МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

Дьяченко О.В.

# ПРАКТИКУМ

по дисциплине «Математика» для студентов первого курса факультета
среднего профессионального образования

Брянская область, 2023

УДК 51 (07)
ББК 22.1
Д 93

Дьяченко О.В. Практикум по дисциплине «Математика» для студентов первого курса факультета среднего профессионального образования / О.В. Дьяченко. – Брянск: Издательство Брянского ГАУ, 2023. – 58 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов первого курса факультета среднего профессионального образования, содержит теоретический материал по дисциплине «Математика», практические занятия и индивидуальные задания по разделам Алгебра и начала математического анализа.

Рецензент: преподаватель Брянского ГАУ Погонышев В.А.

*Рекомендовано к изданию цикловой методической комиссией факультета среднего профессионального образования, протокол №1 от 15 сентября 2023 г.*

**Содержание.**

## § 1. Единичная тригонометрическая окружность.

## Тригонометрические функции числового аргумента.

## Основные формулы тригонометрии.

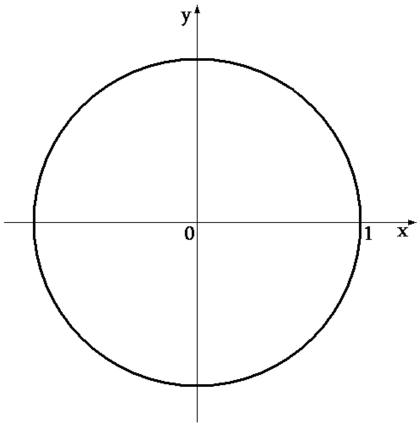
**Единичная тригонометрическая окружность** – это окружность, с радиусом 1 и центром в начале координат.

Горизонтальный (ось Ох) и вертикальный (ось Оу) диаметры делят числовую окружность на четыре четверти.

Начальная точка **А** единичной тригонометрической окружности находится на оси *x* и имеет координаты (1; 0).

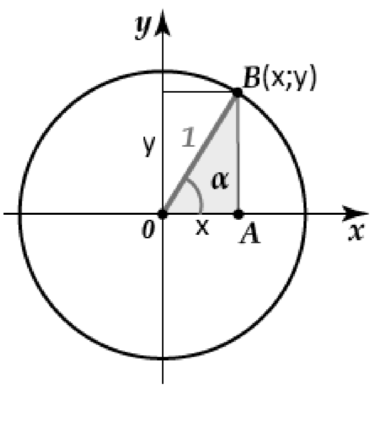
Отсчет по единичной тригонометрической окружности может вестись как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки.

Отсчет от точки А против часовой стрелки называется **положительным направлением**. Отсчет от точки А по часовой стрелке называется **отрицательным направлением**.




Возьмем точку В(х;у) на окружности.

Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало координат с произвольно выбранной точкой плоскости *B(x,y)*, называется радиус-вектором этой точки . Опустим перпендикуляры на оси координат. Проекции точки *B(x;y)* на оси координат равны *x* и *y* соответственно. Рассмотрим прямоугольный треугольник ОАВ.




$$\cos\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{x}{1} = x; \quad \sin\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{1} = y$$

**Синус угла** $\alpha$**,** образованного радиус-вектором точки на единичной окружности с положительным направлением оси Ох, есть ордината этой точки, т.е. : $\sin\alpha = y$.

**Косинус угла** $\alpha$**,** образованного радиус-вектором точки на единичной окружности с положительным направлением оси Ох, есть абсцисса этой точки: $\cos\alpha = y$.

Синус и косинус определены для любого угла $\alpha$ и связаны между собой (по теореме Пифагора) равенством: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, которое называется **основным тригонометрическим тождеством**.

Отношение синуса угла $\alpha$ к косинусу того же угла называется **тангенсом угла** $\alpha$ **:** $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ или $tg\alpha = \dfrac{y}{x}$.

Тангенс определен для всех углов, кроме $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, где $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0$, $Z$ - множество целых чисел.

Отношение косинуса угла $\alpha$ к синусу угла $\alpha$ называется **котангенсом угла** $\alpha$ **:** $tg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ или $tg\alpha = \dfrac{x}{y}$.

Котангенс определён для всех углов, кроме $\alpha = \pi n$, $n \in Z$, где $\sin(\pi n) = 0$, $Z$ - множество целых чисел.

Так как точка В лежит на единичной тригонометрической окружности $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$. Следовательно, $|\sin\alpha| \le 1, |\cos\alpha| \le 1$.

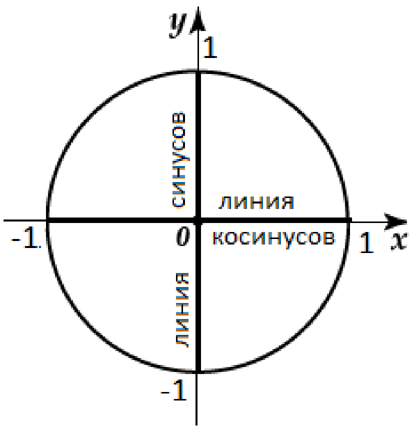
Отрезок на оси О$x$ от -1 до 1 называется **линией косинусов**.

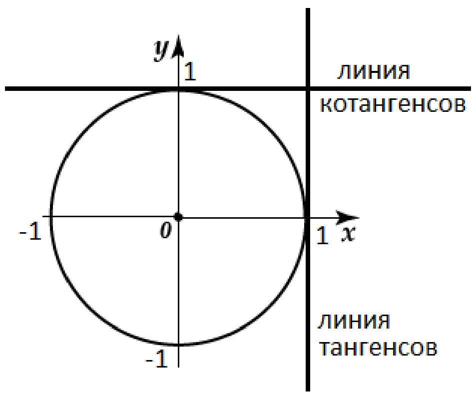
Отрезок на оси О$y$ от -1 до 1 называется **линией синусов**.

$tg\alpha = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \ne 0$, $ctg\alpha = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha \ne 0$.

**Линия тангенсов** параллельна оси О$y$ и проходит через точку (1;0)

**Линия котангенсов** параллельна оси О$x$ и проходит через точку (0;1)



## Радианная мера угла.

Угол в 1 радиан – центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности. Радианная и градусная меры связаны зависимостью $180^0 = \pi$ радиан.

$$1 радиан = \frac{180^0}{\pi}, \qquad 1^0 = \frac{\pi}{180} радиан.$$

**Периодичность тригонометрических функций .**

Период косинуса равен $2\pi$ **:** $cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$ **.**

Период синуса равен $2\pi$ **:** $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$ **.**

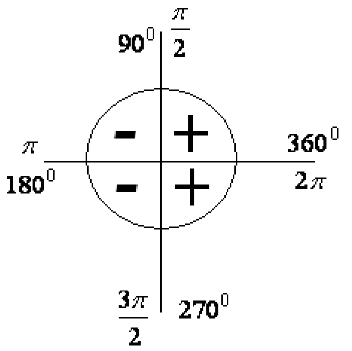
Период тангенса равен $\pi$ **:** $tg(\alpha + \pi n) = tg\alpha$ **.**

Период котангенса равен $\pi$ **:** $ctg(\alpha + \pi n) = ctg\alpha$ **.**

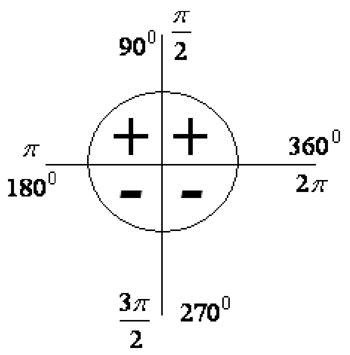
**Четность и нечетность тригонометрических функций.**

$cos(-\alpha) = \cos\alpha$ **,** $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ **,** $tg(-\alpha) = -tg\alpha$ **,** $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

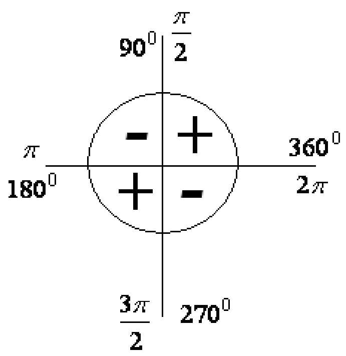
## Знаки тригонометрических функций.




$\cos\alpha$




$\sin\alpha$




$tg\alpha$, $ctg\alpha$

## Значения тригонометрических функций при некоторых углах.

| Угол / Ф-я | **0** $0^0$ | $\frac{\pi}{6}$ $30^0$ | $\frac{\pi}{4}$ $45^0$ | $\frac{\pi}{3}$ $60^0$ | $\frac{\pi}{2}$ $90^0$ | $\frac{2\pi}{3}$ $120^0$ | $\frac{3\pi}{4}$ $135^0$ | $\frac{5\pi}{6}$ $150^0$ | $\pi$ $180^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | **0** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | **1** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | **0** |
| $\cos\alpha$ | **1** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | **0** | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | **-1** |
| $tg\alpha$ | **0** | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | **-** | $-\sqrt{3}$ | **-1** | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | **0** |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $ctg\alpha$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - |

## Формулы приведения.

| Функции | Угол | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ | $\pi\pm\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ | $2\pi\pm\alpha$ |
| **sin** | $\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ |
| **cos** | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| **tg** | $\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| **ctg** | $\mp\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mp\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$ |

## Основные тригонометрические тождества.

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, $\quad 1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$,

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\quad ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$.

## Формулы для суммы и разности элементов.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,

$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$, $\quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$,

$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}$, $\quad ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$.

## Формулы двойных, тройных и половинных аргументов.

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$,

$tg\,2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, $ctg\,2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$, $\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$,

$tg\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$,

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-4\cos\alpha$.

## Формулы преобразования произведения в сумму и обратно.

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$, $\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$,

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Примеры.

1. Выразите в радианной мере величины углов: $50^0$, $216^0$, $-72^0$.

   Решение: $50^0 = 50 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$, $216^0 = 216 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{6\pi}{5}$, $-72^0 = -72 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{2\pi}{5}$.

2. Выразите в градусной мере величины углов: $-\frac{7\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$, $0{,}2\pi$.

   Решение: $-\frac{7\pi}{12} = -\frac{7 \cdot 180^0}{12} = -105^0$, $\frac{5\pi}{4} = \frac{5 \cdot 180^0}{4} = 225^0$, $0{,}2\pi = \frac{\pi}{5} = \frac{180^0}{5} = 36^0$

3. Приведите тригонометрическую функцию произвольного аргумента к тригонометрической функции острого угла: $\sin 405^0$, $tg 863^0$, $\cos\frac{18\pi}{5}$, $ctg\frac{21\pi}{4}$.

   Решение: $\sin 415^0 = \sin(360^0 + 55^0) = \sin 55^0$,
   $tg 863^0 = tg\left(5 \cdot 180^0 - 37^0\right) = tg\left(-37^0\right) = -tg 37^0$,

   $$\cos\frac{18\pi}{5} = \cos\left(4\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5},$$

   $$ctg\frac{21\pi}{4} = ctg\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) = ctg\frac{5\pi}{4}.$$

4. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

   Решение: Из основного тригонометрического тождества получим $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. Угол $\alpha$: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ находится в III четверти, следовательно $\cos\alpha < 0$, $tg\alpha > 0$, $ctg\alpha > 0$. Таким образом,

   $$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

   $$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \left(-\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3}.$$

5. Упростите выражение $\frac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha}$.

   Решение:

   $$\frac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}{2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha\left(2\cos\alpha - 1\right)} = \frac{\cos\alpha\left(2\cos\alpha - 1\right)}{\sin\alpha\left(2\cos\alpha - 1\right)} =$$

   $$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha.$$

6. Упростите выражение

$$\left(\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{5}\right)^2.$$

Решение:

$$\left(\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{5}\right)^2=$$

$$\left(\sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2+\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3\pi}{5}\right)\right)^2=\sin^2\frac{7\pi}{10}+\cos^2\frac{7\pi}{10}=1.$$

7. Докажите тождество $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}+\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{tg(\alpha-\beta)}=2$.

Решение:

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}+\frac{tg\alpha-tg\beta}{tg(\alpha-\beta)}=(tg\alpha+tg\beta):\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}+(tg\alpha-tg\beta):\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}=$$

$$=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1}\cdot\frac{1-tg\alpha tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}+\frac{tg\alpha-tg\beta}{1}\cdot\frac{1+tg\alpha tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}=1-tg\alpha tg\beta+1+tg\alpha tg\beta=2.$$

**ИЗ № 1.**

1. Выразите в радианной мере величины углов.

1.1. $10^0,\ 135^0,\ -60^0$;

1.2. $18^0,\ 150^0,\ -90^0$;

1.3. $30^0,\ 144^0,\ -130^0$;

1.4. $54^0,\ 135^0,\ -36^0$;

1.5. $15^0,\ 120^0,\ -180^0$;

1.6. $20^0,\ 125^0,\ -36^0$;

1.7. $40^0,\ 225^0,\ -30^0$;

1.8. $45^0,\ 240^0,\ -18^0$;

1.9. $36^0,\ 150^0,\ -210^0$;

1.10. $60^0,\ 72^0,\ -252^0$;

1.11. $72^0,\ 108^0,\ -270^0$;

1.12. $120^0,\ 135^0,\ -144^0$;

1.13. $75^0,\ 210^0,\ -36^0$;

1.14. $100^0,\ 54^0,\ -90^0$;

1.15. $45^0,\ 160^0,\ -75^0$;

1.16. $216^0,\ 15^0,\ -60^0$;

1.17. $130^0,\ 72^0,\ -180^0$;

1.18. $54^0,\ 120^0,\ -150^0$;

1.19. $18^0,\ 108^0,\ -30^0$;

1.20. $252^0,\ 45^0,\ -240^0$;

1.21. $210^0,\ 15^0,\ -60^0$;

1.22. $50^0,\ 144^0,\ -120^0$;

1.23. $108^0,\ 135^0,\ -300^0$;

1.24. $30^0,\ 315^0,\ -36^0$;

1.25. $10^0,\ 216^0,\ -18^0$;

1.26. $55^0,\ 150^0,\ -135^0$;

1.27. $72^0,\ 54^0,\ -30^0$;

1.28. $60^0,\ 75^0,\ -144^0$;

1.29. $210^0,\ 50^0, -90^0$

1.30. $15^0,\ 300^0, -100^0$.

2. Выразите в градусной мере величины углов.

2.1. $\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{5},\ 0{,}3\pi$;

2.2. $\frac{5\pi}{18}, -\frac{7\pi}{9},\ 0{,}2\pi$;

2.3. $\frac{5\pi}{9}, -\frac{11\pi}{18},\ 1{,}4\pi$;

2.4. $\frac{5\pi}{36}, -\frac{4\pi}{5},\ 1{,}5\pi$;

2.5. $\frac{7\pi}{9}, -\frac{2\pi}{3},\ 0{,}8\pi$;

2.6. $\frac{7\pi}{36}, -\frac{5\pi}{18},\ 1{,}7\pi$;

2.7. $\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{5},\ 0{,}25\pi$;

2.8. $\frac{8\pi}{9}, -\frac{\pi}{6},\ 0{,}125\pi$;

2.9. $\frac{\pi}{18}, -\frac{6\pi}{5},\ 0{,}6\pi$;

2.10. $\frac{\pi}{9}, -\frac{11\pi}{36},\ 1{,}4\pi$

2.11. $\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{9},\ 0{,}5\pi$

2.12. $\frac{2\pi}{5}, -\frac{5\pi}{9},\ 0{,}9\pi$

2.13. $\frac{4\pi}{9}, -\frac{3\pi}{5},\ 0{,}7\pi$

2.14. $\frac{7\pi}{18}, -\frac{13\pi}{36},\ 1{,}2\pi$

2.15. $\frac{17\pi}{36}, -\frac{2\pi}{5},\ 1{,}3\pi$

2.16. $\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3},\ 0{,}4\pi$

2.17. $\frac{19\pi}{36}, -\frac{7\pi}{6},\ 1{,}1\pi$

2.18. $\frac{\pi}{3}, -\frac{13\pi}{18},\ 1{,}25\pi$

2.19. $\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{5},\ 1{,}125\pi$

2.20. $\frac{4\pi}{5}, -\frac{29\pi}{36},\ 0{,}6\pi$

2.21. $\frac{19\pi}{18}, -\frac{5\pi}{9},\ 1{,}8\pi$

2.22. $\frac{5\pi}{36}, -\frac{\pi}{4},\ 0{,}3\pi$

2.23. $\frac{11\pi}{18}, -\frac{3\pi}{4},\ 0{,}9\pi$

2.24. $\frac{23\pi}{36}, -\frac{4\pi}{9},\ 1{,}7\pi$

2.25. $\frac{2\pi}{5}, -\frac{11\pi}{9},\ 1{,}4\pi$

2.26. $\frac{17\pi}{36}, -\frac{\pi}{5},\ 1{,}2\pi$

2.27. $\frac{8\pi}{9}, -\frac{19\pi}{36},\ 0{,}1\pi$

2.28. $\frac{5\pi}{18}, -\frac{3\pi}{4},\ 1{,}25\pi$

2.29. $\frac{13\pi}{9}, -\frac{11\pi}{36},\ 0{,}4\pi$

2.30. $\frac{\pi}{18}, -\frac{5\pi}{9},\ 1{,}46$

3. Приведите тригонометрическую функцию произвольного аргумента к тригонометрической функции острого угла:

3.1. $\sin 340^0,\ \cos\left(-\frac{11\pi}{9}\right),\ tg(-523^0),\ ctg\,\frac{18\pi}{7}$;

3.2. $\cos 295^0$, $\sin\left(-\frac{13\pi}{8}\right)$, $ctg\,447^0$, $tg\,\frac{11\pi}{6}$;

3.3. $\sin(-305^0)$, $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)$, $tg\,392^0$, $ctg\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$;

3.4. $\sin(-267^0)$, $\cos\frac{13\pi}{3}$, $ctg\,(-682^0)$, $tg\left(-\frac{11\pi}{5}\right)$;

3.5. $\cos(-305^0)$, $\sin\frac{17\pi}{4}$, $ctg\,287^0$, $tg\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$;

3.6. $\cos 365^0$, $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, $tg\,(-451^0)$, $ctg\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$;

3.7. $\sin(-319^0)$, $\cos\frac{15\pi}{7}$, $ctg\,(-341^0)$, $tg\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$;

3.8. $\cos 279^0$, $\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$, $tg\,700^0$, $ctg\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$;

3.9. $\sin 351^0$, $\cos\frac{17\pi}{4}$, $tg\,(-507^0)$, $ctg\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$;

3.10. $\cos 284^0$, $\sin\left(-\frac{16\pi}{7}\right)$, $tg\,(-451^0)$, $ctg\,\frac{17\pi}{6}$;

3.11. $\sin(-353^0)$, $\cos\frac{14\pi}{3}$, $ctg\,(-605^0)$, $tg\,\frac{12\pi}{5}$;

3.12. $\cos(-500^0)$, $\sin\frac{12\pi}{7}$, $tg\,(-361^0)$, $ctg\,\frac{16\pi}{3}$;

3.13. $\cos 423^0$, $\sin\left(-\frac{11\pi}{4},\right)$ $ctg\,(-235^0)$, $ctg\,\frac{19\pi}{6}$;

3.14. $\sin(-289^0)$, $\cos\frac{16\pi}{5}$, $tg\,(-506^0)$, $ctg\,\frac{12\pi}{5}$;

3.15. $\cos 304^0$, $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$, $tg\,(-521^0)$, $ctg\,\frac{11\pi}{3}$;

3.16. $\sin 312^0$, $\cos\left(-\frac{15\pi}{9}\right)$, $tg\,(-424^0)$, $ctg\,\frac{12\pi}{5}$;

3.17. $\cos 312^0$, $\sin\left(-\frac{15\pi}{8}\right)$, $ctg\,308^0$, $tg\,\frac{10\pi}{3}$;

3.18. $\sin(-316^0)$, $\cos\left(-\frac{17\pi}{7}\right)$, $tg\,289^0$, $ctg\left(-\frac{15\pi}{6}\right)$;

3.19. $\sin(-209^0)$, $\cos\frac{12\pi}{5}$, $ctg\,(-603^0)$, $tg\left(-\frac{14\pi}{5}\right)$;

3.20. $\cos(-235^0)$, $\sin\frac{13\pi}{6}$, $ctg\,247^0$, $tg\left(-\frac{11\pi}{5}\right)$;

3.21. $\cos 284^0$, $\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$, $tg(-521^0)$, $ctg\left(-\frac{13\pi}{5}\right)$;

3.22. $\sin(-306^0)$, $\cos\frac{14\pi}{5}$, $ctg(-311^0)$, $tg\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$;

3.23. $\cos 299^0$, $\sin\left(-\frac{21\pi}{5}\right)$, $tg\,600^0$, $ctg\left(-\frac{12\pi}{7}\right)$;

3.24. $\sin 451^0$, $\cos\frac{17\pi}{6}$, $tg(-520^0)$, $ctg\left(-\frac{14\pi}{5}\right)$;

3.25. $\cos 286^0$, $\sin\left(-\frac{17\pi}{7}\right)$, $tg(-423^0)$, $ctg\,\frac{18\pi}{5}$;

3.26. $\sin(-344^0)$, $\cos\frac{12\pi}{7}$, $ctg(-612^0)$, $tg\,\frac{19\pi}{6}$;

3.27. $\cos(-501^0)$, $\sin\frac{13\pi}{7}$, $tg(-345^0)$, $ctg\,\frac{18\pi}{5}$;

3.28. $\cos 403^0$, $\sin\left(-\frac{15\pi}{4},\right)$ $ctg(-335^0)$, $ctg\,\frac{11\pi}{5}$;

3.29. $\sin(-279^0)$, $\cos\frac{13\pi}{5}$, $tg(-516^0)$, $ctg\,\frac{11\pi}{5}$;

3.30. $\cos 334^0$, $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$, $tg(-552^0)$, $ctg\,\frac{10\pi}{3}$.

4. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если

4.1. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.2. $\cos\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.3. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4.4. $\sin\alpha = -0{,}8$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.5. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.6. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4.7. $\sin\alpha = -0{,}6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.8. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.9. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.10. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4.11. $\cos\alpha = -0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.12. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.13. $\cos\alpha = -0{,}6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.14. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.15. $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.16. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.17. $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.18. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.19. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.20. $\sin\alpha = 0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.21. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.22. $\sin\alpha = 0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4.23. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4.24. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.25. $\cos\alpha = -0{,}8$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.26. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.27. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4.28. $\cos\alpha = 0{,}8$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4.29. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4.30. $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5. Упростите выражение

5.1. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$;

5.2. $\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$;

5.3. $\frac{1}{tg\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

5.4. $\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \cos\alpha$;

5.5. $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$;

5.6. $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - (\cos\alpha tg\alpha)^2$;

5.7. $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha} + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{ctg}\beta$;

5.8. $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + tg\alpha \cdot ctg\alpha$ ;

5.9. $(1-\sin^2\alpha)(1+tg^2\alpha)$;

5.10. $(\cos^2\alpha + ctg^2\alpha + \sin^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha$;

5.11. $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$;

5.12. $(\sin^2\alpha + tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha)\cdot ctg\alpha$;

5.13. $\frac{1-2\cos^2\beta}{\cos\beta + \sin\beta}$;

5.14. $\frac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^4\alpha} + tg^2\alpha$;

5.15. $\frac{1-\cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha}$;

5.16. $ctg^2\alpha(1-\cos 2\alpha) + \cos^2\alpha$;

5.17. $tg^2\alpha - \sin^2\alpha - tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

5.18. $(3\sin\alpha + 2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha - 3\cos\alpha)^2$
;

5.19. $\frac{\cos\beta\cdot tg\beta}{\sin^2\beta} - ctg\beta\cdot\cos\beta$;

5.20. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha$;

5.21. $(1-\cos^2\alpha)(1+ctg^2\alpha)$;

5.22. $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-ctg\,\alpha\cdot\sin\alpha$;

5.23. $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha ctg\,\alpha}$;

5.24. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$;

5.25. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

5.26. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

5.27. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

5.28. $\sin^2\beta(1+ctg\beta)+\cos^2\beta(1+tg\beta)$;

5.29. $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos 2\alpha}$;

5.30. $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$.

## 6. Упростить выражение.

6.1. $\sin 2\alpha\cdot\cos 3\alpha-\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha-\sin\alpha$;

6.2. $\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha-\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha+\cos 5\alpha$;

6.3. $\sin\dfrac{2\pi}{15}\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{2\pi}{15}\cdot\sin\dfrac{\pi}{5}$;

6.4. $\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{\pi}{42}-\sin\dfrac{\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{\pi}{42}$;

6.5. $\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{21}+\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot\sin\dfrac{4\pi}{21}\right)^2$;

6.6. $(\cos 54^0\cdot\cos 9^0+\sin 54^0\cdot\sin 9^0)\cdot\sqrt{2}$;

6.7. $2\cdot(\sin 12^0\cdot\cos 18^0+\cos 12^0\cdot\sin 18^0)$;

6.8. $\dfrac{\cos 65^0\cdot\cos 40^0+\sin 65^0\cdot\sin 40^0}{\sin 17^0\cdot\cos 8^0+\cos 17^0\cdot\sin 8^0}$;

6.9. $\sin x\cdot\sin 2x-\sin 3x-\cos x\cos 2x$;

6.10. $(\sin 38^0\cdot\cos 12^0+\cos 38^0\cdot\sin 12^0)^2+(\cos 40^0\cdot\cos 10^0-\sin 40^0\cdot\sin 10^0)^2$;

6.11. $\cos x\cdot\sin 2x+\sin x-\cos 2x\cdot\sin x$;

6.12. $\cos\dfrac{1}{3}x\cdot\cos\dfrac{2}{3}x+\sin\dfrac{1}{3}x\cdot\sin\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{3}x$;

6.13. $\sin 7\alpha\cdot\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\cdot\cos 7\alpha-\cos 11\alpha$;

6.14. $\dfrac{\cos 40^0\cdot\cos 17^0+\sin 40^0\cdot\sin 17^0}{\sin 10^0\cdot\cos 13^0+\cos 10^0\cdot\sin 13^0}$;

6.15. $\sin 7\alpha\cdot\cos 4\alpha+\sin 4\alpha\cdot\cos 7\alpha-3\sin 11\alpha$;

6.16. $\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)^2$;

6.17. $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{42}+\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{5\pi}{42}$;

6.18. $2\cdot\left(\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{15}-\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{15}\right)$;

6.19. $\left(\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{20}-\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{20}\right)\cdot\sqrt{2}$;

6.20. $\frac{\sin 15^0\cdot\cos 10^0+\cos 15^0\cdot\sin 10^0}{\cos 5^0\cdot\cos 20^0-\sin 5^0\cdot\sin 20^0}$;

6.21. $(\sin 123^0\cdot\cos 33^0-\cos 123^0\cdot\sin 33^0)^2$;

6.22. $\sin 2x\cos 3x-2\sin 5x+\cos 2x\sin 3x$;

6.23. $\frac{\cos 39^0\cdot\cos 12^0+\sin 39^0\cdot\sin 12^0}{\sin 12^0\cdot\cos 15^0+\cos 12^0\cdot\sin 15^0}$;

6.24. $\cos 2{,}5x\cdot\cos 1{,}5x+\cos x+\sin 1{,}5x\cdot\sin 2{,}5x$;

6.25. $(\sin 35^0\cdot\cos 10^0-\cos 35^0\cdot\sin 10^0)^2+(\cos 15^0\cdot\cos 10^0-\sin 15^0\cdot\sin 10^0)^2$;

6.26. $\cos 4x\cdot\cos 7x-\cos 3x+\sin 4x\cdot\sin 7x$;

6.27. $(\cos 104^0\cdot\cos 14^0+\sin 104^0\cdot\sin 14^0)^3$;

6.28. $\frac{\sin 28^0\cdot\cos 12^0+\cos 28^0\cdot\sin 12^0+\sin 40^0}{2}$;

6.29. $\frac{\sin 38^0\cdot\cos 12^0+\cos 38^0\cdot\sin 12^0}{\cos 40^0\cdot\cos 10^0-\sin 40^0\cdot\sin 10^0}$;

6.30. $\sin 4x\cos 3x-\sin 7x+\cos 4x\sin 3x$.

7. Докажите тождество.

7.1. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

7.2. $ctg^2\alpha+\cos^2\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}=-\sin^2\alpha$;

7.3. $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\sin 4\alpha$;

7.4. $\frac{1}{\sin\alpha}-\cos\alpha\cdot ctg\,\alpha=\sin\alpha$;

7.5. $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)=tg\,\alpha$;

7.6. $4\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\sin 4\alpha$;

7.7. $\frac{1}{\cos\alpha}-\sin\alpha\cdot tg\,\alpha=\cos\alpha$;

7.8. $\dfrac{1+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}=-ctg\,\alpha$;

7.9. $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot\cos\alpha=2ctg\,\alpha$;

7.10. $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-(\cos\alpha\cdot tg\,\alpha)^2=\cos^2\alpha$;

7.11. $\dfrac{1}{tg\,\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

7.12. $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\cos\alpha=\sin\alpha$;

7.13. $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}+\sin\alpha=\cos\alpha$;

7.14. $(ctg\,\alpha-\cos\alpha)\cdot\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+tg\,\alpha\right)=\cos^2\alpha$;

7.15. $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos 2\alpha}=1$;

7.16. $\dfrac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=tg\,\alpha$;

7.17. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1$;

7.18. $\dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\cdot\dfrac{1+ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha}=tg^2\alpha$;

7.19. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;

7.20. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\sin\alpha=\cos\alpha$;

7.21. $tg^2\alpha+\sin^2\alpha-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=-\cos^2\alpha$;

7.22. $\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=ctg\,\alpha$;

7.23. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha=\cos\alpha$;

7.24. $\dfrac{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha+\cos^2\alpha}=2\cos\alpha$;

7.25. $\cos 2\alpha+\dfrac{2\sin 2\alpha}{ctg\,\alpha-tg\,\alpha}=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$;

7.26. $(\sin^2\alpha+tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha)\cdot ctg\,\alpha=tg\,\alpha$;

7.27. $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=\sin^2\alpha$;

7.28. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\cos\alpha=\sin\alpha$;

7.29. $\dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+\dfrac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}=1$;

7.30. $1+(ctg^2\alpha-tg^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha=ctg^2\alpha$.

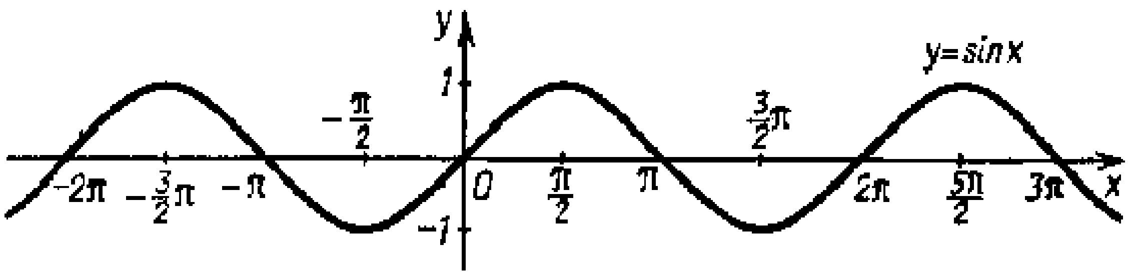
## §2. Тригонометрические функции, их свойства и графики.

## Построение графиков тригонометрических функций с помощью геометрических преобразований графиков.

### 2.1. Тригонометрические функции, их свойства и графики.

Основными тригонометрическими функциями являются функции y=sin(x), y=cos(x), y=tg(x), y=ctg(x).

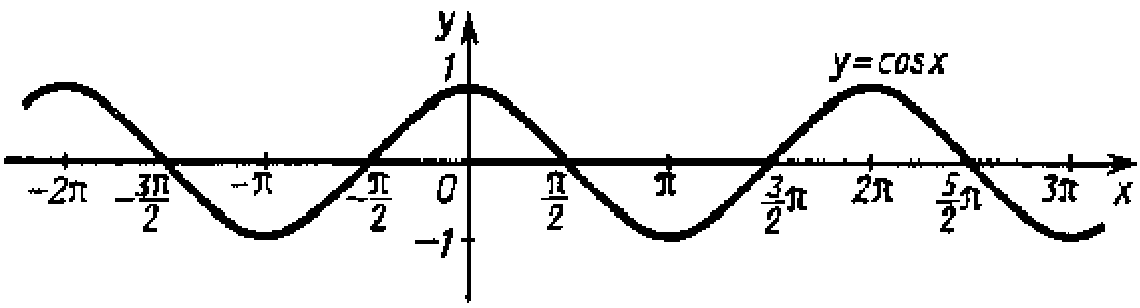
1. **Функция y=sin(x).** График функции y=sin(x) – синусоида:




**Основные свойства:**

1. Область определения вся числовая ось.
2. Функция ограниченная. Множество значений – отрезок [-1;1].
3. Функция нечетная.
4.Функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным 2π.
5. Нули функции: (πk;0) , где *k* – целое.
6. Интервалы знакопостоянства: $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$ ; $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in Z$.

**2. Функция y= cos(x).** График функции y= cos(x):




**Основные свойства:**

1. Область определения вся числовая ось.
2. Функция ограниченная. Множество значений – отрезок [-1;1].
3. Функция четная.
4.Функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным 2π.

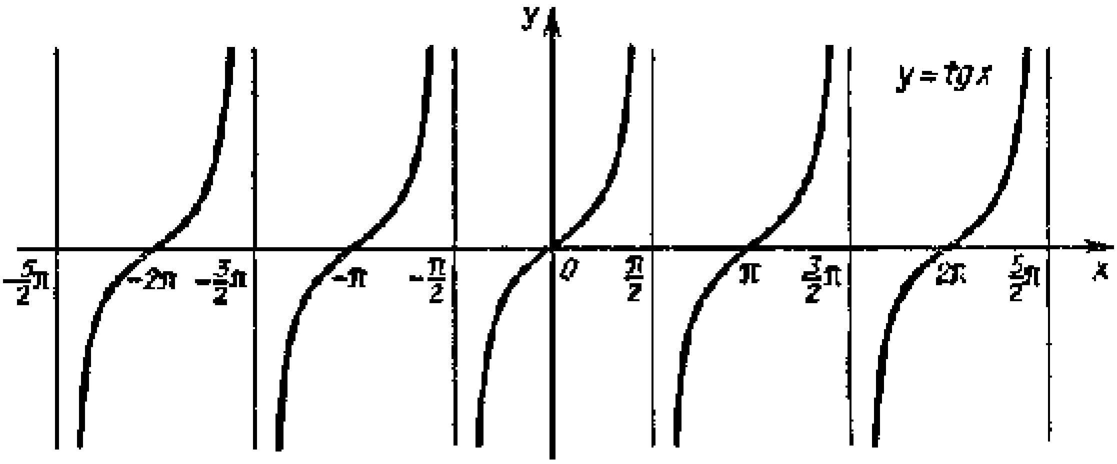
5. Нули функции: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;0\right)$, где $k$ – целое.

6. Интервалы знакопостоянства: $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$ ;

$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$.

**3. Функция y=tg(x).**

График функции y=tg(x) – тангенсоида:



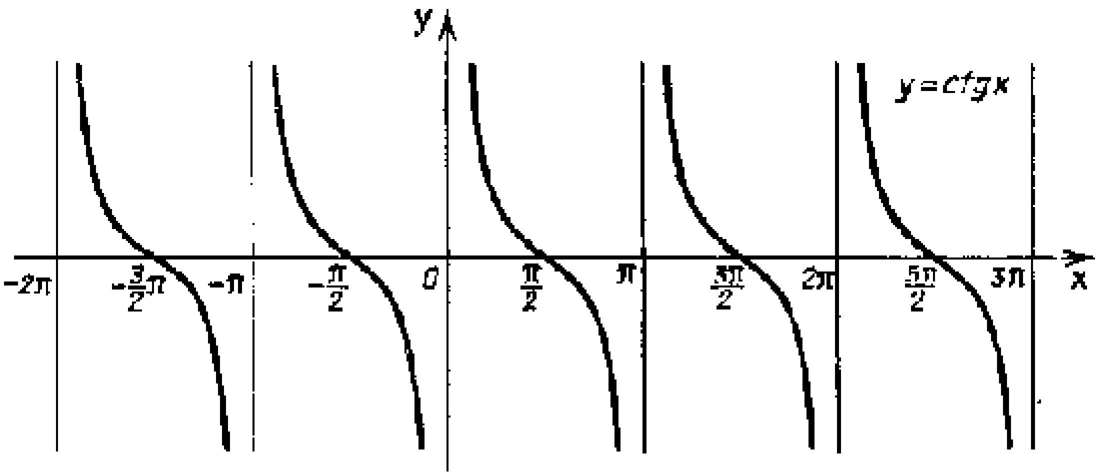

**Основные свойства:**

1. Область определения вся числовая ось, за исключением точек вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k$ – целое.
2. Функция неограниченная. Множество значение вся числовая прямая.
3. Функция нечетная.
4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным π.
5. Нули функции: (πk;0) , где $k$ – целое.
6. Интервалы знакопостоянства: $tgx > 0$ при $x \in \left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$ ;

$tgx < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n \in Z$.

**4. Функция y=ctg(x).**

График функции y=ctg(x):




**Основные свойства:**

1. Область определения вся числовая ось, за исключением точек вида $x=\pi k$, где $k$ – целое.
2. Функция неограниченная. Множество значение вся числовая прямая.
3. Функция нечетная.
4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным π.
5. Нули функции: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;0\right)$, где $k$ – целое.
6. Интервалы знакопостоянства: $ctgx>0$ при $x\in\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$ ;

$ctgx<0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$ .

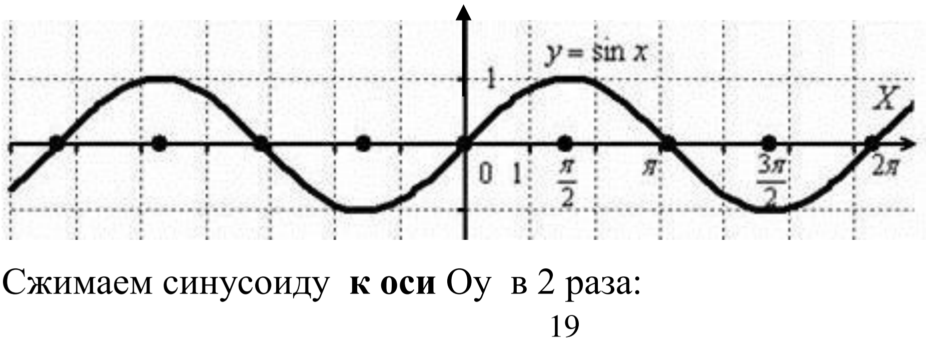
## 2.2. Построение графиков тригонометрических функций с помощью геометрических преобразований графиков.

**Виды преобразований графиков функций.**

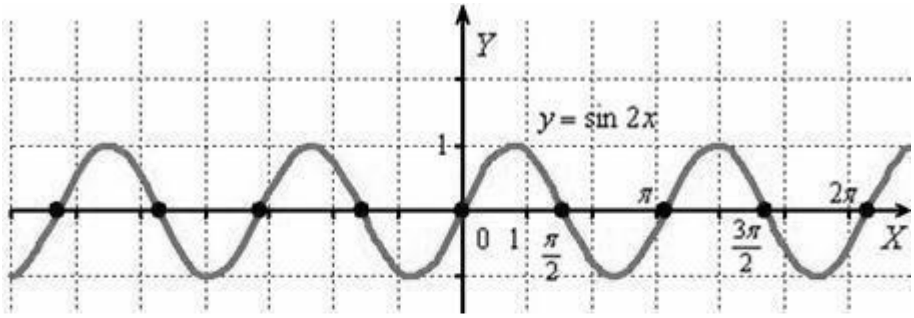
1. **Сжатие графика к оси ординат.**
   **Правило**: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $k>1$, нужно график функции $f(x)$ **сжать к оси Оу** в $k$ раз.

Пример 1

Построить график функции $y=\sin 2x$. Сначала строим график $y=\sin x$. Период $T=2\pi$ .




Сжимаем синусоиду **к оси** Оу в 2 раза:




Таким образом, график функции $y = \sin 2x$ получается путём сжатия графика $y = \sin x$ к оси ординат в два раза.

Период функции $y = \sin 2x$ равен $\pi$.

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

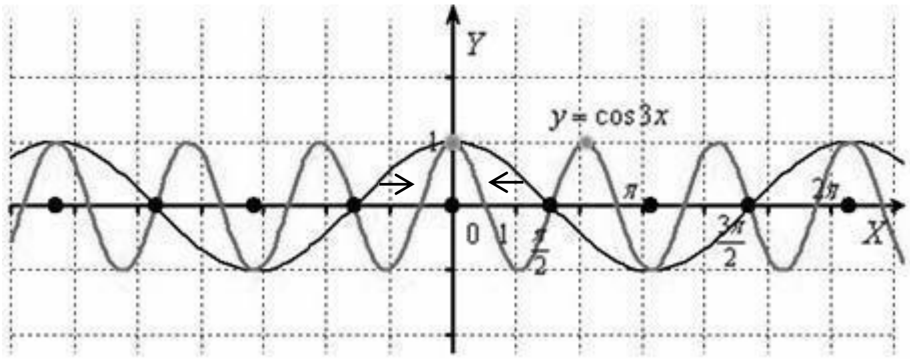
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0$$

Смотрим на чертёж, и видим, что это действительно так.

<u>Пример 2</u>

Построить график функции $y = \cos 3x$.

График функции $y = \cos x$ сжимается **к оси** Оу в 3 раза:



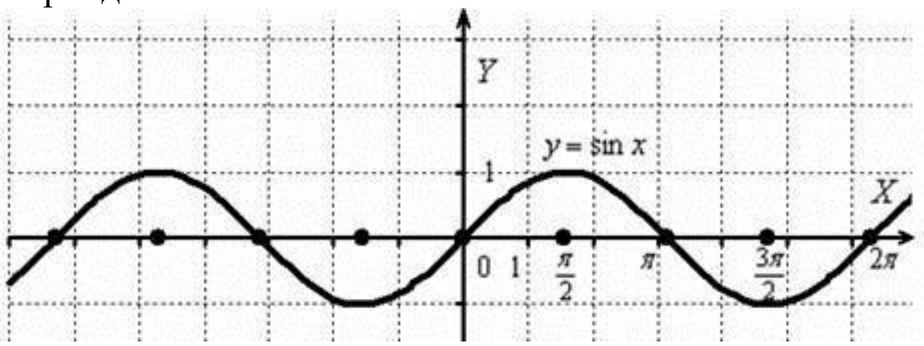

Период $T$ функции $y = \cos x$ равен $2\pi$, период функции $y = \cos 3x$ составляет $\frac{2\pi}{3}$.

## 2. Растяжение графика функции от оси ординат

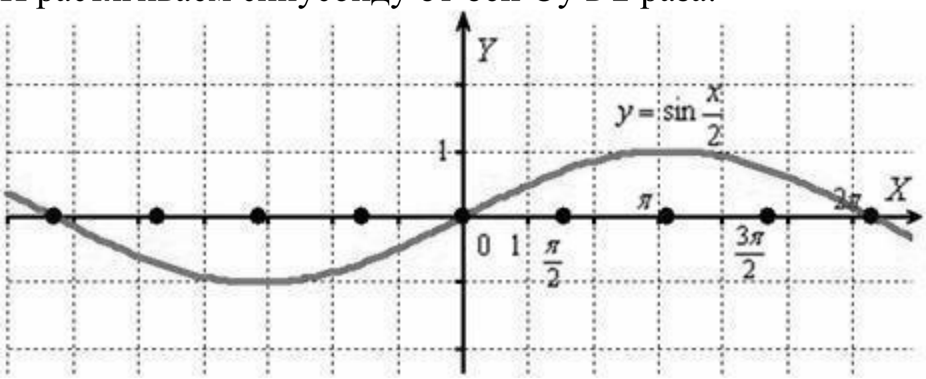
**Правило**: чтобы построить график функции $f\left(\frac{1}{k}x\right)$, где $k > 1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть от оси Оу** в $k$ раз.

<u>Пример 3</u> Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$. Строим график $y = \sin x$.

Период $T = 2\pi$.




И растягиваем синусоиду **от оси** Оу в 2 раза:




То есть, график функции $y = \sin\frac{x}{2}$ получается путём **растяжения** графика $y = \sin x$ **от оси ординат** в два раза.
Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: $T = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

### 3. Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс

Если к аргументу функции добавляется постоянная, то происходит сдвиг (параллельный перенос) графика вдоль оси Ох.

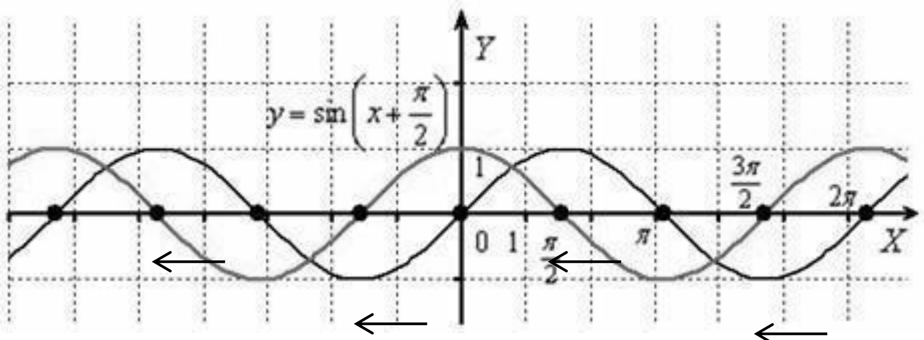
Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и положительное число $b$:

**Правило**:
1) чтобы построить график функции $y = f(x+b)$, нужно график $y = f(x)$ сдвинуть **вдоль** оси Ох на $b$ единиц **влево**;
2) чтобы построить график функции $y = f(x-b)$, нужно график $y = f(x)$ сдвинуть **вдоль** оси ОХ на $b$ единиц **вправо**.

Пример 4

Построить график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

График синуса $y = \sin x$ сдвинем вдоль оси Ох на $\frac{\pi}{2}$ **влево**:




Внимательно присмотримся к полученному красному графику $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ Это в точности график косинуса $y = \cos x$. Мы получили геометрическую иллюстрацию формулы приведения $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

График функции $y = \cos x$ получается путём сдвига синусоиды $y = \sin x$ вдоль оси Ох на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево.

Рассмотрим композиционное правило, когда аргумент представляет собой линейную функцию: $f(kx+b)$, при этом $k \neq 0, b \neq 0$.

Функцию $f(kx+b)$ необходимо представить в виде $f(kx+b) = f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$ и последовательно выполнить следующие преобразования:

1) График функции $f(x)$ сжимаем (или растягиваем) к оси (от оси) ординат: $f(kx)$.

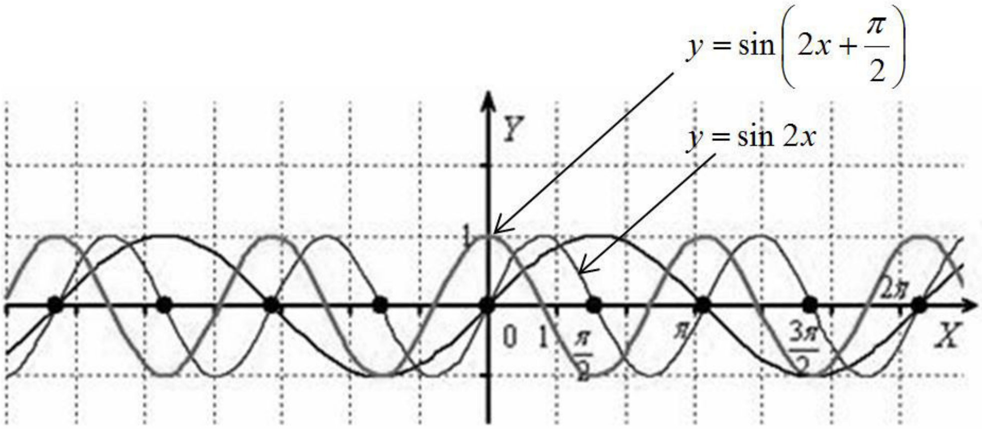
2) График полученной функции $f(kx)$ сдвигаем влево (или вправо) вдоль оси абсцисс **на** $\frac{b}{k}$ **единиц**, в результате чего будет построен искомый график $f(kx+b)$.

Пример 5

Построить график функции $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Представим функцию в виде $y = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ и выполним следующие преобразования: синусоиду $y = \sin x$ сожмём **к оси** Оу в два раза: $y = \sin 2x$.

2) сдвинем вдоль оси Ох **на** $\frac{\pi}{4}$ **влево**: $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



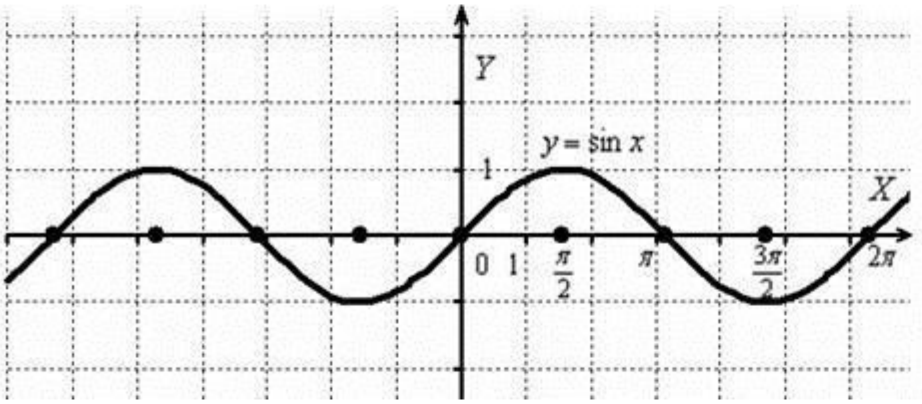

Пример, вроде бы, несложный, а сделать ошибку в параллельном переносе легко. График сдвигается на $\frac{\pi}{4}$, а вовсе не на $\frac{\pi}{2}$.

## 4. Растяжение графика вдоль оси ординат.

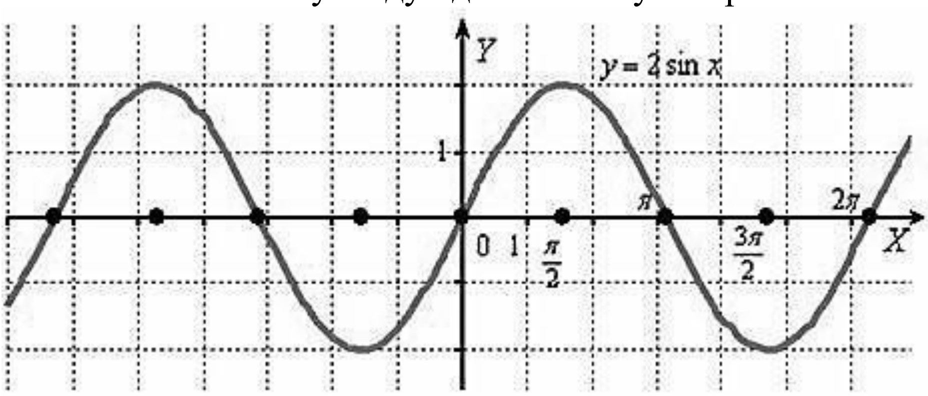
**Правило**: чтобы построить график функции $y = mf(x)$, где $m > 1$, нужно график функции $y = f(x)$ **растянуть вдоль оси** Оу в $m$ раз.

Пример 6

Построить график функции $y = 2\sin x$. Строим график функции $y = \sin x$:




И **вытягиваем** синусоиду **вдоль оси** Оу в 2 раза:




Период функции $y = 2\sin x$ не изменился и составляет $T = 2\pi$, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза. Область значений функции $y = 2\sin x$: $E(y) = [-2;2]$.

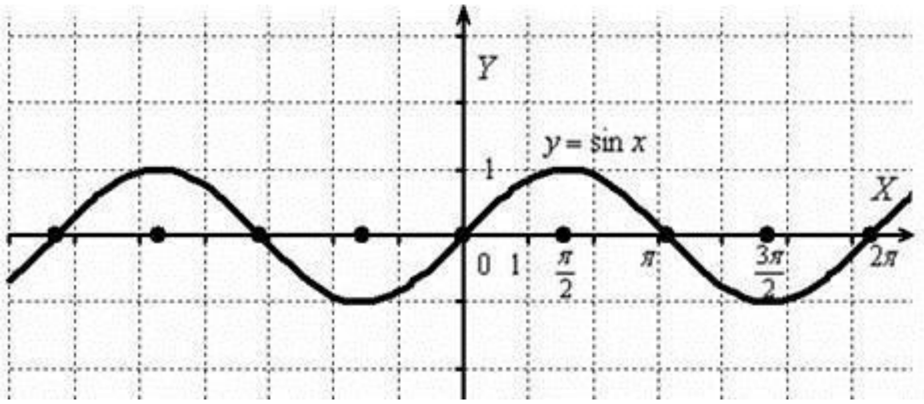
**5. Сжатие графика вдоль оси ординат.**

**Правило**: чтобы построить график функции $y = \dfrac{f(x)}{m}$, где $m > 1$, нужно график функции $y = f(x)$ **сжать вдоль оси** Оу в $m$ раз.

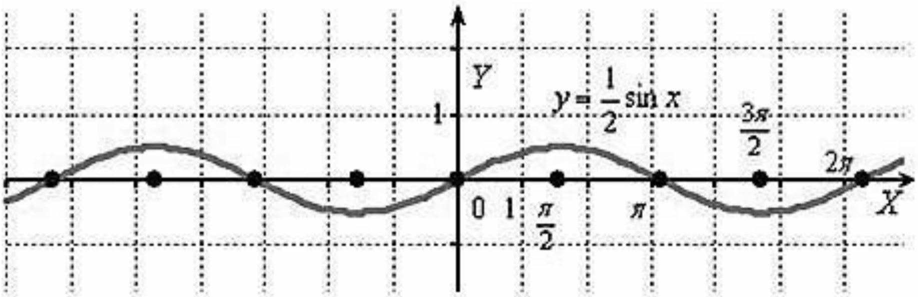
Пример 7

Построить график функции $y = \dfrac{1}{2}\sin x$.

Строим график функции $y = \sin x$:




Теперь **сжимаем** синусоиду **вдоль оси** Оу в 2 раза:




Аналогично, период $T = 2\pi$ не изменился, а область значений функции $y = \dfrac{1}{2}\sin x$: $E(y) = \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

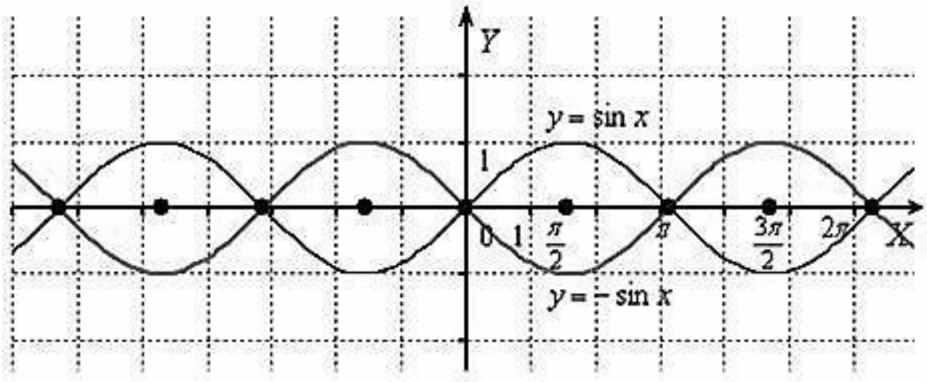
**6. Симметричное отображение графика относительно оси абсцисс**

**Правило**: чтобы построить график функции $y = -f(x)$, нужно график $y = f(x)$ отобразить симметрично относительно оси Ох.

Пример 8

Построить график функции $y = -\sin x$.

Отобразим синусоиду симметрично относительно оси Ох:

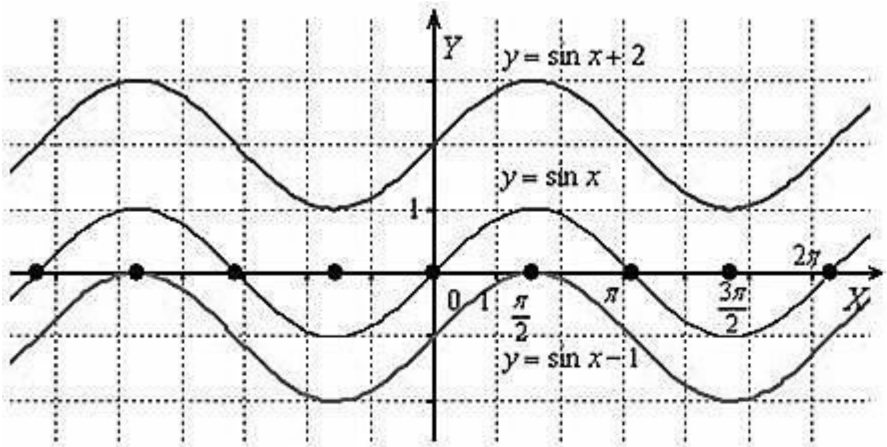



**7. Сдвиг графика вверх/вниз вдоль оси ординат**

**Правило**:
1) чтобы построить график функции $y = f(x) + c$, нужно график $y = f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси Оy на $c$ единиц **вверх**;
2) чтобы построить график функции $y = f(x) - c$, нужно график $y = f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси Оy на $c$ единиц **вниз**.

Пример 9.

Построить графики функций $y = \sin x + 2$, $y = \sin x - 1$.




Комбинационное построение графика $y = mf(x) + c$ в общем случае осуществляется очевидным образом:

1) График функции $y = f(x)$ растягиваем (сжимаем) вдоль оси Оy. Если множитель отрицателен, дополнительно осуществляем симметричное отображение относительно оси Ох.

2) Полученный на первом шаге график $y = mf(x)$ сдвигаем вверх или вниз в соответствии со значением константы $c$.

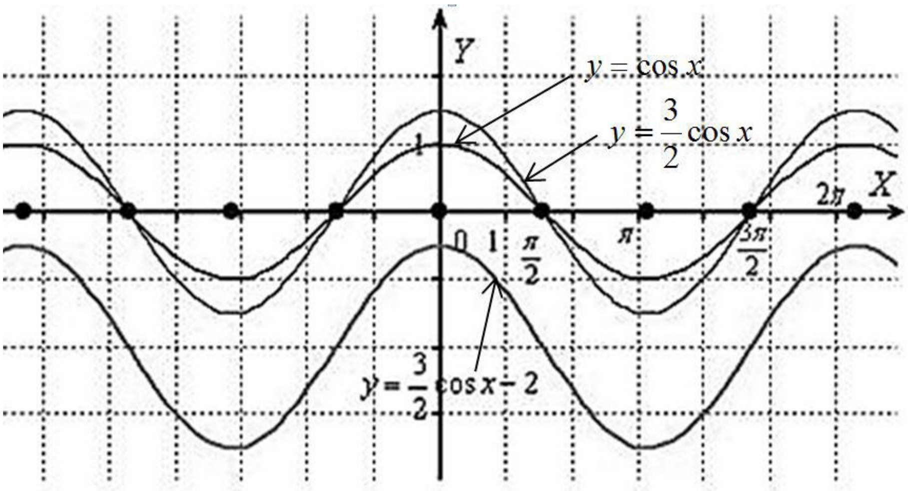
Пример 10

Построить график функции $y = \frac{3}{2}\cos x - 2$

Строим график косинуса $y = \cos x$:

1) Растягиваем вдоль оси Оу в 1,5 раза: $y = \frac{3}{2}\cos x$;

2) Сдвигаем вдоль оси Оу на 2 единицы вниз: $y = \frac{3}{2}\cos x - 2$.




**Общая схема построения графика функции с помощью геометрических преобразований**

Рассмотрим функцию $y = mf(kx+b)+c$, которая «базируется» на некоторой функции $y = f(x)$.

Для построения графика функции $y = mf(kx+b)+c$

– на первом шаге выполняем преобразования, связанные с аргументом функции, в результате чего получаем график функции $y = f(kx+b)$;

– на втором шаге выполняем преобразования, связанные с самой функцией, и получаем график функции $y = mf(kx+b)+c$.

Пример 11. Найдите множество значений функции $y = -3\sin 5x - 0{,}1$.

Решение:

Область значений функции $y = \sin 5x$, как и функции $y = \sin x$ равна $[-1;1]$. Так как при умножении на -3 происходит растяжение в 3 раза вдоль Оу графика функции $y = \sin 5x$ и симметричное отображение графика функции $y = 3\sin 5x$ относительно оси абсцисс, область значений функции $y = -3\sin 5x$ - отрезок $[-3;3]$. А после сдвига вдоль Оу вниз на $0{,}1$ графика последней функции, получаем окончательный ответ $[-3{,}1;2{,}9]$.

Пример 12. Используя четностью/нечетность тригонометрических функций, исследовать на четностью/нечетность функцию $y(x) = \frac{x + \sin x}{3\cos x}$.

Решение:

Поменяем знак аргумента, получим, $y(-x)=\frac{-x+\sin(-x)}{3\cos(-x)}=\frac{-x-\sin x}{3\cos x}=-\frac{x+\sin x}{3\cos x}=-y(x)$, следовательно функция нечетная.

**ИЗ № 2.**

1. Построить график функции

1.1. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

1.2. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

1.3. $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

1.4. $y=\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$

1.5. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

1.6. $y=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)$

1.7. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

1.8. $y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

1.9. $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$

1.10. $y=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}\right)$

1.11. $y=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$

1.12. $y=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{6}\right)$

1.13. $y=\sin\left(3x+\frac{5\pi}{6}\right)$

1.14. $y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

1.15. $y=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$

1.16. $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

1.17.

1.18. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$

1.19. $y=\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$

1.20. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$

1.21. $y=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$

1.22. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$

1.23. $y=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$

1.24. $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

1.25. $y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

1.26. $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

1.27. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)$

1.28. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}\right)$

1.29. $y=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$

1.30. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{6}\right)$

1.31. $y=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$

2. Построить график функции.

2.1. $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

2.2. $y = 3\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

2.3. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2.4. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

2.5. $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

2.6. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

2.7. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2.8. $y = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$

2.9. $y = 2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

2.10. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2.11. $y = 2\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

2.12. $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

2.13. $y = 2\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

2.14. $y = 3\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

2.15. $y = 3\sin\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$

2.16. $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

2.17. $y = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

2.18. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

2.19. $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2.20. $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2.21. $y = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

2.22. $y = 2\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

2.23. $y = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2.24. $y = 2\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

2.25. $y = 3\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

2.26. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

2.27. $y = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

2.28. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$

2.29. $y = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

2.30. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

3. Построить график функции

3.1. $y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$

3.2. $y = 2\sin\frac{1}{2}x + 1$

3.3. $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

3.4. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

3.5. $y = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) - 1$

3.6. $y = 3\sin\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) + 2$

3.7. $y = \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) + 2$

3.8. $y = 2\cos\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right)$

3.9. $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$

3.10. $y = 2\cos 3x - 2$

3.11. $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-2$

3.12. $y=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$

3.13. $y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+1$

3.14. $y=\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+2$

3.15. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2$

3.16. $y=3\sin\frac{1}{2}x+2$

3.17. $y=\frac{1}{2}\sin 2x-1$

3.18. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}\right)+1$

3.19. $y=3\cos 2x+1$

3.20. $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-2$

3.21. $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$

3.22. $y=2\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)-2$

3.23. $y=2\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)+1$

3.24. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-1$

3.25. $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$

3.26. $y=2\cos\left(3x+\frac{5\pi}{6}\right)$

3.27. $y=3\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}\right)$

3.28. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

3.29. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

3.30. $y=2\cos\left(3x+\frac{5\pi}{6}\right)$

4. Найдите область значений функции.

4.1. $y=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0{,}2$;

4.2. $y=-2{,}5\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+0{,}4$;

4.3. $y=-5\cos 3x-0{,}7$;

4.4. $y=-\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+2{,}2$;

4.5. $y=3{,}4\sin\frac{x}{2}-1{,}5$;

4.6. $y=-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-1$;

4.7. $y=-4{,}2\sin\frac{x}{3}+2{,}5$;

4.8. $y=0{,}6\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+0{,}1$;

4.9. $y=3-2\sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$;

4.10. $y=4\cos 2x-2{,}7$;

4.11. $y=-\sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)+1{,}6$;

4.12. $y=1-3\cos 2x$;

4.13. $y=7{,}1\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-3{,}2$;

4.14. $y=5\cos\frac{x}{4}-2{,}3$;

4.15. $y=5{,}2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+3$;

4.16. $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-0{,}4$;

4.17. $y=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+0{,}6$;

4.18. $y=-2\cos 5x-3{,}7$;

4.19. $y=-\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)+2{,}4$;

4.20. $y=\frac{4}{5}\cos\frac{x}{5}-3$;

4.21. $y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1{,}5$;

4.22. $y=4{,}1\cos\frac{x}{3}+0{,}5$;

4.23. $y = 2{,}2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + 5{,}1$;

4.24. $y = 5 - 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

4.25. $y = 0{,}5\cos 2x + 2$;

4.26. $y = -\sin\left(4x + \frac{2\pi}{5}\right) - 3{,}4$;

4.27. $y = 4 - 3{,}5\cos 3x$;

4.28. $y = 3{,}2\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 5$;

4.29. $y = 0{,}5\cos\frac{3x}{4} + 2$;

4.30. $y = 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 3$.

5. Исследуйте функцию на четностью/нечетность.

5.1. $y(x) = \frac{3tgx - \sin x}{\cos x}$;

5.2. $y(x) = tgx \cdot \sin x + ctg^2 x$;

5.3. $y(x) = 3\cos x \cdot \sin x - tgx$;

5.4. $y(x) = \frac{cgx + tgx}{3\sin x}$;

5.5. $y(x) = \frac{tg^2 x - 5\cos x}{\sin x}$;

5.6. $y(x) = x \cdot ctgx - 2\cos x$;

5.7. $y(x) = \sin^2 x - \cos x + x^3 \cdot tgx$ ;

5.8. $y(x) = \frac{2tgx + x^3}{7 - \cos x}$;

5.9. $y(x) = 2\sin x - \cos x$;

5.10. $y(x) = x^3 \cdot tgx + 6\cos x$;

5.11. $y(x) = \frac{2tgx - ctgx}{\sin^2 x}$;

5.12. $y(x) = \frac{x \cdot \sin x}{x^3 - \cos x}$;

5.13. $y(x) = 5\cos^2 x - x \cdot tgx$;

5.14. $y(x) = 2\sin x - x\cos x + 5tgx$;

5.15. $y(x) = \frac{2x \cdot tgx}{ctg^2 x}$;

5.16. $y(x) = \frac{tg^2 x - \sin^2 x}{\cos x}$;

5.17. $y(x) = 3x \cdot \sin x + 5ctg^2 x$;

5.18. $y(x) = tg^2 x \cdot \sin x - 5ctgx$;

5.19. $y(x) = \frac{ctgx + 4x}{\sin^3 x}$;

5.20. $y(x) = \frac{tgx(1 - \cos x)}{3\sin x - 5}$;

5.21. $y(x) = 3x^2 \cdot ctgx - 2x \cdot \cos x$;

5.22. $y(x) = \frac{\sin^2 x - \cos x}{7x^3}$;

5.23. $y(x) = \frac{2tgx}{7x^4 - \cos x}$;

5.24. $y(x) = x^2 \sin x - 5\cos x$;

5.25. $y(x) = \frac{x^3 \cdot tgx}{1 - 7ctgx}$;

5.26. $y(x) = \frac{2tg^3 x - 2x}{\sin x}$;

5.27. $y(x) = \frac{\sin x - 2tgx}{x \cdot \cos x}$;

5.28. $y(x) = 5x^2 \cos x - 3x \cdot ctgx$ ;

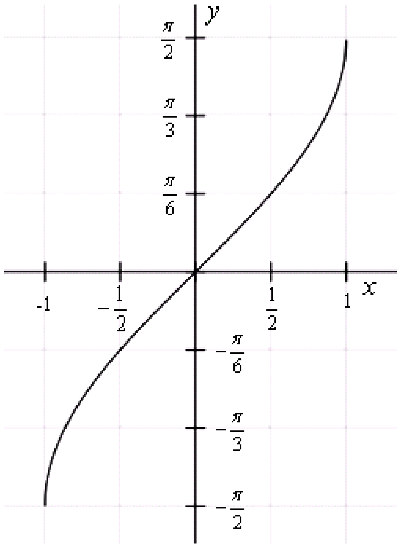
5.29. $y(x) = 2\sin^2 x - x\cos x$;

5.30. $y(x) = \frac{x - 3tgx}{\sin^2 x - 5x^2}$.

## § 3. Обратные тригонометрические функции.

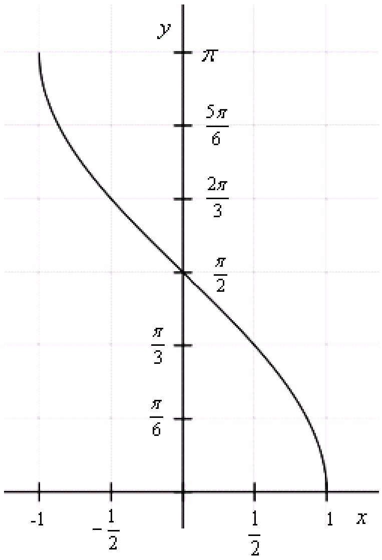
**Арксинусом** числа $a \in [-1;1]$ называется угол $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $a$. Т.е. $\arcsin a = x \Leftrightarrow \sin x = a$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

График функции $y = \arcsin x$.



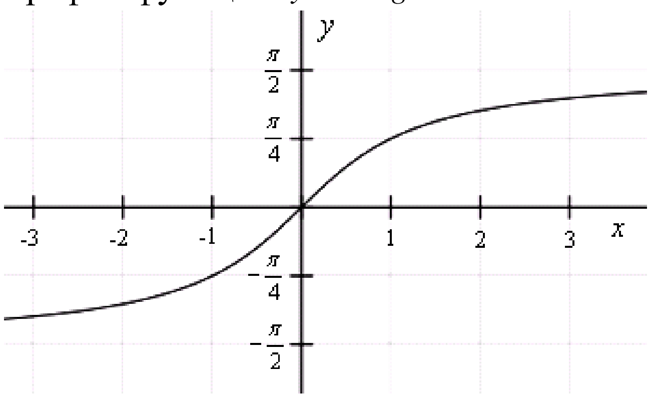

**Арккосинусом** числа $a \in [-1;1]$ называется угол $x \in [0;\pi]$, косинус которого равен $a$. Т.е. $\arccos = x \Leftrightarrow \cos x = a$, $x \in [0;\pi]$.

График функции $y = \arccos x$.



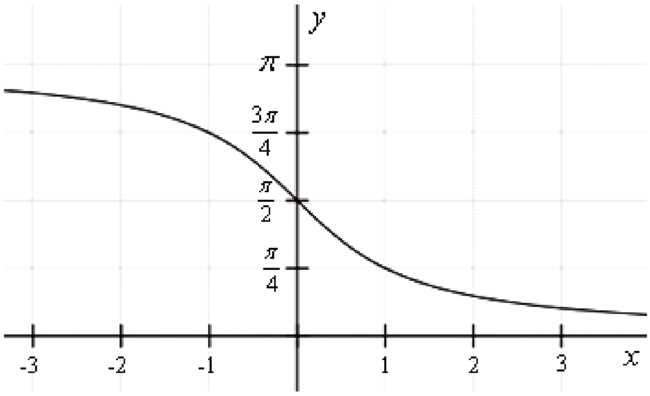

**Арктангенсом** числа $a \in (-\infty;+\infty)$ называется угол $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен $a$. Т.е. $arctga = x \Leftrightarrow tgx = a$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = arctgx$.



**Арккотангенсом** числа $a \in (-\infty;+\infty)$ называется угол $x \in (0;\pi)$, котангенс которого равен $a$. Т.е. $arcctga = x \Leftrightarrow ctgx = a$, $x \in (0;\pi)$.

График функции $y = arcctgx$.




Формулы, связывающие обратные тригонометрические функции.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\arcsin x == \arccos \sqrt{1-x^2} = arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x > 0$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = arcctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x > 0$$

$$arctg(-x) = -arctgx, \quad arctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx$$

$$arctgx = arcctg \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0$$

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx, \quad arcctgx = \frac{\pi}{2} - arctgx$$

$$arcctgx = arctg \frac{1}{x} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0$$

<u>Примеры.</u>

1. Вычислите $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 \cdot \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 \cdot \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{-2\pi - 9\pi + \pi}{6} = -\frac{10\pi}{6} = -\frac{5\pi}{3}.$$

2. Вычислите $\cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$, $\sin(arcctg(-2))$.

Решение:

$$\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\cos\left(\arccos\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)=\cos\left(\arccos\sqrt{1-\frac{16}{25}}\right)=\cos\left(\arccos\sqrt{\frac{9}{25}}\right)=$$

$$=\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5};$$

$$\sin\left(arcctg\,(-2)\right)=\sin\left(\pi-arcctg\,2\right)=\sin(arcctg\,2)=\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

**ИЗ № 3.**

1. Вычислите

1.1. $2\cdot\left(arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arccos 0\right)-arcctg\sqrt{3}$;

1.2. $\dfrac{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}}{arctg1}$;

1.3. $2\cdot\arccos 1-arctg(-\sqrt{3})+arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}$;

1.4. $\arcsin\frac{1}{2}-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arcctg(-1)$;

1.5. $\dfrac{arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)}{\arccos 0}$;

1.6. $arctg\sqrt{3}-2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos 0$;

1.7. $3\cdot\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-arcctg0$;

1.8. $\dfrac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin 0}{arctg1}$;

1.9. $\arcsin\frac{1}{2}-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arcctg(-1)$;

1.10. $3\cdot arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-2\cdot\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+arcctg(-\sqrt{3})$;

1.11. $\dfrac{arctg\sqrt{3}-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}}$;

1.12. $\arcsin 1-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\cdot arcctg\,(-1)$;

1.13. $2\cdot\arccos\frac{1}{2}-arctg\left(-\sqrt{3}\right)+2\cdot arcctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}$;

1.14. $2\cdot\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)+arcctg\,\sqrt{3}$;

1.15. $\dfrac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)}{arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$;

1.16. $2\cdot\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+arctg\,0\right)-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

1.17. $\dfrac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+arctg\,(-1)}{\arcsin\frac{1}{2}}$;

1.18. $2\cdot\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-arctg\,(-\sqrt{3})+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

1.19. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+arcctg\,(-\sqrt{3})$;

1.20. $\dfrac{arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arcsin(-1)}{\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}}$;

1.21. $arcctg\,(-1)-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\arcsin 0$;

1.22. $3\cdot\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-arctg\,0$;

1.23. $\dfrac{2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos 0}{arctg\,(-1)}$;

1.24. $2\cdot\arcsin\frac{1}{2}-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+arctg\,(-\sqrt{3})$;

1.25. $arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-2\cdot\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin(-1)$;

1.26. $\dfrac{arcctg(-\sqrt{3})-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}}$;

1.27. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cdot arcctg(-\sqrt{3})$;

1.28. $2\cdot\arcsin\frac{1}{2}-arctg\left(-\sqrt{3}\right)+2\cdot arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}$;

1.29. $2\cdot\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg\sqrt{3}$;

1.30. $\dfrac{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}{arcctg(-1)}$.

2. Вычислите

2.1. $\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$, $tg(\arcsin(-0{,}6))$;

2.2. $\cos(arctg(-2))$, $ctg\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

2.3. $\sin(arctg 3)$, $\cos(\arcsin(-0{,}8))$;

2.4. $tg\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$, $\cos(arcctg(-3))$;

2.5. $ctg\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$, $\sin(arctg 2)$;

2.6. $\cos(arcctg(-3))$, $tg\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$;

2.7. $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$, $tg(\arcsin 0{,}6)$;

2.8. $\cos(arctg 3)$, $ctg\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$;

2.9. $\sin(arcctg(-3))$, $\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

2.10. $tg\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$, $\cos(arcctg 2)$;

2.11. $ctg\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$, $\sin(arctg 2)$;

2.12. $\cos(arcctg(-4))$, $tg\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

2.13. $\sin(\arccos(-0{,}8))$, $tg\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$;

2.14. $\cos(arctg 4)$, $ctg\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

2.15. $\sin(arctg 3)$, $\cos(\arcsin(-0{,}8))$;

2.16. $tg\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$, $\cos\left(arcctg\frac{1}{2}\right)$;

2.17. $ctg\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$, $\sin(arctg 4)$;

2.18. $\cos\left(arcctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, $tg(\arcsin 0{,}8)$;

2.19. $\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$, $tg(\arcsin(-0{,}6))$;

2.20. $\cos\left(arctg\frac{1}{2}\right)$, $ctg(\arcsin(-0{,}8))$;

2.21. $\sin(arcctg 2)$, $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

2.22. $tg(\arccos(-0{,}6))$, $\cos(arcctg 5)$;

2.23. $ctg\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$, $\sin\left(arctg\frac{1}{2}\right)$;

2.24. $\cos(arcctg\,4),\ tg\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$;

2.25. $\cos\left(arcctg\,\frac{1}{2}\right),\ ctg(\arccos(-0{,}6))$;

2.26. $\sin(arctg\,0{,}5),\ \cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$;

2.27. $tg\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right),\ \cos\left(arcctg\,\frac{1}{2}\right)$;

2.28. $ctg\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right),\ \sin(arctg\,3)$;

2.29. $\cos(arcctg(-5)),\ tg\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$;

2.30. $\sin(\arccos 0{,}8),\ \cos(arctg(-4))$.

## § 4. Тригонометрические уравнения.

*Определение:* **Тригонометрическим** называется уравнение, в котором неизвестные находятся под знаком тригонометрических функций.

### 4.1. Простейшие тригонометрические уравнения.

**Простейшими тригонометрическими уравнениями** называют уравнения вида: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение – значит найти множество всех углов (дуг), имеющих данное значение тригонометрической функции.

1) $\sin x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение корней не имеет.

Если $|a| \le 1$, решение находим по формуле: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$.

Частные случаи: $\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n; \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$

2) $\cos x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение корней не имеет.

Если $|a| \le 1$, решение находим по формуле: $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.

Частные случаи: $\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n; \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n. \end{cases}$

3) $tgx = a \quad x = arctga + \pi n, n \in Z$.

4) $ctgx = a \quad x = arcctga + \pi n, n \in Z$.

Примеры.

1. Решить уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in Z$, т.е. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

2. Решить уравнение $\cos x\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение:

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z;$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

### 4.2. Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным.

Уравнения вида $A\sin^2 x + B\sin x + C = 0$, где $A \neq 0$, решаются приведением к квадратному путем замены $\sin x = y$. (аналогично решаются уравнения с другими тригонометрическими функциями).

Примеры.

3. Решить уравнение $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Решение:

Введем новую переменную $y = \sin x$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $2y^2 + y - 1 = 0$. Мы получили квадратное уравнение. Его корнями служат $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -1$. Следовательно, $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$. В первом случае получим решения

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,$$

т.е. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Во втором случае имеем: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

4. Решить уравнение $6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$.

Решение:

Заменяя $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим относительно *cos x* квадратное уравнение $6(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 2 = 0$

$$-6\cos^2 x + 5\cos x + 4 = 0$$

$$6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$$

Введем новую переменную $y = \cos x$. Тогда $6y^2 - 5y - 4 = 0$, откуда $y_1 = -\frac{1}{2}$ или $y_2 = 1\frac{1}{3}$. Уравнение $\cos x = 1\frac{1}{3}$ не имеет решений, т.к. $1\frac{1}{3} > 1$. Решая уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим: $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

5. Решить уравнение $tgx - 3ctgx = 0$.

   Решение: Заменяя $ctgx = \frac{1}{tgx}$, получим $tgx - \frac{3}{tgx} = 0$, откуда, т.к. $tgx \neq 0$, получаем $tg^2 x - 3 = 0$. Введем новую переменную $y = tgx$. Тогда $y^2 = 3$, откуда $y_1 = -\sqrt{3}$ или $y_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, $tgx = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ и $tgx = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

### 4.3. Однородные тригонометрические уравнения.

**Однородные тригонометрические уравнения** имеют ту же структуру, что и однородные уравнения любого другого вида.

**Отличительные признаки однородных уравнений:**

а) все одночлены имеют одинаковую степень,

б) свободный член равен нулю,

в) в уравнении присутствуют степени с двумя различными основаниями.

**Однородное тригонометрическое уравнение** – это уравнение двух видов:

$a\sin x + b\cos x = 0,\ a \cdot b \neq 0$ (однородное уравнение первой степени)

либо

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0,\ a \cdot b \cdot c \neq 0$ (однородное уравнение второй степени).

**Алгоритм решения однородного уравнения первой степени:**

1) разделить обе части уравнения на $\cos x$ (или на $\sin x$). Делить можно на число, не равное 0, а $\cos x \neq 0$, т.к. в противном случае $a\sin x + b \cdot 0 = 0$ и $\sin x = 0$, следовательно $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, что неверно;

2) воспользоваться формулой $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$);

3) решить получившееся уравнение.

<u>Пример.</u>

6. Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$.

Решение:

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ - однородное уравнение. Разделить обе части уравнения на $\cos x$.

Получим $\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$, $tgx + \sqrt{3} = 0$, $tgx = -\sqrt{3}$

$x = arctg(-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in Z$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

**Алгоритм решения однородного уравнения второй степени:**

1) разделить обе части уравнения на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$). Делить можно на число, не равное 0, а $\cos^2 x \neq 0$, т.к. в противном случае $\cos x = 0$, $a\sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$ и $\sin x = 0$, следовательно $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, что неверно;

2) воспользоваться формулой $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$);

3) решить получившееся уравнение.

Примеры.

7. Решить уравнение $4\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$.

Решение:

$4\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$ - однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$.

Получим $4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} - 7\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$.

$4tg^2 x + 3tgx - 7 = 0$. Замена переменной : $y = tgx$

$4y^2 + 3y - 7 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 9 + 112 = 121$, $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 11}{8}$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1\frac{3}{4}$

$tgx = 1$ , $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

$tgx = -1\frac{3}{4}$ , $x = arctg\left(-1\frac{3}{4}\right) + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $x = arctg\left(-1\frac{3}{4}\right) + \pi n,\ n \in Z$.

8. Решить уравнение $2\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = 1$.

Решение:

Применим формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Получим $2\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$, $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$- однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$.

Получим $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} - 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$.

$tg^2 x + 2tgx - 3 = 0$. Замена переменной : $y = tgx$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$y_1 = 1$, $y_2 = -3$

$tgx = 1$ , $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

$tgx = -3$ , $x = -arctg 3 + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $x=-arctg3+\pi n,\ n\in Z$.

### 4.4. Решение тригонометрических уравнений, введением вспомогательного угла.

Рассмотрим уравнение вида: $a\sin x+b\cos x=c,\ a,b,c\neq 0$.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$. Получим

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin x+\underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x=\underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C}.$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и кос инуса, а именно: модуль ( абсолютное значение ) каждого из них не больше 1, а сумма их квадратов равна 1. Тогда можно обозначить их соответственно как $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ ( здесь $\varphi$ - так называемый *вспомогательный угол* ), и наше уравнение принимает вид: $\cos\varphi\cdot\sin x+\sin\varphi\cdot\cos x=C$ или $\sin(x+\varphi)=C$ и его решение

$x=(-1)^n\cdot\arcsin C-\varphi+\pi n,\ n\in Z$, где $\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Заметим, что $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

Пример.

9. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

Решение: Здесь $a=\sqrt{3},\ b=1,\ \sqrt{a^2+b^2}=2$.

Делим обе части уравнения на 2. Получим $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}$, откуда

$\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{1}{2}$ и $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

Решив последнее уравнение, получим

$x-\frac{\pi}{6}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

### 4.5. Решение тригонометрических уравнений, используя формулы преобразования произведения в сумму и обратно.

Примеры.

10. Решить уравнение $2\sin 2x\cdot\sin 6x=\cos 4x$

Решение: Используя формулу $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$,

получим $2\sin 2x \cdot \sin 6x = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(-4x) - \cos 8x\right] = \cos 4x - \cos 8x$. Тогда уравнение примет вид $\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x$, откуда $\cos 8x = 0$,
$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ , $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8},\ n \in Z$ .

11.Решить уравнение $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$

Решение:
$(\cos 2x + \cos 4x) + (\cos 6x + \cos 8x) = 0$

Применим формулу $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$2\cos 5x\cos 3x + 2\cos 5x\cos x = 0$
$2\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0$

Еще раз применим формулу $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, получим

$4\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$

$\cos 5x = 0$ или $\cos 2x = 0$ или $\cos x = 0$

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $\quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

### 4.6. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной подстановки $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ , $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

Пример.

12. Решить уравнение $3\sin x - 4\cos x = 3$.

Решение: Возможны 2 случая:

1) $tg\frac{x}{2}$ не существует, т.е. $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , $x = \pi + 2\pi k$. Тогда
$3\sin(\pi + 2\pi k) - 4\cos(\pi + 2\pi k) = 4 \neq 3$.

2) $tg\frac{x}{2}$ существует и $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ , $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

Тогда уравнение примет вид: $3\cdot\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - 4\cdot\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 3$.

Откуда

$$6tg\frac{x}{2} - 4 + 4tg^2\frac{x}{2} = 3 + 3tg^2\frac{x}{2};$$

$$tg^2\frac{x}{2}+6tg\frac{x}{2}-7=0.$$

Делаем замену: $tg\frac{x}{2}=y$. Имеем $y^2+6y-7=0$, $y_1=1,\ y_2=-7$.

Тогда $tg\frac{x}{2}=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ и $tg\frac{x}{2}=-7\Rightarrow x=-2arctg7+2\pi n,\ n\in Z$.

## ИЗ № 4.

1. Решите простейшее тригонометрическое уравнение.

1.1. $2\sin x-\sqrt{2}=0$;
1.2. $\sqrt{3}-3ctgx=0$;
1.3. $2\cos x-\sqrt{3}=0$;
1.4. $3tgx-\sqrt{3}=0$;
1.5. $\sqrt{3}-2\sin x=0$;
1.6. $\sqrt{3}ctgx-3=0$;
1.7. $2\cos x-\sqrt{2}=0$;
1.8. $1-2\cos x=0$;
1.9. $2\sin x-\sqrt{3}=0$;
1.10. $\sqrt{3}ctgx+3=0$;
1.11. $3ctgx-\sqrt{3}=0$;
1.12. $2\sin x-1=0$;
1.13. $2\sin x+\sqrt{2}=0$;
1.14. $3tgx+3=0$;
1.15. $\sqrt{3}-2\cos x=0$;
1.16. $\sqrt{3}tgx-3=0$;
1.17. $2\cos x+\sqrt{3}=0$;
1.18. $\sqrt{2}-2\cos x=0$;
1.19. $\sqrt{3}tgx+3=0$;
1.20. $3tgx+\sqrt{3}=0$;
1.21. $\sqrt{3}+2\sin x=0$;
1.22. $1-2\sin x=0$;
1.23. $2\sin x+\sqrt{3}=0$;
1.24. $2\sin x+1=0$;
1.25. $\sqrt{2}-2\sin x=0$;
1.26. $\sqrt{3}-tgx=0$;
1.27. $2\cos x+\sqrt{2}=0$;
1.28. $\sqrt{3}-2\cos x=0$;
1.29. $3ctgx+\sqrt{3}=0$;
1.30. $2\cos x+1=0$.

2. Решите простейшее тригонометрическое уравнение.

2.1. $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$;
2.2. $\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2.3. $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2.4. $\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$;
2.5. $\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$;
2.6. $\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2.7. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$;
2.8. $\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2.9. $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2.10. $\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$;
2.11. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$;
2.12. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$;

2.13. $\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.14. $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.15. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.16. $\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2.17. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.18. $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.19. $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2.20. $\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$;

2.21. $\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2.22. $\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.23. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$;

2.24. $\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2.25. $\cos\left(3x+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$;

2.26. $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.27. $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.28. $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2.29. $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2.30. $\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Решить простейшее тригонометрическое уравнение.

3.1. $tg\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.2. $ctg\left(\frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$;

3.3. $tg\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$;

3.4. $ctg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.5. $ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.6. $tg\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

3.7. $ctg\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$;

3.8. $tg\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=1$;

3.9. $ctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.10. $tg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-1$;

3.11. $ctg\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$;

3.12. $tg\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$;

3.13. $ctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=1$;

3.14. $ctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.15. $tg\left(\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{6}\right)=0$;

3.16. $tg\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$;

3.17. $ctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=0$;

3.18. $ctg\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$;

3.19. $tg\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$;

3.20. $ctg\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.21. $tg\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$;

3.22. $ctg\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$;

3.23. $tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$;

3.24. $ctg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$;

3.25. $\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3.26. $ctg\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.27. $tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

3.28. $ctg\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=0$;

3.29. $tg\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$;

3.30. $ctg\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=1$.

4. Решить тригонометрическое уравнение:

4.1. $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$;
4.2. $\cos^2 x+3\cos x+2=0$;
4.3. $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$;
4.4. $tg^2 x-3tgx+2=0$;
4.5. $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$;
4.6. $2\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x=0$
4.7. $4\sin^2 x+4\sin x-3=0$;
4.8. $2\sin^2 x+5\sin x+3=0$
4.9. $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$
4.10. $2\sin^2-\sin x-1=0$;
4.11. $\cos^2 x+\cos x-2=0$
4.12. $2\sin^2 x+\sin x=0$;
4.13. $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$;
4.14. $4\cos^2 x+8\cos x+3=0$;
4.15. $3ctg^2 x-5ctgx+2=0$;
4.16. $4\sin^2 x-4\sin x-3=0$;
4.17. $2\cos^2 x+\cos x-1=0$;
4.18. $2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=0$
4.19. $2\sin^2 x+3\sin x+2=0$
4.20. $3tg^2 x-tgx-2=0$;
4.21. $2\cos^2 x-\cos x-3=0$
4.22. $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$;
4.23. $4\sin^2 x-3=0$;
4.24. $4\cos^2 x-8\cos x+3=0$;
4.25. $\sin^2 x-\sin x-2=0$;
4.26. $ctg^2 x-5ctgx-6=0$;
4.27. $2\cos^2 x-\cos x=0$;
4.28. $\sin^2 x-3\sin x+2=0$;
4.29. $2\cos^2 x-5\cos x+3=0$;
4.30. $2\sin^2 x+\sin x-3=0$.

5. Решить тригонометрическое уравнение:

5.1. $2\cos^2 x-\sin x+1=0$;
5.2. $4\sin^2 x+8\cos x-7=0$;
5.3. $\cos^2 x+3\sin x-3=0$;
5.4. $tgx+3ctgx=4$;
5.5. $2\sin^2 x+\cos x+1=0$;
5.6. $5\sin^2 x+6\cos x-6=0$;
5.7. $tgx+4ctgx-5=0$;
5.8. $\cos^2 x+\sin x+1=0$;
5.9. $2\cos^2 x+3\sin x-3=0$;
5.10. $tgx-2ctgx+1=0$;
5.11. $2\sin^2 x+3\cos x=0$
5.12. $tgx+4ctgx-5=0$;
5.13. $8\sin^2 x+\cos x+1=0$;
5.14. $tgx+4ctgx-5=0$;
5.15. $2\cos^2 x+\sin x+1=0$;
5.16. $\sin^2 x+\cos x-4=0$;
5.17. $tgx-4ctgx-3=0$;
5.18. $2\cos^2 x+5\sin x=0$;
5.19. $tgx+2ctgx-3=0$;
5.20. $\sin^2 x-3\cos x-1=0$;

5.21. $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$;

5.22. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;

5.23. $2ctgx - 3tgx - 5 = 0$;

5.24. $4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0$;

5.25. $2\cos^2 x - 5\sin x - 5 = 0$

5.26. $tgx + 2ctgx = 3$;

5.27. $6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$;

5.28. $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$;

5.29. $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$;

5.30. $tgx + 5ctgx + 6 = 0$.

6. Решить тригонометрическое уравнение:

6.1. $\sin x - 5\cos x = 0$;

6.2. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

6.3. $\sin x - 2\cos x = 0$;

6.4. $\sin x - \cos x = 0$;

6.5. $4\sin x - \cos x = 0$;

6.6. $5\sin x + \cos x = 0$;

6.7. $3\sin x - 2\cos x = 0$;

6.8. $3\sin x - \cos x = 0$;

6.9. $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

6.10. $2\sin x - \cos x = 0$;

6.11. $\sin x + \cos x = 0$;

6.12. $5\sin x - 3\cos x = 0$;

6.13. $\sin x - 3\cos x = 0$;

6.14. $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

6.15. $\sin x + 5\cos x = 0$;

6.16. $3\sin x + \cos x = 0$;

6.17. $2\sin x - 3\cos x = 0$;

6.18. $\sin x + 4\cos x = 0$;

6.19. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$;

6.20. $\sin x + 2\cos x = 0$;

6.21. $5\sin x + 2\cos x = 0$;

6.22. $4\sin x - \cos x = 0$;

6.23. $3\sin x + 2\cos x = 0$;

6.24. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$;

6.25. $2\sin x + \cos x = 0$;

6.26. $\sin x + 3\cos x = 0$;

6.27. $\sin x - 4\cos x = 0$;

6.28. $5\sin x - \cos x = 0$;

6.29. $3\sin x - 5\cos x = 0$;

6.30. $2\sin x + 3\cos x = 0$.

7. Решить тригонометрическое уравнение:

7.1. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$;

7.2. $3\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;

7.3. $\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$;

7.4. $4\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$;

7.5. $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$;

7.6. $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

7.7. $\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$;

7.8. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$;

7.9. $4\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$;

7.10. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$;

7.11. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

7.12. $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

7.13. $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$;

7.14. $\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$;

7.15. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$;

7.16. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$;

7.17. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = 0$;

7.18. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$;

7.19. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

7.20. $3\sin^2 x - \sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$;

7.21. $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$;

7.22. $2\sin^2 x - \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

7.23. $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$;

7.24. $4\sin^2 x - \sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$;

7.25. $\sin^2 x - 7\sin x\cos x - 8\cos^2 x = 0$;

7.26. $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$;

7.27. $4\sin^2 x - \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

7.28. $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$;

7.29. $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$;

7.30. $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 9\cos^2 x = 0$.

8. Решить тригонометрическое уравнение:

8.1. $4\sin^2 x-\sin 2x=3$;
8.2. $\sin 2x+8\sin^2 x=5$;
8.3. $10\cos^2 x-2\sin 2x=3$;
8.4. $\cos 2x+8\sin^2 x=6+2\sin 2x$;
8.5. $\sin 2x+2\cos 2x=1$;
8.6. $\sin 2x+\cos 2x=2\cos^2 x$;
8.7. $6\cos^2 x+\sin 2x=\cos 2x+2$
8.8. $\cos^2 x+3\sin^2 x=2\sin 2x$;
8.9. $6\sin^2 x-2\sin 2x=5$;
8.10. $4\sin^2 x+\sin 2x=1$;
8.11. $\cos 2x+2\sin 2x+2=0$;
8.12. $2\cos^2 x+2\sin 2x=3$;
8.13. $2\cos 2x+2\sin^2 x=5+4\sin 2x$;
8.14. $\sin 2x+4\cos^2 x=1$;
8.15. $2\sin 2x=3-2\sin^2 x$;
8.16. $4\cos^2 x+2\sin^2 x=3\sin 2x$;
8.17. $1+4\sin^2 x=3\sin 2x$;
8.18. $2\sin 2x=2\cos^2 x+1$;
8.19. $3\sin^2 x+\sin 2x=2$;
8.20. $2\cos^2 x+4\sin 2x=2\cos 2x-3$;
8.21. $\sin 2x+4\sin^2 x=1$;
8.22. $2\sin^2 x-2\sin 2x+1=0$;
8.23. $\cos 2x+4\sin^2 x=\sin 2x$;
8.24. $6\sin^2 x+\cos 2x+3\sin 2x=0$;
8.25. $\cos 2x+2\sin 2x=8\cos^2 x-2$;
8.26. $4\sin^2 x=3+2\sin x\cos x$;
8.27. $4\cos^2 x+\sin 2x=1$;
8.28. $2\sin^2 x=2\sin 2x-1$;
8.29. $4\cos^2 x+1=3\sin 2x$;
8.30. $10\sin^2 x=3+2\sin 2x$.

9. Решить тригонометрическое уравнение:

9.1. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$;
9.2. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=-\sqrt{2}$;
9.3. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=-1$;
9.4. $\sin x+\cos x=-1$;
9.5. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$;
9.6. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=-1$;
9.7. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=-\sqrt{2}$;
9.8. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$;
9.9. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{3}$;
9.10. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=-\sqrt{2}$;
9.11. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=-\sqrt{3}$;
9.12. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$;
9.13. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$;
9.14. $\sin x-\cos x=-1$;
9.15. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=-2$;
9.16. $\sin x+\cos x=1$;
9.17. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2$;
9.18. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$;
9.19. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=-2$;
9.20. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$;
9.21. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-\sqrt{3}$;
9.22. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$;
9.23. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=-\sqrt{3}$;
9.24. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-1$;
9.25. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$;
9.26. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-2$;
9.27. $\sin x-\cos x=1$;
9.28. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$;
9.29. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=-\sqrt{3}$;
9.30. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$

10.Решить тригонометрическое уравнение:

10.1. $2\sin 3x\cdot\sin 5x-\cos 2x=0$;
10.2. $2\cos 2x\cdot\cos 4x-\cos 6x=0$;
10.3. $2\sin 2x\cdot\sin 4x-\cos 2x=0$;
10.4. $2\cos 3x\cdot\cos 7x-\cos 4x=0$;
10.5. $2\sin 3x\cdot\sin 4x+\cos 7x=0$;
10.6. $2\cos 2x\cdot\sin 4x-\sin 2x=0$;
10.7. $2\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 6x=0$;
10.8. $2\sin x\cdot\sin 5x+\cos 6x=0$;
10.9. $2\cos 3x\cdot\sin 4x-\sin 7x=0$;
10.10. $2\cos 5x\cdot\cos 7x+\cos 12x=0$;
10.11. $2\sin x\cdot\sin 2x-\cos 3x=0$;
10.12. $2\cos 3x\cdot\cos 5x-\cos 2x=0$;
10.13. $2\sin x\cdot\cos 3x-\sin 4x=0$;

10.14. $2\cos 2x \cdot \cos 4x - \cos 2x = 0$;
10.15. $2\sin 3x \cdot \sin 7x - \cos 4x = 0$;
10.16. $2\sin x \cdot \cos 3x - \sin 2x = 0$;
10.17. $2\cos x \cdot \cos 3x - \cos 4x = 0$;
10.18. $2\sin x \cdot \sin 3x - \cos 2x = 0$;
10.19. $2\cos x \cdot \cos 5x - \cos 6x = 0$;
10.20. $2\cos x \cdot \sin 5x - \sin 6x = 0$;
10.21. $2\sin 5x \cdot \sin 7x + \cos 12x = 0$;
10.22. $2\cos 3x \cdot \cos 4x - \cos 7x = 0$;
10.23. $2\cos 3x \cdot \sin 5x - \sin 2x = 0$;
10.24. $2\sin x \cdot \sin 3x + \cos 4x = 0$;
10.25. $2\cos x \cdot \cos 2x - \cos 3x = 0$
10.26. $2\sin 3x \cdot \cos 7x - \sin 4x = 0$;
10.27. $2\sin x \cdot \sin 4x - \cos 3x = 0$;
10.28. $2\cos x \cdot \cos 3x - \cos 2x = 0$;
10.29. $2\cos 2x \cdot \sin 4x - \sin 6x = 0$;
10.30. $2\cos x \cdot \cos 4x - \cos 3x = 0$.

11. Решить тригонометрическое уравнение:

11.1. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$;
11.2. $\cos 2x + \cos 6x = \cos 4x$;
11.3. $\sin 5x - \sin 3x = \cos 4x$;
11.4. $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$;
11.5. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$;
11.6. $\sin 6x - \sin 2x = 2\cos 4x$;
11.7. $\cos 2x - \cos 4x + \cos 6x - \cos 8x = 0$;
11.8. $\sin 5x - \sin x = 2\cos 3x$;
11.9. $\cos x - \cos 5x = \sin 3x$;
11.10. $\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x = 0$;
11.11. $\sin 2x + \sin 8x = \sin 5x$;
11.12. $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$;
11.13. $\cos x + \cos 9x = 2\cos 5x$;
11.14. $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \sin 8x = 0$;
11.15. $\sin 7x + \sin x = \sin 4x$;
11.16. $\cos 3x - \cos 5x = \sin x$;
11.17. $\cos 3x - \cos 5x + \cos 7x - \cos 9x = 0$;
11.18. $\cos 7x + \cos x = \cos 3x$;
11.19. $\cos 4x + \cos 10x = 2\cos 7x$;
11.20. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$;
11.21. $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$;
11.22. $\sin 3x - \sin 5x + \sin 7x - \sin 9x = 0$;
11.23. $\cos 2x - \cos 6x = \sin 4x$;
11.24. $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x - \sin 8x = 0$;
11.25. $\cos x - \cos 7x = 2\sin 4x$;
11.26. $\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x = 0$;
11.27. $\sin 3x + \sin 7x = 2\sin 5x$;
11.28. $\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x = 0$;
11.29. $\sin 5x - \sin x = \cos 3x$;
11.30. $\cos x - \cos 9x = 2\sin 5x$.

12. Решить тригонометрическое уравнение:

12.1. $3\cos x = 2\sin x - 2$;
12.2. $3\sin x - \cos x = 3$;
12.3. $2\cos x = \sin x - 1$;
12.4. $4\cos x = 3\sin x - 3$;
12.5. $3 + 3\sin x = -2\cos x$;
12.6. $5\sin x + 7\cos x = -5$;
12.7. $2\sin x + 3\cos x = -2$;
12.8. $\sin x + 2\cos x = -1$;
12.9. $3\sin x - 2\cos x = 3$;
12.10. $3\sin x + 4\cos x = -3$;
12.11. $3\cos x = 2\sin x - 2$;
12.12. $7\sin x - 5\cos x = 7$;
12.13. $5\cos x = 4\sin x - 4$;
12.14. $4 + 3\cos x = -4\sin x$;
12.15. $4 + 3\cos x = 4\sin x$;
12.16. $4\sin x + 5\cos x = -4$;
12.17. $5\cos x = \sin x - 1$;
12.18. $3\cos x = \sin x + 1$;
12.19. $7\cos x = 3\sin x - 3$;
12.20. $\cos x = 3\sin x + 3$;
12.21. $5\cos x = 3\sin x - 3$;
12.22. $-3\sin x - \cos x = 3$;
12.23. $7\cos x = 5\sin x - 5$;
12.24. $2\sin x + \cos x = -2$;
12.25. $3\sin x + 5\cos x = -3$;
12.26. $5\sin x = 5 + 3\cos x$;
12.27. $2\sin x - \cos x = 2$;
12.28. $2 + \cos x = -2\sin x$;

12.29. $7\sin x + 9\cos x = -7$;  12.30. $9\cos x = 7\sin x - 7$.

## § 5. Тригонометрические неравенства.

*Определение*: Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется **тригонометрическим неравенством.**

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся следующие 16 неравенств:

$\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$;

$\cos x > a$, $\cos x < a$, $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$;

$tgx > a$, $tgx < a$, $tgx \geq a$, $tgx \geq a$;

$ctgx > a$, $ctgx < a$, $ctgx \geq a$, $ctgx \geq a$;

Здесь $x$ является неизвестной переменной, $a$ может быть любым действительным числом.

### 5.1. Неравенства вида $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$.

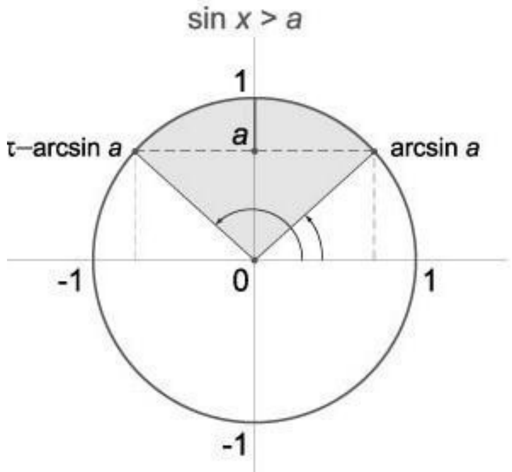



**Рис.1**

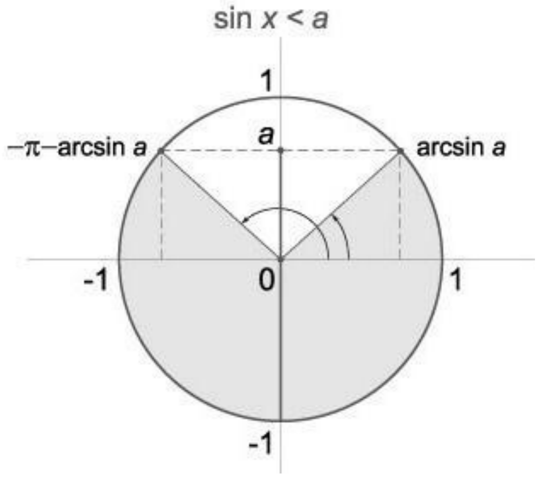



**Рис.2**

1. Неравенство $\sin x > a$.

При $a \geq 1$ неравенство $\sin x > a$ не имеет решений.

При $a < -1$ решением неравенства $\sin x > a$ является любое действительное число.

При $-1 \leq a < 1$ решение неравенства $\sin x > a$ выражается в виде $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$ (рис.1).

2. Неравенство $\sin x \geq a$.

При $a > 1$ неравенство $\sin x \geq a$ не имеет решений.

При $a \leq -1$ решением неравенства $\sin x \geq a$ является любое действительное число.

При $a = 1$ решение неравенства $\sin x \geq a$ сводится к решению уравнения $\sin x = 1$

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $\sin x \geq a$ выражается в виде $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$ (рис.1).

3. Неравенство $\sin x < a$.

При $a \leq -1$ неравенство $\sin x < a$ не имеет решений.
При $a > 1$ решением неравенства $\sin x < a$ является любое действительное число.
При $-1 < a \leq 1$ решение неравенства $\sin x < a$ выражается в виде $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$ (рис.2).

4. Неравенство $\sin x \leq a$.

При $a < -1$ неравенство $\sin x \leq a$ не имеет решений.
При $a \geq 1$ решением неравенства $\sin x < a$ является любое действительное число.
При $a = -1$ решение неравенства $\sin x \leq a$ сводится к решению уравнения $\sin x = -1$.
При $-1 < a < 1$ решение неравенства $\sin x \leq a$ выражается в виде $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$ (рис.2).

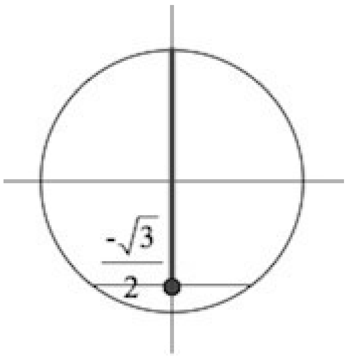
<u>Примеры.</u>

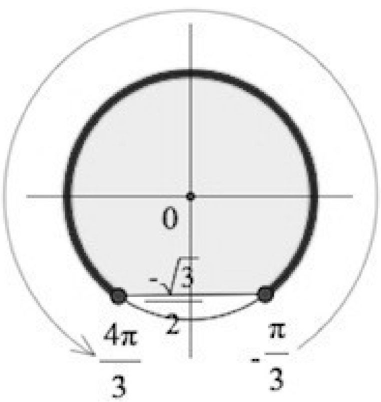
1. Решить неравенство $\sin x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

Отмечаем на оси синусов значение $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Все значения $\sin x$ большие $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ расположены выше точки $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на оси синусов.

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$




Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$.

2. Решить неравенство $\sin\left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{3\pi}{4}\right) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

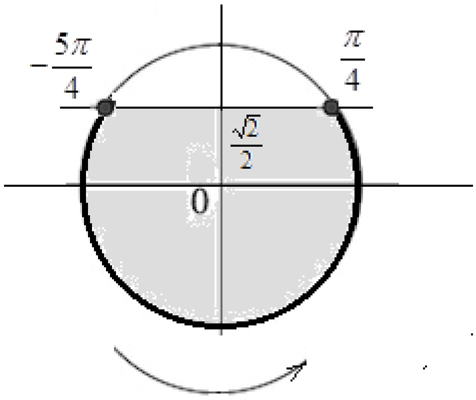
Решение.

Обозначим $\frac{1}{3}x+\frac{3\pi}{4}$ за $u$. Получим неравенство $\sin u \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отмечаем на оси синусов значение $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Все значения $\sin u$

меньшие $\frac{2}{2}$ расположены ниже точки $\frac{\sqrt{2}}{2}$ на оси синусов.

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, $-\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\pi-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4}$.




$$-\frac{5\pi}{4}+2\pi n\le u\le\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z;$$

$$-\frac{5\pi}{4}+2\pi n\le\frac{1}{3}x+\frac{3\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z;$$

$$-\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le\frac{1}{3}x\le\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z;$$

$$-2\pi+2\pi n\le\frac{1}{3}x\le-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z;$$

Ответ: $-6\pi+6\pi n\le x\le-\frac{3\pi}{2}+6\pi n,\quad n\in Z$.

## 5.2. Неравенства вида $\cos x>a$, $\cos x<a$, $\cos x\ge a$, $\cos x\le a$.

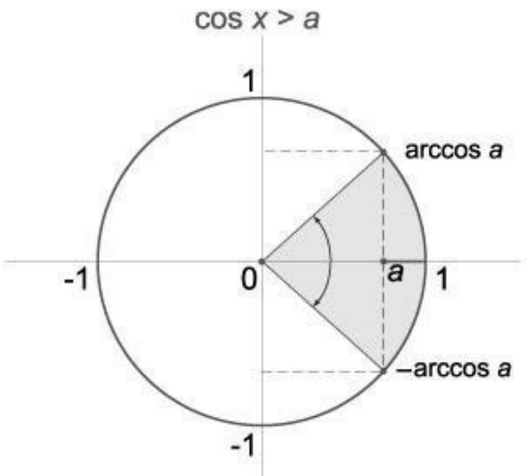



**Рис.3**

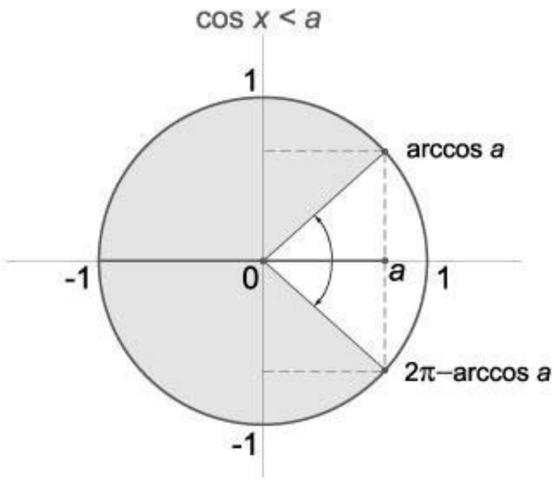



**Рис.4**

1. Неравенство $\cos x>a$.

При $a \geq 1$ неравенство $\cos x > a$ не имеет решений.

При $a < -1$ решением неравенства $\cos x > a$ является любое действительное число.

При $-1 \leq a < 1$ решение неравенства $\cos x > a$ выражается в виде $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$ (рис.3).

2. Неравенство $\cos x \geq a$.

При $a > 1$ неравенство $\cos x \geq a$ не имеет решений.

При $a \leq -1$ решением неравенства $\cos x \geq a$ является любое действительное число.

При $a = 1$ решение неравенства $\cos x \geq a$ сводится к решению уравнения $\cos x = 1$

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $\sin x \geq a$ выражается в виде $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$ (рис.3).

3. Неравенство $\cos x < a$.

При $a \leq -1$ неравенство $\cos x < a$ не имеет решений.

При $a > 1$ решением неравенства $\cos x < a$ является любое действительное число.

При $-1 < a \leq 1$ решение неравенства $\cos x < a$ выражается в виде $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$ (рис.4).

4. Неравенство $\cos x \leq a$.

При $a < -1$ неравенство $\cos x \leq a$ не имеет решений.

При $a \geq 1$ решением неравенства $\cos x \leq a$ является любое действительное число.

При $a = -1$ решение неравенства $\cos x \leq a$ сводится к решению уравнения $\cos x = -1$.

При $-1 < a < 1$ решение неравенства $\cos x \leq a$ выражается в виде $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$ (рис.4).

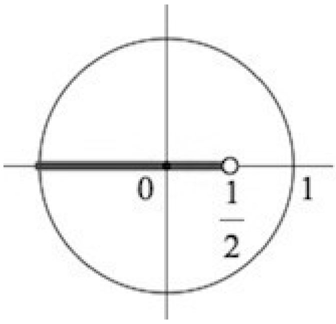
<u>Примеры</u>.

3. Решить неравенство $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

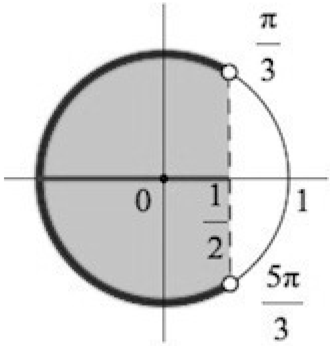
Решение.

Отмечаем на оси косинусов значение $\frac{1}{2}$. Все значения $\cos x$ меньшие $\frac{1}{2}$ расположены левее точки $\frac{1}{2}$ на оси косинусов.

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $2\pi - \arccos \frac{1}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.









Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{3}+2\pi n, \quad n \in Z$

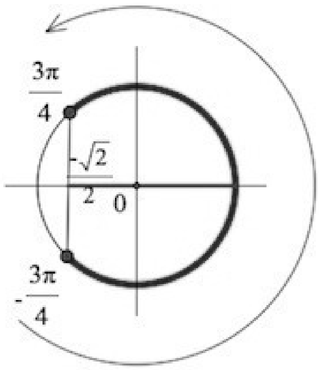
4. Решить неравенство $\cos\left(3x-\frac{5\pi}{3}\right) \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

Обозначим $3x-\frac{5\pi}{3}$ за $u$. Получим неравенство $\cos u \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отмечаем на оси косинусов значение $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Все значения $\cos u$ большие $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ расположены правее точки $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ на оси косинусов.

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, $-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\pi}{4}$.





$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le u \le \frac{3\pi}{4}+2\pi n, \quad n \in Z$;

$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le 3x-\frac{5\pi}{3} \le \frac{3\pi}{4}+2\pi n, \quad n \in Z$;

$-\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{3}+2\pi n \le 3x \le \frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{3}+2\pi n, \quad n \in Z$;

$\frac{11\pi}{12}+2\pi n \le 3x \le \frac{29\pi}{12}+2\pi n, \quad n \in Z$;

Ответ: $\frac{11\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \le x \le \frac{29\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3}, \quad n \in Z$.

### 5.3. Неравенства вида $tgx > a$, $tgx < a$, $tgx \ge a$, $tgx \le a$.

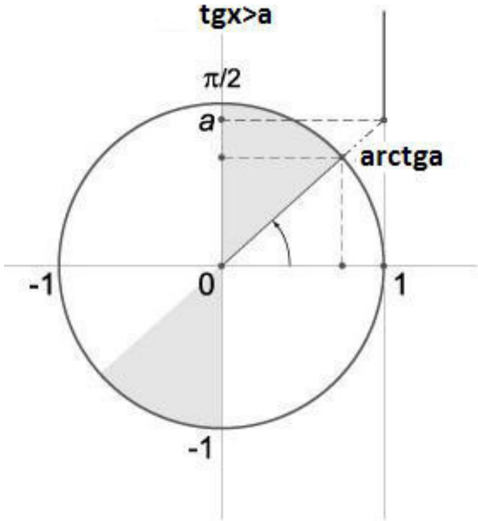



**Рис.5**

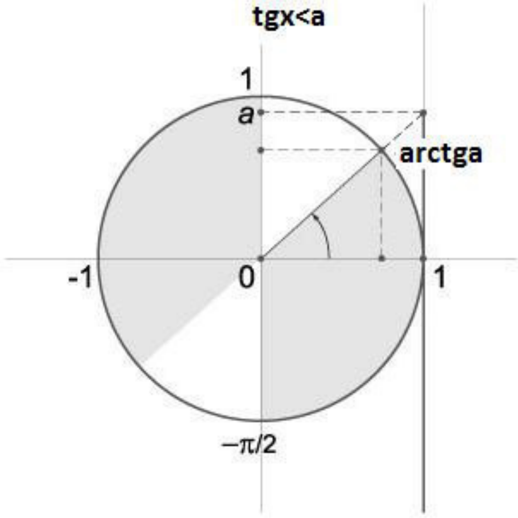



**Рис.6**

1. Неравенство $tgx > a$.

При любом действительном $a$ решение неравенства имеет вид:
$arctga + \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.5).

2. Неравенство $tgx \geq a$.

При любом действительном $a$ решение неравенства имеет вид:
$arctga + \pi n \leq x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.5).

3. Неравенство $tgx < a$.

При любом действительном $a$ решение неравенства имеет вид:
$-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.6).

4. Неравенство $tgx \leq a$.

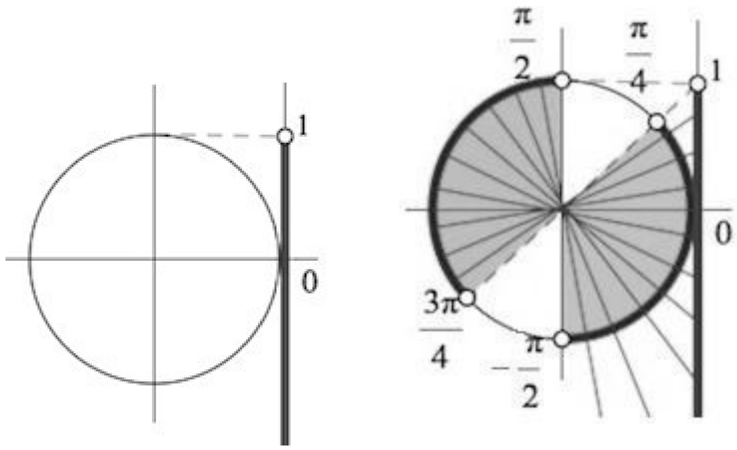
При любом действительном $a$ решение неравенства имеет вид:
$-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \leq arctga + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.6).

<u>Примеры.</u>

5. Решить неравенство $tgx < 1$.

Решение.

Отмечаем на оси тангенсов значение 1. Указываем все значения тангенса, меньшие 1 –**ниже** 1.




Отмечаем все точки тригонометрического круга, значение тангенса в которых будет меньше 1. Для этого мы соединяем каждую точку оси тангенсов ниже 1 с началом координат; тогда каждая проведенная прямая пересечет дважды тригонометрический круг.

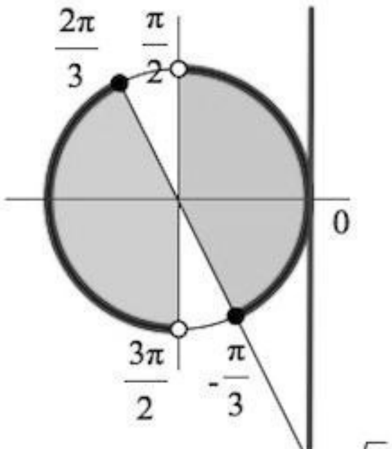
Учитывая, что период тангенса равен $\pi$, запишем ответ в виде: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n \in Z$.

6. Решить неравенство $tg\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right) \geq -\sqrt{3}$.

Решение.

Обозначим $2x-\frac{2\pi}{3}$ за $u$. Получим неравенство $tgu \geq -\sqrt{3}$.

Отмечаем на оси тангенсов значение $-\sqrt{3}$. Указываем все значения тангенса, большие $-\sqrt{3}$ – **выше** $-\sqrt{3}$.




$$-\frac{\pi}{3}+\pi n \leq u < \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n \in Z;$$

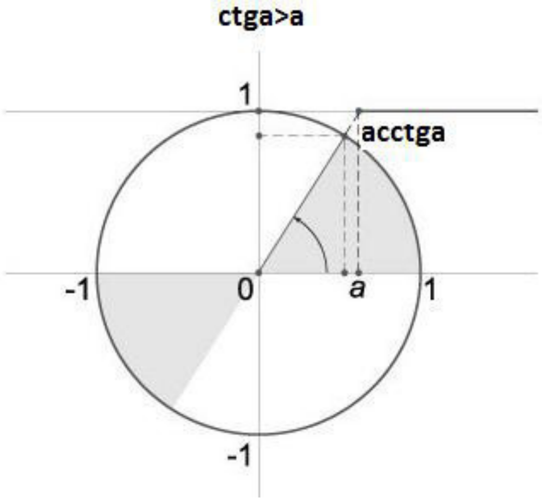
$$-\frac{\pi}{3}+\pi n \leq 2x-\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n \in Z;$$

$$-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\pi n \leq 2x < \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ \ n \in Z;$$

$$\frac{\pi}{3}+\pi n \leq 2x < \frac{7\pi}{6}+\pi n,\ \ n \in Z;$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2} \leq x < \frac{7\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$.

### 5.4. Неравенства вида $ctgx > a$, $ctgx < a$, $ctgx \geq a$, $ctgx \leq a$.



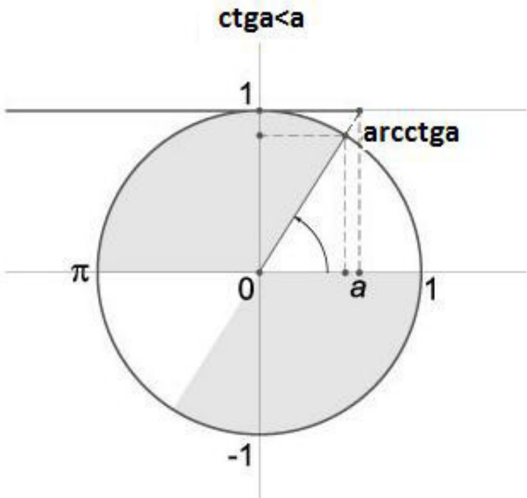




**Рис.7** **Рис.8**

1. Неравенство $ctgx > a$.

При любом действительном $a$ решение неравенства имеет вид:
$\pi n < x < arcctga + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.7).

2. Неравенство $ctgx \geq a$.

При любом действительном $a$ решение неравенства имеет вид:
$\pi n < x \leq arcctga + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.7).

3. Неравенство $ctgx < a$.

При любом действительном $a$ решение неравенства имеет вид:
$arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.8).

4. Неравенство $ctgx \leq a$.

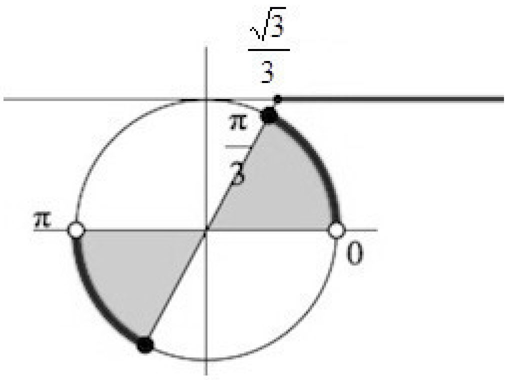
При любом действительном $a$ решение неравенства имеет вид:
$arcctga + \pi n \leq x < \pi + \pi n, \quad n \in Z$ (рис.8).

<u>Примеры.</u>

7. Решить неравенство $ctgx \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

Отмечаем на оси котангенсов значение $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Указываем все значения котангенса, большие $\frac{\sqrt{3}}{3}$ – правее $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



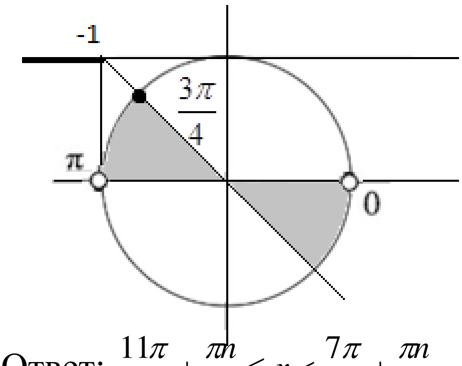

Учитывая, что период котангенса равен $\pi$, запишем ответ в виде: $\pi n < x \le \frac{\pi}{3} + \pi n, \ \ n \in Z$.

8. Решить неравенство $ctg\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \le -1$.

Решение:

Обозначим $3x - \frac{\pi}{6}$ за $u$. Получим неравенство $ctgu \le -1$.

Отмечаем на оси котангенсов значение -1. Указываем все значения котангенса, меньшие -1 – левее -1.




$\frac{3\pi}{4} + \pi n \le u < \pi + \pi n, \ \ n \in Z$;

$\frac{3\pi}{4} + \pi n \le 3x - \frac{\pi}{6} < \pi + \pi n, \ \ n \in Z$;

$\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi n \le 3x < \pi + \frac{\pi}{6} + \pi n, \ \ n \in Z$;

$\frac{11\pi}{12} + \pi n \le 3x < \frac{7\pi}{6} + \pi n, \ \ n \in Z$;

Ответ: $\frac{11\pi}{36} + \frac{\pi n}{3} \le x < \frac{7\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \ \ n \in Z$.

**ИЗ № 5.**

1. Решите простейшее тригонометрическое неравенство.

1.1. $\sqrt{3}tgx - 3 \le 0$;

1.2. $2\cos x + \sqrt{3} \ge 0$;

1.3. $\sqrt{2} - 2\cos x > 0$;

1.4. $\sqrt{3}tgx + 3 < 0$;

1.5. $3tgx + \sqrt{3} \ge 0$;

1.6. $\sqrt{3} + 2\sin x < 0$;

1.7. $1 - 2\sin x \le 0$;

1.8. $2\sin x + \sqrt{3} \ge 0$;

1.9. $2\sin x + 1 < 0$;

1.10. $\sqrt{2} - 2\sin x > 0$;

1.11. $\sqrt{3} - tgx < 0$;

1.12. $2\cos x + \sqrt{2} \ge 0$;

1.13. $\sqrt{3} - 2\cos x > 0$;

1.14. $3ctgx + \sqrt{3} \le 0$;

1.15. $2\cos x + 1 > 0$;

1.16. $2\sin x - \sqrt{2} < 0$;

1.17. $\sqrt{3} - 3ctgx > 0$;

1.18. $2\cos x - \sqrt{3} \le 0$;

1.19. $3tgx-\sqrt{3}\ge 0$;

1.20. $\sqrt{3}-2\sin x\ge 0$;

1.21. $\sqrt{3}ctgx-3<0$;

1.22. $2\cos x-\sqrt{2}\le 0$;

1.23. $1-2\cos x<0$;

1.24. $2\sin x-\sqrt{3}>0$;

1.25. $\sqrt{3}ctgx+3\le 0$;

1.26. $3ctgx-\sqrt{3}>0$;

1.27. $2\sin x-1\ge 0$;

1.28. $2\sin x+\sqrt{2}<0$;

1.29. $3tgx+3\le 0$;

1.30. $\sqrt{3}-2\cos x>0$.

2.

3. Решить тригонометрическое неравенство.

3.1. $tg\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.2. $ctg\left(\frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)>-1$;

3.3. $tg\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)\ge\sqrt{3}$;

3.4. $ctg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.5. $ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.6. $tg\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\le -1$;

3.7. $ctg\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)\ge-\sqrt{3}$;

3.8. $tg\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)\le 1$;

3.9. $ctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{6}\right)>\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.10. $tg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\le -1$;

3.11. $ctg\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1$;

3.12. $tg\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)>-\sqrt{3}$;

3.13. $ctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)<1$;

3.14. $ctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\le-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.15. $tg\left(\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{6}\right)>-1$;

3.16. $tg\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\le -1$;

3.17. $ctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}$;

3.18. $ctg\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)\le\sqrt{3}$;

3.19. $tg\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>1$;

3.20. $ctg\left(\frac{1}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.21. $tg\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)\geq\sqrt{3}$;

3.22. $ctg\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)>-1$;

3.23. $tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<1$;

3.24. $ctg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq-\sqrt{3}$;

3.25. $\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3.26. $ctg\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.27. $tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)>-1$;

3.28. $ctg\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3.29. $tg\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)<-\sqrt{3}$;

3.30. $ctg\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)\geq 1$.