$$v = v_0 - a\times t,$$

где v – конечная скорость вагона (после остановки равна нулю); v_0 – начальная скорость вагона (искомая), a – ускорение (замедление) вагона в результате торможения силой F (a определяем из второго закона Ньютона:

$a = F/m$ = *4000/25000 = 0,16 м/с²*), t – время (в секундах) до полной остановки вагона (t = *120 сек*).

Выражаем из уравнения скорость $v_0 = a\times t$, подставляем значения и подсчитываем:

$$v_0 = 0{,}16 \times 120 = 19{,}2\ м/с$$

Задача решена.

Решение задач по сопромату

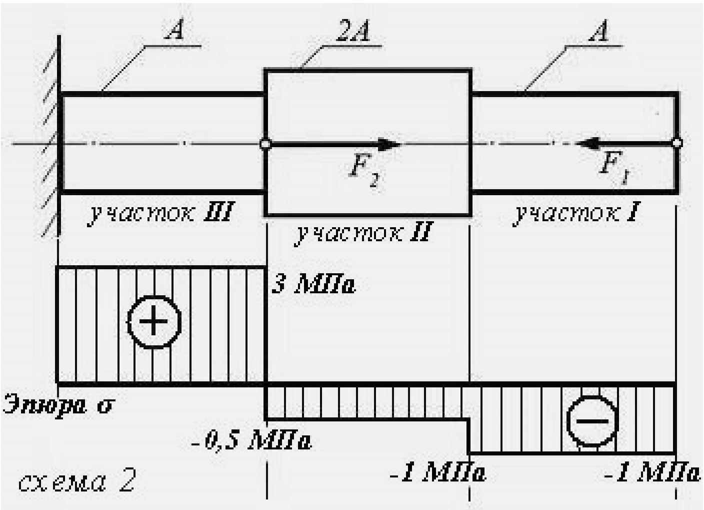
Примеры решения задач по сопротивлению материалов

Как и в предыдущей статье, на этой странице приведены основные принципы решения задач технической механики на примере простейших заданий, в которых необходимо определить какие-либо силовые факторы, возникающие в конструкциях и телах напряжения, построить эпюры и т. п. Сопротивление материалов является базовой основой для решения вопросов наиболее практического раздела технической механики - "Детали машин".

Решение задачи на растяжение и сжатие

Построить эпюру напряжений в ступенчатом круглом брусе, нагруженном продольными силами и указать на наиболее напряженный участок.

Весом бруса пренебречь.



Исходные данные:

Силы:

$\boldsymbol{F_1}$ =100кН;

$\boldsymbol{F_2}$ =400кН;

Площадь сечения бруса: $\boldsymbol{A}$ = 0,1 м^2.

Решение:

При построении эпюры напряжений используем метод сечений, рассматривая отдельные участки бруса, как самостоятельные его элементы, находящиеся в состоянии равновесия под действием реальных и условных нагрузок. При этом исследование сечений начинаем со стороны свободного конца бруса, т. е. со стороны, где приложены известные нам силы. Сначала разбиваем весь брус на однородные участки, границами которых служат точки приложения силовых факторов и (или) изменение размеров сечения. Для нашего бруса можно выделить три таких однородных участка - I, II, III *(см. схему 2)*.

Для каждого из участков определяем нормальные напряжения в сечениях по формуле $\boldsymbol{\sigma = F/A}$, где: $\boldsymbol{F}$ - величина продольной силы в сечении, $\boldsymbol{A}$ - площадь сечения. При этом следует учитывать знаки: если сила растягивающая, то ее условно считают положительной, если сжимающая - отрицательной. Соответственно, напряжения будут иметь такие же знаки, как и силы.

После подсчетов получим:

$$\boldsymbol{\sigma_I = F_1/A} = -100\times10^3/0{,}1 = -1000000 \text{ Па } (-1 \text{ МПа}),$$

$$\boldsymbol{\sigma_{II} = F_1/2A} = -100\times10^3/2\times0{,}1 = -500000 \text{ Па } (-0{,}5 \text{ МПа}),$$

$$\boldsymbol{\sigma_{III} = (F_2 - F_1)/A} = (400 - 100)\times10^3/0{,}1 = 3000000 \text{ Па } (3 \text{ МПа}).$$

Построение эпюры напряжений начинаем с проведения линии, параллельной оси бруса *(эта линия условно изображает брус и является нулевой ординатой графика эпюры)*. Затем, начиная от свободного конца бруса, откладываем от линии, как от нулевой ординаты, величины напряжений по каждому участку с учетом их знаков.

На брусе, приведенном в задании, величина напряжений в каждом сечении отдельных участков будет одинакова, и лишь в граничных (расположенных между соседними участками) сечениях появится скачок напряжения в виде ступени *(здесь используется принцип Сен-Венана, условно полагающий, что в месте приложения нагрузки напряжение изменяется скачкообразно)*.

Построение эпюры завершается указанием на ее площадках знаков напряжения в кружках, проведением тонких линий перпендикулярно оси (нулевой ординаты) эпюры *(эти линии условно изображают сечения бруса)* и расстановкой величины напряжений на внешних углах графика *(на внутренних углах цифровые обозначения не наносятся)*. Слева от эпюры указывается, что на ней изображено (в нашем случае - *Эпюра* $\boldsymbol{\sigma}$)

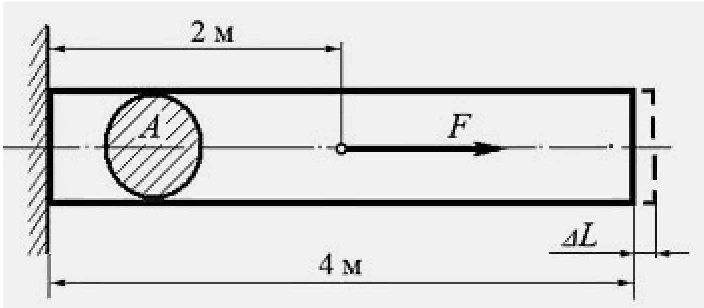
В результате построений мы получим график (эпюру) распределения напряжений по каждому сечению бруса, визуальное исследование которого позволяет определить наиболее напряженный участок. Для бруса, представленного в задаче, максимальные напряжения возникают в сечениях участка III *(см. схему)*. Поскольку эти напряжения положительны, они являются растягивающими

Задача решена.

***

Решение задачи с использованием закона Гука

Определить величину растягивающей силы F, если известно, что под ее действием брус удлинился на величину ΔL.



Исходные данные:

Удлинение бруса ΔL = 0,005 мм;

Модуль продольной упругости балки $E = 2{,}0 \times 10^5$ МПа;

Площадь сечения бруса $A = 0{,}01$ м^2;

Размеры бруса и точка приложения силы F приведены на схеме.

Решение:

Решить задачу можно, используя известную зависимость между линейными удлинениями и нагрузками (закон Гука).

Согласно закону Гука, представленному в расширенном виде:

$$\Delta L = FL/(EA), \quad \text{откуда:} \quad F = (\Delta LEA)/L.$$

Поскольку сила F приложена не к крайнему сечению бруса, а к его середине, то удлинился лишь участок между жесткой заделкой и сечением, к которому приложена растягивающая сила, имеющий длину L_1 = 2 м.

Учитывая это, определяем силу, вызвавшую удлинение бруса (не забываем привести все величины к единицам системы СИ):

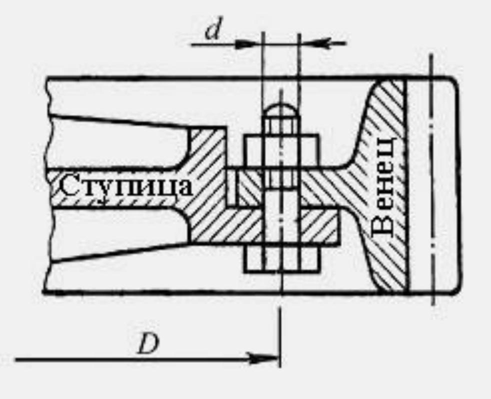
$$F = (\Delta LEA)/L_1 = (0{,}005 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{11} \times 0{,}01)/2 = 5000\ H = 5{,}0\ кН.$$

Задача решена.

***

Решение задачи на срез и смятие

Венец зубчатого колеса прикреплен к ступице болтовыми соединениями из шести болтов с гайками, размещенными равномерно по окружности диаметром D.



Определить касательные напряжения сдвига (среза), действующие в каждом из болтов при номинальной нагрузке.

При расчете не учитывать ослабление стержня болта впадинами резьбы.

Исходные данные:

Номинальный крутящий момент на валу шестерни: ***Мкр*** = 10 Нм;

Диаметр окружности, на которой размещены болтовые соединения ***D*** = 0,4 м;

Диаметр стержня болта ***d*** = 10 мм.

Решение:

Для решения задачи воспользуемся зависимостью между напряжением среза, внешней нагрузкой и площадью сечения по плоскости среза:

$$\tau_{ср} = F_{окр} / A,$$

где: $\tau_{ср}$ - касательное напряжение среза, $F_{окр}$ - окружная сила на расстоянии от оси вращения до центра болта, A - площадь сечения *(в нашем случае - площадь поперечного сечения 6 болтов)*.

Окружную силу можно определить, зная крутящий (вращающий) момент на валу зубчатого колеса и расстояние от оси вращения зубчатого колеса до центра болта: $F_{окр} = 2Мкр/D$.

Площадь сечения одного болта: $A(1) = \pi d^2/4$, *шести болтов:* $A = 3\pi d^2/2$. Подставив эти значения в исходную формулу, определим касательное напряжение сдвига (среза) болта:

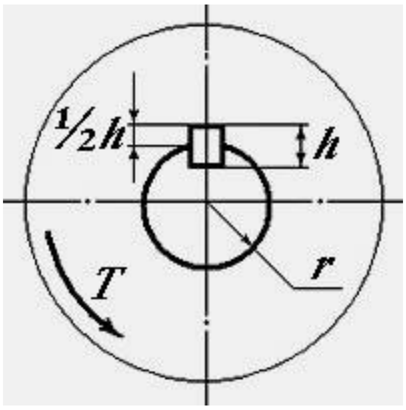
$\boldsymbol{\tau_{ср} = F_{окр} / A = (2Мкр/D) / (3\pi d^2/2)}$ $=(2\times10/0,4) / (3\times3,14\ 0,01^2/2) \approx 106\ 000$ *Па (или 0,106 МПа)*.

Задача решена.

***

Решение задачи на срез и смятие шпонки

Произвести проверочный расчет призматической шпонки на смятие.



Исходные данные:

Вращающий момент на валу T = 120 Нм;

Радиус сечения вала r = 30 мм;

Высота шпонки h = 6 мм;

Рабочая длина шпонки l_p= 30 мм;

Допускаемое напряжение на смятие $[\sigma]_{см}$ = 200 МПа

Решение:

Решение задачи сводится к определению напряжения смятия, возникающего в продольном сечении шпонки, выступающем над канавкой вала *(рабочая площадь шпонки)*. Это напряжение можно определить из формулы:

$$\sigma_{см} = F_{окр} / A_{раб} \qquad (1)$$

где: $\sigma_{см}$ - искомое напряжение смятия, $F_{окр}$ - окружная сила, действующая на рабочую поверхность шпонки: $F_{окр} = T/r$.

Учитывая, что высота рабочей поверхности шпонки невелика, можно принять для расчета напряжения окружную силу, действующую на расстоянии **r** *от оси вращения вала (радиус вала). Если необходимо выполнить более точный расчет, следует к радиусу вала прибавить половину высоты рабочей поверхности шпонки (в нашем случае - h/4).*

$A_{раб}$ - площадь шпонки, подвергаемая смятию: $A_{раб} = hl_p /2$ *(здесь l_p - рабочая длина шпонки)*.

Подставив полученные значения окружной силы и площади шпонки, работающей на смятие, в формулу *(1)*, получим:

$$\sigma_{см} = F_{окр} / A_{раб} = (T/r) / (hl_p /2) = (120/0{,}03) / (0{,}003 \times 0{,}03/2) = 88\,900\,000 \text{ Па (или } \mathbf{88{,}9 \text{ МПа}}).$$

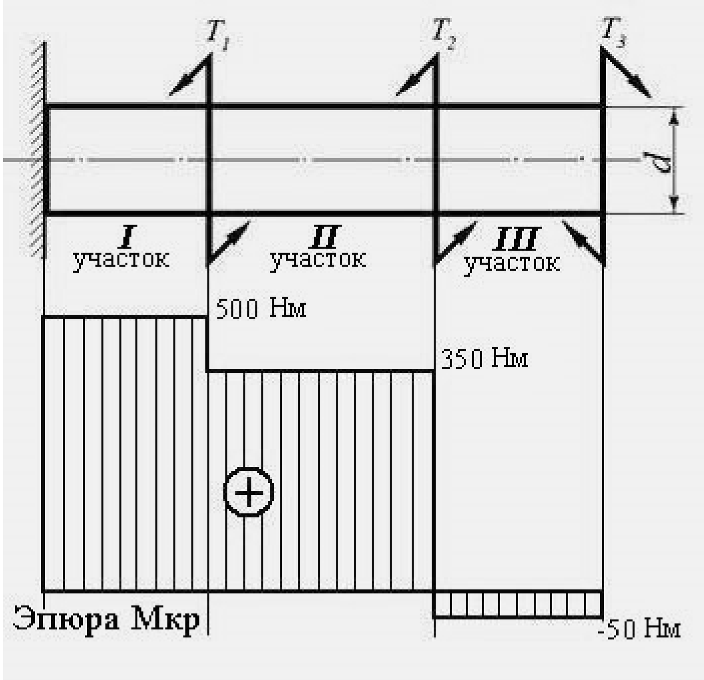
Полученное напряжение сравниваем с допускаемым напряжением смятия $[\sigma_{см}]$ = *200 МПа*, и делаем вывод, что шпонка выдержит нагрузку.

Задача решена.

***

Решение задачи на кручение

Построить эпюру вращающих моментов для круглого однородного бруса, представленного на схеме. Указать наиболее нагруженный участок бруса и определить напряжение в его сечениях.



Исходные данные:

Вращающие моменты:

$\boldsymbol{T_1}$ = 150 Нм;

$\boldsymbol{T_2}$ = 400 Нм;

$\boldsymbol{T_3}$ = 50 Нм;

Диаметр бруса $\boldsymbol{d}$ = 0,05 м.

Решение:

Построение эпюр вращающих (крутящих моментов) начинаем со стороны свободного конца бруса, откладывая величины крутящих моментов от оси абсцисс (нулевой ординаты) бруса с соблюдением знаков моментов *(см. схему)*.

Из эпюры очевидно, что максимальный крутящий момент возникает в сечениях участка ***I***: *Мкр = 500 Нм*. Для определения напряжения (при кручении возникает касательное напряжение), воспользуемся зависимостью, полученной ранее:

$$\boldsymbol{\tau_{max} = M_{кр} / W_r},$$

где: $W_r \approx 0{,}2d^3$ - момент сопротивления круглого сечения кручению (или полярный момент сопротивления круглого сечения).

Подставив полученные зависимости и их числовые значения в формулу, получим максимальное напряжение $\boldsymbol{\tau_{max}}$, возникающее в сечениях участка ***I*** при кручении бруса:

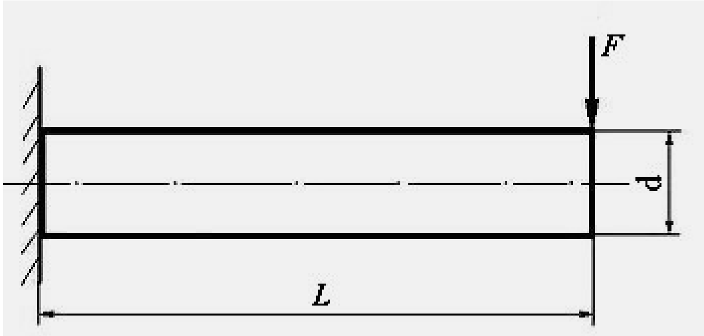
$$\tau_{max} \approx M_{кр} / 0{,}2d^3 \approx 500/0{,}2\times0{,}05^3 \approx 200\,000\,000 \text{ Па (или 200 МПа)}.$$

Задача решена.

Решение задачи на изгиб

Определить максимальное нормальное напряжение, возникающее в сечении круглого бруса, расположенном рядом с жесткой заделкой, если к свободному концу бруса приложена поперечная сила F.

Вес бруса не учитывать.



Исходные данные:

Поперечная сила F = 1000 Н;

Длина бруса L = 5 м;

Диаметр бруса d = 0,1 м.

Решение:

Изгибающий момент силы F и возникающие в сечениях бруса напряжения зависят от расстояния между линией приложения (вектором) силы и плоскостью рассматриваемого сечения *(очевидно, что величина изгибающего момента находится в прямо пропорциональной зависимости от расстояния до вектора силы)*. Поэтому для данного бруса изгибающий момент достигает максимального значения в сечении рядом с жесткой заделкой:

$$Mu_{max} = FL = 1000\times5 = 5000 \text{ Нм}.$$

Максимальные нормальные напряжения в этом сечении можно определить по формуле:

$$\sigma_{max} = Mu_{max} / W,$$

где: $W \approx 0{,}1d^3$ - момент сопротивления круглого сечения изгибу (или осевой момент сопротивления круглого сечения). Подставив зависимости и их величины в формулу, получим:

$$\sigma_{max} \approx Mu_{max} / 0{,}1d^3 \approx 5000/0{,}1\text{x}0{,}1^3 \approx 50\,000\,000 \text{ Па (или } \mathbf{50\ МПа}).$$

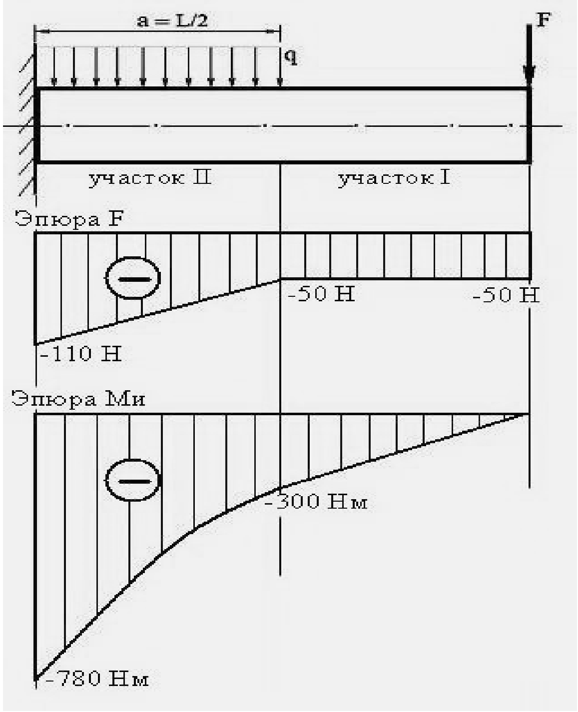
Задача решена.

35

***

Решение задачи на изгиб с построением эпюр

Построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, действующих на защемленный одним концом брус** (см. схему).**



Исходные данные:

Поперечная сила $\boldsymbol{F}$ = 50 Н;

Распределенная нагрузка $\boldsymbol{q}$ = 10 Н/м;

Длина бруса $\boldsymbol{L}$ = 12 м;

Вес бруса не учитывать.

Решение:

Для построения эпюр определим границы участков бруса, в пределах которых внешние нагрузки и размеры сечений одинаковы. Для данного бруса можно выделить два таких участка*(см. схему)*.

Далее, используя метод сечений, строим эпюру поперечных сил, учитывая знаки. Очевидно, что на первом участке поперечная сила будет постоянной во всех сечениях, и эпюра представляет собой горизонтальную линию, отстоящую от оси эпюры на величину -*F* (сила отрицательная).

В среднем сечении бруса начинает действовать распределенная нагрузка, которая линейно увеличивается и суммируется с поперечной силой ***F*** в каждом последующем сечении бруса по направлению к жесткой заделке. Поскольку эпюра поперечных сил на втором участке представляет собой отрезок наклонной прямой, то для ее построения достаточно определить величину поперечной силы в середине бруса (очевидно, что здесь ***F*** *= 50 Н*) и величину поперечной силы в сечении рядом с жесткой заделкой:

$$F_2 = -FL - 6q = -50 - 10\times 6 = -110\ Н.$$

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил ***F*** *(см. схему)*.

Построение эпюры изгибающих моментов строится аналогично эпюре поперечных сил - при помощи метода сечений. При этом учитывается расстояние от сечения, в котором приложена поперечная сила, до рассматриваемого сечения (плечо силы).

Очевидно, что изгибающий момент от силы ***F*** будет увеличиваться прямо пропорционально по мере удаления от сечения, к которому она приложена, причем в крайнем сечении (где приложена сила) момент этой силы равен нулю *(поскольку плечо силы равно нулю)*.

В среднем сечении бруса изгибающий момент достигает значения:

$$\boldsymbol{Mu = FL/2} = -50\times 6 = -300\ Нм.$$

Начиная с середины бруса начинает действовать изгибающий момент от распределенной нагрузки ***q***, который в каждом сечении определяется, как произведение приведенной силы $F_{пр} = ql$ на половину расстояния ***l*** *(здесь* ***l*** *- расстояние от рассматриваемого сечения до начала действия распределенной нагрузки)*.

Очевидно, что по мере удаления от среднего сечения к жесткой заделке изгибающий момент от распределенной нагрузки ***q*** изменяется по квадратичной зависимости, и линия эпюры изгибающих моментов на втором участке представляет собой параболу.

Чтобы построить параболу недостаточно двух точек, необходимо определить величину изгибающего момента в нескольких сечениях бруса *(на втором участке)*. При этом следует учитывать изгибающий момент от силы ***F***, который суммируется с изгибающим моментом от распределенной нагрузки ***q*** на данном участке бруса.

Максимальной величины изгибающий момент достигает в сечении рядом с жесткой заделкой:

$$\boldsymbol{Mu_{max} = -FL + [-q\times(L/2)\times(L/4)]} = -50\times 12 + [-10\times(12/2)\times(12/4)] = -780\ Нм.$$

Выполнив необходимые подсчеты, строим эпюру изгибающих моментов, начиная со свободного конца бруса *(см. схему)*.

Задача решена.

Примеры решения задач по сопротивлению материалов

На этой странице приведен еще один пример решения задачи по Сопромату, где необходимо найти внутренние усилия, напряжения и линейные удлинения на участках и в сечениях бруса, нагруженного продольной силой и собственным весом.

Результаты расчетов оформлены эпюрами продольных сил, напряжений и удлинений бруса.

Расчет стержня

Условие задачи:

Стержень, жестко закрепленный одним концом, состоящий из трех участков длиной $l_1 \ldots l_3$, и площадью $A_1 \ldots A_3$, находится под действием собственного веса и силы F, приложенной на координате l_F (*см. рис. 1*). Материал стрежня – сталь *Ст.3*.

Требуется:

Построить эпюры продольных сил N, нормальных напряжений σ и перемещений δ.

Исходные данные:

- $l_1 = 1{,}1$ *м*;
- $l_2 = 1{,}0$ *м*;
- $l_3 = 0{,}9$ *м*;
- $A_1 = 40$ *см*^{2};
- $A_2 = 20$ *см*^{2};
- $A_3 = 25$ *см*^{2};
- $F = 70$ *кН*;
- $l_F = l_1 + l_2$;
- Опора расположена вверху.

Справочная информация:

Удельный вес стали *Ст.3*: $\gamma = (77\ldots79)\times10^3$ *Н/м*^{3}.

Для расчетов принимаем удельный вес равным $\gamma = 78\times10^3$ *Н/м*^{3}.

Модуль продольной упругости (модуль Юнга) для стали *Ст.3*: $E = 2\times10^{11}$ *Н/м*^{2}.

Указания:

Собственный вес стержня можно представить в виде распределенной нагрузки $q_1 = \gamma\times A_1$.

Ось z, направление силы F и нумерацию участков вести от опоры.

Решение задачи:

1. Вычерчиваем схему стержня в соответствии с исходными данными.

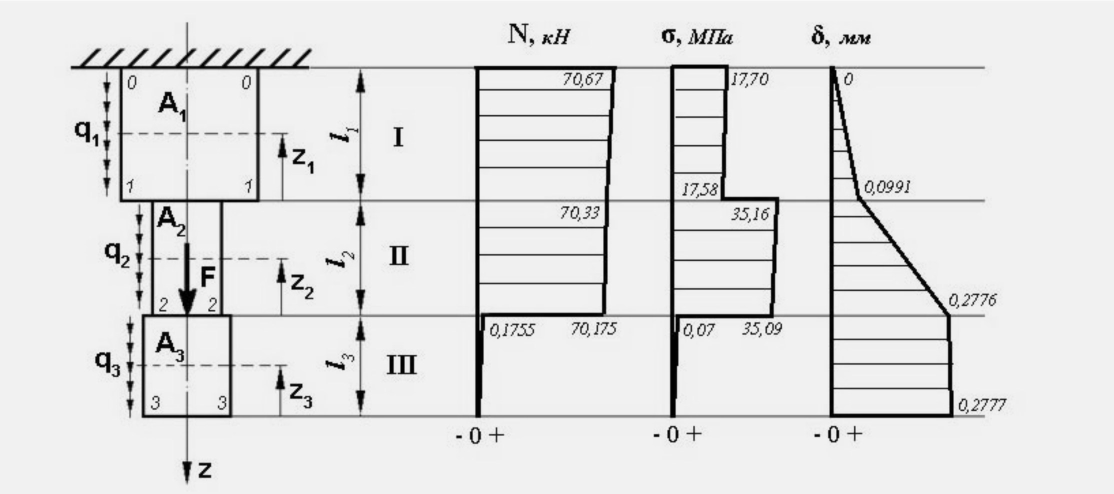


Рис. 1.

2. Расчет ведем от свободного конца стержня, т. е. с *III*-го участка.

Рассекаем стержень на силовом участке и отбрасываем часть стержня, содержащую опору (верхнюю часть).

Составляем уравнения для нахождения продольной силы $\boldsymbol{N}$, нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и удлинения стержня $\Delta \boldsymbol{l}$ на силовом участке *III*:

2.1. Поскольку сила $\boldsymbol{F}$ на участке *III* не действует, то продольная сила на этом участке представлена только весом стержня, который увеличивается по мере удаления от плоскости *3-3*. При этом зависимость величины продольной силы $\boldsymbol{F}$ от координаты $\boldsymbol{z_3}$ будет прямо пропорциональной, поскольку изменяется только координата, а площадь сечения $\boldsymbol{A_3}$ и плотность стали γ остается неизменной по всему участку. Уравнение для продольной силы на участке:

$$\boldsymbol{N = q_3 \times z3 = \gamma \times A_1 \times z_3,}$$

где $\boldsymbol{q_3}$ – вес стержня, представленный в виде распределенной нагрузки (*Н/м*);

$\boldsymbol{z_3}$ – координата рассматриваемого сечения стержня по оси $\boldsymbol{z}$ (*м*);

$\boldsymbol{A_3}$ – площадь сечения участка *III* (*м*^{2});

$\boldsymbol{\gamma}$ – удельный вес материала стержня (для стали *Ст.3* - $\gamma = 78 \times 10^3$ *Н/м*^{3}).

Тогда в сечении *3-3* продольная сила будет равна нулю (т. к. и координата и вес равны нулю), а в сечении *2-2* (верхнем сечении участка *III*) продольная сила определится по формуле:

$$\boldsymbol{N_3 = q_3 \times z_3 = l_3 \times \gamma \times A_3} = 0{,}9 \times 78 \times 10^3 \times 25 \times 10^{-4} = 175{,}5\ Н.$$

2.2. Нормальное напряжение на силовом участке *III* определяем, как отношение продольной силы к площади участка в каждом рассматриваемом сечении стержня:

$$\sigma_3 = N_3/A_3.$$

Тогда в сечении *3-3* нормальное напряжение будет равно нулю (т. к. продольная сила равна нулю), а в сечении *2-2* (со стороны участка *III*) определится по формуле:

$$\sigma_3 = N_3/A_3 = 175{,}5/25\times10^{-4} = 70222{,}2\ Па \quad \text{или} \quad \sigma_3 \approx 0{,}07\ МПа.$$

2.3. Удлинение бруса на участке *III* определяем по закону Гука, с учетом изменяющегося по координате z веса стержня:

$$\Delta l_3 = \int[N_3/(E\times A_3)]dz,$$

где E – модуль продольной упругости стали; $E = 2\times10^{11}\ Н/м^2$.

Удлинение изменяется по линейной зависимости от нижнего сечения (*3-3*) до верхнего сечения (*2-2*) участка, при этом в сечении *3-3* оно будет равно нулю, поскольку продольная сила N_3 в этом сечении равна нулю, а в сечении *2-2* удлинение будет равно:

$$\Delta l_3 = \int[N_3/(E\times A_3)]dz = \int[(A_3\times\gamma\times z_3)/(E\times A_3)]dz = (\gamma\times l_3^2)/2E =$$

$$= 78\times10^3\times0{,}81)/(2\times2\times10^{11}) \approx 0{,}000000158\ м \text{ или } \Delta l3 \approx 0{,}000158\ мм.$$

3. Проводим расчет продольных сил, нормальных напряжений и удлинений стержня на участках *II* и*I*, учитывая, что к сечению *2-2* участка *II* приложена продольная сила F, которая по отношению к участкам *II* и *I* является растягивающей (т. е. положительной).

3.1. Продольная сила на участках *II* и *I* будет равна:

В начале участка *II*:

$$N_2^1 = F + N_3 = 70000 + 175{,}5 = 70175{,}5\ Н \quad \text{или} \quad N_2^1 \approx 70{,}175\ кН.$$

В конце участка *II* и в начале участка *I*:

$$N_2^2 = N_1^1 = N_2^1 + q_2\times z_2 = N_2^1 + l_2\times\gamma\times A_2 =$$

$$= 70175{,}5 + (1{,}0\times78\times10^3\times20\times10^{-4}) = 70331{,}5\ Н \quad \text{или} \quad N_2^2 = N_1^1 \approx 70{,}33\ кН.$$

В конце участка *I*:

$$N_1^2 = N_1^1 + q_1\times z_1 = F + l_1\times\gamma\times A_1 = 70331{,}5 + (1{,}1\times78\times10^3\times40\times10^{-4}) = 70674{,}7\ Н$$

$$\text{или} \quad N_1^2 \approx 70{,}67\ кН.$$

3.2. Нормальное напряжение на участках *II* и *I*:

В начале участка *II*: $\sigma_2^1 = N_1^2/A_2 = 70175/20\times10^{-4} = 35087500\ Па$ или $\sigma_2^1 \approx 35{,}09\ МПа$.

В конце участка *II*: $\sigma_2^2 = N_2^2/A_2 = 70331{,}5/20\times10^{-4} = 35\ 165\ 750\ Па$ или $\sigma_2^2 \approx 35{,}16\ МПа$.

В начале участка *I*: $\sigma_1^1 = N_1^1/A_1 = 70331{,}5/40\times10^{-4} = 17\ 582\ 875\ Па$ или $\sigma_1^1 \approx 17{,}58\ МПа$.

В конце участка *I*: $\sigma_1^2 = N_1^2/A_1 = 70674{,}7\,/40\times10^{-4} = 17668675$ *Па* или $\sigma_1^2 \approx 17{,}7$ *МПа*.

3.3. Удлинение стержня на участках *II* и *I*:

$$\Delta l_2 = (\gamma\times l_2^2)/2E + (N\times l_2/E\times A_2) =$$

$$= 78\times10^3\times1)/(2\times2\times10^{11}) + (70156\times1/2\times10^{11}\times20\times10^{-4}) \approx 0{,}00017851\ м \text{ или } \Delta l_2 \approx 0{,}1785\ мм.$$

$$\Delta l_1 = (\gamma\times l_1^2)/2E + (N\times l_1/E\times A_1) =$$

$$= (78\times10^3\times1{,}21)/(2\times2\times10^{11}) + (70343\times1{,}1/2\times10^{11}\times40\times10^{-4}) \approx 0{,}0000991\ м \text{ или } \Delta l_1 \approx 0{,}0991\ мм.$$

4. Определяем перемещения сечений стержня:

- $\delta_{0\text{-}0} = 0$ *мм*;
- $\delta_{1\text{-}1} = \Delta l_1 = 0{,}0991$ *мм*;
- $\delta_{2\text{-}2} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0{,}0991 + 0{,}1785 = 0{,}2776$ *мм*;
- $\delta_{3\text{-}3} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0{,}0991 + 0{,}1785 + 0{,}000158 = 0{,}2777$ *мм*.

5. Результаты расчетов сводим в *Таблицу 1*, и строим эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений (*см. рис. 1*).

Таблица 1. Значения продольной силы, нормального напряжения и удлинения стержня по сечениям силовых участков

Участок	***Границы участка***	***Продольная сила, N, кН***	***Нормальное напряжение, σ, МПа***	***Перемещение δ, мм***
III	начало	*0*	*0*	*0,2777*
	конец	*0,1755*	*0,07*	*0,2776*
II	начало	*70,175*	*35,09*	*0,2776*
	конец	*70,33*	*35,16*	*0,0991*
I	начало	*70,33*	*17,58*	*0,0991*
	конец	*70,67*	*17,70*	*0*

Примеры решения задач по сопротивлению материалов

На этой странице приведен еще один пример решения задачи по Сопромату, в которой необходимо произвести расчет вала переменного сечения (ступенчатого), нагруженного крутящими моментами. По результатам расчетов необходимо подобрать размеры вала, а также определить максимальную деформацию вала на скручивание (угол закручивания).

Результаты расчетов оформлены эпюрами крутящих моментов, касательных напряжений и углов закручивания бруса.

***

Расчет вала

Условие задачи:

К стальному валу, состоящему из *4-х* участков длиной $l_1 \ldots l_4$ приложено четыре сосредоточенных момента $M_1 \ldots M_4$ (*см. рис. 1*).

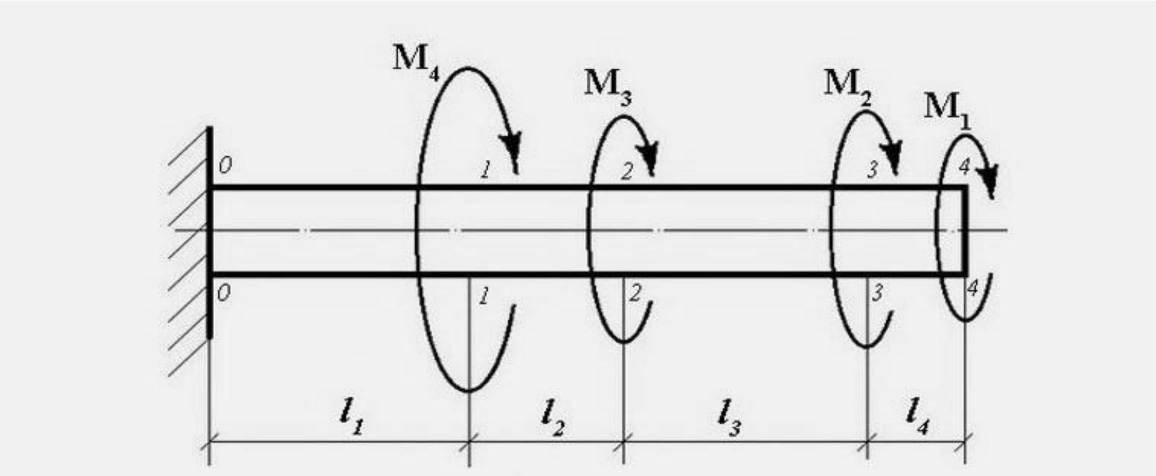


Рис. 1

Требуется:

Построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$, подобрать диаметр вала из расчета на прочность, построить эпюру максимальных касательных напряжений τ_{max}, построить эпюру углов закручивания φ вала и определить наибольший относительный угол закручивания вала.

Исходные данные:

Нагрузки, *кН×м*:

- M_1 = -4,5;
- M_2 = -2,6;
- M_3 = -3,1;
- M_4 = -2,0;

Длина участков, м:

- l_1 = 0,9;
- l_2 = 0,6;
- l_3 = 0,9;
- l_4 = 0,4;

Указания:

Вычертить схему вала в соответствии с исходными данными.

Знаки моментов в исходных данных означают: плюс – момент действует против часовой стрелки относительно оси $\boldsymbol{Z}$, минус – по часовой стрелке (см. навстречу оси $\boldsymbol{Z}$). В дальнейшем значения моментов принимать по абсолютной величине. Участки нумеровать от опоры. Допускаемое касательное напряжение $[\tau]$ для стали принимать равным *100 МПа*.

Решение:

1. Определим методом сечений значения крутящих моментов на каждом силовом участке от свободного конца вала.

Крутящий момент равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих на вал по одну сторону сечения.

- $M_{IV} = -M_1 = -4{,}5$ *(кН×м)*;
- $M_{III} = -M_1 - M_2 = -4{,}5 - 2{,}6 = -7{,}1$ *(кН×м)*;
- $M_{II} = -M_1 - M_2 - M_3 = -4{,}5 - 2{,}6 - 3{,}1 = -10{,}2$ *(кН×м)*;
- $M_I = -M_1 - M_2 - M_3 - M_4 = -4{,}5 - 2{,}6 - 3{,}1 - 2{,}0 = -12{,}2$ *(кН×м)*.

2. Подберем сечение вала из расчета на прочность при кручении по полярному моменту сопротивления для участка, где величина крутящего момента максимальная (без учета знака):

$$W_P \geq M_{кр}/[\tau] .$$

Так как для круглого сечения полярный момент равен: $W_p = \pi D^3/16$, то можно записать:

$$D \geq 3\sqrt{(16M_{кр}/\pi[\tau])} \geq 3\sqrt{(16\times12{,}2\times10^3/3{,}14\times[100\times10^6])} = 0{,}0855 \text{ м или } D \geq 85{,}5 \text{ мм}.$$

В соответствии со стандартным рядом, предусмотренным ГОСТ 12080-66, принимаем диаметр вала $D = 90$ *мм*.

3. Определим угол закручивания для каждого участка вала по формуле:

$$\varphi = M_{кр}\times l/G\times I_p,$$

где G – модуль упругости *2-го* рода; для стали $G = 8\times10^{10}$ *Па*;

I_p – полярный момент инерции (для круглого сечения $I_p = \pi D^4/32 \approx 0{,}1D^4$, $м^4$).

Произведение $G\times I_p = 8\times10^{10}\times0{,}1\times0{,}09^4 \approx 524880$ $Н\times м^2$ – жесткость сечения данного вала при кручении.

Рассчитываем углы закручивания на каждом участке:

- $\varphi_I = -12{,}2\times103\times0{,}9/524880 = -0{,}0209$ *рад*;
- $\varphi_{II} = -10{,}2\times103\times0{,}6/524880 = -0{,}0116$ *рад*;
- $\varphi_{III} = -7{,}1\times103\times0{,}9/524880 = -0{,}0122$ *рад*;

- φ_{IV} = -4,5×103×0,4/524880 = -0,0034 *рад*.

4. Определяем углы закручивания сечений вала, начиная от жесткой заделки (опоры):

- $\varphi_{0\text{-}0} = 0$ *рад*;
- $\varphi_{1\text{-}1} = \varphi_I = -0{,}0209$ *рад*;
- $\varphi_{2\text{-}2} = \varphi_I + \varphi_{II} = -0{,}0209 - 0{,}0116 = -0{,}0325$ *рад*;
- $\varphi_{3\text{-}3} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = -0{,}0209 - 0{,}0116 - 0{,}0122 = -0{,}0447$ *рад*;
- $\varphi_{4\text{-}4} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = -0{,}0209 - 0{,}0116 - 0{,}0122 - 0{,}0034 = -0{,}0481$ *рад*.

5. Определяем максимальное касательное напряжение на каждом силовом участке по формуле:

$$\tau_{max} = M_{кр}/W_p = 16M_{кр}/\pi D^3 \approx 5M_{кр}/D^3.$$

Тогда:

- τ_{maxIV} = 5×-4,5×103/0,093 = -30864197 *Па* ≈ -30,086 *МПа*;
- τ_{maxIII} = 5×-7,1×103/0,093 = -48696844 *Па* ≈ -48,700 *МПа*;
- τ_{maxII} = 5×-10,2×103/0,093 = -69958847 *Па* ≈ -69,959 *МПа*;
- τ_{maxI} = 5×-12,2×103/0,093 = -83676268 *Па* ≈ -83,676 *МПа*.

6. Наибольший относительный угол закручивания Θ_{max} определим по формуле:

$$\Theta_{max} = M_{КРmax}/G \times I_p = -12{,}2\times10^3/524880 = 0{,}0232 \text{ рад/м}.$$

7. По результатам расчетов строим эпюры крутящих моментов $M_{кр}$, касательных напряжений τ_{max} и углов закручивания φ (*см. рис. 2*).

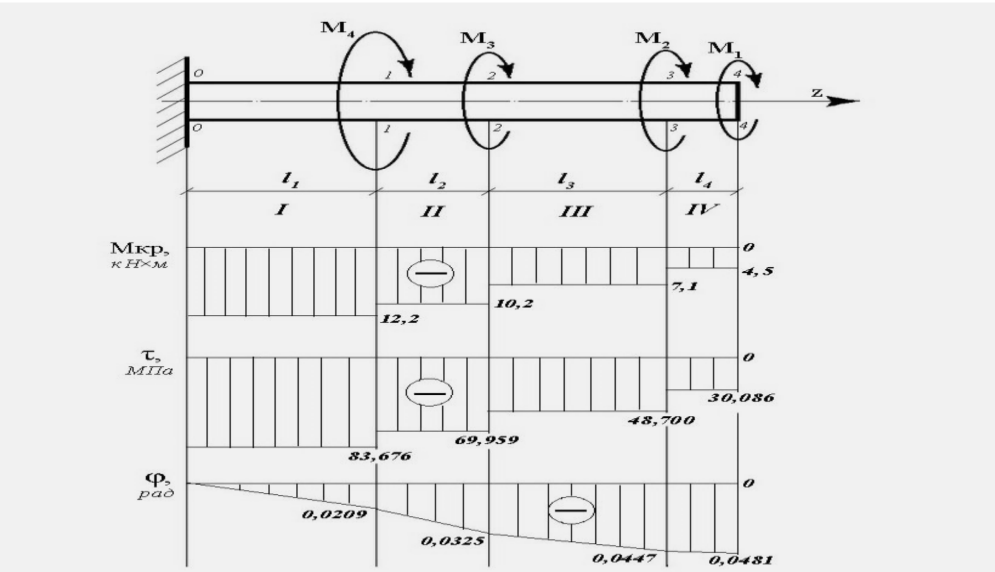


Рис. 2

На этой странице приведен пример решения задачи по Сопромату, в которой необходимо произвести расчет горизонтальной балки, нагруженной поперечными силовыми факторами. По результатам расчетов внутренних силовых факторов осуществлен подбор размеров сечения балки из расчета на прочность.

Результаты расчетов балки оформлены эпюрами изгибающих моментов и поперечных сил.

***

Расчет двутавровой балки

Условие задачи:

На горизонтально расположенную балку, закрепленную на двух шарнирных опорах, действуют активные нагрузки: изгибающий момент $\boldsymbol{M}$, сосредоточенная сила $\boldsymbol{F}$ и распределенная нагрузка $\boldsymbol{q}$ (*см. рис. 3*).

Материал стержня – сталь *Ст.3*.

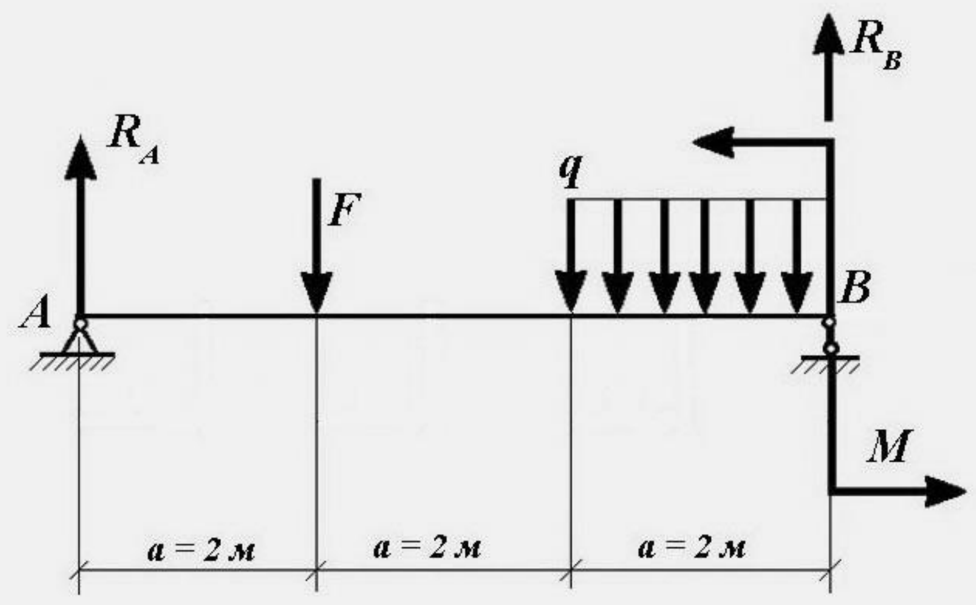


Рис. 3

Требуется:

Построить эпюры поперечных сил $\boldsymbol{Q_Y}$ и изгибающих моментов $\boldsymbol{M_X}$ и подобрать сечение балки из расчета на прочность.

Исходные данные:

Нагрузки:

- $\boldsymbol{M}$ = *6 кН×м*;
- $\boldsymbol{F}$ = *-7 кН*;

- q = -8 кН/м;
- a = 2 м;
- Сечение балки: *двутавр*.

Координаты приложения нагрузок:

- $Z_M = 3a$ - координата приложения изгибающего момента;
- $Z_F = a$ - координата приложения сосредоточенной силы;
- начало распределенной нагрузки: $Zq = 2a$;
- конец распределенной нагрузки: $Zq = 3a$;
- $Z_B = 3a$ - координата опоры B.

Указания:

Шарнирно-неподвижную опору A располагать на левом конце балки, этот же конец балки принимаем за начало координат. Шарнирно-неподвижную опору B и внешние нагрузки располагать на соответствующих участках, в соответствии с которыми разбиваем балку на силовые участки. Силовым участком считать ту часть балки, в пределах которой законы измерения Q_Y и M_X остаются постоянными.

Решение:

1. Из условия равновесия балки определим неизвестные опорные реакции R_A и R_B (*см. рис. 3*). Для этого составляем уравнения равновесия для изгибающих моментов сначала относительно опорыA, затем относительно опоры B. При этом изгибающие моменты, направленные по часовой стрелке относительно опоры считаем отрицательными, против часовой стрелки – положительными.

$$\sum M_A = M - q\times a\times 2{,}5a - F\times a + R_B\times 3a = 0,$$

откуда находим реакцию R_B:

$$R_B = (qa\times 2{,}5a + F\times a - M)/3a = (8\times 2\times 2{,}5\times 2 + 7\times 2 - 6)/3\times 2 = 14{,}67\ кН.$$

$$\sum M_B = M + q\times a\times 0{,}5a + F\times 2a - R_A\times 3a = 0,$$

откуда находим реакцию R_A:

$$R_A = (M + qa\times 0{,}5a + F\times 2a)/3a = (6 + 8\times 2\times 0{,}5\times 2 + 7\times 2\times 2)/3\times 2 = 8{,}33\ кН.$$

Произведем проверку правильности найденных значений опорных реакций, используя уравнение равновесия действующих на балку сил с учетом их направления:

$$\sum F_Y = R_A - F - q\times a + R_B = 8{,}33 - 7 - 8\times 2 + 14{,}67 = 0.$$

Опорные реакции найдены правильно.

2. Составим уравнения внутренних усилий Q_Y и M_X для каждого силового участка балки.

2.1. Участок *I*: $0 \le Z_1 \le 2$ *м*.

- $Q_{Y1} = R_A$;
- $M_{X1} = - R_A \times Z_Y$.

На протяжении всего участка I внутренняя сила равна $R_A = 8{,}33$ *кН*. Изгибающий момент на этом силовом участке изменяется линейно, поэтому для построения эпюры достаточно рассчитать его значение в двух крайних сечениях участка:

- $M_{X1=0} = 0$;
- $M_{X1=2} = -8{,}33 \times 2 = -16{,}66$ *кН×м*.

2.2. Участок *II*: $2\ м \le Z_2 \le 4\ м$.

- $Q_{Y2} = R_A - F = 8{,}33 - 7 = 1{,}33$ кН;
- $M_{X2} = - R_A \times (2м + Z_2) + F \times Z_2$.

Изгибающий момент на этом силовом участке тоже изменяется линейно:

- $M_{X2=2} = -16{,}66$ *кН×м*;
- $M_{X2=4} = -8{,}33 \times (2+2) + 7 \times 2 = -19{,}32$ *кН×м*.

2.3. Участок *III*: $4\ м \le Z_3 < 6\ м$ (кроме крайней точки B, где приложен момент M).

$Q_{Y3} = R_A - F - q \times Z_3$;

$M_{X3} = - R_A \times (4м + Z_3) + F \times (2м + Z_3) + q \times Z_3 \times Z_3/2)$.

В крайней точке B ($Z_3 = 2\ м$) алгебраическая сумма всех изгибающих моментов должна быть равна нулю:

$$M_{X3=6м} = - R_A \times (4\ м + Z_{3=2м}) + F \times (2м + Z_{3=2м}) + q \times Z_{3=2м} \times Z_{3=2м}/2) + M =$$
$$= -8{,}33 \times 6 + 7 \times 4 + 8 \times 2 \times 1 + 6 = 0.$$

Сила Q_{Y3} на силовом участке *III* изменяется линейно, поэтому для построения эпюры находим ее значение в крайних сечениях участка:

- $Q_{Y\,Z3=0} = R_A - F - q \times Z_{3=0} = 8{,}33 - 7 = 1{,}33$ *кН*;
- $Q_{Y\,Z3=2} = R_A + q \times Z_{3=2} = 8{,}33 - 7 - 8 \times 2 = -14{,}67$ *кН*,

т. е. сила в крайней точке равна реакции опоры B, но направлена в противоположную сторону, что свидетельствует о правильности произведенных расчетов. Поскольку сила на силовом участке *III*поменяла знак, то изгибающий момент M_X при $Q_Y = 0$ имеет экстремальное значение.

Найдем координату экстремальной точки $Z_{3экст}$ и величину экстремального изгибающего момента $M_{Xэкст}$.

$$Q_Y = R_A – F - q\times Z_{3экст} = 0 \text{, откуда: } Z_{3экст} = (R_A – F) / q = (8{,}33 – 7)/8 = 0{,}166\ м.$$

Подставив полученное значение в уравнение изгибающего момента, получим:

$$M_{Xэкст} = - R_A\times(4м + Z_{3экст}) + F\times(2м + Z_{3экст}) + q\times Z_{3экст}\times Z_{3экст}/2) =$$
$$= -8{,}33\times4{,}166+7\times2{,}166 + 8\times0{,}1662/2 = -19{,}43\ кН\times м.$$

Изгибающий момент на силовом участке *III* изменяется по квадратичной зависимости, поэтому его эпюра имеет криволинейный вид. Для того, чтобы построить эпюру изгибающих моментов на этом участке необходимо вычислить значение моментов в нескольких промежуточных точках.

- $M_{X3=0} = -8{,}33\times4 +7\times2 = -19{,}32\ кН\times м;$
- $M_{Xэкст} = -19{,}43\ кН\times м$;
- $M_{X3=0,5м} = -8{,}33\times4{,}5 +7\times2{,}5 + 8\times0{,}52/2 = -18{,}985\ кН\times м$;
- $M_{X3=1м} = -8{,}33\times5 +7\times3 + 8\times12/2 = -16{,}65\ кН\times м$;
- $M_{X3=1,5м} = -8{,}33\times5{,}5 +7\times3{,}5 + 8\times1{,}52/2 = 15{,}255\ кН\times м$;
- $M_{X3=2м} = -6{,}0\ кН\times м$.

3. По результатам расчетов строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (*рис. 4 внизу страницы*).

4. По эпюре M_X определяем опасное сечение балки, где изгибающий момент имеет максимальное значение (по абсолютной величине):

$$M_{Xmax} = 19{,}43\ кН\times м.$$

Размер сечения (по условию варианта задания - *№* двутавра) вычисляем из условия прочности при изгибе по осевому моменту сопротивления сечения:

$$W_X = M_{Xmax}/[\sigma] = 19{,}43\times10^3/160\times10^6 = 0{,}000121\ м^3 = 121\ см^3.$$

По таблице сортаментов выбираем ***двутавр №18***, у которого момент сопротивления $W_X = 143\ см^3$(ближайший по сортаменту *двутавр №16* имеет момент сопротивления сечения равный $109\ см^3$, что недостаточно для выполнения условия прочности).

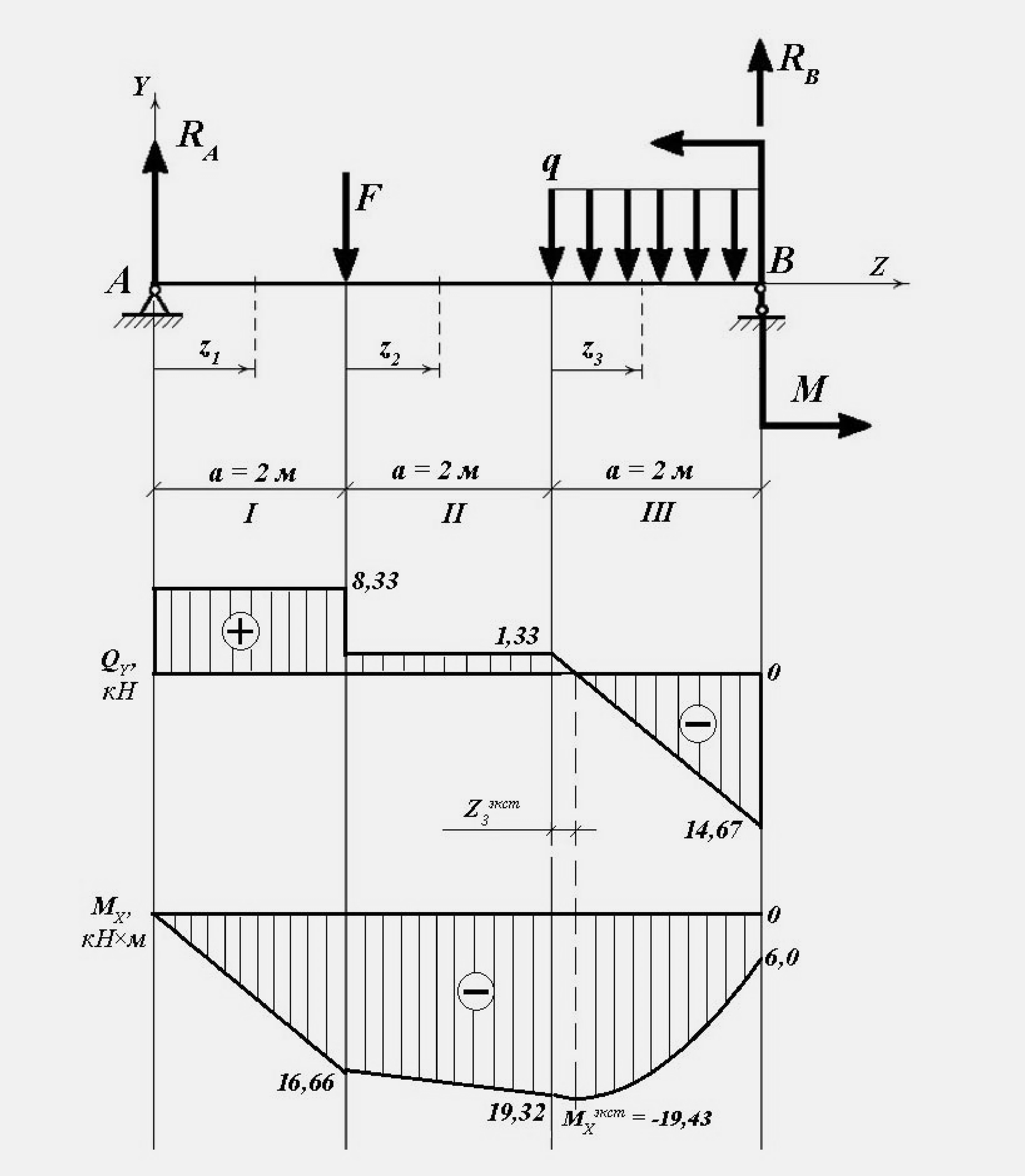


Рис. 4.

Примеры решения задач по сопротивлению материалов

На этой странице приведен пример решения задачи по Сопромату, в которой необходимо произвести расчет статически неопределимой балки, нагруженной поперечными силовыми факторами. По результатам расчетов определены линейные перемещения сечений балки по ее длине.

Результаты расчетов балки оформлены эпюрами изгибающих моментов и поперечных сил и линейных перемещений.

***

Расчет статически неопределимой балки

Условие задачи:

На статически неопределимую балку, имеющую две опоры: жесткую заделку ***A*** и шарнирно-подвижную опору ***B***, действуют внешние нагрузки: сила ***F*** и распределенная нагрузка ***q*** (*см. рис. 1*).

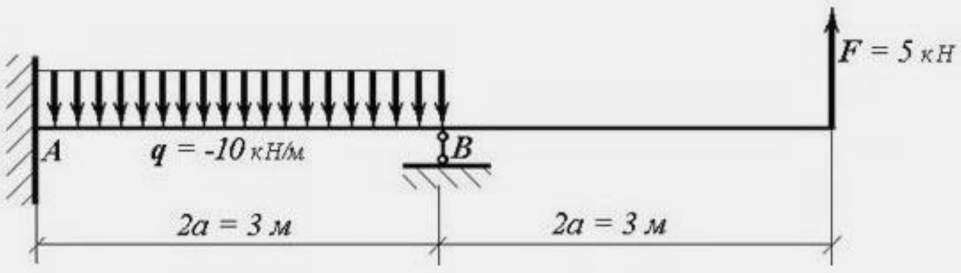


Рис. 1

Требуется:

Определить опорные реакции, построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и линейных перемещений.

Исходные данные:

- поперечная сила ***F*** = *5 кН*;
- распределенная нагрузка ***q*** = *-10 кН/м*;
- линейная величина ***a*** = *1,5 м*

координаты:

- начальная координата распределенной нагрузки $Z_q = 0$;
- конечная координата распределенной нагрузки $Z_q = 2a$;
- $Z_F = 4a$ - координата приложения сосредоточенной силы;
- $Z_B = 2a$ - координата опоры ***B***.

Указания:

Вычертить схему балки в соответствии с исходными данными. Жесткую заделку расположить на левом конце балки, там же выбрать начало координат.

Решение:

Данная балка является статически неопределимой один раз, поскольку опорных реакций у нее больше, чем уравнений статики на единицу. Следовательно, применить методы статики для определения неизвестных силовых факторов невозможно, так как одна опорная реакция является «лишней», и неизвестных силовых факторов на единицу больше, чем уравнений равновесия.

Для решения задачи используем способ Верещагина, отбросив «лишнюю» связь и заменив ее неизвестным усилием X_1. За лишнюю связь можно принять любую опорную реакцию, кроме продольно действующей реакции H_A, так как без нее балка не сможет сохранять равновесие.

Принимаем за лишнюю связь реактивный момент M_A, составляем эквивалентную схему балки (*рис. 2*), и записываем каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой системы:

$$\delta_{11} \times X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Поскольку в качестве лишней связи мы отбросили реактивный момент, данное каноническое уравнение является уравнением угла поворота балки в начале координат, т. е. в жесткой заделке.

Для вычисления коэффициентов канонического уравнения построим грузовую M_F (от внешних нагрузок F и q) и единичную M_1 (от усилия $X_1 = 1$) эпюры изгибающих моментов, а затем перемножим их в соответствии со способом Верещагина (*см. рис. 2*).

По способу Верещагина произведение эпюр $M_F \times M_1$ равно площади грузовой эпюры, умноженной на высоту единичной эпюры, взятой под центром тяжести грузовой эпюры. При этом обе линии эпюр не должны иметь точек перелома, и хотя бы одна из эпюр должна быть линейной. Для удобства расчетов расслаиваем эпюры M_F и M_q, построив их на отдельных графиках.

В соответствии со схемами на *рисунке 2* коэффициенты канонического уравнения определяются по формулам:

$$\delta_{11} = 1/EI_X \int M_1 \times M_1\, dz = 1/EI_X\,(1/2 \times 1 \times 2a \times 2/3 \times 1) = 1/EI_X;$$

$$\Delta_{1F} = 1/EI_X \int M_1 \times M_1\, dz = 1/EI_X \times (2/3 \times 9/8 \times qa^2 \times 2a \times 1/2 + 1/2 \times Fa/2 \times 2a \times 1/3) \approx 25{,}7/EI_X.$$

Подставим полученные значения в каноническое уравнение и найдем неизвестное усилие X_1:

$$X_1/EI_X + 25{,}7/EI_X = 0, \text{ отсюда } X_1 = -25{,}7 \text{ (кН×м)}.$$

Статическая неопределимость раскрыта.

Отрицательное значение усилия X_1 показывает, что направление этого усилия изначально установлено неверно, и фактически оно направлено в противоположную сторону, т. е. изгибающий момент, действующий в жесткой заделке $M_A = -X_1$.

Теперь из уравнений статики найдем опорные реакции балки:

$$\sum F_Z = H_A = 0, \text{ откуда следует, что } H_A = 0;$$

$\sum M_A = -M_A + R_B \times 2a - q \times 2a \times 2a/2 + F \times 4a = -25,7 + 3RB - 45 + 30 = 0$, откуда $R_B = -40,7/3 = 13,57$ *(кН)*.

Положительное значение полученной реакции R_B указывает, что ее направление на схеме *рисунка 1* выбрано верно.

$\sum M_B = -M_A - R_A \times 2a + q \times 2a \times 2a/2 + F \times 2a = -25,7 - 3R_A + 45 + 15 = 0$, *откуда* $R_A = 11,43$ *(кН)*.

Поскольку реакция получилась положительной, ее направление на схеме выбрано верно. В качестве проверки полученных результатов составляем уравнение равновесия сил, действующих на балку:

$\sum F_Y = R_A - q \times 2a + R_B + F = 11,43 - 30 + 13,57 + 5 = 0.$

Для построения эпюры линейных перемещений Y (прогибов) требуется определить их значения в*4…5* сечениях балки.

В нашем случае известно, что перемещения в опорах A и B равны нулю, т. е. $y_A = 0$ и $y_B = 0$.

Вычислим прогибы в середине пролетов балки на координатах $z_1 = a$, $z_2 = 3a$ и в крайнем сечении балки, где приложена сила F $(z_3 = 4a)$.

Уравнения прогибов в этих сечениях по методу начальных параметров имеют вид:

$EI_X y_1 = M_A(a - 0)2/2 + R_A(a - о)3/6 - q(a - 0)4/24 =$
$= 25,7 \times 1,52/2 + 11,43 \times 1,53/6 - 10 \times 1,54/24 = 33,23$ *(кН×м³)*;

$EI_X y_2 = -M_A \times [(3a - 0)2 - (3a - 2a)2]/2 - R_A \times [(3a - 0)3 - (3a - 2a)3]/6 + R_B(3a - 2a)3/6 - q \times [(3a - 0)4 - (3a - 2a)4]/24 =$
$= -25,7 \times (4,52 - 1,52)/2 - 11,43 \times (4,53 - 1,53)/6 + 13,57 \times 1,53/6 - 10 \times (4,54 - 1,54)/24 = -559,58$ *(кН×м³)*;

$EI_X y_3 = -M_A \times [(4a - 0)2 - (4a - 2a)2]/2 - R_A \times [(4a - 0)3 - (4a - 2a)3]/6 + R_B(4a - 2a)3/6 - q \times [(4a - 0)4 - (4a - 2a)4]/24 =$
$= -25,7 \times (62 - 32)/2 - 11,43 \times (63 - 33)/6 + 13,57 \times 33/6 - 10 \times (64 - 34)/24 = -1152,18$ *(кН×м³)*;

По полученным расчетным данным строим эпюры поперечных сил $\boldsymbol{Q_Y}$, изгибающих моментов $\boldsymbol{M_X}$ и погибов $\boldsymbol{Y}$ (*см. рис. 2*).

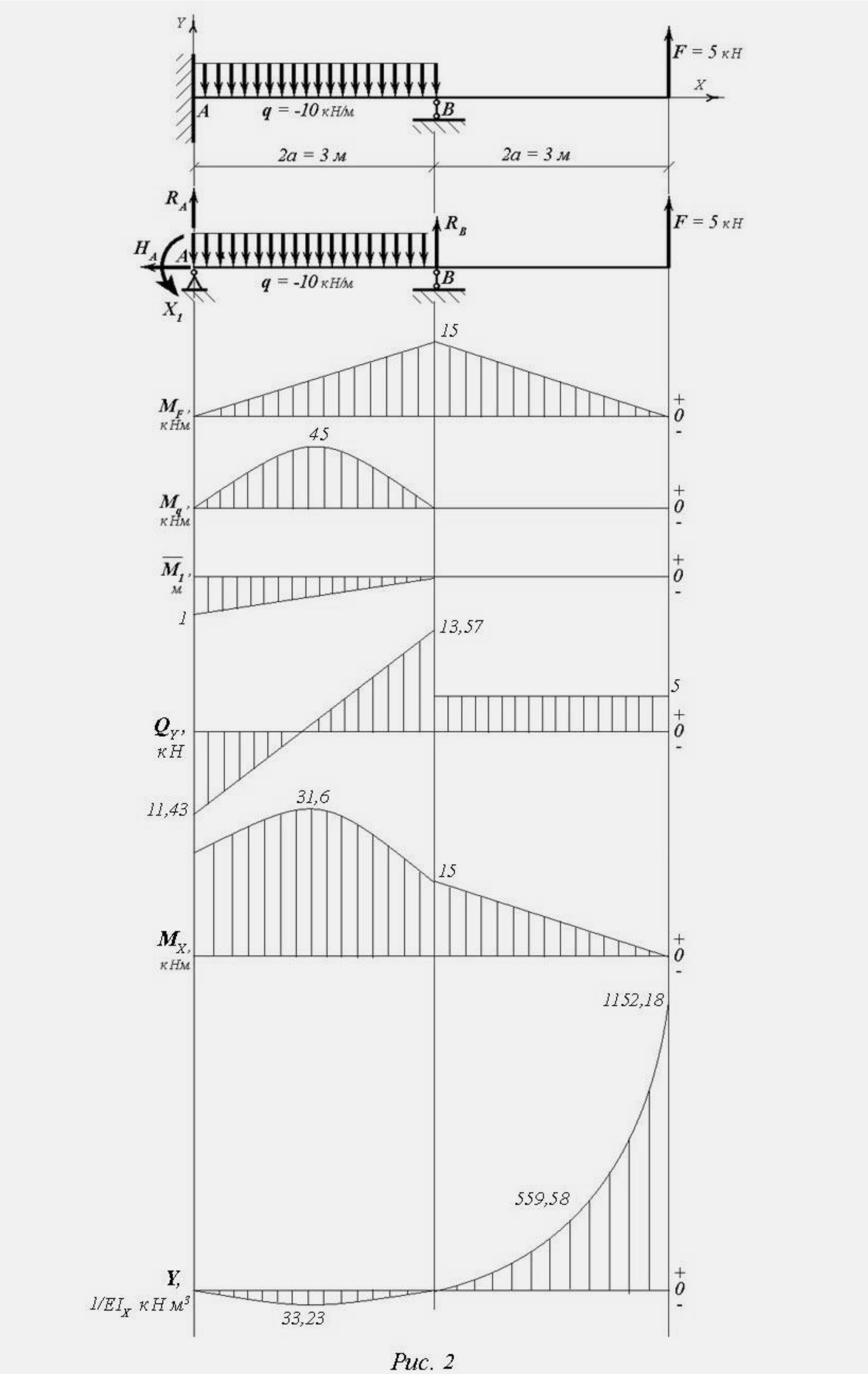


Рис. 2

Примеры решения задач по сопротивлению материалов

На этой странице приведен пример решения задачи по Сопромату, в которой необходимо произвести расчет на прочность нагруженной конструкции, подверженной упругим колебаниям во время работы.

***

Колебания упругих систем

Условие задачи:

На стальной балке установлен двигатель весом $\boldsymbol{F}$, делающий $\boldsymbol{n}$ оборотов в минуту, центробежная сила которого равна $\boldsymbol{H}$ (*см. рис. 1*).

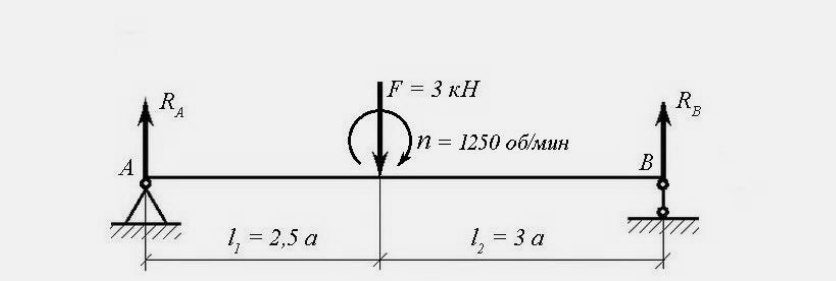


Рис. 1

Требуется:

Определить частоту собственных колебаний, коэффициент нарастания колебаний, динамический коэффициент и максимальные напряжения в балке.

Исходные данные:

- $l_1 = 2{,}5a$;
- $l_2 = 3a$;
- $a = 1{,}0$ *м*;
- $F = 3{,}0$ *кН*;
- $n = 1250$ *об/мин*;
- Сечение – *швеллер 20а* ($I_X = 1520\times10^{-8}$ *м*^{4}, $W_X = 152\times10^{-6}$ *м*^{3})

Указания:

Весом балки и силами сопротивления пренебрегаем.

Центробежную силу принять равной: $H = 0{,}25\,F$.

Допускаемое напряжение стали - $[\sigma] = 160$ *МПа*, модуль упругости - $E = 2\times10^{11}$ *Па*.

Геометрические характеристики сечения I_X и W_X взять из таблиц сортамента (для *швеллера 20а*).

Решение:

1. Определим вертикальное перемещение у балки под грузом $\boldsymbol{F}$, для чего построим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки $\boldsymbol{F}$ и единичной силы $\boldsymbol{F} = 1$ и перемножим их способом Верещагина (*см. рис. 2*):

$$y = (1/EI_X)\times\int M_X^F\times M_X\,dz =$$

$$(1/EI_X)\times(1/2\times7{,}5Fa/5{,}5\times2{,}5a\times2/3\times7{,}5a/5{,}5 + 1/2\times7{,}5Fa/5{,}5\times3a\times2/3\times7{,}5a/5{,}5) = 3{,}4Fa3/EI_X =$$

$$= (3{,}4\times3000\times13)/(2\times10^{11}\times2\times1520\times10^{-8}) = 0{,}00168\ м = 1{,}68\ мм.$$

2. Определим частоту собственных колебаний ω_0 и частоту изменения возмущающей силы ω:

$$\omega_0 = \sqrt{q/y} = \sqrt{(9{,}81/1{,}68\times10^{-3})} = 76{,}41\ с^{-1},$$

где q – ускорение свободного падения; $q = 9{,}81\ м/с^2$.

$$\omega = \pi n/30 = 3{,}14\times1250/30 = 130{,}83\ с^{-1}.$$

3. Определим коэффициент нарастания колебаний системы:

$$\beta = 1/[(1 - (\omega/\omega_0)^2] = 1/[1 - (130{,}83/76{,}41)^2] = 0{,}518.$$

4. Вычислим динамический коэффициент:

$$k_д = 1 + H\times\beta/F = 1 + (0{,}25\times3000\times0{,}518/3000) = 1{,}1295.$$

5. Определяем динамические напряжения:

$$\sigma_д = k_д\times\sigma_{ст} = k_д\times M_X/W_X = 1{,}1295\times4{,}09\times10^3/2\times152\times10^{-6} = 0{,}0152\times10^9\ Па = 15{,}2\ МПа.$$

6. Определяем полное напряжение в балке, как сумму динамического и статического напряжения:

$$\sigma_п = \sigma_д + \sigma_{ст} = \sigma_д + M_X/W_X = 15{,}2 + (4{,}09\times10^3/2\times152\times10^{-6}) = 26{,}7\ МПа.$$

Вывод:

Поскольку полученное полное напряжение $\sigma_п = 26{,}7\ МПа$ в балке меньше допускаемого $[\sigma] = 160\ МПа$, можно сделать вывод, что конструкция работоспособна и имеет значительный запас прочности.

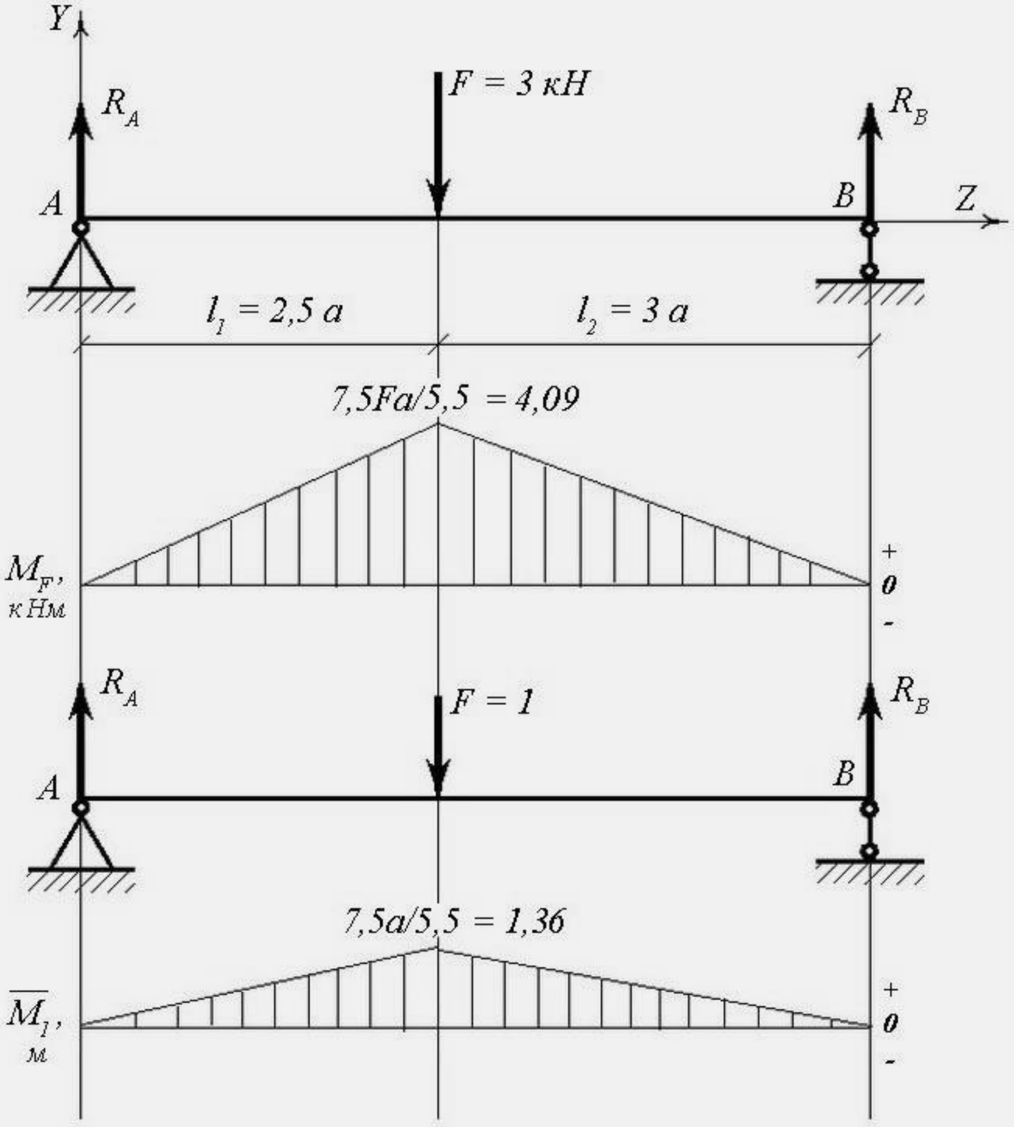

Y
F = 3 кН
R_A
R_B
A
B
Z
l_1 = 2,5 a
l_2 = 3 a
7,5Fa/5,5 = 4,09
M_F,
кНм
+
0
-
R_A
F = 1
R_B
A
B
7,5a/5,5 = 1,36
M_1,
м
+
0
-

Рис. 2

Литература:

Основные источники:

1. Эрдеди А.А., Эрдеди Н.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учебное пособие для машиностроительных специальностей средних профессиональных учебных заведений. М.: Высш. шк., 2012.
2. Эрдеди А.А. Детали машин: учебник для машиностроительных специальностей проф. учеб. заведений. М.: Высш. шк., 2012.
3. Дунаев П.Ф., Леликов О.Г. Детали машин. Курсовое проектирование. М., 2013.
4. Мовнин М.С., Израэлит А.В., Рубашкин А.Г. Основы технической механики. Л.: Машиностроение, 2013.

Дополнительные источники:

1. Куклин Н.Г., Куклина Г.С. Детали машин. М., 2006.
2. Файн А.М. Сборник задач по теоретической механике. М., 2006.
3. Ивченко В.А. Техническая механика: учебное пособие. М.: ИНФРА-М., 2003. 157 с.

Интернет-ресурсы

И-Р 1 www.intuit.ru

И-Р 2 ЭБС «Лань» договор №040 от 30.03.2015.

И-Р 3 ЭБС «РУКОНТ» № 039 от 31.03.2015.

И-Р 4 ЭБС «Информио» -СУЗ договор № Б 154 от 08.06.2015.

И-Р 5 Bgsha.com.

Bgsha.com - Научный журнал «Вестник Брянской ГСХА» [Электронный ресурс]: сайт // Режим доступа: http://www.bgsha.com/ru/bulletin-BGSHA/ Дата обращения: 10.08.2015.

www.intuit.ru - Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ» для дистанционного обучения в НОУ «ИНТУИТ» » [Электронный ресурс]: сайт // Режим доступа: http://www.intuit.ru Дата обращения: 07.05.2013.

Учебное издание

Саликова Т.С.

Методические рекомендации по решению задач по дисциплине «Техническая механика» для обучающихся специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 19.08.2015 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага печатная. Усл. п.л. 3,37. Тираж 100 экз. Изд. №6430.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ