Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Практикум
по дисциплине
«Высшая математика»

Брянская область 2020

УДК 517.31 (076.5)
ББК 22.161.6
Р 19

Ракул, Е. А. **Неопределенный интеграл:** практикум по дисциплине «Высшая математика» / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2020. – 40 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 20.03.02 Природообустройство и водопользование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 35.03.06 Агроинженерия. Учебно-методическое пособие может быть использовано как для работы на практических занятиях, так и для самостоятельной работы студентов.

Рецензенты:
Рыжик В.Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры автоматики, физики и математики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 13.01.2020 г., протокол № 3.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Непосредственное интегрирование	4
2	Интегрирование методом подстановки	8
3	Интегрирование по частям	12
4	Интегрирование рациональных функций	15
5	Интегрирование тригонометрических функций	21
6	Интегрирование иррациональных функций	27
7	Смешанные задачи	37
	Литература	39

1 НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Задача отыскания первообразной для данной функции $f(x)$ решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C- произвольная постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$, так как $(F(x)+C)' = f(x)$.

Общее выражение $F(x)+C$ совокупности всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной*:

$$\int d\, f(x) = f(x) + C.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла*:

$$\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx.$$

4. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций*:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm m}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm m}\right| + C$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*.

Метод *непосредственного интегрирования* основан на прямом применении основных свойств неопределенного интеграла и таблицы основных интегралов.

1.1. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{2x^4 - 5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \, dx$; 2) $\int \frac{x^2}{9-x^2} \, dx$; 3) $\int \left(1-6^x\right)^2 dx$;

4) $\int ctg^2 x dx$; 5) $\int 8\sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Решение.

1) Разделим почленно числитель на знаменатель; в результате подынтегральная функция раскладывается на слагаемые, каждое из которых проинтегрируем:

$$\int \frac{2x^4 - 5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{2x^4}{x\sqrt{x}} - \frac{5x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(2x^{\frac{5}{2}} - 5x^{-\frac{1}{6}} + \frac{7}{x} \right) dx =$$

$$= 2\int x^{\frac{5}{2}} dx - 5\int x^{-\frac{1}{6}} dx + 7\int \frac{dx}{x} = 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 5 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + 7\ln|x| + C =$$

$$= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{6}} + 7\ln|x| + C = \frac{4}{7} x^3\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x^5} + 7\ln|x| + C$$

Произвольные постоянные, которые получаются при интегрировании каждого слагаемого, объединяются в одну произвольную постоянную *C*.

2) Вычтем и прибавим в числителе подынтегральной функции число 9. Получим:

$$\int \frac{x^2}{9 - x^2}\,dx = \int \frac{x^2 - 9 + 9}{9 - x^2}\,dx = \int \left(-1 + \frac{9}{9 - x^2} \right) dx = -\int dx - 9\int \frac{dx}{x^2 - 9} =$$

$$= -x - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

3) Возведем в квадрат, применяя формулу сокращенного умножения, и проинтегрируем:

$$\int (1 - 6^x)^2 dx = \int (1 - 2\cdot 6^x + 36^x) dx = \int dx - 2\int 6^x dx + \int 36^x dx =$$

$$= x - 2\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{36^x}{\ln 36} + C = x - \frac{2}{\ln 6}\cdot 6^x + \frac{36^x}{2\ln 6} + C.$$

4) Применим тригонометрическое тождество $1 + ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, тогда получим:

$$\int ctg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C.$$

5) Применим формулу понижения степени $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, получим:

$$\int 8\sin^2\frac{x}{2}\,dx = \int 4(1 - \cos x)\,dx = 4\left(\int dx - \int \cos x\,dx\right) = 4x - 4\sin x + C.$$

В задачах **1.2 – 1.54** вычислить интегралы.

1.2. $\int x^7 dx$ 1.3. $\int 6x^4 dx$ 1.4. $\int \frac{dx}{5}$ 1.5. $\int \frac{dx}{x^6}$

1.6. $\int \left(x^4 - 4x^3 + 2x + 3\right)dx$ 1.7. $\int \left(-2t^3 + 6t^2\right)dt$

1.8. $\int (x-1)(x+4)\,dx$ 1.9. $\int x^2 (x+1)(5x-3)\,dx$

1.10. $\int \frac{dx}{6\sqrt{x}}$ 1.11. $\int \sqrt[3]{x^2}\left(8\sqrt[3]{x} - 1\right)dx$

1.12. $\int \left(9t^2 - 10\sqrt[4]{t} + 3\sqrt{t}\right)dt$ 1.13. $\int \frac{dx}{12x}$

1.14. $\int \frac{1-6x+4x^2}{x^2}\,dx$ 1.15. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x\sqrt{x}}\,dx$

1.16. $\int \frac{\left(4 - 3\sqrt{x}\right)^2}{x^2}\,dx$ 1.17. $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$

1.18. $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3}\,dx$ 1.19. $\int \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}\,dx$

1.20. $\int \frac{125 - x}{\sqrt[3]{x} - 5}\,dx$ 1.21. $\int \frac{27 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} + 9}\,dx$

1.22. $\int 7^x dx$ 1.23. $\int 3^x e^x dx$ 1.24. $\int 5^{x-2} dx$

1.25. $\int \frac{32^x - 2^x}{4^x}\,dx$ 1.26. $\int 6^x (6^x + 4)dx$

1.27. $\int \left(5^x - 1\right)\left(5^{-x} + 1\right)dx$ 1.28. $\int 8\cos x\,dx$ 1.29. $\int \frac{\sin x}{9}\,dx$

1.30. $\int \frac{dx}{7\sin^2 x}$ 1.31. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$

1.32. $\int \frac{5 - 4\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ 1.33. $\int \frac{7 + 2x\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

1.34. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$ 1.35. $\int \frac{1 - \cos 2x}{6\sin x}\,dx$

1.36. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x}$ 1.37. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

1.38. $\int \frac{1 - 4ctg^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ 1.39. $\int \frac{\cos 9x + \cos 7x}{\cos 8x}\,dx$

1.40. $\int \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\cos 4x} dx$ 1.41. $\int \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\sin 5x} dx$

1.42. $\int tg^2 x\, dx$ 1.43. $\int (ctgx - tgx)^2 dx$

1.44. $\int 3\cos^2 \frac{x}{2} dx$ 1.45. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

1.46. $\int \frac{dx}{x^2+16}$ 1.47. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 1.48. $\int \frac{dx}{25-x^2}$

1.49. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ 1.50. $\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}} dx$ 1.51. $\int \frac{1+x^2}{x^4-1} dx$

1.52. $\int \frac{4-x^2}{16-x^4} dx$ 1.53. $\int \sqrt{\frac{3+x^2}{x^4-9}}\, dx$ 1.54. $\int \frac{1-2x^2}{x^2\left(1-x^2\right)} dx$

2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ПОДСТАНОВКИ

В основе интегрирования *методом постановки* (или методом замены переменной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования: если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u(x)$- произвольная дифференцируемая функция переменной x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где t - новая переменная, а $\varphi(t)$- непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной имеет вид

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Функцию $\varphi(t)$ выбирают так, чтобы правая часть формулы (1) приобрела наиболее удобный для интегрирования вид;

2) $u = \psi(x)$, где u- новая переменная. В этом случае формула замены переменной принимает вид

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \qquad (2)$$

2.1. Вычислить интегралы:

1) $\int \sin 3x dx$ 2) $\int \frac{x^2}{8+x^3}dx$ 3) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx$

4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$ 5) $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Решение.

1) Данный интеграл окажется табличным, если заменить $t = 3x$. Получим:

$$\int \sin 3x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x \\ dt = (3x)'dx = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

2) Полагая $t = 8 + x^3$, получим

$$\int \frac{x^2}{8+x^3}dx = \left| \begin{array}{l} t = 8 + x^3 \\ dt = \left(8 + x^3\right)'dx = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|8 + x^3\right| + C.$$

3) Положим $t = \sin x$, получим

$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = (\sin x)'dx = \\ = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C.$$

4) К табличному данный интеграл сводится подстановкой $t = e^x$:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{e^x}{3} + C.$$

5) $$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x = t^3, \quad t = \sqrt[3]{x} \\ dx = (t^3)'dt = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t}{t^2} \cdot 3t^2 dt = 3\int \cos t dt = 3\sin t + C =$$

$$= 3\sin\sqrt[3]{x} + C.$$

6)

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{t},\;\; t=\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \\ \sqrt{1+x^2}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\end{array}\right|=-\int\frac{tdt}{t^2\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$=-\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+C.$$

В задачах **2.2 – 2.63** вычислить интегралы методом подстановки.

2.2. $\int\cos 5x dx$ 2.3. $\int\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)dx$ 2.4. $\int(12x-5)^7\,dx$

2.5. $\int\sqrt{8x+9}dx$ 2.6. $\int\frac{dx}{(5-3x)^4}$ 2.7. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{9x-7}}$

2.8. $\int\frac{dx}{6x+5}$ 2.9. $\int\frac{dx}{11-4x}$ 2.10. $\int e^{4-3x}dx$

2.11. $\int 6^{5x+2}dx$ 2.12. $\int\frac{dx}{16+25x^2}$ 2.13. $\int\frac{dx}{1-16x^2}$

2.14. $\int\frac{dx}{4x^2-9}$ 2.15. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$ 2.16. $\int x\sqrt{x^2-7}dx$

2.17. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ 2.18. $\int\frac{e^xdx}{\left(e^x-5\right)^3}$ 2.19. $\int\frac{xdx}{x^2+6}$

2.20. $\int\frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$ 2.21. $\int\frac{2x-3}{4+3x-x^2}dx$ 2.22. $\int\frac{(6x-5)dx}{\sqrt{3x^2-5x+4}}$

2.23. $\int\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ 2.24. $\int\frac{10x-3x^2}{x^3-5x^2}dx$ 2.25. $\int\frac{e^xdx}{2e^x+7}$

2.26. $\int tgx\,dx$ 2.27. $\int ctg5x\,dx$ 2.28. $\int\frac{\left(8-\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}dx$

2.29. $\int \frac{dx}{\left(6+\sqrt[3]{x}\right)^4 \sqrt[3]{x^2}}$

2.30. $\int \frac{e^{3/x}}{x^2}dx$

2.31. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

2.32. $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x}dx$

2.33. $\int x^2 6^{1-x^3}dx$

2.34. $\int \sqrt[4]{e^{3x}+8}e^{3x}dx$

2.35. $\int \frac{4^x dx}{7+4^x}$

2.36. $\int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}}dx$

2.37. $\int \frac{7^x dx}{\sqrt{49^x+1}}$

2.38. $\int \sin x\cos^2 x dx$

2.39. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

2.40. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}$

2.41. $\int \frac{\sqrt{5tgx}}{\cos^2 x}dx$

2.42. $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{ctg^4 x}\cdot \sin^2 x}$

2.43. $\int \frac{\sqrt[4]{arctgx}}{1+x^2}dx$

2.44. $\int \frac{1-4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2.45. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)arcctgx}$

2.46. $\int \sqrt{1-2\sin x}\cos x dx$

2.47. $\int e^{4\cos x-1}\sin x dx$

2.48. $\int \cos^2 x dx$

2.49. $\int \sin^2 2x dx$

2.50. $\int \frac{\cos x dx}{2+\sin^2 x}$

2.51. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x-5}$

2.52. $\int \cos\left(\frac{2}{x^3}\right)\frac{dx}{x^4}$

2.53. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-9}}$

2.54. $\int \frac{x^3}{\sin^2 x^4}dx$

2.55. $\int \frac{dx}{\sin x}$

2.56. $\int \frac{dx}{\cos x}$

2.57. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$

2.58. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$

2.59. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$

2.60. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

2.61. $\int \sqrt{9-x^2}dx$

2.62. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

2.63. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Метод *интегрирования по частям* основан на применении формулы:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \qquad (1)$$

где u, v - непрерывно дифференцируемые функции переменной x.

Существует несколько классов функций, интегрируемых по частям. Рассмотрим их более подробно.

1) Для вычисления интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x) arctgx dx$, $\int P(x) arcctgx dx$, где $P(x)$ - некоторый многочлен, необходимо принять $u=\ln x$, или $u=\arcsin x$, или $u = arctgx$ и т.д., а $dv = P(x)dx$.

2) Для вычисления интегралов вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$ следует принять $u=P(x)$, а $dv = e^{kx}dx$, или $dv=\sin kx\,dx$, или $dv = \cos kx\,dx$.

3) Интегралы вида $\int e^{kx}\cos mx dx$, $\int e^{kx}\sin mx dx$ вычисляются с помощью двукратного применения формулы (1), и затем решением уравнения относительно исходного интеграла. При этом нет разницы, что обозначить за функцию u и за дифференциал dv.

3.1. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ 2) $\int (x-5)\cos x\,dx$ 3) $\int x^2 e^{4x}dx$

4) $\int x\,arctgx\,dx$ 5) $\int e^{-x}\sin x\,dx$.

Решение.

1) $$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x,\ dv=\dfrac{dx}{x^3} \\ du=(\ln x)'dx=\dfrac{dx}{x} \\ v=\int\dfrac{dx}{x^3}=-\dfrac{1}{2x^2} \end{array} \right| = \ln x\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + C = \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

2) $$\int (x-5)\cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x-5, \quad dv = \cos x dx \\ du = (x-5)'dx = dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = (x-5)\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= (x-5)\sin x + \cos x + C.$$

3) $$\int x^2 e^{4x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \ \ dv = e^{4x} dx \\ du = (x^2)'dx = 2xdx \\ v = \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right| = x^2 \cdot \frac{1}{4} e^{4x} - \int \frac{1}{4} e^{4x} \cdot 2xdx =$$

$$= \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2} \int x e^{4x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \ \ dv = e^{4x} dx \\ du = (x)'dx = dx \\ v = \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right| = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{8} x e^{4x} + \frac{1}{16} e^{4x} + C.$$

4) $$\int x\,arctgx\,dx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx, \ \ dv = xdx \\ du = (arctgx)'dx = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} arctgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} arctgx + C.$$

5) $$G = \int e^{-x} \sin x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{-x}, \ \ dv = \sin x dx \\ du = \left(e^{-x}\right)' dx = -e^{-x} dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = e^{-x}, \quad dv = \cos x dx \\ du = \left(e^{-x}\right)' dx = -e^{-x} dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx\right).$$

В итоге приходим к уравнению относительно искомого интеграла G:

$$G = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - G,$$

из которого находим

$$G = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x).$$

В заключение приведем *рекуррентную формулу* для вычисления интегралов вида $\int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^n}$:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^n} = \frac{x}{(2n-2) \cdot (x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} \qquad (n > 1).$$

В задачах **3.2 – 3.23** вычислить интегралы, применяя формулу интегрирования по частям.

3.2. $\int (x - 7) \sin x dx$

3.3. $\int (1 - 3x) \cos 2x dx$

3.4. $\int x^2 \cos 3x dx$

3.5. $\int x^2 \ln x dx$

3.6. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

3.7. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

3.8. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

3.9. $\int (4 - x) e^{-3x} dx$

3.10. $\int (x + 2) 3^x dx$

3.11. $\int \left(x^2 - 6x\right) e^{-x} dx$

3.12. $\int \ln\left(1 + x^2\right) dx$

3.13. $\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$

3.14. $\int arctgx dx$

3.15. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

3.16. $\int e^{2x} \cos x dx$

3.17. $\int 4^x \sin x dx$

3.18. $\int \sqrt{4 + x^2} dx$

3.19. $\int \cos \sqrt{x} dx$ (принять $t = \sqrt{x}$).

3.20. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

3.21. $\int \sin\sqrt[3]{x}dx$

3.22. $\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx$

3.23. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется *неправильной*.

Неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $W(x)$ - некоторый многочлен, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь.

Простейшими дробями I, II, III и IV типов называются правильные рациональные дроби вида:

I. $\frac{A}{x-a}$ II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$, т.е. квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

IV. $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $p^2-4q<0$, $k \geq 2$.

Любая правильная рациональная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{M_tx+N_t}{\left(x^2+px+q\right)^t} + \ldots,$$

где $A_1,\ A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1,\ N_1, \ldots, M_t,\ N_t, \ldots$.- некоторые действительные числа.

4.1. Вычислить интеграл $\int \frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx$.

Решение.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей вида:

$$\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Приравняем числители исходной и последней дробей, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$5-4x = A(x-2)+B(x+1);$$

$$5-4x = Ax-2A+Bx+B;$$

$$5-4x = (A+B)x+(-2A+B).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=-4 \\ -2A+B=5 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-3 \\ B=-1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)} = -\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2}.$$

Таким образом, искомый интеграл

$$\int \frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx = -3\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x-2} = -3\ln|x+1| - \ln|x-2| + C.$$

4.2. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx$.

Решение.

Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x(x-3)^2}.$$

Приравняем числители исходной и последней дробей, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$x^2+6 = Ax^2-6Ax+9A+Bx^2-3Bx+Cx;$$

$$x^2+6 = (A+B)x^2+(-6A-3B+C)x+9A.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -6A-3B+C=0 \\ 9A=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=2/3 \\ B=1/3 \\ C=5 \end{cases}$$

Тогда искомый интеграл равен

$$\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{5}{x-3} + C.$$

4.3. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx$.

Решение.

Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} = \frac{A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+5)}.$$

Приравняем числители исходной и последней дробей, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$x^2-6x-18 = Ax^2+2Ax+5A+Bx^2-2Bx+Cx-2C,$$

$$x^2-6x-18 = (A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(5A-2C).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B+C=-6 \\ 5A-2C=-18 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \\ C=4 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx = -2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{3x+4}{x^2+2x+5}dx.$$

Вычислим второй интеграл $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+5}dx$ отдельно. Подынтегральная функция представляет собой простейшую дробь III типа. Выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$, и выполним подстановку.

$$\int \frac{3x+4}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{3x+4}{(x+1)^2+4}dx = \left| \begin{array}{l} t = x+1 \\ x = t-1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+4}{t^2+4}dt = \int \frac{3t+1}{t^2+4}dt =$$

$$= 3\int \frac{t\,dt}{t^2+4} + \int \frac{dt}{t^2+4} = \left| \begin{array}{l} z = t^2+4 \\ dz = 2t\,dt \\ t\,dt = \frac{1}{2}dz \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} = \frac{3}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) + \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx = -2\ln|x-2| + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) + \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + C.$$

4.4. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3+x}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

Решение.

Квадратный трехчлен x^2+2x+2 не имеет действительных корней, поэтому подынтегральная функция раскладывается в сумму простейших дробей вида

$$\frac{x^3+x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+2x+2)+Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$$

Приравняем числители исходной и последней дробей, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$x^3+x = Ax^3+2Ax^2+2Ax+Bx^2+2Bx+2B+Cx+D,$$

$$x^3+x = Ax^3+(2A+B)x^2+(2A+2B+C)x+(2B+D).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} A=1 \\ 2A+B=0 \\ 2A+2B+C=1 \\ 2B+D=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \\ C=3 \\ D=4 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3+x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx .$$

Вычислим каждый интеграл отдельно.

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{x-2}{(x+1)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=x+1 \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{t-3}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+1} - 3\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z=t^2+1 \\ dz=2tdt \\ t\,dt=\frac{1}{2}dz \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - 3arctgt = \frac{1}{2}\ln|z| - 3arctgt + C = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 3arctgt + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 3arctg(x+1) + C.$$

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \int \frac{3x+4}{\left((x+1)^2+1\right)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=x+1 \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3t+1}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+1\right)^2} +$$

$$+ \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \left| \begin{array}{l} z=t^2+1 \\ dz=2tdt \\ tdt=\frac{1}{2}dz \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2} + \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z} + \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2}arctgt + C = -\frac{3}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{t-3}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}arctgt + C =$$

$$= \frac{x-2}{2\left(x^2+2x+2\right)} + \frac{1}{2}arctg(x+1) + C.$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int \frac{x^3+x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \frac{5}{2}arctg(x+1) + \frac{x-2}{2\left(x^2+2x+2\right)} + C .$$

Замечание. При вычислении второго интеграла была использована рекуррентная формула, приведенная в разделе 3.

В задачах **4.5 – 4.30** вычислить интегралы от рациональных дробей.

4.5. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx$

4.6. $\int \frac{7x+12}{(x-1)(3x+1)}dx$

4.7. $\int \frac{5x-10-x^2}{x^2-4x+3}dx$

4.8. $\int \frac{x^2-72}{x(x+4)(x-3)}dx$

4.9. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$

4.10. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$

4.11. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$

4.12. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx$

4.13. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$

4.14. $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}dx$

4.15. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$

4.16. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$

4.17. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}dx$

4.18. $\int \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2}$

4.19. $\int \frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$

4.20. $\int \frac{dx}{1-x^4}$

4.21. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-x\right)}$

4.22. $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$

4.23. $\int \frac{3x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$

4.24. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$

4.25. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$

4.26. $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx$

4.27. $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$

4.28. $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}dx$

4.29. $\int \frac{2x^3+x+1}{x^3(x+2)}dx$

4.30. $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx$.

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$, где R- рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных алгебраических функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = tg\,\frac{x}{2}$. При этом

$$\sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Однако, универсальная подстановка часто приводит к сложным вычислениям. В некоторых случаях выражение $R(\sin x,\ \cos x)$ можно привести к рациональному виду с помощью других подстановок.

1) Если $R(\sin x,\ \cos x)$ - нечетная функция относительно $\sin x$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$.

2) Если $R(\sin x,\ \cos x)$ - нечетная функция относительно $\cos x$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \sin x$.

3) Если $R(\sin x,\ \cos x)$ - четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, то целесообразно пользоваться подстановкой $t = tgx$.

5.1. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; 2) $\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x}$; 4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}\,dx$.

Решение.

1) Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $t = tg\,\frac{x}{2}$, находим $x = 2arctgt,\quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{1}{3+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{8-2t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-4} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2}{tg\frac{x}{2}-2}\right| + C.$$

2) Подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, поэтому применим подстановку $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{4+\cos x}\sin x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{4+\cos x}\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{4+t}(-dt) = \int \frac{t^2-1}{t+4}dt = \int\left(t-4+\frac{15}{t+4}\right)dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 15\ln|t+4| + C =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 4\cos x + 15\ln|\cos x + 4| + C.$$

3) Подынтегральная функция является четной относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, поэтому воспользуемся подстановкой $t = tgx$. Разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 x$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{tg^2 x - 2tgx + 3} = \left|\begin{matrix} t = tgx \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 3} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-1)^2+2} = \left|\begin{matrix} z = t-1 \\ dz = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx-1}{\sqrt{2}} + C.$$

4) Применим в данном интеграле подстановку $t = \sin x$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\cos x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^6 x}\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix}\right| = \int \frac{1-t^2}{t^6}dt =$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^4}\right)dt = -\frac{1}{5t^5} + \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C.$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$, где m и n - целые числа. Рассмотрим следующие случаи:

1) Один из показателей m или n - нечетное положительное число. В этом случае применяется подстановка $t = \cos x$ (если m - нечетное) или $t = \sin x$ (если n - нечетное).

2) Оба показателя m и n - четные неотрицательные числа. Тогда следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью тригонометрических тождеств:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

3) Показатели m и n - числа одинаковой четности (т.е. либо оба четные, либо оба нечетные), причем хотя бы один из них отрицателен. В этом случае следует применить подстановку $t = tgx$ (или $t = ctgx$).

4) Показатели m и n - числа различной четности, причем нечетный показатель является отрицательным. Вычисление таких интегралов требует специальных приемов, которые мы рассмотрим ниже при решении конкретных примеров.

5.2. Вычислить интегралы: 1) $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$; 2) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение.

1) Применяя формулы понижения степени, получим

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \cos^2 x\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin 2x \\ dt = 2\cos 2x dx \\ \cos 2x dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx + \frac{1}{8}\int t^2 \cdot \frac{1}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{16}\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

2) Применим подстановку $t = tgx$ и используем тригонометрическое тождество $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. Тогда получим

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x\left(1 + tg^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \begin{vmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{vmatrix} =$$

$$= \int t^2(1 + t^2)\,dt = \int t^2 dt + \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

3) Применим подстановку $t = ctgx$ и используем тригонометрические тождества $tgx = \dfrac{1}{ctgx}$, $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. Тогда получим

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x} = \int \frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + ctg^2 x)\cdot\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x} = \begin{vmatrix} t = ctgx \\ dt = \dfrac{dx}{\sin^2 x}\end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{1 + t^2}{t}dt = \int \frac{dt}{t} + \int t\,dt = \ln|t| + \frac{t^2}{2} + C = \ln|ctgx| + \frac{ctg^2 x}{2} + C.$$

4) Введем в числителе основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и разделим почленно числитель на знаменатель. Получим

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx.$$

Вычислим каждый из получившихся интегралов отдельно. В первом интеграле применим основное тригонометрическое тождество в числителе и тригонометрическое тождество $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ в знаменателе. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx = \begin{vmatrix} t = \cos\dfrac{x}{2} \\ dt = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}dx \\ \sin\dfrac{x}{2}dx = -2dt \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2dt}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx=\left|\begin{array}{l} z=\sin\frac{x}{2} \\ dz=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx \\ \cos\frac{x}{2}dx=2dz \end{array}\right|=-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dz}{z}=-\ln|t|+\ln|z|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{z}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+C.$$

Во втором интеграле применим формулу интегрирования по частям. Имеем

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\left|\begin{array}{l} u=\cos x,\quad dv=\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx \\ du=-\sin x\,dx \\ v=\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^3}=\int t^{-3}dt=-\frac{1}{2t^2}=-\frac{1}{2\sin^2 x} \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\int-\frac{1}{2\sin^2 x}\cdot(-\sin x)dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+C.$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{dx}{\sin x}+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C.$$

3. Интегралы вида $\int\sin mx\cos nx\,dx,\ \int\cos mx\cos nx\,dx,\ \int\sin mx\sin nx\,dx$ вычисляются с использованием соответствующих тригонометрических тождеств:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

5.3. Вычислить интеграл $\int \sin 2x \sin 3x \cos 5x\, dx$.

Решение.

$$\int \sin 2x \sin 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(2x-3x) - \cos(2x+3x)\right)\cos 5x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos x - \cos 5x\right)\cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos x \cos 5x - \cos^2 5x\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos 6x + \cos 4x}{2}\, dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 10x}{2}\, dx = \frac{1}{4}\int \cos 6x dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x dx - \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 10x dx = \frac{1}{24}\sin 6x +$$

$$+\frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{40}\sin 10x + C.$$

В задачах **5.4 – 5.41** вычислить интегралы от тригонометрических функций.

5.4. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

5.5. $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$

5.6. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$

5.7. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx$

5.8. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^2 x + \sin x}$

5.9. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x + 6\cos^2 x}$

5.10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 9\cos^2 x}$

5.11. $\int \frac{dx}{1 - \sin 2x + 3\cos^2 x}$

5.12. $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}\, dx$

5.13. $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}\, dx$

5.14. $\int \sin^5 x\, dx$

5.15. $\int \cos^7 dx$

5.16. $\int \cos^5 2x \sin^3 2x dx$

5.17. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}\, dx$

5.18. $\int \cos^4 3x\, dx$

5.19. $\int \sin^6 x\, dx$

5.20. $\int \sin^6 x \cos^4 x\, dx$

5.21. $\int \sin^2 x \cos^6 x\, dx$

5.22. $\int tg^4 x dx$

5.23. $\int ctg^5 x dx$

5.24. $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}$

5.25. $\int \frac{dx}{\sin^8 x}$

5.26. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^6 2x}$

5.27. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}\, dx$

5.28. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$

5.29. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$

5.30. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

5.31. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^3 x}$

5.32. $\int \sin 3x \cos 7x \, dx$

5.33. $\int \sin 2x \sin 9x \, dx$

5.34. $\int \cos 3x \cos 5x \cos 8x \, dx$

5.35. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \, dx$

5.36. $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos x \, dx$

5.37. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} dx$

5.38. $\int (1 + 2\cos x)^2 \, dx$

5.39. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

3.40. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$

5.41. $\int \frac{1 + tgx}{\sin 2x} dx$

6 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где a, b, c, d - некоторые числа $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$; m - натуральное число; R - рациональная функция от x и $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Такой интеграл рационализируется подстановкой $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Возведем обе части равенства в степень m:

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ откуда находим } x = \frac{b - dt^m}{ct^m - a}.$$

Тогда $dx = \left(\frac{b - dt^m}{ct^m - a}\right)' dt = \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(ct^m - a)^2} dt$.

6.1. Вычислить интеграл $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$.

Решение.

Выполним подстановку $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, получим $t^2=\dfrac{1+x}{1-x}$. Выразим отсюда переменную x:

$$t^2(1-x)=1+x,\quad t^2-t^2x=1+x,\quad t^2-1=x(t^2+1),\quad x=\frac{t^2-1}{t^2+1};$$

$$dx=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)'dt=\frac{2t\cdot\left(t^2+1\right)-\left(t^2-1\right)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Далее, имеем

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=\int t\cdot\frac{\dfrac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}}{1-\dfrac{t^2-1}{t^2+1}}=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2arctgt+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

6.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

Выполним подстановку $t=\sqrt[6]{x}$, тогда $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Выразим $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$ через переменную t:

$$\sqrt{x}=(x)^{1/2}=(x)^{3/6}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=t^3;$$

$$\sqrt[3]{x}=(x)^{1/3}=(x)^{2/6}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^2=t^2.$$

Далее получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt=6\int\left(t^2-t+1\right)dt-6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-6\ln|t+1|+C=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+$$

$$+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

2. Интеграл вида $\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где a, b, c - некоторые числа, $a \neq 0$; R- рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Рассмотрим случаи:

1) Трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни $x_1,\ x_2\ \left(x_1 \neq x_2\right)$ и $a>0$, тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{a\,(x-x_1)^2\cdot\frac{x-x_2}{x-x_1}}=|x-x_1|\sqrt{\frac{a\,(x-x_2)}{x-x_1}}.$$

В итоге получаем интеграл, рассмотренный в п.1.

2) Трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни $x_1=x_2$ (дискриминант $D=0$), тогда под знаком корня находится полный квадрат

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)^2}==|x-x_1|\cdot\sqrt{a}.$$

Поэтому исходный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции, методы интегрирования которой изложены в разделе 4.

3) Трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней (дискриминант $D<0$) и $a>0$. В этом случае интеграл рационализируется *подстановкой Эйлера* $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\cdot x$.

Если же в трехчлене ax^2+bx+c $a<0$, а $c>0$, то следует применить другую подстановку Эйлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\cdot t\pm\sqrt{c}$.

4) В том случае, когда дискриминант квадратного трехчлена $D>0$, но $\sqrt{D}$ не извлекается, интеграл рационализируется с помощью выделения полного квадрата из подкоренного выражения. Далее необходимо выполнить подстановку.

6.3. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

Решение.

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена $-x^2+4x-3$ положителен, то разложим его на линейные множители по формуле: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_1,\ x_2$ - корни квадратного трехчлена.

Имеем: $x^2-4x+3=0,\quad x_1=1,\ \ x_2=3$. Тогда

$$-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)=(x-1)(3-x).$$

$\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{(x-1)(3-x)}=\sqrt{(x-1)^2\,\frac{3-x}{x-1}}=|x-1|\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$. Раскроем знак модуля в области определения подынтегральной функции.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$. Область определения функции определяется системой неравенств:

$$\begin{cases}-x^2+4x-3>0\\ x-2\neq 0\end{cases}\quad \begin{cases}1<x<3\\ x\neq 2\end{cases}$$

Значит, область определения подынтегральной функции $D(f)=(1;\,2)\cup(2;\,3)$. На этом множестве по определению модуля $|x-1|=x-1$.

Таким образом, исходный интеграл сводится к интегралу вида

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-1)\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}}.$$

Выполним в этом интеграле подстановку $t=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$. Тогда $t^2=\frac{3-x}{x-1}$, выражая отсюда x, получим:

$$x=\frac{t^2+3}{t^2+1},\quad dx=\left(\frac{t^2+3}{t^2+1}\right)'dt=\frac{2t\cdot(t^2+1)-(t^2+3)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{-4t\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-1)\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}}=\int\frac{\frac{-4t\,dt}{(t^2+1)^2}}{\left(\frac{t^2+3}{t^2+1}-2\right)\left(\frac{t^2+3}{t^2+1}-1\right)\cdot t}=$$

$$=-2\int\frac{dt}{1-t^2}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}+1}\right|+C.$$

6.4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение.

Дискриминант квадратного трехчлена x^2+x+1 отрицателен ($D=-3<0$), а старший коэффициент $a>0$, поэтому применим подстановку Эйлера: $t=\sqrt{x^2+x+1}+x$. Выразим из этого равенства переменную x:

$t-x=\sqrt{x^2+x+1}$, возводим в квадрат обе части равенства

$t^2-2tx+x^2=x^2+x+1,\quad t^2-1=(2t+1)x$, откуда находим

$$x=\frac{t^2-1}{2t+1};\ dx=\left(\frac{t^2-1}{2t+1}\right)' dt=\frac{2t\cdot(2t+1)-(t^2-1)\cdot 2}{(2t+1)^2}dt=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt.$$

Тогда исходный интеграл сводится к интегралу вида

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{2t+1}+\frac{C}{(2t+1)^2}=\frac{A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+Ct}{t\cdot(2t+1)^2},$$

$$t^2+t+1=A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+Ct;$$
$$t^2+t+1=A(4t^2+4t+1)+2Bt^2+Bt+Ct;$$
$$t^2+t+1=4At^2+4At+A+2Bt^2+Bt+Ct;$$
$$t^2+t+1=(4A+2B)t^2+(4A+B+C)t+A.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях переменной t и составим систему уравнений:

$$\begin{cases}4A+2B=1\\4A+B+C=1\\A=1\end{cases}\quad\begin{cases}A=1\\2B=-3\\B+C=-3\end{cases}\quad\begin{cases}A=1\\B=-\dfrac{3}{2}\\C=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Следовательно, $\frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}=\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2}$. В итоге для исходного интеграла имеем:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}dt=2\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{2t+1}-3\int\frac{dt}{(2t+1)^2}=2\ln|t|-$$

$$-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}+C=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1\right|+$$

$$+\frac{3}{4x+4\sqrt{x^2+x+1}+2}+C.$$

6.5. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+1}}$

Решение.

Дискриминант квадратного трехчлена $D=24>0$, но корень из дискриминанта не извлекается, поэтому выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$3x^2+6x+1=3(x^2+2x+1)-3+1=3(x+1)^2-2=3\left[(x+1)^2-\frac{2}{3}\right].$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left[(x+1)^2-\frac{2}{3}\right]}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-\frac{2}{3}}}=\left|\begin{array}{l}t=x+1\\ dt=dx\end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{2}{3}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{2}{3}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-\frac{2}{3}}\right|+C.$$

6.6. Вычислить интеграл $\int\frac{3-4x}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$.

Решение.

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе под знаком корня:

$$3-4x=-\frac{1}{2}(8x+8)+7.$$

Тогда получим интеграл

$$\int \frac{3-4x}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(8x+8)+7}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{8x+8}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx + 7\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}$$

Вычислим каждый из получившихся интегралов отдельно. В первом интеграле выполним подстановку:

$$\int \frac{8x+8}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x^2+8x+9 \\ dt = (8x+8)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2}dt = 2\sqrt{t} + C =$$
$$= 2\sqrt{4x^2+8x+9} + C$$

Во втором интеграле выделим полный квадрат под знаком корня и выполним подстановку:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4(x^2+2x+1)+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4(x+1)^2+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{5}{4}}} =$$
$$= \left| \begin{array}{l} z = x+1 \\ dz = dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{5}{4}}} = \frac{1}{2}\ln\left| z + \sqrt{z^2+\frac{5}{4}} \right| + C = \frac{1}{2}\ln\left| x+1+\sqrt{(x+1)^2+\frac{5}{4}} \right| + C.$$

3. Интегралы вида

$$\int R\left(x,\ \sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$$
$$\int R\left(x,\ \sqrt{x^2+a^2}\right)dx,$$
$$\int R\left(x,\ \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрических подстановок соответственно:

$$x = a\sin t \ \text{(или } x = a\cos t\text{)};$$
$$x = a\,tgt \ \text{(или } x = a\,ctgt\text{)};$$
$$x = \frac{a}{\cos t} \ \text{(или } x = \frac{a}{\sin t}\text{)}.$$

6.7. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$.

Решение.

1) Воспользуемся подстановкой $x = 2\sin t$. Получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\, dt \end{array} \right| = \int \frac{2\cos t\, dt}{\sqrt{\left(4-4\sin^2 t\right)^3}} = \int \frac{2\cos t\, dt}{\sqrt{(4\cos^2 t)^3}} = \int \frac{2\cos t\, dt}{8\cos^3 t} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} tgt + C = \frac{1}{4}\frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{1}{4}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} + C = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C.$$

2) Применим подстановку $x = 4tgt$. С учетом тождества $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ получим

$$\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} x = 4tgt \\ dx = \dfrac{4dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{4tg^2 t + 16}}{4tgt}\cdot\frac{4\,dt}{\cos^2 t} = 4\int \frac{dt}{\cos t \cdot tgt \cdot \cos^2 t} =$$

$$= 4\int \frac{dt}{\sin t \cdot \cos^2 t} = 4\int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt = 4\int \frac{\sin t\, dt}{\cos^2 t} + 4\int \frac{dt}{\sin t} = \left| \begin{array}{l} z = \cos t \\ dz = -\sin t dt \\ \sin t dt = -dz \end{array} \right| =$$

$$= -4\int \frac{dz}{z^2} + 4\ln\left| tg\frac{t}{2} \right| = -4\left(-\frac{1}{z}\right) + 4\ln\left| tg\frac{t}{2}\right| + C = \frac{4}{\cos t} + 4\ln\left| tg\frac{t}{2}\right| + C.$$

Теперь вернемся к переменной x. Имеем

$$tgt = \frac{x}{4}, \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}, \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}},$$

$$tg\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}\left(1+\frac{4}{\sqrt{x^2+16}}\right)} = \frac{x}{4+\sqrt{x^2+16}}.$$

Итак,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx = \frac{4}{\cos t} + 4\ln\left| tg\frac{t}{2}\right| + C = \sqrt{x^2+16} + 4\ln\left|\frac{x}{4+\sqrt{x^2+16}}\right| + C.$$

3) Воспользуемся подстановкой $x = \dfrac{3}{\cos t}$. В результате получим

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \left| \begin{aligned} x &= \frac{3}{\cos t} \\ dx &= \frac{3\sin t}{\cos^2 t}\,dt \end{aligned} \right| = \int \frac{1}{\frac{27}{\cos^3 t}\cdot\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}} \cdot \frac{3\sin t\,dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{27}\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{27}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{54}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) = \frac{1}{54}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$$

Вернемся к переменной x:

$$\cos t = \frac{3}{x}, \quad \sin t = \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x},$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} = \frac{6\sqrt{x^2-9}}{x^2}, \quad t = \arccos\left(\frac{3}{x}\right).$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{54}\arccos\left(\frac{3}{x}\right) + \frac{1}{18}\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + C.$$

В задачах **6.8 – 6.45** найти интегралы от иррациональных функций.

6.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$

6.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

6.10. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

6.11. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$

6.12. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$

6.13. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

6.14. $\int \frac{dx}{\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt{x}}$

6.15. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\sqrt[6]{x^5}}\,dx$

6.16. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^2}$

6.17. $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\cdot\frac{dx}{x^2}$

6.18. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-3}{x}}\,dx$

6.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

6.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$

6.21. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

6.22. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

6.23. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$

6.24. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+3}}\,dx$

6.25. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$

6.26. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

6.27. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x}\,dx$

6.28. $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$

6.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(36-x^2\right)^3}}$

6.30. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$

6.31. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$

6.32. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$

6.33. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-25}}$

6.34. $\int \frac{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}}{x^6}\,dx$

6.35. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\,dx$

6.36. $\int x^3\sqrt{x^2-25}\,dx$

6.37. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

6.38. $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

6.39. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$

6.40. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$

6.41. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$

6.42. $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$

6.43. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\,dx$

6.44. $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$

6.45. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$

7 СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

В задачах **7.1 – 7.50** вычислить неопределенные интегралы.

7.1. $\int \frac{7^{\sqrt[4]{x}}+2}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

7.2. $\int \frac{5-3x}{2x^2-11x+12}dx$

7.3. $\int tg^7 x\, dx$

7.4. $\int \frac{6x-7}{\sqrt{5x-4-x^2}}dx$

7.5. $\int x^2 \sin 6x\, dx$

7.6. $\int \frac{9-5x}{\sqrt{2x^2+x-10}}dx$

7.7. $\int \frac{x^2+15x+6}{(2x+1)(2x-x^2)}dx$

7.8. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}+\sqrt{x-3}}$

7.9. $\int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x^4}dx$

7.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}-1)^7}$

7.11. $\int \frac{x^2-5}{(x+3)(x-1)^2}dx$

7.12. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$

7.13. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

7.14. $\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$

7.15. $\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{7+2\sqrt[5]{x^3}}}dx$

7.16. $\int \frac{8x-15}{x(x^2-4x+5)}dx$

7.17. $\int \ln(x^2+1)\,dx$

7.18. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$

7.19. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$

7.20. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x-8)^2}}$

7.21. $\int x\cos^2 x\, dx$

7.22. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

7.23. $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}$

7.24. $\int \frac{2+\cos x}{\sin x}dx$

7.25. $\frac{dx}{(x^2+2)^2}$

7.26. $\int \frac{dx}{7\cos x-4\sin x+8}$

7.27. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}$

7.28. $\int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4}\, dx$

7.29. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$

7.30. $\int \cos x \cdot \cos^2 3x\, dx$

7.31. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$

7.32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$

7.33. $\int \frac{x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}\, dx$

7.34. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 3x}$

7.35. $\int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\, dx$

7.36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x}}$

7.37. $\int arctg\sqrt{x}\, dx$

7.40. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

7.41. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin 4x}\, dx$

7.42. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}}$

7.43. $\int \frac{dx}{\sin 2x - \cos 2x}$

7.44. $\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x}\, dx$

7.45. $\int x \arcsin x\, dx$

7.46. $\int \frac{x^2 - x}{(x - 2)^3}\, dx$

7.47. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2 (x^2 + 2)}\, dx$

7.48. $\int \sqrt{x^2 + 4x}\, dx$

7.49. $\int \sqrt{1 - x^2 - 2x}\, dx$

7.50. $\int \sqrt{\frac{x}{2 - x}}\, dx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бермант А.Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа: учеб. для вузов. СПб.: Лань, 2010. 736 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1985. 384 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 253 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437223
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник: учебное пособие для академического бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 192 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/433433
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1990. 624 с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Физматлит, 2003. 336 с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учеб. для бакалавров / под ред. А.Н. Тихонова. М.: Юрайт, 2012. 607 с.
8. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2003. 304 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Практикум по дисциплине «Высшая математика»

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 16.01.2020 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 2,32. Тираж 25 экз. Изд. № 6598.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ