Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Брянская область 2023г.

УДК 517.23 (07)
ББК 22.161.1
Р 19

Ракул, Е. А. Математика: учебное пособие / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2023. – 116 с.

Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 36.03.02 Зоотехния.

Рецензенты:
Безик В.А, к.т.н., зав. кафедрой автоматики, физики и математики
Гулаков А.Н., к.б.н., доцент кафедры кормления животных, частной зоотехнии и переработки продуктов животноводства

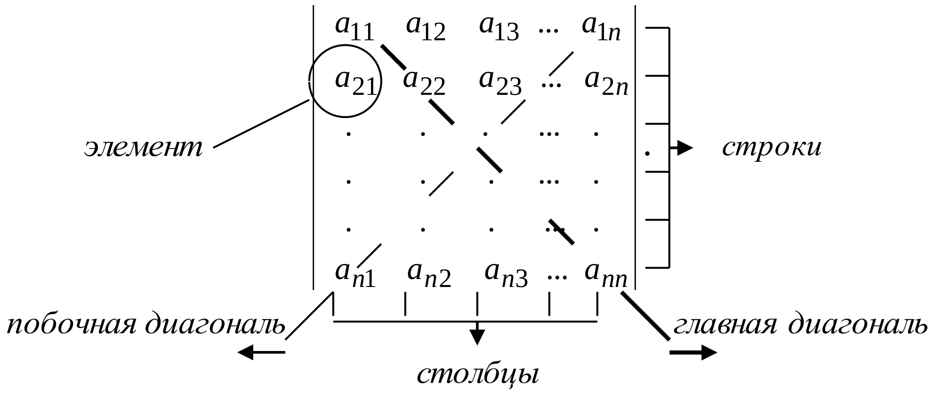
Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 28.09.2023 г., протокол №1.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

1.1 Определители второго и третьего порядка

Определение. *Определителем порядка n* называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы, имеющей n строк и n столбцов, которая раскрывается по определенному правилу.



Числа a_{ij} называются *элементами* определителя, i – номер строки, j – номер столбца. Элементы с одинаковым номером i образуют строки, а элементы с одинаковым номером j – столбцы. Элементы с равными номерами $(i = j)$ образуют *главную диагональ***.** Другая диагональ квадратной таблицы, начинающаяся в левом нижнем углу и заканчивающаяся в правом верхнем углу, называется *побочной***.**

Определение. *Определителем второго порядка* называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы размером 2 x 2, то есть имеющей 2 строки и 2 столбца.

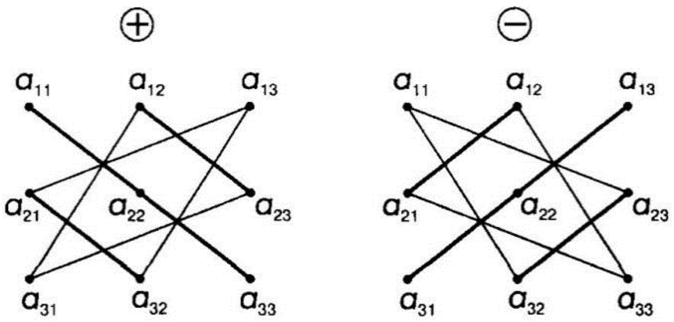
Определитель второго порядка вычисляется по правилу: *из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, надо вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали***:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Пример 1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = -13.$

Определение. *Определителем третьего порядка* называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы размером 3 х 3, то есть имеющей 3 строки и 3 столбца.

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника (Саррюса):



Пример 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 0 - (60 - 2 + 0) = -7 - 58 = -65.$

Определение. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель порядка $(n-1)$, который получается из исходного определителя порядка n путем вычеркивания строки i и столбца j, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 3. Найти миноры элементов a_{12} и a_{33} определителя из примера 2.

Вычеркивая в определителе строку 1 и столбец 2: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, получим минор $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. Поступая аналогично со строкой 3 и столбцом 3, получим минор $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Пример 4. Найти миноры элементов a_{11} и a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Исходя из определения минора M_{11}: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$, получаем $M_{11} = -2$, аналогично найдем минор $M_{21} = 1$.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется произведение минора этого элемента на $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Замечание. Из определения алгебраического дополнения следует, что алгебраическое дополнение совпадает со своим минором, если сумма $i + j$ является четным числом, и противоположно ему по знаку, если сумма $i + j$ есть нечетное число.

Определение. *Транспонированным определителем* n-го порядка называется определитель порядка n, полученный из исходного определителя путем замены строк на соответствующие столбцы, а столбцов на соответствующие строки.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, то $\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Пример 5. Найти определитель, транспонированный к определителю

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Из определения транспонированного определителя $\Delta^T = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2 Свойства определителей

1. Величина транспонированного определителя равна величине исходного определителя.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, тогда $\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Отсюда видно, что $\Delta^T = \Delta$.

2. Перестановка местами двух строк (столбцов) изменяет знак определителя на противоположный.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, тогда $\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} =$
$= -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\Delta$.

Замечание. Если поменять местами строки (столбцы) четное число раз, то величина и знак определителя не меняется. Нечетная перестановка местами строк (столбцов) не меняет величину определителя, но изменяет его знак на противоположный.

3. Определитель, содержащий две (или более) одинаковых строки (столбца), равен нулю.

Если определитель содержит два одинаковых столбца, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} -$
$- a_{21}a_{11} = 0$.

4. Для того чтобы умножить определитель на число k, достаточно умножить на это число все элементы какой-либо одной строки (столбца). Обратно: если все элементы какой-либо строки

(столбца) имеют общий множитель k, то его можно вынести за знак определителя.

Действительно,

$$k\cdot\Delta=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k\cdot a_{11} & a_{12}\\ k\cdot a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=k\,a_{11}a_{22}-k\,a_{21}a_{12}=k(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}).$$

5. Если две каких-либо строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю.

Пусть в определителе второго порядка первая и вторая строки пропорциональны, тогда

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12}\end{vmatrix}=a_{11}\,k\,a_{12}-k\,a_{11}a_{12}=k(a_{11}a_{12}-a_{11}a_{12})=0.$$

6. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Пусть в определителе второго порядка все элементы первой строки равны нулю, тогда $\begin{vmatrix}0 & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=0\,a_{22}-a_{21}0=0$.

7. Если элементы какой-либо строки (столбца) можно представить в виде двух слагаемых, то сам определитель можно представить в виде суммы двух определителей.

Если $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}+a_{11} & a_{12}\\ a_{21}+a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, то $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\Delta_1+\Delta_2$. Доказать самостоятельно.

8. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на вещественное число k и прибавить к соответствующим элементам другой строки (соответственно, столбца), то величина определителя не изменится.

Умножим элементы второго столбца на вещественное число k и прибавим результат умножения к соответствующим элементам первого столбца, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} \\ k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$ Второй определитель равен нулю по свойству 5.

Замечание. Данное свойство применяется для обнуления всех элементов какой-либо строки (столбца) за исключением одного, что существенно облегчает вычисление определителей порядка выше 3 (см. также свойство 9).

9. Метод раскрытия определителя по элементам какой-либо строки (столбца): Определитель любого порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_i a_{ij} A_{ij} = \sum_j a_{ij} A_{ij} \,.$$

Пример 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ по элементам 3 строки и по элементам 2 столбца.

Воспользуемся свойством 9: раскроем определитель по элементам 3 строки

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = (-2)\cdot M_{31} + (-3)\cdot(-M_{32}) + 4\cdot M_{33} =$$

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-3) + 3\cdot 8 + 4\cdot(-1) = 26\,.$$

Вычислим определитель по элементам 2 столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = (-1)\cdot(-M_{12}) + 1\cdot M_{22} + (-3)\cdot(-M_{32}) =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-10) + 1\cdot 12 + 3\cdot 8 = 26\,.$$

Из полученных результатов видно, что свойство 9 является универсальным методом вычисления любых определителей по элементам любой строки или столбца.

Используя свойство 8 можно обнулить все элементы какой-либо строки (столбца) за исключением одного (***метод обнуления***), а затем раскрыть определитель по элементам этой строки, воспользовавшись свойством 9.

2 МАТРИЦЫ

2.1 Понятие матрицы, виды матриц

Определение. *Матрицей* называется таблица чисел (выражений), имеющая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем писать матрицу в сокращенном виде $A = \underset{m \times n}{(a_{ij})}$, где числа a_{ij} называются *матричными элементами*, i – *номер строки*, j – *номер столбца*, выражение $m \times n$ будем называть *размерностью* матрицы или ее структурой.

Определение. Если матрица содержит m строк и 1 столбец, то она называется *матрицей-столбцом* $B = \underset{m \times 1}{(b_{ij})} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$.

Определение. Если матрица содержит 1 строку и n столбцов, то она называется *матрицей-строкой* $C = \underset{1 \times n}{(c_{ij})} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \end{pmatrix}$.

Пример 1. Следующие таблицы являются матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ \pi-1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, у которой совпадает количество столбцов с количеством строк, называется *квадратной*.

Всякой квадратной матрице соответствует определитель, составленный из тех же матричных элементов, который в теории матриц называется ещё *детерминантом матрицы* $\det A = \Delta_A$.

Определение. *Транспонированной* к исходной квадратной матрице называется такая матрица, строки которой заменены на соответствующие столбцы, а столбцы – на соответствующие строки.

Определение. Матрицу, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю, будем называть *треугольной*

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали, называется *диагональной*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Единичной* матрицей называется диагональная матрица, у которой на главной диагонали все элементы равны единице, а остальные элементы равны нулю:

$$E_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Действия над матрицами

Определение. *Суммой (разностью)* двух матриц $\underset{m\times n}{A=(a_{ij})}$ и $\underset{m\times n}{B=(b_{ij})}$ одинаковой структуры называется матрица той же размерности $\underset{m\times n}{C=(c_{ij})}$, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$.

Пример 2. Найти сумму и разность матриц

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение.

Из приведенных матриц складывать (вычитать) можно только матрицы A и C, которые имеют одинаковую структуру. Найдем сумму

$$A+C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 3+(-1) & 8+(-2)\\ 2+5 & -4+4 & 6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ 7 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

и разность этих матриц

$$A-C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-1 & 3-(-1) & 8-(-2)\\ 2-5 & -4-4 & 6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 10\\ -3 & -8 & 3\end{pmatrix}$$

При умножении действительного числа k на матрицу $\underset{m\times n}{A=(a_{ij})}$ ***все*** элементы матрицы умножаются на это число.

Пример 3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}$. Найти матрицу $-2A$.

Решение.

$$-2A=-2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-1) & -2\cdot 3 & -2\cdot 8\\ -2\cdot 2 & -2\cdot(-4) & -2\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6 & -16\\ -4 & 8 & -12\end{pmatrix}.$$

Определение. *Произведением матриц* $\underset{m\times l}{A=(a_{ij})}$ и $\underset{l\times n}{B=(b_{ij})}$ называется матрица $\underset{m\times n}{C=(c_{ij})}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{il}\cdot b_{lj}.$$

Замечание. Перемножать можно лишь те матрицы, для *которых количество столбцов первой перемножаемой матрицы совпадает с количеством строк второй перемножаемой матрицы*. Матрица, получаемая в результате перемножения, имеет количество строк равное количеству строк первой матрицы и количество столбцов равное количеству столбцов второй матрицы.

Пример 4. Найти (если это возможно) произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 3 & -2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрица A имеет структуру 2×3, матрица $B-\ 2\times 2$, матрица $C-3\times 2$. Согласно определению можно найти произведения $B\cdot A,\ A\cdot C,\ C\cdot A,\ C\cdot B$. Не существуют произведения $A\cdot B,\ B\cdot C$.

Вычислим произведение $B\cdot A$. Для того чтобы найти элементы возможных произведений, надо просуммировать произведения элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы:

$d_{11}=2\cdot(-1)+9\cdot 2=16;\qquad d_{12}=2\cdot 3+9\cdot(-4)=-30;\qquad d_{13}=2\cdot 8+9\cdot 6=70;$
$d_{21}=3\cdot(-1)+(-2)\cdot 2=-7;\quad d_{22}=3\cdot 3+(-2)\cdot(-4)=17;\quad d_{23}=3\cdot 8+(-2)\cdot 6=12.$

Отсюда следует, что $D=B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -30 & 70\\ -7 & 17 & 12\end{pmatrix}.$

Остальные возможные произведения найти ***самостоятельно***.

Замечание. Из приведенного примера видно, что в общем случае произведение матриц *некоммутативно* (неперестановочно), т. е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Определение. ***Обратной матрицей*** к исходной квадратной матрице $A=\underset{n\times n}{(\,a_{ij}\,)}$ называется матрица A^{-1} той же структуры, произведение которой с матрицей A коммутативно и равно единичной матрице, то есть $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Рассмотрим схему построения обратной матрицы A^{-1}:

– находим определитель матрицы A (Δ_A – определитель матрицы A, если $\Delta_A = 0$, то обратной матрицы ***не существует***);

– вычисляют алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов определителя Δ_A;

– записывают выражение для обратной матрицы по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Обращаем внимание на то, что матрица алгебраических дополнений записана в транспонированном виде.

Пример 5. Найти обратную матрицу к матрице $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим детерминант данной матрицы $\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, раскроем этот определитель по элементам первой строки:

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \left(-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 7 = 13.$$

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов определителя:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 9 \ .$$

Запишем обратную матрицу $C^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Проверим правильность нахождения обратной матрицы, для чего воспользуемся ее определением. Умножим найденную матрицу на исходную матрицу, вычислим элементы результирующей матрицы

$d_{11} = 6 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) = 13;$

$d_{12} = 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 0;$

$d_{13} = 6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0;$

$d_{21} = -7 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) = 0;$

$d_{22} = -7 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 13;$

$d_{23} = -7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0;$

$$d_{31} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 9 \cdot (-2) = 0;$$

$$d_{32} = -2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + 9 \cdot (-2) = 0;$$

$$d_{33} = -2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 13.$$

Таким образом, $C^{-1} \cdot C = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{(3)}$, т.е. обратная матрица найдена верно.

3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

3.1 Метод Крамера

Определение*. *Системой* *линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, где числа a_{ij}

называются *коэффициентами при неизвестных* x_j, а числа b_i называются *свободными коэффициентами*.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *главным определителем* системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Крамер предложил следующий метод решения СЛАУ: умножим главный определитель на x_1, для этого умножим все элементы первого столбца на эту неизвестную: $x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Второй столбец умножим на x_2, третий столбец – на x_3, … , n-ый столбец – на x_n и все эти произведения прибавим к первому столбцу, при этом произведение $x_1 \cdot \Delta$ не изменится:

$$x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно записи СЛАУ первый столбец получившегося определителя представляет собой столбец свободных коэффициентов, т.е.

$$x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1.$$

Определение. Определитель Δ_1 называется *первым вспомогательным определителем* СЛАУ.

Поступая аналогично тому, как описано выше, найдем все вспомогательные определители СЛАУ:

$$x_2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_2; \dots \; x_n \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix} = \Delta_n .$$

Замечание. *Для того чтобы найти вспомогательный определитель* i, *надо в главном определителе СЛАУ заменить столбец* i *на столбец свободных коэффициентов*.

Определение. Полученные выше соотношения называются *формулами Крамера*.

Используя формулы Крамера, находят неизвестные величины $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

Проанализируем полученные формулы:

– если главный определитель системы отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение;

– если главный определитель системы равен нулю ($\Delta = 0$), а хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля ($\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$, или, …, или $\Delta_n \neq 0$), то система не имеет решений (деление на ноль запрещено);

– если все определители системы равны нулю ($\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$), то система уравнений имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решить СЛАУ методом Крамера $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ y - 2z + x = 0 \end{cases}$.

Прежде всего, обращаем внимание на то, что в последнем уравнении переменные записаны в неправильном порядке, в этом случае говорят, что СЛАУ записана в ненормализованном виде. Нормализуем СЛАУ, для чего запишем неизвестные в последнем уравнении системы в правильном порядке, чтобы одноименные неизвестные были записаны друг под другом $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$. Найдем главный определитель СЛАУ

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}+(-3)\cdot\left(-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)+2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-6-9=-15.$$

Так как главный определитель системы отличен от нуля, то СЛАУ имеет единственное решение. Найдем три вспомогательных определителя

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}+(-3)\cdot\left(-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\right)+2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3-18+6=-15;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}+1\cdot\left(-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)+2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-12+3-6=-15;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}+(-3)\cdot\left(-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-6-9=-15.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-15}{-15}=1;\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-15}{-15}=1;\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-15}{-15}=1.$$

Замечание. После нахождения решения СЛАУ надо обязательно *провести проверку*, для чего найденные числовые значения неизвестных подставляется в нормализованную систему линейных алгебраических уравнений.

Выполним проверку $\begin{cases}2\cdot1-3\cdot1+2\cdot1=1\Rightarrow 1\equiv1\\ 1+1+1=3\qquad\Rightarrow 3\equiv3\\ 1+1-2\cdot1=0\qquad\Rightarrow 0\equiv0\end{cases}$. Отсюда видно, что СЛАУ решена верно.

3.2 Матричный способ решения СЛАУ

Для решения СЛАУ матричным способом введем в рассмотрение матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ и матрицу

столбец свободных коэффициентов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$. Тогда СЛАУ можно записать в матричном виде $A \cdot X = B$. Матричный способ решения СЛАУ состоит в следующем: умножим слева матричное уравнение на обратную матрицу A^{-1} к матрице A, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$; в силу того, что произведение $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, найдем $X = A^{-1} \cdot B$. Таким образом, *для нахождения неизвестных матричным способом, надо найти обратную к A матрицу A^{-1}, после чего надо умножить эту матрицу на матрицу-столбец свободных коэффициентов.*

Пример 2. Решить СЛАУ матричным способом $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$.

Введем в рассмотрение следующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1}(см. лекцию № 2): найдем определитель матрицы A $\Delta = -15$. Найдем алгебраические дополнения всех элементов Δ:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Запишем обратную матрицу $A^{-1} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ (в правильности нахождения обратной матрицы убедиться самостоятельно). Подействуем найденной матрицей на матрицу-столбец свободных коэффициентов B:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что $x = 1;\ y = 1;\ z = 1$. После нахождения решения СЛАУ необходимо сделать проверку.

3.3 Метод Гаусса

Метод Гаусса или метод исключения неизвестных состоит в том, чтобы за счет элементарных преобразований привести СЛАУ к треугольному виду. Покажем использование расширенной матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных и расширенной за счет столбца свободных коэффициентов, для приведения СЛАУ к треугольному виду на примере системы, рассматриваемой в этой лекции. Расширенная матрица для СЛАУ Примера 1 имеет вид: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Замечание. В методе Гаусса желательно, чтобы *первая строка расширенной матрицы начиналась с единицы*.

Обменяем в расширенной матрице первую и вторую строки местами, получим $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Приведем матрицу к треугольному виду, выполнив следующие преобразования: умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Разделим все элементы второй строки на (-5), получим эквивалентную матрицу

$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Умножим элементы первой строки на (-1) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$. Разделим все элементы третьей строки на (-3), получим $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Таким образом, эквивалентная СЛАУ имеет вид (напомним, что первый столбец это коэффициенты при неизвестной x, второй – при неизвестной y, третий – при неизвестной z, а за вертикальной чертой находится столбец свободных коэффициентов) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \qquad y=1 \\ \qquad z=1 \end{cases}$. Из первого уравнения находим, что $x=1$.

Вывод: *Из вышеизложенного материала следует, что вне зависимости от способа решения СЛАУ всегда должен получаться один и тот же ответ.*

Замечание. После нахождения решения СЛАУ надо обязательно выполнить проверку, то есть подставить полученные значения неизвестных в заданную СЛАУ и убедиться в тождественности левой части всех равенств системы соответствующим правым частям. Отметим, что задание СЛАУ всегда верно, то есть, если проверка показывает нарушение оговоренной тождественности, то надо искать ошибку в проведенных вычислениях.

4 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

4.1 Понятие вектора

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок $\overline{AB}$, где A – начало, а B – конец вектора.

Векторы можно также обозначать одной прописной буквой латинского алфавита со стрелочкой (или черточкой) наверху $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$.

Определение. Если начало и конец вектора $\bar{a}$ не закреплены, то он называется *свободным*.

Свободный вектор можно перемещать как вдоль его прямой, так и параллельно самому себе.

Определение. Если зафиксирована точка, которая определяет начало вектора, то она называется точкой приложения вектора.

Определение. *Длиной (модулем)* вектора $\bar{a}$ называется расстояние между началом и концом вектора и обозначается $|\bar{a}|$.

Определение. Векторы называются *коллинеарными* (Рис. 1), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначается: $\bar{a} \| \bar{b}$.

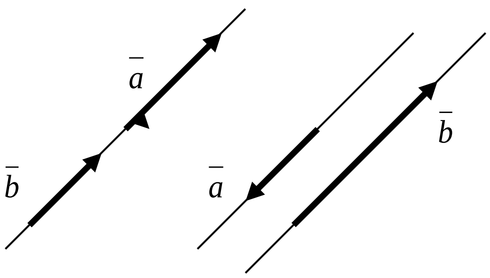


Рис. 1

Определение. Векторы называются *компланарными* (Рис. 2), если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

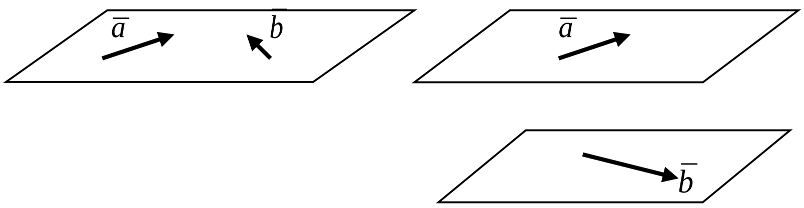


Рис. 2

Определение. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым вектором* и обозначается $\overline{AA}=\overline{0}$. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Определение. Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *сонаправленными*, если они лежат в одной полуплоскости от прямой, соединяющей их начала. Обозначаются: $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$. Нулевой вектор считают сонаправленным любому вектору.

Определение. Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *противоположно направленными*, если они лежат в разных полуплоскостях от прямой, соединяющей их начала. Обозначаются: $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$. Нулевой вектор считают противоположно направленным любому вектору.

Определение. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны, т.е. $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ и $|\bar{a}|=|\bar{b}|$. Обозначаются: $\bar{a}=\bar{b}$.

Определение. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *противоположными*, если они противоположно направлены и их длины равны, т.е. $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$ и $|\bar{a}|=|\bar{b}|$. Обозначаются: $\bar{a}=-\bar{b}$.

4.2 Линейные операции над векторами

4.2.1 Сумма векторов

Для нахождения суммы векторов применяют три основных правила:

1) правило треугольника

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарные, и пусть начало вектора $\bar{b}$ совпадает с концом вектора $\bar{a}$, тогда их суммой будет вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, начало $\bar{b}$ которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а его конец – с концом вектора $\bar{b}$ (**Рис. 3**).

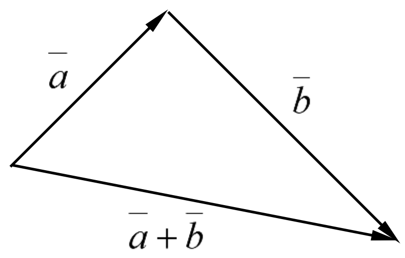


Рис. 3

2) правило параллелограмма

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарные, и пусть начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ совпадают. Построим на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллелограмм, тогда их суммой будет вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, начало которого совпадает с общим началом векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а его конец лежит в противоположной вершине параллелограмма **(**Рис. 4**)**.

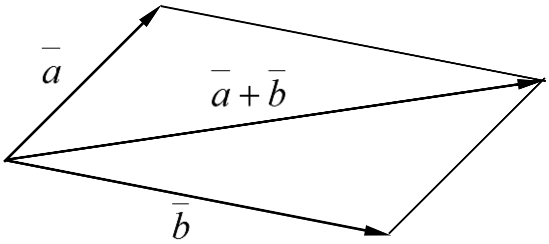


Рис. 4

3) правило многоугольника

Правило многоугольника применяется, если необходимо сложить более двух векторов. При этом каждый следующий вектор откладывается от конца предыдущего. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора в сумме с концом последнего, и будет суммой этих векторов (Рис. 5).

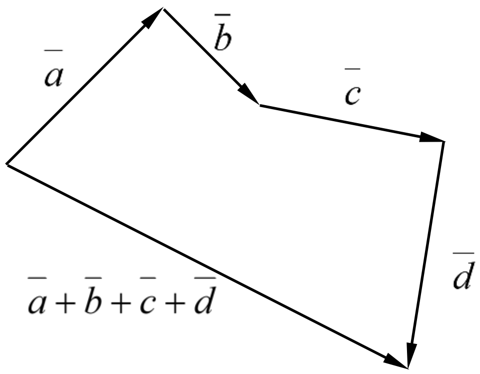


Рис. 5

4.2.2 Разность векторов

Определение. Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} - \bar{b}$, сумма которого с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$ (Рис. 6).

Вектор разности всегда направлен к тому вектору, от которого ведется вычитание. При вычитании векторы откладываются от одной точки.

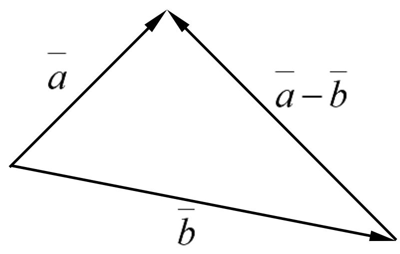


Рис. 6

4.2.3 Умножение вектора на число

Определение. Произведением вектора $\overline{a} \neq \overline{0}$ на число m называется вектор $m\overline{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\left|m\overline{a}\right| = |m| \cdot |\overline{a}|$;

2) вектор $m\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$ при $m > 0$, и $m\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$ при $m < 0$.

Из определения операции умножения вектора на число следует *первое условие коллинеарности векторов*: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если существует такое число m, что выполняется равенство $\overline{b} = m\overline{a}$.

Произведение числа на вектор обладает следующими свойствами:
– сочетательным $\lambda \cdot (\mu \cdot \overline{a}) = \mu \cdot (\lambda \cdot \overline{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overline{a}$;
– распределительным относительно чисел $(\lambda + \mu) \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{a}$;
– распределительным относительно векторов $\lambda \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b}$.

Если число $m = 0$, то в результате умножения $m \cdot \overline{a} = \overline{0}$ получают нулевой вектор.

4.3 Проекция вектора на ось

Пусть задана ось l и некоторый вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, не принадлежащий оси. Проведем через начало вектора $\overline{a}$ прямую, которая параллельна оси l, угол между прямой и вектором $\overline{a}$ обозначим через φ (Рис. 7).

Пусть точка A' – проекция начала вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на ось l, точка B' – проекция конца вектора на ту же ось. Вектор $\overline{A'B'}$ называется *составляющей* вектора $\overline{AB}$ на оси l.

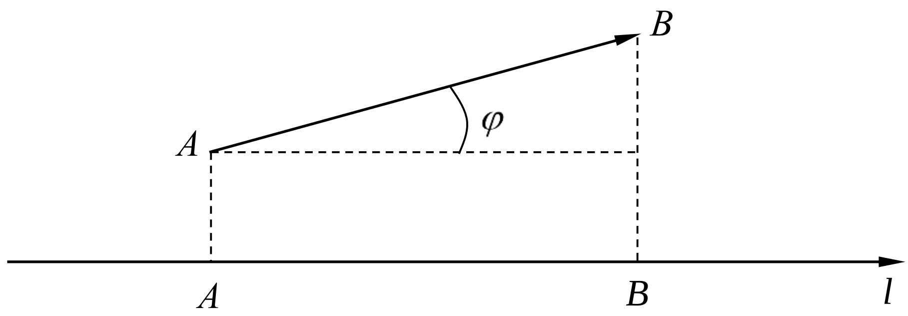


Рис. 7

Определение. *Проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* l называется длина составляющей вектора $\overline{A'B'}$, взятая со знаком «+», если $\overline{A'B'} \uparrow\uparrow l$, и со знаком «–», если $\overline{A'B'} \uparrow\downarrow l$.

Из рисунка 7 следует, что

$$np_l \overline{a} = \left| \overline{a} \right| \cdot \cos\varphi. \qquad (1)$$

Из формулы (1) вытекает, что при $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ величина $np_l \overline{a} > 0$, а при $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$ величина $np_l \overline{a} < 0$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (или $\varphi = -\frac{\pi}{2}$) проекция равна нулю, т. е. $np_l \overline{a} = 0$. Проекции обладают следующими свойствами, сформулируем их в виде теорем.

Теорема 1. Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны, то и их проекции на ось l также будут равны, т.е.

$$np_l \overline{a} = np_l \overline{b}.$$

Теорема 2. Проекция суммы векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на ось l равна сумме проекций этих векторов на ту же ось, т.е.

$$np_l (\overline{a} + \overline{b}) = np_l \overline{a} + np_l \overline{b}.$$

Теорема 3. При умножении вектора $\overline{a}$ на число m его проекция на ось l умножается на то же число, т.е.

$$np_l (m \cdot \overline{a}) = m \cdot np_l \overline{a}.$$

Определение. Направленная прямая с выбранным началом отсчета и масштабом измерения называется *числовой осью*.

Определение. Две (три) взаимно перпендикулярные числовые оси образуют *прямоугольную (декартову) систему координат* на плоскости (в пространстве).

Обозначим:

$np_{Ox}\,\overline{a} = x -$ проекцию вектора $\overline{a}$ на ось абсцисс Ox,

$np_{Oy}\,\overline{a} = y -$ проекцию вектора $\overline{a}$ на ось ординат Oy,

$np_{Oz}\,\overline{a} = z -$ проекцию вектора $\overline{a}$ на ось аппликат Oz.

Определение. Проекции x, y, z вектора $\overline{a}$ на координатные оси называются *координатами вектора* $\overline{a}$. Обозначается: $\overline{a}(x;\ y;\ z)$.

Длина вектора $\overline{a}$ определяется по формуле:

$$|\,\overline{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad (2)$$

Пусть заданы произвольные точки в пространстве: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\overline{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$. *Чтобы найти координаты вектора* $\overline{AB}$ *нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала*, т.е.

$$\overline{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1). \qquad (3)$$

Следующие формулы определяют действия с векторами в координатной форме. Пусть заданы векторы $\overline{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\overline{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, тогда

1) сумма векторов

$$\overline{a} + \overline{b}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$$

2) разность векторов

$$\overline{a} - \overline{b}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$$

3) умножение вектора на число

$$m\overline{a}\,(mx_1;\ my_1;\ mz_1).$$

4.4 Направляющие косинусы вектора

Пусть задан произвольный вектор пространства $\overline{a}(x;\ y;\ z)$. Совместим его начало с началом системы координат. Обозначим $\alpha -$ угол между вектором $\overline{a}$ и положительным направлением оси Ox; $\beta -$ угол между вектором $\overline{a}$ и положительным направлением оси Oy; $\gamma -$ угол между вектором $\overline{a}$ и положительным направлением оси Oz.

Определение. Косинусы углов α, β, γ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Тогда по формуле (1) получим, что $x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha$; $y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta$; $z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma$. Откуда получаем формулы для определения направляющих косинусов вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}. \qquad (4)$$

Вычислив квадрат модуля вектора $\bar{a}$, найдем соотношение, которое связывает направляющие косинусы вектора $\bar{a}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (5)$$

Направляющие косинусы вектора однозначно определяют его ***направление*** в пространстве.

4.5 Базис в пространстве

Определение. ***Ортом*** некоторой оси U называется вектор единичной длины в выбранном масштабе измерения, сонаправленный с этой осью $\bar{e}_U$.

Рассмотрим пространственную декартову систему координат $Oxyz$, по всем осям координат выберем одинаковый масштаб измерения. Вдоль направления каждой оси отложим отрезки единичной длины.

Обозначим орты координатных осей: Ox – через $\bar{i}$, Oy – через $\bar{j}$, Oz – через $\bar{k}$ (Рис. 8**).**

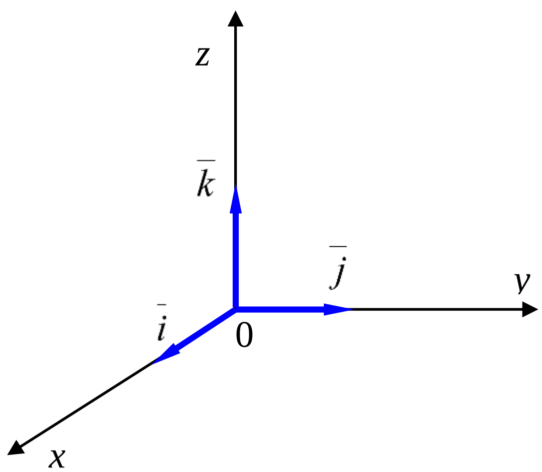


Рис. 8

Из рисунка 8 видно, что орты координатных осей имеют следующие свойства:

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1, \quad \bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}.$$

Так как векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ некомпланарные, то они образуют *базис в пространстве*: $B_3 = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. На плоскости базис состоит только из двух единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$: $B_2 = \{\bar{i}, \bar{j}\}$.

Теорема. Любой вектор пространства может быть единственным образом разложен по векторам базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, т.е.

$$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}, \qquad (6)$$

где числа x, y, z – координаты вектора $\bar{a}$.

4.6 Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (7)$$

где $\varphi = (\widehat{\bar{a}; \bar{b}})$ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если их длины равны 2 и 5, соответственно, а угол между векторами равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Используя определение скалярного определения, находим

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

Используя определения проекции вектора на ось и скалярного произведения двух векторов, можно записать, что

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot пр_{\bar{a}}\, \bar{b} = |\bar{b}| \cdot пр_{\bar{b}}\, \bar{a}. \qquad (8)$$

Откуда можно найти *проекцию одного вектора на другой*, например,

$$пр_{\bar{a}}\, \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|}.$$

Рассмотрим основные *свойства скалярного произведения*:

1. $\bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$;
2. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$;

4. $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора $\bar{a}$ равен квадрату его длины);

5. Вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$ тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Теорема. Пусть заданы векторы $\bar{a}(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $\bar{b}(x_2;\,y_2;\,z_2)$. Тогда их скалярное произведение равно

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (9)$$

Формула (9) выражает скалярное произведение векторов в координатной форме.

Следствие 1. Если вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \qquad (10)$$

Следствие 2. Если φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (11)$$

Пример 2. Найти, при каком значении m векторы $\bar{a}(m;-1;\,2)$ и $\bar{b}(3;\;m;\;-1)$ перпендикулярны.

Решение. Условием перпендикулярности векторов является обращение в нуль их скалярного произведения, поэтому воспользуемся следствием 1 из теоремы:

$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=3m-m-2=2m-2=0$, откуда находим $m=1$.

5 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

5.1 Метод координат

В данном разделе используются понятия и сведения, известные из школьного курса геометрии и векторной алгебры, такие как координаты точки на вещественной оси, вектор, координаты вектора, простейшие операции над векторами и др.

Числовая ось – это прямая с выбранным направлением, началом отсчета (началом координат) и единицей измерения (масштабом) (Рис. 9)

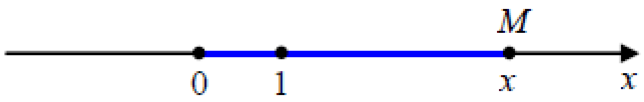


Рис. 9

Как известно из школьного курса математики, между действительными числами и точками числовой прямой можно установить *взаимно однозначное соответствие*. Вещественное число, соответствующее положению точки M на числовой оси, является *координатой* точки M.

Положение каждой точки M на числовой оси Ox однозначно определяется ее координатой x и обратно, каждой точке M соответствует единственная координата $x \in R$, где R – это множество действительных чисел. Точки числовой прямой отождествляются с действительными числами, которые им соответствуют.

Определение. *Координатной плоскостью* Oxy называется плоскость с взаимно перпендикулярными числовыми осями Ox – ось абсцисс и Oy – ось ординат. Начало отсчета (начало координат) лежит на пересечении координатных осей, единицы измерения на осях Ox и Oy одинаковы (Рис. 10).

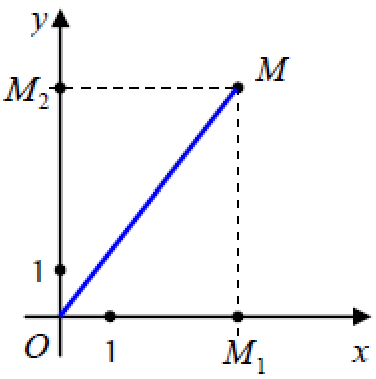


Рис. 10

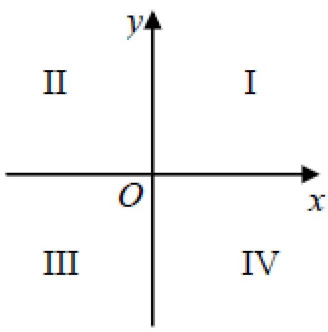


Рис. 11

Координатные углы называются *квадрантами* ***или*** *четвертями*. Для них принята нумерация, показанная на рисунке 11.

Определение. *Декартовыми прямоугольными координатами точки М на плоскости* называются координаты проекций точки M на координатные оси: координата x – абсцисса, координата y –ордината точки M.

В трехмерном пространстве рассмотрим три взаимно перпендикулярные координатные оси Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат и Oz – ось аппликат. Начало координат – точка O лежит на пересечении осей, единицы измерения на всех осях одинаковы (Рис. 12). Будем рассматривать прямоугольную правую систему координат $Oxyz$, когда при повороте от оси Ox к оси Oy направление оси Oz выбирается по правилу «правого винта» (правилу «буравчика»).

Трехгранные углы, образованные координатными плоскостями, называются октантами. Выше плоскости Oxy ($z > 0$) расположены I – IV октанты, ниже ($z < 0$) V – VIII октанты.

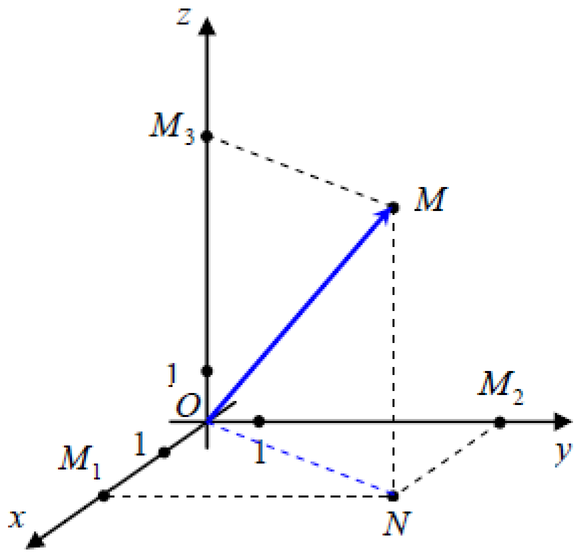


Рис. 12

Определение. *Декартовыми прямоугольными координатами точки М в пространстве* называются координаты проекций точки M на координатные оси: x – абсцисса точки M, y – ордината, z – аппликата.

5.2 Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

5.2.1 Расстояние между двумя точками

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости (Рис. 13). Найдем расстояние $d = M_1M_2$.

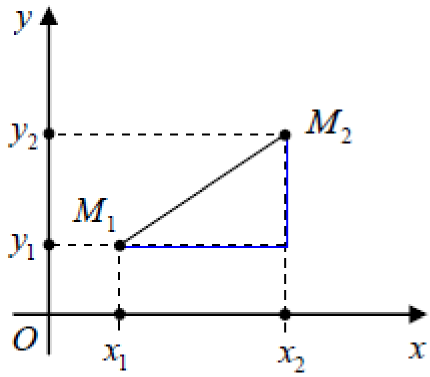


Рис.13

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника (Рис.13) получим:

$$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда находим

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (12)$$

Пример 1. Найти расстояние между точками $A(-2;\ 2)$ и $B(10;\ -3)$.

Решение. Подставляя в формулу (12) координаты точек A и B, получим

$$AB = \sqrt{(10-(-2))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13.$$

5.2.2 Деление отрезка в заданном отношении

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ на плоскости (Рис. 14). Требуется найти координаты точки $M(x;\ y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$.

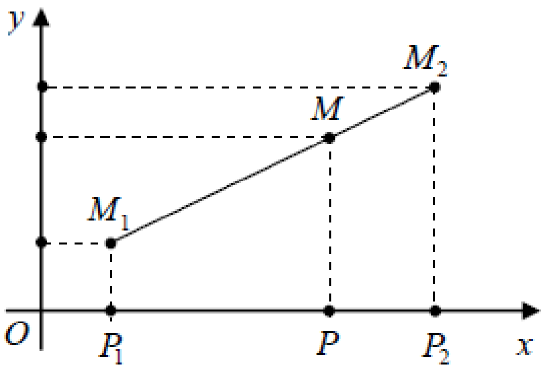


Рис. 14

По обобщенной теореме Фалеса получим $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2} = \dfrac{P_1P}{PP_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$. Выражая из последнего равенства x, получим $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. Аналогично, находим $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Таким образом, координаты искомой точки $M(x;\ y)$ определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (13)$$

Если точка $M(x;\ y)$ - середина отрезка M_1M_2, то отношение $\lambda = 1$. Тогда из формул (13) получаем формулы для определения координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (14)$$

Пример 2. Найти координаты точки *C*, которая делит отрезок *AB*, где $A(-2;\ -6)$ и $B(10;\ -3)$, в отношении $\lambda = 2$.

Решение. Подставляя координаты точек *A* и *B* в формулы (13), получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 2 \cdot 10}{1 + 2} = \frac{18}{3} = 6;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{-6 + 2 \cdot (-3)}{1 + 2} = \frac{-12}{3} = -4,$$

значит, $C(6;\ -4)$ - искомая точка.

5.3 Полярная система координат

Во многих задачах, кроме декартовых, удобно использовать полярные координаты.

Определение. Полярной осью называется луч *OE* с выбранным направлением, выходящий из полюса *O* (начало отсчета), и единицей измерения.

Определение. *Полярным радиусом* ρ точки *M* называется расстояние от точки *M* до полюса *O*. *Полярным углом* φ точки *M* называется направленный угол, отсчитываемый *против* часовой стрелки от полярной оси к вектору $\overline{OM}$.

Полярными координатами точки M называется упорядоченная пара $(\rho;\ \varphi)$ (рис. 15).

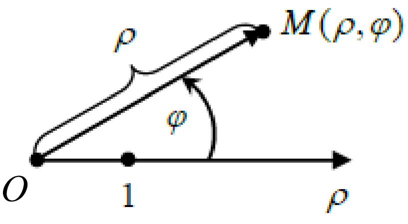


Рис. 15

Обычно полагают, что $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0;\ 2\pi)$ или $\varphi \in [-\pi;\ \pi)$. Для полюса $\rho = 0$, а угол φ не определен однозначно и может быть любым числом.

Рассмотрим *связь между полярными и декартовыми координатами.* Пусть полюс O совпадает с началом прямоугольной системы координат (Рис. 16), полярная ось OE совпадает с положительной частью оси Ox в прямоугольной системе Oxy. Тогда для произвольной точки плоскости $M(x;\ y)$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (15)$$

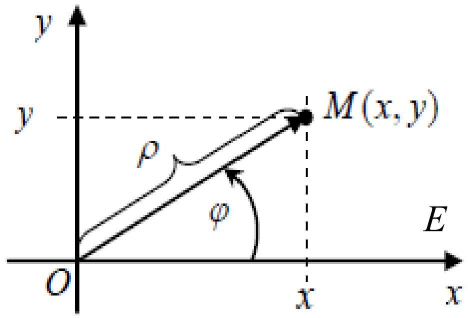


Рис. 16

Формулы (15) позволяют найти прямоугольные координаты точки по известным полярным координатам.

Полярные координаты точки M по известным прямоугольным координатам можно найти по формулам:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (16)$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (17)$$

Согласно равенству (17), если полярный угол $\varphi \in [-\pi;\ \pi)$, то в зависимости от того, в какой четверти находится точка $M(x;\ y)$, угол φ может быть найден по одной из следующих формул:

$$\varphi = \begin{cases} \text{не определен},\ x = y = 0 \\ \dfrac{\pi}{2},\ x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2},\ x = 0,\ y < 0 \\ arctg\dfrac{y}{x},\ x > 0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x},\ x < 0,\ y \geq 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x},\ x < 0,\ y < 0 \end{cases} \qquad (18)$$

Пример. Дана точка в прямоугольной системе координат $M(-2;\ 2)$. Найти полярные координаты точки M.

Решение. Полярный радиус точки М определим по формуле (16):

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Так как $x < 0,\ y > 0$, то по формуле (18) находим полярный угол

$$\varphi = \pi + arctg\left(\frac{2}{-2}\right) = \pi + arctg(-1) = \pi - arctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, точка M в полярной системе координат имеет координаты $M\left(2\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

5.4 Прямая на плоскости

В этом параграфе будет рассмотрен такой простейший геометрический объект как прямая линия на плоскости. Прямая линия на плоскости – это линия, уравнение которой может быть записано в виде $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – действительные числа, причём A и B одновременно не равны нулю. Указанное уравнение является алгебраическим уравнением первой степени. Этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на прямой линии, и не удовлетворяют координаты x и y ни одной точки, не лежащей на прямой линии.

5.4.1 Угловой коэффициент прямой

В прямоугольной системе координат рассмотрим прямую l, не параллельную оси Ox. Возьмём на прямой две точки $M_1(x_1;\ y_1),\ M_2(x_2;\ y_2)$. Угол между прямой и положительным направлением оси Ox, обозначим α (рис. 17).

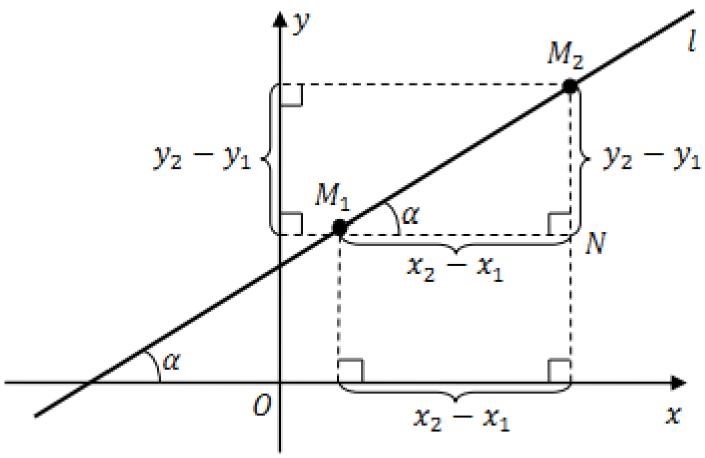


Рис. 17

Определение. Угол α называют *углом наклона* прямой. Тангенс угла наклона прямой называют *угловым коэффициентом прямой*, обозначают буквой k и записывают:

$$k = tg\alpha . \qquad (19)$$

Угловой коэффициент прямой характеризует направление прямой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_1M_2N (Рис.17): длина катета $M_1N = x_2 - x_1$; длина катета $M_2N = y_2 - y_1$.

В этом треугольнике выразим тангенс угла α:

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

Учитывая, что $k = tg\alpha$, получаем формулу для нахождения углового коэффициента прямой:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (20)$$

Если $\alpha = 0$, то $k = tg0 = 0$, и прямая параллельна оси Ox (рис. 18). В этом случае ординаты точек равны, то есть $y_1 = y_2$. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то угловой коэффициент $k = tg\frac{\pi}{2}$ не существует, и прямая параллельна оси Oy (рис.19). В этом случае абсциссы точек равны, то есть $x_1 = x_2$.

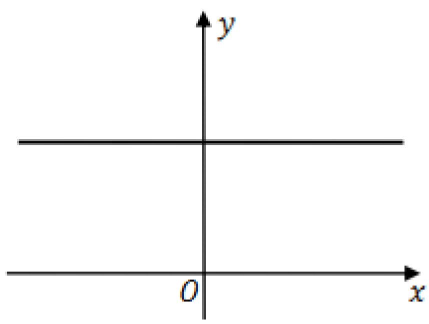


Рис.18

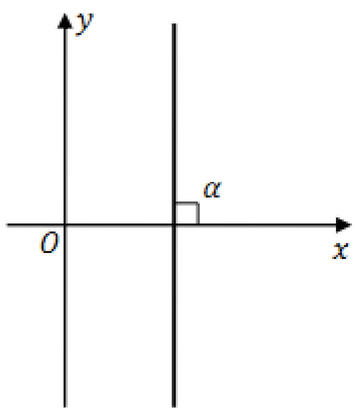


Рис. 19

5.4.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

В прямоугольной системе координат рассмотрим прямую *l*, не параллельную оси *Oy*. Будем считать, что известен угловой коэффициент прямой k и точка пересечения прямой с осью *Oy* – точка *B*(0;*b*), где *b* – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси *Oy*. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка прямой (рис. 20).

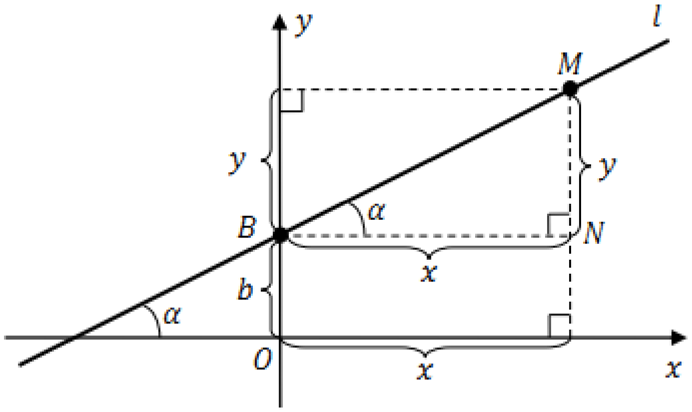


Рис. 20

Воспользуемся формулой (20) нахождения углового коэффициента прямой. В качестве первой точки возьмём точку $B(0;b)$ и в качестве второй точки – точку $M(x;y)$. С учётом этого: $k=\dfrac{y-b}{x-0}$, откуда находим

$$y=kx+b. \qquad (21)$$

Уравнение (21) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Если $b=0$, то $y=kx$, и прямая проходит через начало координат (рис.21).

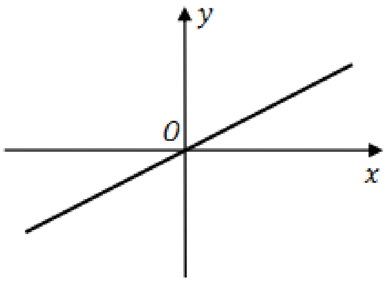


Рис. 21

Если $k=0$, то $y=b$. В этом случае прямая параллельна оси *Ox* и отсекает на оси *Oy* отрезок, величина которого равна *b* (рис. 22).

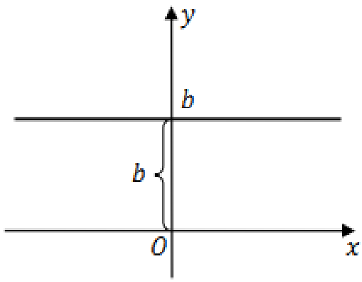


Рис. 22

Если k не существует, то прямая параллельна оси Oy и задаётся уравнением $x = a$, где a – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (рис. 23).

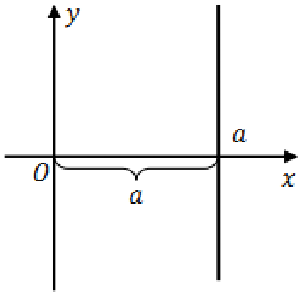


Рис. 23

Пример 1. Прямая задана уравнением $y = -4x + 3$. Найти угловой коэффициент прямой и величину отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат.

Решение.

Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. С учётом этого получаем: $k = -4,\ b = 3$.

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и наклонённой к оси абсцисс под углом 135°.

Решение.

Так как прямая проходит через начало координат, то её уравнение имеет вид $y = kx$, где k – угловой коэффициент прямой. Найдем k:

$$k = tg135^\circ = tg\left(180^\circ - 45^\circ\right) = -tg45^\circ = -1.$$

Тогда уравнение искомой прямой: $y = -x$.

Пример 3. Построить прямую $y = 3x + 4$.

Решение.

Прямая, заданная уравнением $y = 3x + 4$, пересекает ось ординат в точке $B(0; 4)$. Найдём вторую точку. Возьмём, например, $x = -2$, и $y = 3(-2) + 4 = -2$ тогда вторая точка прямой $A(-2;\ -2)$ (рис. 24).

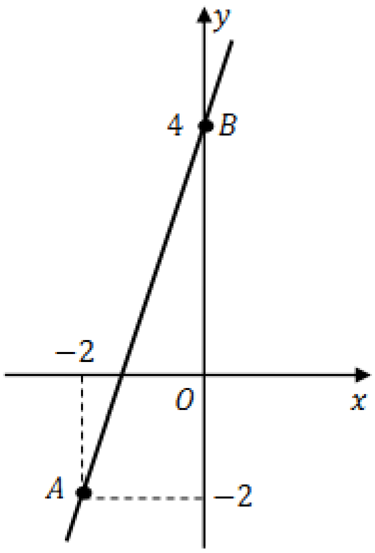


Рис. 24

5.4.3 Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

В прямоугольной системе координат рассмотрим прямую, не параллельную оси Oy. Будем считать, что известен угловой коэффициент прямой k и одна точка прямой $M_0(x_0;\ y_0)$. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка прямой.

Для составления уравнения прямой воспользуемся формулой (20) углового коэффициента прямой. Запишем формулу углового коэффициента для точек $M_0(x_0;\ y_0)$ и $M(x; y)$, получим:

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

откуда получаем уравнение вида

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (22)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом*.

Если угловой коэффициент k не задан, то полученное уравнение определяет множество прямых, проходящих через точку M_0. Множество таких прямых называют *пучком прямых*, проходящих через точку M_0.

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 4)$ и имеющей угловой коэффициент, равный 3.

Решение.

По условию задачи $x_0 = -1,\ y_0 = 4,\ k = 3$. Тогда из уравнения (22) получим:

$$y - 4 = 3(x - (-1)),$$

$$y - 4 = 3(x + 1), \text{ или } y = 3x + 7.$$

5.4.4 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

В прямоугольной системе координат рассмотрим прямую, не параллельную оси *Oy*. Будем считать, что известны две точки прямой: $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$. Пусть $M(x; y)$– произвольная точка прямой.

Воспользуемся формулой (20) углового коэффициента прямой: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя в уравнение прямой (4) угловой коэффициент и координаты точки $M_1(x_1;\ y_1)$, получим уравнение вида

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

откуда после преобразований получим уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (23)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки*.

Пример 5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-2;3)$ и $M_2(4;\ 1)$.

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой (23). По условию задачи $x_1 = -2$, $y_1 = 3,\ x_2 = 4,\ y_2 = 1$. Получим:

$$\frac{x-(-2)}{4-(-2)} = \frac{y-3}{1-3}; \quad \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{-2}.$$

Преобразуем это уравнение к виду с угловым коэффициентом:

$6(y-3) = -2(x+2); \quad 3(y-3) = -(x+2); \quad 3y - 9 = -x - 2;$

$$3y = -x + 7 \,\big|\, :3,$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

5.4.5 Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени: $Ax+By+C=0$, где A, B, C – действительные числа, причём A и B одновременно не равны нулю. Выразим из уравнения y:

$$By=-Ax-C,$$

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Полученное уравнение имеет вид $y=kx+b$, где $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$, т.е. представляет собой уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Таким образом, уравнение

$$Ax+By+C=0, \qquad (24)$$

где A, B, C – действительные числа, причём A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую и называется *общим уравнением прямой*.

Если $C=0$, то уравнение имеет вид $Ax+By=0$. Это уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

Пример 6. Преобразовать уравнение прямой с угловым коэффициентом $y=-\frac{4}{3}x+2$ к общему уравнению.

Решение.

Умножим на 3 обе части уравнения: $3y=-4x+6$. Теперь перенесем все слагаемые в левую часть уравнения: $4x+3y-6=0$ – искомое общее уравнение данной прямой.

5.4.6 Уравнение прямой в отрезках на осях

Пусть в прямоугольной системе координат прямая l, не параллельная оси Oy, пересекает координатные оси в точках $A(a;\ 0)$ и $B(0;\ b)$. Воспользуемся уравнением прямой по двум заданным точкам (23), получим:

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}, \quad \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}.$$

откуда после преобразований получим уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (25)$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой в отрезках на осях*. Здесь a и b – это величины отрезков, которые прямая отсекает на осях координат (рис. 25).

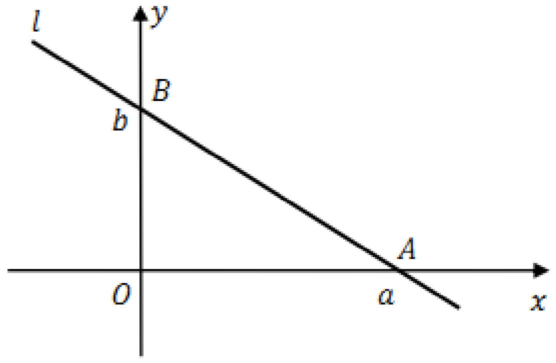


Рис. 25

Пример 7. Преобразовать уравнение прямой $3x+2y-6=0$ к уравнению прямой в отрезках на осях и построить прямую.

Решение.

Прямая $3x+2y-6=0$ задана общим уравнением. Выполним следующие преобразования:

$$3x+2y=6, \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1.$$

Получили уравнение прямой в отрезках на осях. На оси абсцисс прямая отсекает отрезок, величина которого равна 2, на оси ординат величина отрезка равна 3 (рис. 26).

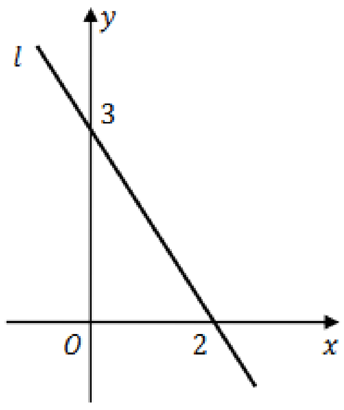


Рис. 26

5.4.7 Угол между двумя прямыми

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнением с угловым коэффициентом:

$y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, где $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$; α_1, α_2 - углы наклона прямых к оси Ox. Обозначим через α наименьший угол между прямыми l_1 и l_2 (рис. 27).

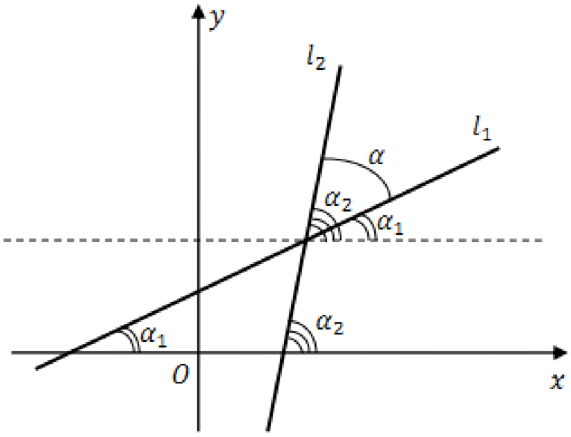


Рис. 27

Из чертежа видно, что угол $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда тангенс этого угла α равен

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}.$$

Поскольку $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$, то из последней формулы получаем

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (26)$$

По формуле (26) находят *угол между двумя прямыми*.

При нахождении угла между двумя прямыми обычно подразумевают острый угол. С учётом этого формулу можно записать в виде

$$tg\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \qquad (27)$$

В этом случае нет необходимости учитывать очерёдность прямых. Если есть необходимость учёта очерёдности прямых, то пользуются следующим правилом: *поворот от первой прямой ко второй прямой должен происходить против часовой стрелки*.

Рассмотрим взаимное расположение двух прямых на плоскости, заданных уравнением с угловым коэффициентом.

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2.$$

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и, $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, то есть $k_1 = k_2$ (рис. 28). Таким образом, равенство

$$k_1 = k_2, \qquad (28)$$

является *условием параллельности прямых*.

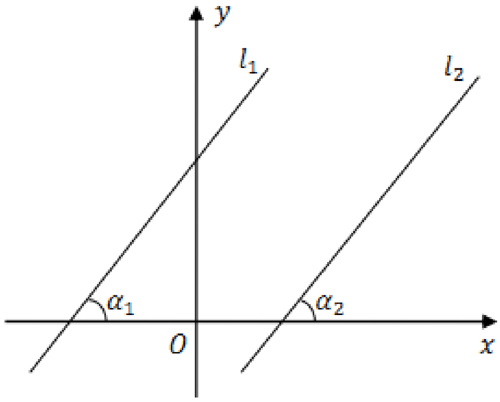


Рис. 28

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $tg\alpha$ не существует. Тогда из формулы (26) следует, что знаменатель дроби должен быть равен нулю, то есть $1 + k_1 k_2 = 0$, откуда находим, что

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \qquad (29)$$

Формула (29) является *условием перпендикулярности прямых*.

Пример 8. Найти угол между двумя прямыми: $2x + y - 5 = 0$, $6x - 2y + 1 = 0$.

Решение.

Преобразуем уравнения прямых к уравнению с угловым коэффициентом:

$$y = -2x + 5, \quad y = 3x + 0{,}5.$$

Выпишем угловые коэффициенты прямых: $k = -2,\ k = 3$. Тогда по формуле (27) находим $tg\alpha = \left|\frac{3 - (-2)}{1 + (-2)\cdot 3}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1$, значит, $\alpha = arctg 1 = 45^\circ$.

5.4.8 Расстояние от точки до прямой

Пусть в прямоугольной системе координат задана прямая l своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – действительные числа, причём A и B

одновременно не равны нулю. Пусть точка $M_0(x_0;\ y_0)$ не принадлежит прямой l.

Расстоянием от точки M_0 до прямой l называется длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую (Рис. 29).

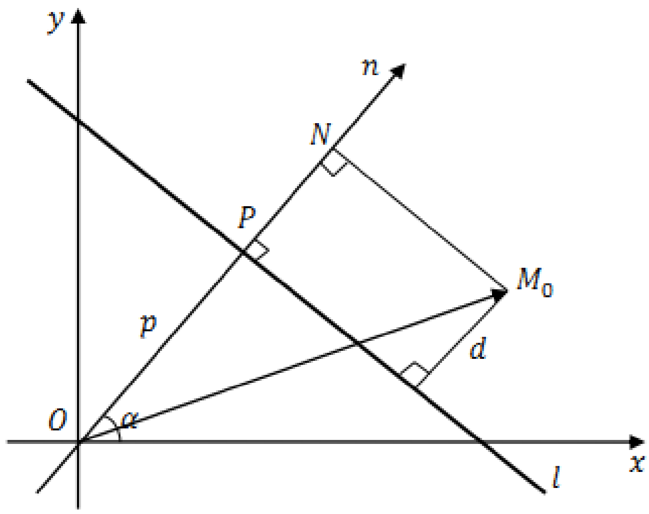


Рис. 29

Формула для вычисления расстояния d от точки M_0 до прямой l имеет вид:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (30)$$

Пример 9. Найти расстояние от точки $A(2;\ -1)$ до прямой $4x + 3y + 10 = 0$.

Решение.

По условию $x_0 = 2,\ y_0 = -1,\ A = 4,\ B = 3,\ C = 10$. Применим формулу (30):

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 - 3 + 10|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

6 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

6.1 Понятие функции

Определение. *Функцией* называется закон, по которому каждому значению независимой переменной x, называемой *аргументом*, ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной y, называемой *функцией*: $y = f(x)$, где f – характеристика функции.

Определение. *Областью определения функции* $D(y)$ называется множество допустимых действительных значений аргумента, при которых функция имеет смысл в области вещественных чисел; множество значений, которые при этом принимает функция, называется ее *множеством значений* $E(y)$.

Определение. Множество точек плоскости $(x;\ y)$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью $f(x)$, называется *графиком* функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется *четной*, если: 1) $D(y)$ симметрична относительно начала координат; 2) для любого $x \in D(y)$ выполняется $f(-x) = f(x)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если: 1) $D(y)$ симметрична относительно начала координат; 2) для любого $x \in D(y)$ выполняется $f(-x) = -f(x)$.

Определение. Если функция не является ни четной, ни нечетной, то она называется *функцией общего типа*.

Пример 1.

$y = x^2;\ \ x^4;\ \ x^6;\ \ \cos x$ – четные функции;

$y = x;\ \ x^3;\ \ x^5;\ \ \sin x;\ \ tgx;\ \ ctgx$ – нечетные функции;

$y = a^x;\ \log_a x;\ \ 2x - 4$ – функции общего вида.

Определение. Функция называется *периодической*, если существует такое действительное число T, что $\forall x \in D(y)$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$, при этом наименьшее положительное число T, при котором выполняется указанное равенство, называется *периодом* функции.

Пример 2.

$y = \cos x;\quad T = 2\pi$, так как $y(x+T) = \cos(x+2\pi) = \cos x = y(x)$.

Определение. Функция называется *возрастающей* на интервале $[a;b]$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. при $x_2 > x_1$ выполняется $f(x_2) > f(x_1)$ **(**Рис. 30**)**.

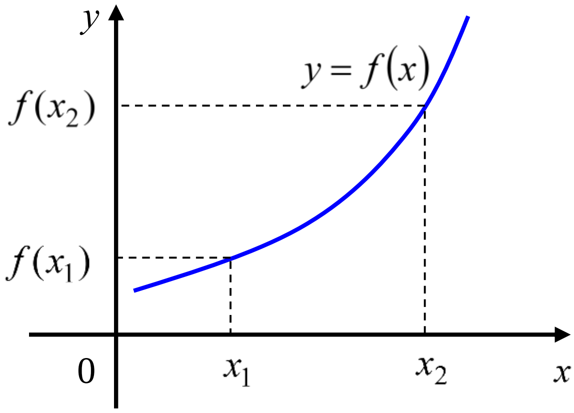


Рис. 30

Определение. Функция называется *убывающей* на интервале $[a;b]$, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции **(**Рис. 31**)**, т.е. при $x_2 > x_1$ выполняется $f(x_2) < f(x_1)$.

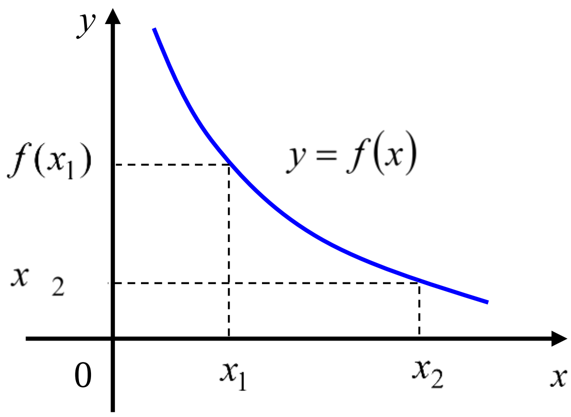


Рис. 31

Определение. Возрастающие или убывающие на интервале $[a;b]$ функции называются *монотонными* функциями.

Определение. Если на интервале $[a;b]$ функция не меняет своего значения, то она называется *постоянной*.

Пусть задана функция $y = f(x)$. Если график этой функции пересекает ось абсцисс Ox в единственной точке, то можно найти такой закон, по которому каждому значению переменной y будет поставлено в соответствие единственное значение переменной x, т.е. $x=\varphi(y)$. Такой закон соответствия называется *обратной функцией*.

Пример 3. Найти обратную функцию к функции $y=8x+5$.

Выразив переменную x из этого равенства, найдем обратную функцию $x=\dfrac{y-5}{8}$.

Функция может быть задана одним из следующих способов:

– аналитический, т.е. в виде аналитической формулы (например, $y=x^3$);

– графический, т.е. в виде графика;

– табличный, т.е. в виде таблицы

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

– словесный, т.е. функция задается на каждом интервале разными аналитическими формулами, графиком или таблицей, например,

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x>0\end{cases}.$$

Пусть дана функция $y=f(U)$, где $U=g(x)$.

Определение. Функция вида $y=f(g(x))$ *сложной* функцией, а операция ее образования *композицией функций* или взятием *функции от функции*.

Определение. Переменная U называется *промежуточным аргументом*.

Промежуточных аргументов у функции может быть несколько.

Пример 4. $y=\sin(x^2)$.

В данном примере промежуточным аргументом является $U=x^2$, а внешней функцией будет $y=\sin U$.

Пример 5. $y=\sin^2 x$.

Промежуточный аргумент будет $U=\sin x$, а внешней функцией является возведение в квадрат, т.е. $y=U^2$.

Пример 6. $y=\sqrt{\log_2(x+4)}$

В этой функции несколько промежуточных аргументов, а именно: $t=x+4$, $U=\log_2 t$, тогда $y=\sqrt{U}$.

6.2 Предел функции

6.2.1 Предел последовательности

Определение. Если область определения функции представляет собой ряд натуральных чисел, то область $D(y): 1,2,3,\ldots,n,\ldots$ называется *естественной*.

Определение. Область значений функции $E(n)$, расположенная в порядке возрастания номера n $(y_1,\ y_2,\ldots,y_n,\ldots)$, называется *последовательностью* и обозначается $\{y_n\}$.

Пример 7.

$$\{n\}=1,2,3,\ldots,n,\ldots;$$

$$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}=1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots; \qquad .$$

$$\{(-1)^n\}=-1,1,-1,1,\ldots,(-1)^n,\ldots$$

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{y_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что $\forall n\geq N$ имеет место неравенство $|y_n-a|<\varepsilon$ или в другой форме записи $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$.

Приведенное в определении неравенство с модулем можно преобразовать к виду $-\varepsilon<y_n-a<\varepsilon$ или $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$.

Выясним геометрический смысл предела a. Если a – предел последовательности $\{y_n\}$, то существует такое число $N(\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$, начиная с которого все последующие значения последовательности попадают в полосу, ограниченную прямыми $y=a-\varepsilon$ и $y=a+\varepsilon$, каким бы малым не было бы число ε. Отметим, что уменьшение числа ε до ε_1 приводит к более узкой полосе внутрь которой попадают члены последовательности, начиная с номера $N(\varepsilon_1)$ (Рис. 32).

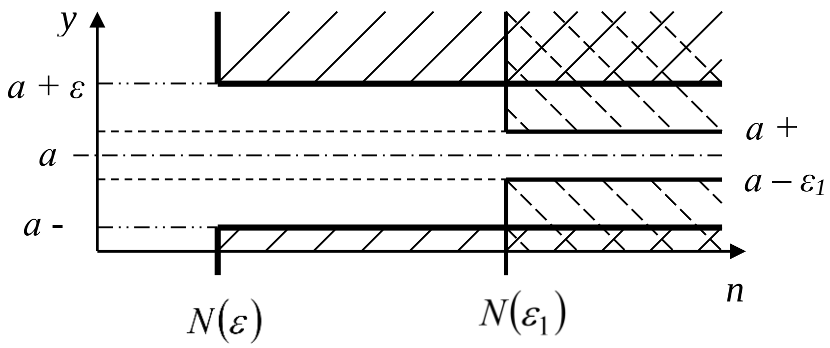


Рис. 32

6.2.2 Предел функции

Определение. *Окрестностью точки* x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку.

Определение. Интервал, симметричный относительно точки x_0 ($[x_0-\varepsilon;\, x_0+\varepsilon]$), называется ее ε-*окрестностью*.

Определение. Если областью определения функции $y=f(x)$ есть множество $D(y)$, то точка x_0 называется *точкой сгущения*, если для любого числа $\delta>0$ выполняется неравенство $|x-x_0|<\delta$ при $x\neq x_0$.

Замечание. Отметим, что точка x_0 может и не принадлежать области $D(y)$.

Определение. Если функция $y=f(x)$ определена на множестве $D(y)$ с точкой сгущения x_0, то число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ при $x\to x_0$, если для любого $\delta>0$ из выполнения неравенства $|x-x_0|<\delta$ следует выполнение неравенства $|f(x)-A|<\varepsilon$ для любого положительного числа ε.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Замечание. В качестве точки x_0 может выступать и бесконечно удаленная точка.

Пример 2. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$ при $x\to\infty$.

Решение. Перепишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$ и построим ее график при $x>0$ (Рис. 33).

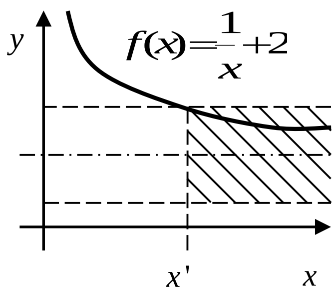


Рис. 33

Из рисунка видно, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, т.е. при $x\to\infty$ выполняется неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$. Следовательно $\left|\dfrac{1+2x}{x}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$, отсюда получаем $|x|<\dfrac{1}{\varepsilon}=\delta$. Итак, если $|x|<\delta$, то $|f(x)-2|<\varepsilon$. Из рисунка видно, начиная с некоторого значения x' все значения функции $f(x)$ лежат в интервале $[2-\varepsilon;\ 2+\varepsilon]$.

Замечание. График функции $f(x)$ может приближаться к своему предельному значению сверху, снизу или колеблясь возле прямой $y=A$ приближаясь к своему предельному значению.

Определение. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу*, если $\forall x \in D(y)$ выполняется неравенство $f(x) \geq m$ $(m \in R)$.Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху*, если $\forall x \in D(y)$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$ $(M \in R)$. Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если $\exists m, M \in R$ такие, что $\forall x \in D(y)$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

6.2.3 Односторонние пределы

Определение. Число B называется *левым односторонним пределом функции* $f(x)$ при стремлении x к x_0 слева $(x \to x_0 - 0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$ или

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = B.$$

Определение. Число C называется *правым односторонним пределом функции* $f(x)$ при стремлении x к x_0 справа $(x \to x_0 + 0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - C| < \varepsilon$ или

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = C.$$

Пример 3. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Решение. С учетом определения модуля данную функцию можно записать в виде $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \textit{не определена}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Построим график этой функции (Рис. 34):

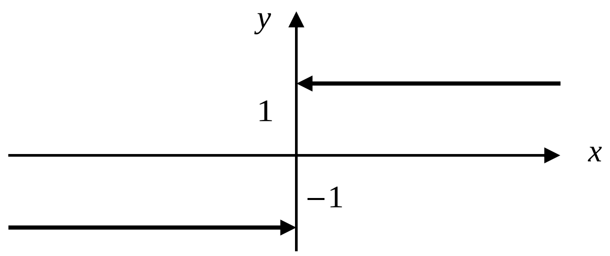


Рис. 34

Из рисунка видно, что левосторонний предел $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{|x|}{x} = -1$, а правосторонний предел $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = 1$.

Пример 4. Вычислить односторонние пределы функции $f(x) = \frac{5}{x-2}$ при $x \to 2$.

Решение. При $x \to 2-0$ (слева) знаменатель дроби стремится к малой отрицательной величине, следовательно, сама дробь стремится к $-\infty$. При $x \to 2+0$ (справа) знаменатель дроби стремится к малой положительной величине, следовательно, сама дробь стремится к ∞. Таким образом, левый односторонний предел $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{5}{x-2} = -\infty$, а правый односторонний предел $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{5}{x-2} = \infty$.

Пример 5. Найти односторонние пределы $f(x) = e^{\frac{x+1}{x+3}}$ при $x \to -3$.

Решение. При $x \to -3-0$ (слева) знаменатель дроби, стоящей в показателе степени экспоненты, стремится к малой отрицательной величине, следовательно, сама дробь стремится к $-\infty$. Если аргумент показательной функции с основанием большим единицы стремится к $-\infty$, то сама функция $f(x) \to 0$. При $x \to -3+0$ (справа) знаменатель дроби, стоящей в показателе степени экспоненты, стремится к малой положительной величине, следовательно, сама дробь стремится к ∞. Если аргумент показательной функции (основание больше единицы) стремится к ∞, то сама функция $f(x) \to \infty$. Таким образом, левосторонний предел $\lim\limits_{x \to -3-0} e^{\frac{x+1}{x+3}} = 0$, а правосторонний предел $\lim\limits_{x \to -3+0} e^{\frac{x+1}{x+3}} = \infty$.

6.2.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$ $(\pm\infty,\ x_0 \pm 0)$, если ее предел при этом равен нулю, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Пример 6. $y = \frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция при $x \to \pm\infty$; $y = x$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$.

Рассмотрим свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма (разность) конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

3. Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ конечный предел $A \neq 0$, частное

от деления бесконечно малой функции на функцию $f(x)$ есть бесконечно малая функция.

4. Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ конечный предел A, то в некоторой δ-окрестности точки x_0 ее можно представить в виде суммы предельного значения A и бесконечно малой в этой окрестности функции $\alpha(x)$, т.е. $f(x) = A + \alpha(x)$.

5. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы предельного значения A и бесконечно малой в этой окрестности функции $\alpha(x)$, т.е. $f(x) = A + \alpha(x)$, то число A является пределом данной функции.

6. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

7. Отношение бесконечно малой функции к ограниченной функции есть бесконечно малая функция.

8. Отношение двух бесконечно малых функций не определено. В этом случае говорят о неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если ее предел при этом равен $\pm\infty$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Рассмотрим свойства бесконечно больших функций:

1. Сумма бесконечно больших при $x \to x_0$ функций есть бесконечно большая функция.

2. Произведение бесконечно больших функций есть бесконечно большая функция.

3. Произведение бесконечно большой функции на ограниченную функцию есть бесконечно большая функция.

4. Отношение бесконечно большой функции к ограниченной функции есть бесконечно большая функция.

5. Разность и отношение двух бесконечно больших функций не определено. В этом случае говорят о неопределенностях вида $\infty - \infty$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Установим связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями, которая дается следующими теоремами:

Теорема 1. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией, то в этой же окрестности функция $f(x) = \dfrac{C}{\alpha(x)}$ $(C \in R)$ будет бесконечно большой функцией.

Теорема 2. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $f(x)$ является бесконечно большой функцией, то в той же самой окрестности функция $\alpha(x) = \dfrac{C}{f(x)}$ $(C \in R)$ будет бесконечно малой функцией.

Эти теоремы очень часто применяются при вычислении пределов, содержащих бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$.

Замечание. Другими словами данную теорему можно сформулировать так: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы a и b, то предел от суммы (разности) будет равен сумме (разности) пределов от этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Теорема 4. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$.

Замечание. Иначе данную теорему можно сформулировать так: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы a и b, то предел от произведения функций будет равен произведению пределов от этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Теорема 5. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $f(x)$ постоянна и равна C $(C \in R)$, то ее предел равен C.

Следствие 1. Если $g(x) = C$, то $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot C] =$ $= C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Следствие 2. Предел степени функции $f(x)$ равен степени предела этой функции, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n.$$

Теорема 6. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\neq 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

Замечание. Сформулируем теорему иначе: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы a и $b\neq 0$, то предел от отношения функций будет равен отношению пределов от этих функций, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

6.3 Понятие непрерывной функции

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* а, если она удовлетворяет следующим трём условиям:

1) $f(x)$ определена в точке а (то есть существует $f(a)$);
2) $f(x)$ имеет конечный предел функции при $x\to a$;
3) этот предел равен частному значению функции в точке а, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа (слева) в точке* a, если правое (левое) предельное значение этой функции в точке a существует и равно частному значению $f(a)$ $\left(\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)\right)$.

Пример 1. Приведём примеры непрерывных функций:

1) $f(x)=x^n$, так как $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a^n = f(a)$.
2) $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $Q_m(a)\neq 0$.
3) Функция $f(x)=\operatorname{sgn} x$ свойством непрерывности в точке $x=0$ не обладает.

Определение непрерывности функции в точке a может быть записано еще так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right),$$

то есть *для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции*. Очевидно, что непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью её графика при прохождении данной точки (без отрыва карандаша от листа бумаги).

Дадим аргументу a приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение Δy, определяемое как разность наращенного и исходного значений функции (см. рис. 35):

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

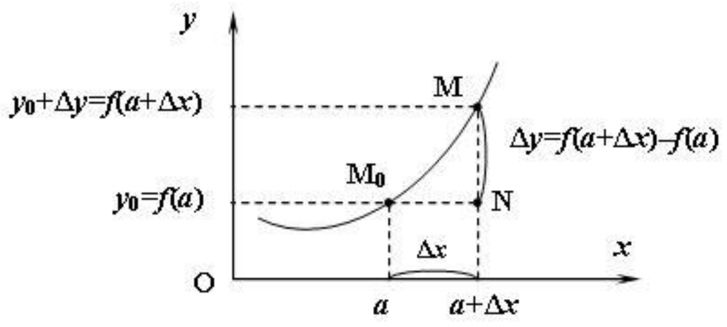


Рис. 35

***Определение*.** Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

***Определение*.** Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва функции*.

Точки разрыва имеют различный характер и классифицируются следующим образом.

1) Если $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, то a называется *точкой устранимого разрыва функции* $f(x)$. При этом значение $f(a)$ может быть и не определено.

2) Если $f(a-0) \neq f(a+0)$, то a называется *точкой разрыва с конечным скачком функции* $f(x)$. Значение $f(a)$ может быть любым, а может быть и не определено.

3) Конечный скачок и устранимый разрыв функции $f(x)$ называются *разрывами I рода*. Их отличительным признаком является существование конечных односторонних пределов $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Все другие разрывы называются *разрывами II рода*. В точке разрыва II рода хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

***Пример 2*.** 1) Пусть $f(x) = \begin{cases} |x| \text{ при } x \neq 0; \\ 1 \text{ при } x = 0. \end{cases}$ Очевидно, $f(0-0) = f(0+0) = 0$, но $f(0) = 1$ (рис. 36). Следовательно, $x = 0$ – точка устранимого разрыва функции $f(x)$. Если положить $f(0) = 0$, то разрыв устраняется.

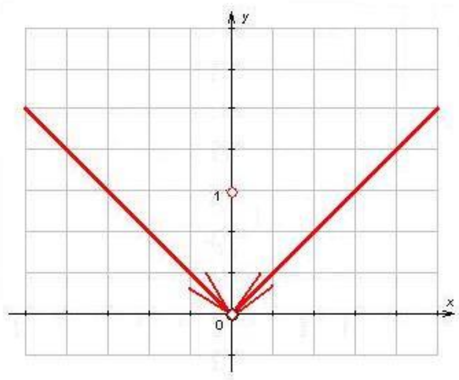


Рис. 36

2) Пусть $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \geq 0; \\ x+1 & \text{при } x<0. \end{cases}$ Здесь $f(0-0)=1$, $f(0+0)=0$ (рис. 37). Следовательно, $x=0$ – точка разрыва с конечным скачком функции $f(x)$. При переходе через точку $x=0$ значения функции $f(x)$ меняются скачком от значений, сколь угодно близких к 1 при $x<0$ к значению, равному 0 в точке $x=0$, и значениям, сколь угодно близким к 0 при $x>0$.

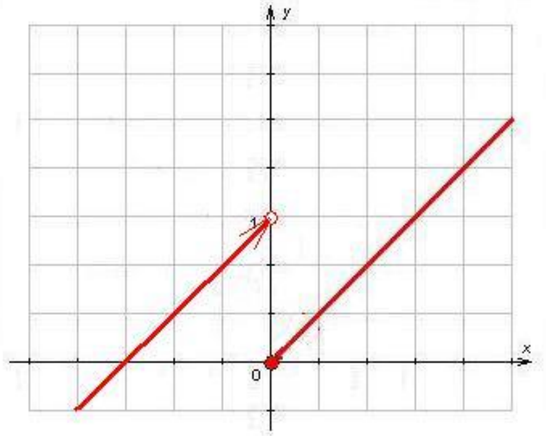


Рис. 37

3) Пусть $f(x)=5^{\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$. Определим односторонние пределы: $f(0-0)=0$, $f(0+0)=+\infty$. Точка $x=0$ – точка разрыва функции $f(x)$ II рода (рис. 38).

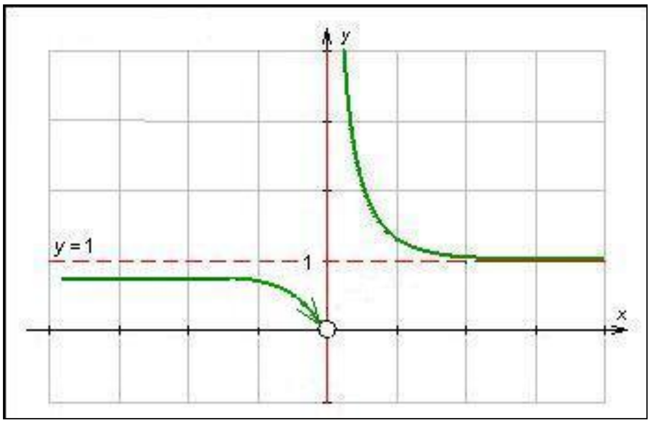


Рис. 38

Определение. Функция *непрерывна на множестве* X, если она непрерывна в любой точке $x \in X$. Функция *непрерывна на интервале* $(a;b)$ или *на отрезке* $[a;b]$, если

$$\lim_{x \to a+0} f(x)=f(a); \ \lim_{x \to b-0} f(x)=f(b).$$

Теорема 1. 1) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на X и непрерывны в точке a, то их алгебраическая сумма (разность) $f(x) \pm g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a) \neq 0)$ являются функциями, непрерывными в точке a.

Доказательство следует из определения непрерывности функции и аналогичных свойств пределов функций.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на промежутке* X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Можно доказать, что все элементарные функции непрерывны в области их определения.

***Пример 3*.** Доказать непрерывность функции $y = \cos x$.

Решение. Найдём предел приращения функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos(x + \Delta x) - \cos x\right) = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = 0.$$

Таким образом, получили, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, следовательно, по определению функция $y = \cos x$ является непрерывной на всей числовой оси.

7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1 Производная функции, её геометрический смысл

Пусть дан график непрерывной функции.

Определение. Разность между конечным и начальным значениями аргумента называется его *приращением*, т.е. $\Delta x = x - x_0$. При этом *функция получает приращение* $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$:

Теорема 1. Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Определение. *Производной* функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения приращения функции Δy в точке x_0 к приращению аргумента Δx, т. е. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

С точки зрения механики производная определяет *мгновенную скорость* движения, а с геометрической точки зрения производная функции равна *тангенсу угла наклона касательной* к положительному направлению оси абсцисс в заданной точке, в которой вычисляется значение производной.

Пусть дан график функции $f(x)$.

Требуется составить уравнения касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$. Для составления уравнения касательной воспользуемся уравнением прямой: $y - f(x_0) = k_1(x - x_0)$. В силу того, что $k_1 = tg\varphi = f'(x_0)$, *уравнение касательной* имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Так как нормаль перпендикулярна к касательной, то ее угловой коэффициент k_2 связан с угловым коэффициентом касательной соотношением: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Следовательно, *уравнение нормали* имеет следующий вид: $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Пример 1. Найти угловой коэффициент касательной в точке $x_0 = 1$ к графику функции $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$.

Так как $k_1 = f'(x_0)$, то вычислим производную функции, используя определение производной: $f(x + \Delta x) = \dfrac{2 \cdot (x + \Delta x) + 1}{3 \cdot (x + \Delta x) + 2}$;

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{2\cdot(x+\Delta x)+1}{3\cdot(x+\Delta x)+2} - \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{\Delta x}{(3x+2)(3x+3\Delta x+2)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{(3x+2)(3x+3\Delta x+2)}; \quad \text{следовательно,}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(3x+2)(3x+3\Delta x+2)} = \frac{1}{(3x+2)^2}.$$

Вычислим значение производной в точке $x_0 = 1$, а тем самым и угловой коэффициент касательной в заданной точке $k_1 = f'(1) = \dfrac{1}{(3\cdot 1+2)^2} = \dfrac{1}{25}$.

7.2 Правила дифференцирования

Вычисление производной согласно определению является трудоемкой задачей. В связи с этим были получены следующие *правила дифференцирования.*

1) Производная от суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных от этих функций, т.е. $[U(x) \pm V(x)]' = U'(x) \pm V'(x)$.

2) Производная от произведения двух функций вычисляется по формуле:

$$(U\cdot V)' = U'\cdot V + U\cdot V'.$$

3) Производная от частного двух функций вычисляется согласно формуле:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - U\cdot V'}{V^2}.$$

4) Производная обратной функции вычисляется по формуле: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

5) Производная сложной функции $y = f(U(x))$ вычисляется по формуле:

$$y'_x = f'_U(U)\cdot U'_x.$$

7.3 Производные основных элементарных функций

Производные от элементарных функций и соответствующие производные сложных функций сведем в таблицу:

Производные элементарных функций	Производные сложных функций, $y = f(U),\ U = g(x)$
$(C)' = 0,\ C = const$	-
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(U^n)' = nU^{n-1}\cdot U'$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{U})' = \dfrac{1}{2\sqrt{U}}\cdot U'$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{1}{U^2} \cdot U'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^U\right)' = a^U \ln a \cdot U'$
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a U\right)' = \frac{1}{U \ln a} \cdot U'$
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(\ln U\right)' = \frac{1}{U} \cdot U'$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin U\right)' = \cos U \cdot U'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos U\right)' = -\sin U \cdot U'$
$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tgU\right)' = \frac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$
$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(ctgU\right)' = -\frac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin U\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos U\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(arctgU\right)' = \frac{1}{1+U^2} \cdot U'$
$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\left(arcctgU\right)' = -\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$

Пример 2. Найти производную функции $y = \ln\left(4^x\right)$.

Решение.

По правилу дифференцирования сложной функции и с учетом выражения для логарифмической и показательной функций имеем

$$y' = \left(4^x\right)' \frac{1}{4^x} = \frac{4^x \ln 4}{4^x} = \ln 4.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \sin\left(x^2\right)$.

Решение.

$$y' = \left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \left| \begin{array}{l} U = x^2 \\ y = \sin U \end{array} \right| = \cos\left(x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' = 2x \cdot \cos\left(x^2\right).$$

7.4 Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой Δx-окрестности точки x, т.е. существует конечный предел $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq 0$. Так как предел конечен, то можно записать приращение функции в виде $\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha\left(\Delta x\right)$ – бесконечно малая функция в изучаемой окрестности данной точки. Сравним первое и второе слагаемые с бесконечно малой функцией Δx. Для первого слагаемого имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x)\,\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$, т.е. оно является бесконечно малой функцией того же порядка малости, что и величина Δx. Для второго слагаемого получаем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{\Delta x}=0$, т.е. оно является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем величина Δx. Это означает, что первое слагаемое является главной частью указанной суммы.

Определение. Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента Δx, называется *дифференциалом* функции:

$$d\,f(x)=f'(x)\,\Delta x.$$

Пример 4. Найти дифференциал функции $y=2x^2$.

Используя определение, находим $dy=\left(2x^2\right)'\,\Delta x=4x\Delta x$.

Если $f(x)=x$, то ее дифференциал $d\,x=(x)'\,\Delta x=\Delta x$. Следовательно, *дифференциал аргумента равен его приращению*. Отсюда получаем, что дифференциал функции можно записать в виде $d\,f(x)=f'(x)\,d\,x$. Таким образом, для производной можно ввести новую формулу $f'(x)=\dfrac{d\,y}{d\,x}$. Такая форма записи производной очень удобна для вывода различных формул.

Дифференциал функции с геометрической точки зрения описывает приращение касательной прямой при приращении аргумента $\Delta x\to 0$.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть дана функция $y=f(x)$, тогда при приращении аргумента Δx функция получает приращение $\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\approx f'(x)\,\Delta x=d\,y$.

Это приближенное равенство позволяет по виду функции и известному значению функции в заданной точке вычислить значение функции в приращенной точке:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+d\,y=f(x)+f'(x)\,\Delta x.$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt{4{,}01}$.

В данном примере задана функция $f(x)=\sqrt{x}$. В качестве точки x выбираем значение $x=4$, из которого легко извлекается квадратный корень: $\sqrt{4}=2$. Приращенной точкой является точка $x+\Delta x=4{,}01$. Таким образом, приращение аргумента равно $\Delta x=4{,}01-4=0{,}01$. Производная от заданной функции согласно таблице производных $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно,

$$\sqrt{4{,}01}\approx 2+\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot\cdot 0{,}01=2{,}0025.$$

Пример 6. Вычислить $arctg1{,}05$.

В этом примере $x=1;\ x+\Delta x=1{,}05;\ \Delta x=0{,}05;$

$$f(x)=arctgx;\ arctg1=\frac{\pi}{4};\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Следовательно, $arctg1{,}05\approx\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}05=0{,}810$.

Пусть дана функция $y=f(x)$, тогда согласно определению ее дифференциал равен $d\,f(x)=f'(x)\,d\,x$. Дифференциал аргумента $d\,x$ равен его приращению Δx. Однако производная функции $f'(x)$ в общем случае является функцией аргумента x. В связи с этим дифференциал функции является функцией аргумента x. Следовательно, можно поставить вопрос о дифференцируемости дифференциала функции.

Определение. Дифференциал от первого дифференциала функции называется *вторым дифференциалом функции*, т.е.

$$d^2 f(x)=d(f'(x)d\,x)=(f'(x))'(d\,x)^2=f''(x)(d\,x)^2.$$

Определение. Производная от первой производной функции называется *второй производной функции*, т.е. $(f'(x))'=f''(x)$.

Аналогично вводятся дифференциалы и производные высших порядков:

$$d^3 f(x)=f'''(x)(d\,x)^3;$$

$$d^4\ f(x)=f^{(4)}(x)(d\,x)^4;$$

и так далее.

Отметим, что обозначение производной, начиная с четвертой, берется в скобки.

Производные высших порядков могут быть записаны в виде

$$f''(x)=\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2};\quad f'''(x)=\frac{d^3 f(x)}{d\,x^3};\ \text{и т. д.}$$

Пример 7. Найти второй дифференциал функции $y=\sin x$.

Используя формулу для второго дифференциала, найдем вторую производную от заданной функции

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Следовательно, второй дифференциал равен

$$d^2 y = -\sin x (dx)^2.$$

7.5 Правило Лопиталя

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на открытом интервале $(a; b)$ и при $x \to a$ одновременно стремятся к нулю или бесконечности, то для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)$ применяется формула

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема Лопиталя применяется ***только для раскрытия неопределенностей вида*** $\left[\frac{0}{0}\right]$ ***или*** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия других типов неопределенностей, они должны путем тождественных преобразований вначале приведены к одной из двух указанных неопределенностей, после чего можно применять правило Лопиталя.

При применении правила Лопиталя ***производная берется отдельно от числителя и отдельно от знаменателя дроби***.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^3-a^3}$.

Так как $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^3-a^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$ применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{x^3-a^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3a^2}.$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2} = 0.$$

При необходимости *правило Лопиталя применяется повторно*.

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{tg\, x}$.

В данном примере имеем дело с неопределенностью $[0^0]$. Предположим, что данный предел существует и равен А, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x} = A$.

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей равенства

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln(\sin x)^{tg\,x} = \lim_{x\to 0} tgx\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{ctg\,x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

(применим правило Лопиталя) $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}(-\sin x\cos x) = 0$.

Отсюда находим предельное значение заданной функции $\ln A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$.

7.6 Возрастание и убывание функций. Экстремумы

Из определений возрастающей и убывающей функций следует необходимое условие возрастания и убывания функции.

Теорема 1. Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$, то для любого $x\in[a;b]$ ее первая производная $f'(x)\geq 0$. Если дифференцируемая функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a;b]$, то для любого $x\in[a;b]$ ее первая производная $f'(x)\leq 0$.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=x^2$.

Согласно теореме 1 вычислим первую производную функции $f(x)$: $f'(x)=2x$.

Эта производная будет отрицательной для всех $x<0$ и положительной для всех $x>0$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает для всех $x\in(-\infty;0)$ и $f(x)$ возрастает для всех $x\in(0;+\infty)$.

Теорема 2 (достаточное условие возрастания и убывания функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Если ее первая производная $f'(x)>0$ для любого $x\in(a;b)$, то функция возрастает на отрезке $[a;b]$. Если ее первая производная $f'(x)<0$ для любого $x\in(a;b)$, то функция убывает на отрезке $[a;b]$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум ($\min$), если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для любого $x \in [x_0 - \delta;\ x_0 + \delta]$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум ($\max$), если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для любого $x \in [x_0 - \delta;\ x_0 + \delta]$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение. Точки минимума и максимума объединяются под общим названием точки экстремума.

Точки экстремума всегда являются внутренними точками области определения функции.

Не следует путать *минимальное значение функции* f_{min} *с наименьшим значением функции на отрезке* $\min\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$, *максимальное значение функции* f_{max} *– с наибольшим значением функции на отрезке* $\max\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$.

Теорема 3 (необходимое условие существования экстремума функции). Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то ее первая производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Обращение в нуль первой производной функции в точке x_0 является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума в этой точке. Непрерывная функция может иметь экстремум в точке x_0 даже в том случае, когда ее первая производная в этой точке не существует.

Определение. Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или не существует, называются критическими (стационарными) точками.

Всякая точка экстремума является критической точкой, однако не любая критическая точка будет экстремумом.

Пример 2. Доказать, что функция $f(x) = x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$.

В точке $x_0 = 0$ первая производная функции $f'(x_0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$. Однако, из графика кубической параболы видно, что в точке $x_0 = 0$ она экстремума не имеет. Следовательно, исследуемая точка является критической точкой, но не точкой экстремума.

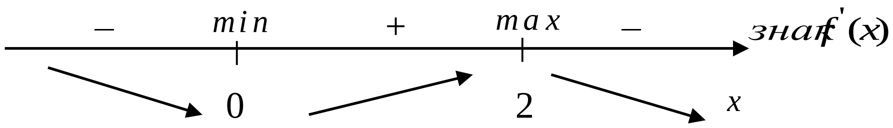
7.7 Выпуклость вверх и вниз графика функции. Точки перегиба. Асимптоты

Теорема 4 (первый достаточный признак существования экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме может быть самой точки x_0, и при переходе через эту точку слева направо ее первая производная меняет свой знак с “+” на “–”, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, а если ее первая производная меняет свой знак с “–” на “+”, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. Если при переходе через точку x_0 первая производная не меняет свой знак, то в этой точке экстремума нет.

Теорема 5 (второй достаточный признак существования экстремума). Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ обращается в ноль ($f'(x_0)=0$), а вторая производная существует, непрерывна в некоторой окрестности этой точки и отлична от нуля в самой точке ($f''(x_0)\neq 0$), то в точке x_0 наблюдается экстремум. Если при этом $f''(x_0)>0$, то точка x_0 является точкой минимума, а при $f''(x_0)<0$ – точкой максимума.

Пример 3. Найти экстремумы функции $f(x)=x^2e^{-x}$.

Решение. Вычислим первую производную функции и приравняем ее к нулю с целью отыскания критических точек: $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}x(2-x)=0$. Так как показательная функция $e^{-x}>0\ \forall x\in R$, то $x(2-x)=0$. Отсюда находим критические точки $x_1=0$ и $x_2=2$. Отложим эти точки на числовой оси и на каждом интервале определим знак первой производной функции, т.е. применим первый достаточный признак существования экстремума:



При переходе слева направо через точку $x_1=0$ первая производная функция меняет свой знак с “–” на “+”, следовательно, в этой точке наблюдается минимум. При переходе слева направо через точку $x_2=2$ первая производная функция меняет свой знак с “+” на “–”, следовательно, в этой точке наблюдается максимум.

Применим второй достаточный признак существования экстремума, для чего вычислим вторую производную функции: $f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)$. Вычислим значение второй производной функции в точке $x_1=0$: $f''(0)=2>0$, следовательно, в этой точке функция имеет минимум. Вычислим значение второй производной функции в точке $x_2 = 2$: $f''(2) = -2e^{-2} < 0$, следовательно, в этой точке функция имеет максимум.

Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[a; b]$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет конечное число точек экстремума на этом интервале. Если наибольшее значение функция достигает внутри отрезка, то очевидно, что это будет один из максимумов (аналогично для наименьшего значения – один из минимумов). Однако возможны варианты, когда функция достигает своих наименьшего и наибольшего значений на концах заданного отрезка. Поэтому для отыскания этих значений применяют следующую схему:

1. Находят область определения функции и убеждаются в том, что заданный отрезок входит в эту область.
2. Находят критические точки, для чего решают уравнение $f'(x) = 0$, и точки, в которых первая производная функции не существует.
3. Вычисляют значения функции в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, в точках, в которых первая производная функции не существует и на концах заданного отрезка.
4. Из полученных чисел выбирают наименьшее $m = \min\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$ и наибольшее $M = \max\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$.

Пример 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[0; 5]$.

Решение. Действуя согласно вышеприведенной схеме, находим:

1) $D(y) = R$; $[0; 5] \subset R$. Следовательно, функция определена и непрерывна на заданном отрезке.

2) Вычислим первую производную $f'(x) = 3x^2 - 3$. Производная существует на всей числовой оси, поэтому найдем критические точки $3x^2 - 3 = 0$. Отсюда находим, что $x_1 = -1 \notin [0; 5]$ и $x_2 = 1 \in [0; 5]$.

3) Вычислим значение функции в критических точках и на концах заданного отрезка:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0; \quad f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2; \quad f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110.$$

4) Из полученных чисел выбираем наименьшее $m = f(1) = -2$ и наибольшее $M = f(5) = 110$, которые определяют наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[0; 5]$.

Выпуклость вверх и вниз графика функции. Точки перегиба

Определение. График функции $f(x)$ называется выпуклым вверх на интервале $(a;\, b)$, если он лежит ниже любой касательной, проведенной к графику этой функции на заданном интервале (Рис. 39).

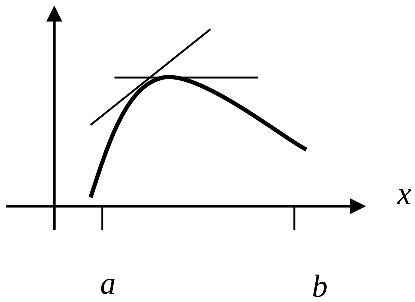


Рис. 39

Определение. График функции $f(x)$ называется выпуклым вниз на интервале $(a;\, b)$, если он лежит выше любой касательной, проведенной к графику этой функции на заданном интервале (Рис. 40).

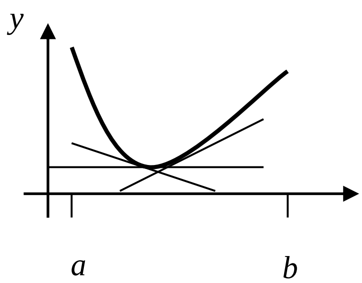


Рис. 40

Теорема 6 (достаточные условия выпуклости вверх и вниз). Если вторая производная функции $f(x)$ на интервале $(a;\, b)$ существует и положительна, то на этом интервале график функции $f(x)$ будет выпуклым вниз. Если вторая производная функции $f(x)$ на интервале $(a;\, b)$ существует и отрицательна, то на этом интервале график функции $f(x)$ будет выпуклым вверх.

Пример 5. Определить направление выпуклости графика функции $f(x) = e^x$.

Найдем вторую производную от заданной функции $f''(x) = e^x$. В силу того, что $f''(x) = e^x > 0 \;\; \forall x \in R$, то график функции $f(x) = e^x$ будет выпуклым вниз на всей числовой оси.

Пример 6. Определить характер выпуклости графика функции $f(x) = x^3$.

Найдем вторую производную от заданной функции $f''(x)=6x$. В силу того, что $f''(x)=\begin{cases}<0 & при\ \ x<0;\\ >0 & при\ \ x>0\end{cases}$, то график функции $f(x)=x^3$ будет выпуклым вверх при отрицательных значениях аргумента и выпуклым вниз при положительных значениях аргумента.

Определение. Точка, в которой меняется направление выпуклости графика функции, называется *точкой перегиба*.

Теорема 7 (необходимое условие существования точки перегиба). Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку перегиба x_p, то в точке перегиба вторая производная равна нулю, т.е. $f''(x_p)=0$.

Обращение в нуль второй производной функции в точке перегиба является необходимым, но не достаточным условием существования такой точки на графике функции.

Пример 7. Доказать, что точка $x_p=0$ не является точкой перегиба графика функции $f(x)=x^4$.

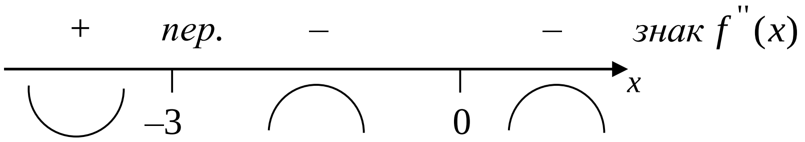
Если вычислить вторую производную от заданной функции, то она будет равна $f''(x)=12x^2$. Если приравнять это выражение к нулю, то получим, что точка $x_p=0$ должна быть точкой перегиба графика функции $f(x)=x^4$. Однако график этой функции на всей числовой оси является вогнутым, т.е. точка $x_p=0$ не является точкой перегиба графика функции $f(x)=x^4$.

Теорема 8 (достаточное условие существования точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на некотором интервале, вторая производная которой в точке x_p, принадлежащей этому интервалу, обращается в нуль ($f''(x_p)=0$) или не существует. Если при переходе через точку x_p вторая производная функции меняет свой знак, то точка x_p определяет точку перегиба графика функции $f(x)$.

Пример 8. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$.

Найдем вторую производную заданной функции $f''(x)=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$.

Найдем точки подозрительные на перегиб: а) $f''(x)=0 \Rightarrow x\notin R$ б) $f''(x)$ – не существует $\Rightarrow$ знаменатель дроби обращается в ноль при $x_1 = 0$ и $x_2 = -3$. Отложим эти точки на числовой оси и определим знак второй производной на каждом интервале:



Из рисунка видно, что точка $x_2 = -3$ является точкой перегиба, так как при переходе через нее вторая производная изменяет свой знак. Точка $x_1 = 0$ не является точкой перегиба, так как при переходе через нее вторая производная не изменяет своего знака.

Асимптоты графика функции

В большинстве практических случаев необходимо знать поведение функции при неограниченном росте (убыли) аргумента. Одним из наиболее интересных случаев, которые возникают при таком исследовании, является случай, когда график функции неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая (l): $y = kx + b$ называется *асимптотой графика* функции $f(x)$, если расстояние от переменной точки графика до этой прямой стремится к нулю при стремлении аргумента $x \to \pm\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |\, f(x) - y \,| = 0$.

График функции может приближаться к асимптоте сверху, снизу, слева, справа или колеблясь возле этой прямой (Рис. 41).

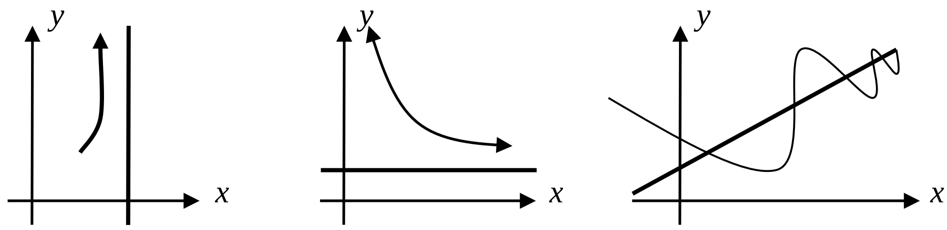


Рис. 41

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Определение. Вертикальная прямая $x = a$ называется *вертикальной* асимптотой, если $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$. Горизонтальная прямая $y = b$ называется *горизонтальной* асимптотой, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной* асимптотой, при этом параметр $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и параметр $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$ отличаются от $\pm\infty$ и $k \neq 0$.

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты: если $k = 0$, то наклонная асимптота вырождается в горизонтальную

$y=b$, при условии, что $b\neq\pm\infty$. Если параметр $b=\pm\infty$, то горизонтальной асимптоты не существует.

Алгоритм полного исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность/нечетность и периодичность.
3. Найти точки пересечения с координатными осями.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Исследовать функцию на непрерывность (определить точки разрыва, если они есть; найти односторонние пределы в точках разрыва и определить, какого рода разрыв).
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы.
8. Исследовать функцию на направление выпуклости и точки перегиба.
9. По данным исследования построить схематичный график функции. Если необходимо, построить таблицу значений функции.

Пример 9. Исследовать и построить схематичный график функции $f(x)=xe^{x}$.

Используя схему исследования графика функции с помощью производных, найдем:

1. $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

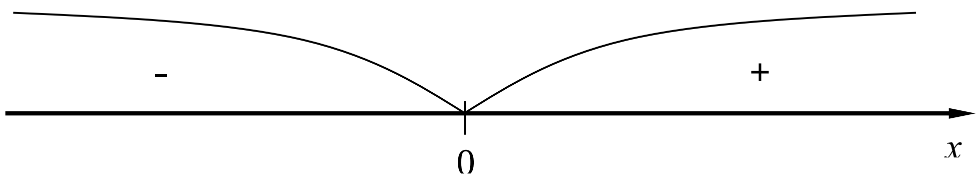
2. Функция непериодическая. Область определения $D(y)$ симметрична относительно начала координат. Найдем $y(-x)$: $y(-x)=-x\cdot e^{-x}$. Так как $y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq y(x)$, то данная функция ни четная, ни нечетная (функция общего типа).

3. Найдем точки пересечения графика функции с координатными осями

Ox: $f(x)=0 \Rightarrow xe^{x}=0 \Rightarrow x=0$, т.е. $O(0;0)$ – точка пересечения с осью абсцисс;

Oy: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=0e^{0}=0$, т.е. $O(0;0)$ – точка пересечения с осью ординат.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции. Для этого отметим в области определения нули функции (точки пересечения с осью Ox) и найдем знак функции в каждом интервале:

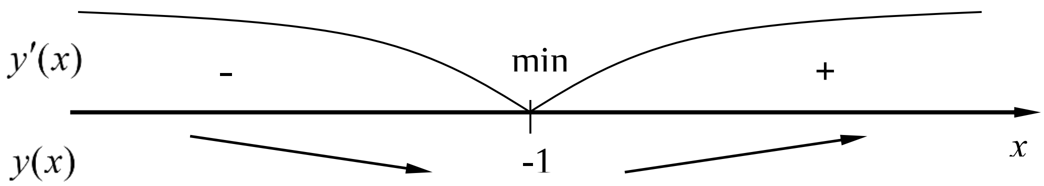


5. Функция непрерывна на R.

6. Так как функция непрерывна, то вертикальных асимптот у графика нет.

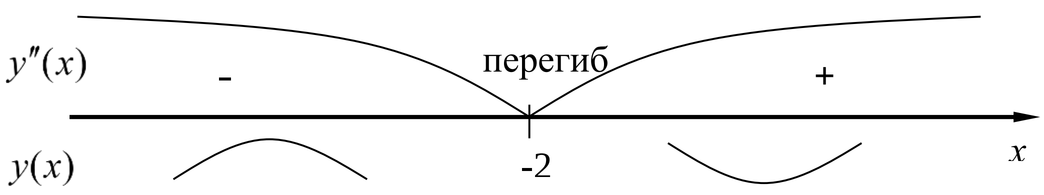
Найдем $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^x = \begin{cases} \infty, \textit{ при } \; x \to \infty; \\ 0, \textit{ при } \; x \to -\infty \end{cases}$. Таким образом, при $x \to \infty$ асимптот нет, а при $x \to -\infty$ возможна горизонтальная асимптота. Вычислим параметр $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x - 0 \cdot x) = 0$. Следовательно, график заданной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

7. Найдем первую производную функции $f'(x) = (1+x)e^x$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдем критические точки, решая уравнение $f'(x) = (1+x)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак первой производной на каждом интервале



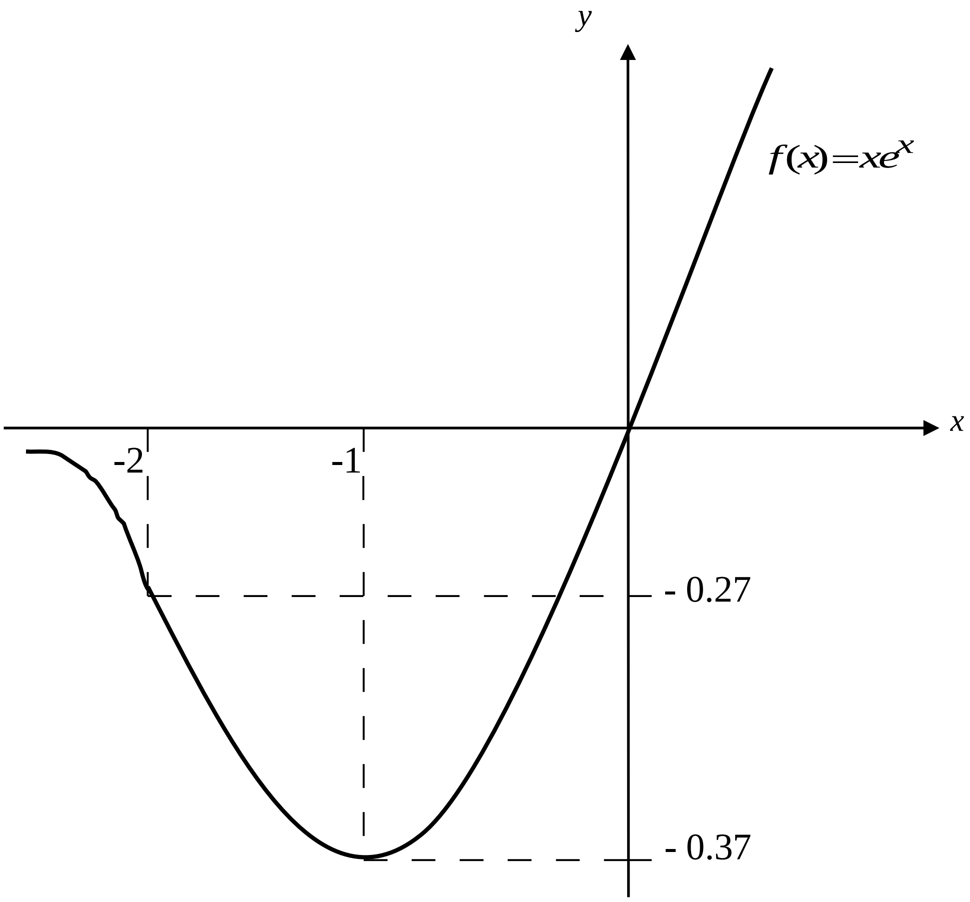
Так как при переходе слева направо через точку $x = -1$ первая производная меняет свой знак с “–” на “+”, то в этой точке наблюдается минимум. Вычислим значение функции в точке минимуме $y_{\min} = y(-1) = -1 \cdot e^{-1} \approx -0{,}37$.

8. Найдем вторую производную функции $f''(x) = (2+x)e^x$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдем точки, подозрительные на перегиб, решая уравнение $f''(x) = (2+x)e^x = 0 \Rightarrow x = -2$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак второй производной на каждом интервале



Так как при переходе слева направо через точку $x = -2$ вторая производная меняет свой знак, то в этой точке наблюдается точка перегиба. Вычислим значение функции в точке перегиба: $y(-2) = -2 \cdot e^{-2} \approx -0{,}27$.

9. Построим схематичный график функции, выбрав по координатным осям разные масштабы измерения


y
$f(x)=xe^x$
x
-2
-1
- 0.27
- 0.37

8 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1 Неопределенный интеграл, методы вычисления

8.1.1 Непосредственное интегрирование

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Задача отыскания первообразной для данной функции $f(x)$ решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C- произвольная постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$, так как $(F(x)+C)' = f(x)$.

Определение. Общее выражение $F(x)+C$ совокупности всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1°. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2°. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной*:

$$\int d\, f(x) = f(x) + C.$$

3°. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла*:

$$\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx.$$

4°. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций*:

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\quad n\neq -1$
2. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$
3. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
4. $\int e^x dx=e^x+C$
5. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$
6. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$
9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$
13. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm m}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm m}\right|+C$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*.

Метод *непосредственного интегрирования* основан на прямом применении основных свойств неопределенного интеграла и таблицы основных интегралов.

Пример 1. Вычислить интегралы:

1) $\int \dfrac{2x^4-5x\sqrt[3]{x}+7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int \dfrac{x^2}{9-x^2}\,dx$; 3) $\int (1-6^x)^2\,dx$;

4) $\int ctg^2 xdx$; 5) $\int 8\sin^2\dfrac{x}{2}\,dx$.

Решение.

1) Разделим почленно числитель на знаменатель; в результате подынтегральная функция раскладывается на слагаемые, каждое из которых проинтегрируем:

$$\int \frac{2x^4 - 5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\frac{2x^4}{x\sqrt{x}} - \frac{5x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(2x^{\frac{5}{2}} - 5x^{-\frac{1}{6}} + \frac{7}{x}\right)dx =$$

$$= 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{-\frac{1}{6}}dx + 7\int\frac{dx}{x} = 2\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 5\cdot\frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + 7\ln|x| + C =$$

$$= \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{6}} + 7\ln|x| + C = \frac{4}{7}x^3\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x^5} + 7\ln|x| + C$$

Произвольные постоянные, которые получаются при интегрировании каждого слагаемого, объединяются в одну произвольную постоянную *C*.

2) Вычтем и прибавим в числителе подынтегральной функции число 9. Получим:

$$\int\frac{x^2}{9-x^2}\,dx = \int\frac{x^2-9+9}{9-x^2}dx = \int\left(-1+\frac{9}{9-x^2}\right)dx = -\int dx - 9\int\frac{dx}{x^2-9} =$$

$$= -x - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

3) Возведем в квадрат, применяя формулу сокращенного умножения, и проинтегрируем:

$$\int\left(1-6^x\right)^2dx = \int\left(1-2\cdot 6^x + 36^x\right)dx = \int dx - 2\int 6^x dx + \int 36^x dx =$$

$$= x - 2\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{36^x}{\ln 36} + C = x - \frac{2}{\ln 6}\cdot 6^x + \frac{36^x}{2\ln 6} + C.$$

4) Применим тригонометрическое тождество $1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, тогда получим:

$$\int ctg^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C.$$

5) Применим формулу понижения степени $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, получим:

$$\int 8\sin^2\frac{x}{2}dx = \int 4(1-\cos x)dx = 4\left(\int dx - \int\cos x\,dx\right) = 4x - 4\sin x + C.$$

8.1.2 Интегрирование методом подстановки

В основе интегрирования *методом постановки* (или методом замены переменной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования: если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u(x)$- произвольная дифференцируемая функция переменной x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где t- новая переменная, а $\varphi(t)$- непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной имеет вид

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Функцию $\varphi(t)$ выбирают так, чтобы правая часть формулы (1) приобрела наиболее удобный для интегрирования вид;

2) $u = \psi(x)$, где u- новая переменная. В этом случае формула замены переменной принимает вид

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \qquad (2)$$

Пример 2. Вычислить интегралы:

1) $\int \sin 3x dx$ 2) $\int \frac{x^2}{8+x^3}dx$ 3) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx$

4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$ 5) $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Решение.

1) Данный интеграл окажется табличным, если заменить $t = 3x$. Получим:

$$\int \sin 3x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x \\ dt = (3x)'dx = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

2) Полагая $t=8+x^3$, получим

$$\int \frac{x^2}{8+x^3}dx = \left| \begin{array}{l} t=8+x^3 \\ dt=\left(8+x^3\right)'dx=3x^2dx \\ x^2dx=\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln\left|8+x^3\right|+C.$$

3) Положим $t=\sin x$, получим

$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sin x \\ dt=(\sin x)'dx= \\ =\cos x dx \end{array} \right| = \int\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{t}{2}\right)+C=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C.$$

4) К табличному данный интеграл сводится подстановкой $t=e^x$:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \left| \begin{array}{l} t=e^x \\ dt=e^x dx \end{array} \right| = \int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{e^x}{3}+C.$$

5) $$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x=t^3, \ \ t=\sqrt[3]{x} \\ dx=(t^3)'dt=3t^2dt \end{array} \right| = \int\frac{\cos t}{t^2}\cdot 3t^2dt=3\int\cos t dt=3\sin t+C=$$

$$=3\sin\sqrt[3]{x}+C.$$

6)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x=\frac{1}{t}, \ \ t=\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \\ \sqrt{1+x^2}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \end{array} \right| = -\int\frac{tdt}{t^2\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$=-\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+C.$$

8.1.3 Интегрирование по частям

Метод *интегрирования по частям* основан на применении формулы:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \qquad (1)$$

где u, v - непрерывно дифференцируемые функции переменной x.

Существует несколько классов функций, интегрируемых по частям. Рассмотрим их более подробно.

1) Для вычисления интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x) arctgx dx$, $\int P(x) arcctgx dx$, где $P(x)$ - некоторый многочлен, необходимо принять $u = \ln x$, или $u = \arcsin x$, или $u = arctgx$ и т.д., а $dv = P(x)dx$.

2) Для вычисления интегралов вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$ следует принять $u = P(x)$, а $dv = e^{kx}dx$, или $dv = \sin kx\,dx$, или $dv = \cos kx\,dx$.

Пример 3. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ 2) $\int (x-5)\cos x\,dx$ 3) $\int x^2 e^{4x}dx$

4) $\int x\,arctgx\,dx$ 5) $\int e^{-x}\sin x\,dx$.

Решение.

1) $$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ dv = \dfrac{dx}{x^3} \\ du = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x} \\ v = \int \dfrac{dx}{x^3} = -\dfrac{1}{2x^2} \end{array} \right| = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + C = \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

2) $$\int (x-5)\cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x-5, \quad dv = \cos xdx \\ du = (x-5)'dx = dx \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{array} \right| = (x-5)\sin x - \int \sin xdx =$$

$$=(x-5)\sin x+\cos x+C.$$

3) $$\int x^2e^{4x}dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2,\ \ dv=e^{4x}dx \\ du=(x^2)'dx=2xdx \\ v=\int e^{4x}dx=\frac{1}{4}e^{4x}\end{array}\right|=x^2\cdot\frac{1}{4}e^{4x}-\int\frac{1}{4}e^{4x}\cdot 2xdx=$$

$$=\frac{1}{4}x^2e^{4x}-\frac{1}{2}\int xe^{4x}dx=\left|\begin{array}{l} u=x,\ \ dv=e^{4x}dx \\ du=(x)'dx=dx \\ v=\int e^{4x}dx=\frac{1}{4}e^{4x}\end{array}\right|=\frac{1}{4}x^2e^{4x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{4}\int e^{4x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4}x^2e^{4x}-\frac{1}{8}xe^{4x}+\frac{1}{16}e^{4x}+C.$$

4) $$\int x\,arctgx\,dx=\left|\begin{array}{l} u=arctgx,\ \ dv=xdx \\ du=(arctgx)'dx=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}arctgx-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C.$$

8.2 Определенный интеграл и его вычисление

8.2.1 Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками:

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<x_{i+1}<...<x_n=b.$$

Обозначим это разбиение T, а точки $x_0, x_1,...,x_n$ назовем точками разбиения. В каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i\left(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\right)$. Через Δx_i обозначим разность x_i-x_{i-1}, которая является длиной отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Образуем сумму:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,, \qquad (1)$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, соответствующей данному разбиению Т.

Для данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ можно составить бесчисленное множество интегральных сумм, так как построение интегральной суммы состоит в произвольном делении заданного отрезка $[a; b]$ на элементарные отрезки и произвольном выборе точки $\xi_i\left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$ на каждом элементарном отрезке.

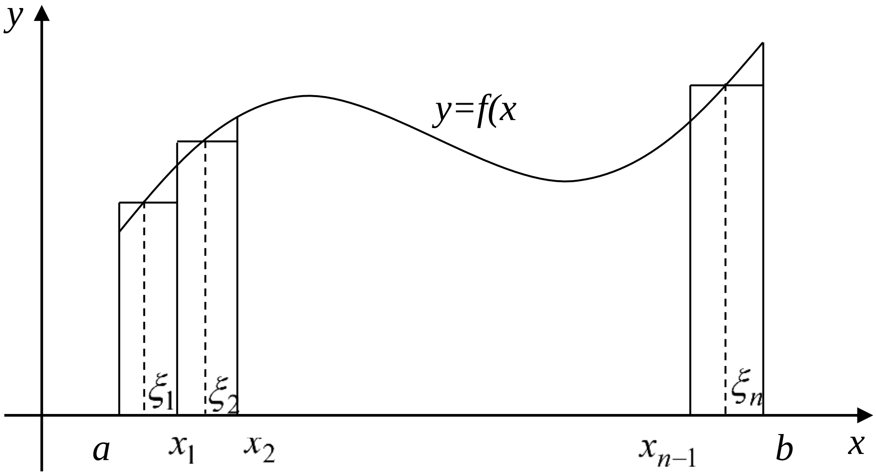


Рис.42

Из рисунка 42 следует *геометрический смысл суммы* σ: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$, если $f(x) \ge 0$.

Обозначим λ длину наибольшего отрезка разбиения: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Определение. Если существует конечный предел I интегральной суммы (1) при $\lambda \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (2)$$

или $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

В этом случае функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a; b]$. Для интегрируемости достаточно, чтобы функция была непрерывна на отрезке $[a; b]$ или имела конечное число разрывов первого рода. Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами* интегрирования, $f(x)$- *подынтегральной* функцией, x – *переменной интегрирования*.

8.2.2 Основные свойства определенного интеграла

Определенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный: $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$. Если пределы интегрирования равны между собой, то $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.
2. Каковы бы ни были числа a, b, c, имеет место равенство: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. Это равенство верно, если $a < c < b$ и верно при любом с, если существуют любые два из фигурирующих в нем трех интегралов.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где k – постоянная величина.
4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

Замечание. Свойство 4 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

8.2.3 Формула Ньютона – Лейбница

Вычисление определенных интегралов методом, основанным на определении интеграла как предела интегральной суммы, связано с большими трудностями. Для удобства вычисления определенных интегралов применяется *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где $F(x)$- первообразная для подынтегральной функции $f(x)$. Она находится при вычислении соответствующего неопределенного интеграла: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Формула Ньютона – Лейбница принадлежит к числу важнейших формул высшей математики. С ее помощью можно просто и точно вычислять значения определенных интегралов, а с их помощью находить значения различных величин, например, площади криволинейных фигур, длины дуг кривых и т. д.

Пример 4. $\int\limits_0^2 \left(3x^2 - 1\right)dx = 3\int\limits_0^2 x^2 dx - \int\limits_0^2 dx = 3 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - x\Big|_0^2 = 8 - 2 = 6$.

Пример 5. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Пример 6. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-1}^1 = arctg1 - arctg(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

8.2.4 Замена переменной в определенном интеграле

Цель этого метода так же, как при нахождении неопределенных интегралов методом подстановки, состоит в том, чтобы преобразовать данное подынтегральное выражение так, чтобы соответствующий неопределенный интеграл принял вид табличного интеграла.

Метод замены переменной при вычислении определенного интеграла основан на следующей теореме.

Теорема. Пусть $f(x)$- непрерывная функция на отрезке $[a; b]$. Тогда, если:

1) функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha;\ \beta]$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\ \beta]$;
2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a; b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$,

то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *формулой замены переменной* (или подстановки) в определенном интеграле.

Замечание. Подстановку можно осуществить как в виде $x=\varphi(t)$, так и в виде $t=\varphi(x)$. Кроме того, из формулы (4) следует, что если подстановка выполняется в определенном интеграле, то нет необходимости переходить обратно к старой переменной, но при этом нужно вместо пределов изменения старой переменной *x* указать пределы изменения новой переменной *t*.

Пример 7.

$$\int_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{7-2x}}=\left|\begin{array}{l} t=7-2x,\\ dt=(7-2x)'dx=-2dx,\\ dx=-\frac{1}{2}dt,\\ \alpha=7-2(-1)=9,\\ \beta=7-2\cdot 3=1\end{array}\right|=\int_{9}^{1}\frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_{1}^{9}t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} учтем, что\ \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\\ =\sqrt{t}+C,\ \ и\ \ применим\ \ формулу\\ Ньютона-Лейбница\end{array}\right|=\sqrt{t}\,\Big|_{1}^{9}=\sqrt{9}-\sqrt{1}=3-1=2$$

Пример 8.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sin x,\\ dt=(\sin x)'dx=\cos x dx,\\ \alpha=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\\ \beta=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right|=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{t^3}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}t^{-3}dt=\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-4\right)=\frac{4}{3}.$$

Пример 9.

Вычислим интеграл $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Сделаем подстановку $x=3\sin t$, тогда $dx=(3\sin t)'dt=3\cos t dt$. Рассмотрим теперь выражение $\sqrt{9-x^2}$:

$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=\sqrt{9(1-\sin^2 t)}=3\sqrt{\cos^2 t}=3\cos t$, поскольку на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функция $\cos t \geq 0$.

Определим новые пределы интегрирования: $0=3\sin t$, $\sin t=0$, $\alpha=0$; $3=3\sin t$, $\sin t=1, \beta=\frac{\pi}{2}$. При изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ переменная $x=3\sin t$ пробежит весь данный интервал интегрирования $[0;\,3]$.

При выборе новых пределов интегрирования может возникнуть вопрос: почему взяты пределы $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$ а не, скажем, $\alpha=\pi$, $\beta=\frac{\pi}{2}$? Ведь $\sin\pi$ тоже равен 0. Можно проверить, что и при этих пределах величина интеграла останется прежней, но его вычисление немного усложнится. Дело в том, что теперь $\sqrt{9-x^2}=3\sqrt{\cos^2 t}=-3\cos t$, поскольку $\cos t \leq 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\,\pi\right]$. Поэтому, чтобы избежать ненужных осложнений при вычислениях, всегда лучше брать наименьший возможный интервал изменения новой переменной интегрирования.

С учетом сказанного выше, получим:

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t dt=\left|\begin{array}{l}\textit{применим}\\ \textit{формулу}\\ 2\cos^2 x=1+\cos 2x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt=\frac{9}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{9}{4}(\sin\pi-\sin 0)=\frac{9\pi}{4}.$$

8.2.5 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du . \qquad (5)$$

Рассмотрим несколько примеров применения формулы интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 10.

$$\int_1^2 x\ln x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ dv = x\, dx \\ du = (\ln x)' dx = \dfrac{dx}{x},\ \ v = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} + C = \\ = |\text{отбросим}\, C| = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\, dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{4}(4-1) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Пример 11.

$$\int_0^1 arctgx\, dx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx,\ dv = dx \\ du = (arctgx)' dx = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \int dx = x + C,\ \text{отбросим}\, C, \\ \text{тогда}\ \ v = x \end{array} \right| = xarctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ dt = 2xdx, \quad xdx = \dfrac{1}{2}dt \\ \alpha = 1 + 0 = 1,\ \ \beta = 1 + 1 = 2 \end{array} \right| = arctg1 - 0 - \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|t|\,\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$$

Пример 12.

$$\int_1^2 \left(x^2+1\right)e^x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2+1,\ dv = e^x dx \\ du = \left(x^2+1\right)' dx = 2xdx,\ \ v = \int e^x dx = e^x + C, \\ \text{отбросим}\, C, \text{тогда}\ \ v = e^x \end{array}\right| = (x^2+1)e^x\Big|_1^2 -$$

$$-\int_1^2 2xe^x dx = 5e^2 - 2e - 2\int_1^2 xe^x dx = \left|\begin{array}{l} u = x,\ dv = e^x dx \\ du = dx,\ v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right| = 5e^2 - 2e -$$

$$-2\left(xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right) = 5e^2 - 2e - 2\left(2e^2 - e - e^x\Big|_1^2\right) = 5e^2 - 2e - 2\left(2e^2 - e - e^2 + e\right) =$$

$$= 3e^2 - 2e.$$

8.3 Геометрические приложения определенного интеграла

8.3.1 Вычисление величины площади плоских фигур

***Определение*.** Фигура, которая ограничена осью абсцисс, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, где $x \in [a; b]$, называется криволинейной трапецией.

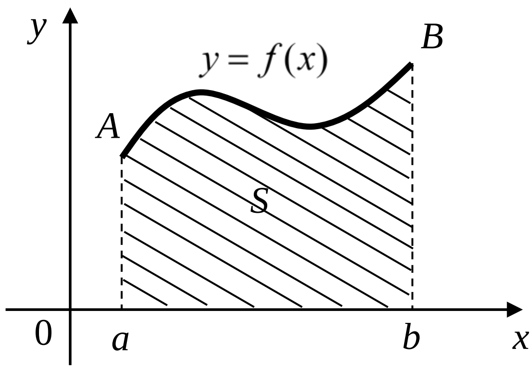


Рис. 43

Следует заметить, что отрезки прямых $x = a$, $x = b$ могут вырождаться в точки. В этом случае, фигура также будет являться криволинейной трапецией (рис.44 и 45

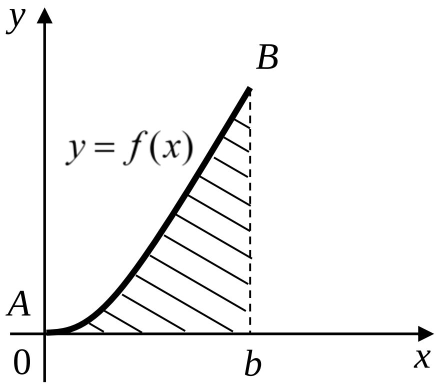


Рис. 44

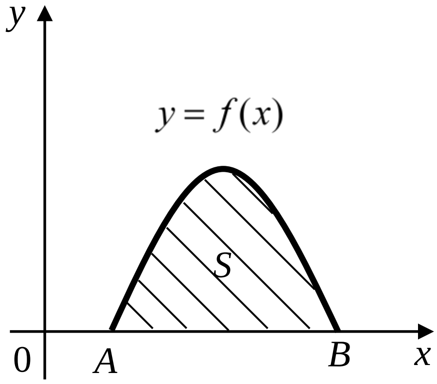


Рис. 45

Площадь S криволинейной трапеции $aABb$ выражается формулой:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(1)

Пусть $f(x) \le 0$ для всех $x \in [a;\, b]$, тогда криволинейная трапеция $aABb$ будет расположена ниже оси абсцисс. При этом справедлива формула:

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

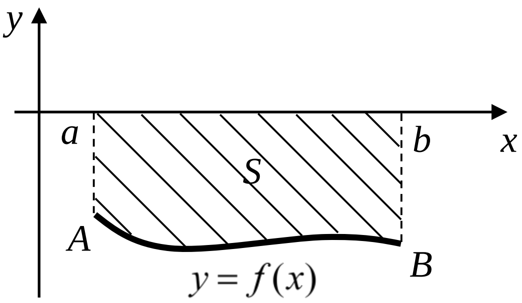


Рис. 46

Рассмотрим несколько примеров вычисления площади фигур.

***Пример 13*.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью абсцисс и прямой $x = 4$.

Решение.

Так как $\sqrt{x} \ge 0$ для всех $x \ge 0$, то для вычисления площади воспользуемся формулой (1):

$$S = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}(8-0) = \frac{16}{3} \text{ (кв.ед.).}$$

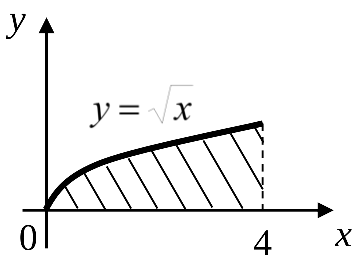


Рис.47

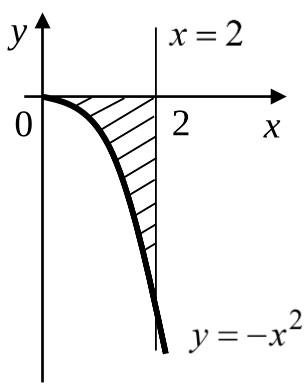


Рис. 48

***Пример 13*.** Вычислить величину площади, ограниченной линиями $y = -x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

Решение.

Так как подынтегральная функция $-x^2 \le 0$, то для вычисления площади фигуры следует воспользоваться формулой (2):

$$S=-\int_0^2(-x^2)\,dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}\ (\text{кв.ед.})$$

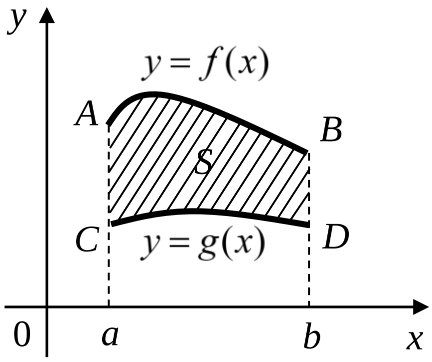


Рис. 49

Пусть фигура ограничена сверху и снизу соответственно графиками функций $y=f(x)\geq 0$ и $y=g(x)\geq 0$, а сбоку – отрезками прямых $x=a,\ x=b$ (рис. 49).

Тогда площадь фигуры *ABDC* выражается формулой:

$$S=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx. \qquad (3)$$

Эта формула будет справедлива и при любом другом расположении графиков функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, если $f(x)\geq g(x)$ для всех $x\in[a;\,b]$.

Пример 13. Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой $y=x^2-3x$ и прямой $y=x$.

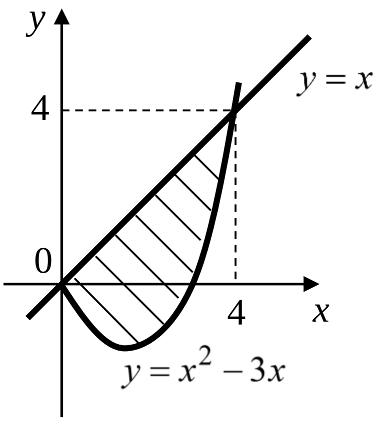


Рис. 50

Решение.

Найдем пределы интегрирования. Для этого определим абсциссы точек пересечения графиков функций:

$x^2-3x=x,\quad x^2-4x=0,\quad x(x-4)=0,$

$x_1=0,\ x_2=4$

Следовательно, $x=0$ и $x=4$ - нижний и верхний пределы интегрирования соответственно.

По формуле (3) имеем:

$$S=\int_0^4\big(x-(x^2-3x)\big)dx=\int_0^4\big(4x-x^2\big)dx=4\int_0^4 x\,dx-\int_0^4 x^2dx=4\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}$$

8.3.2 Вычисление объема тела вращения

Если плоская фигура, ограниченная осью Ox, прямыми $x = a, x = b$ и графиком непрерывной функции $y = f(x)$, вращается *вокруг оси Ox*, то объем полученного тела вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если плоская фигура, ограниченная осью Oy, прямыми $y = c, y = d$ и графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$, вращается *вокруг оси Oy*, то объем полученного тела находим по формуле

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (2)$$

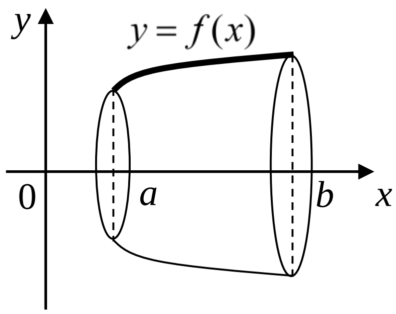


Рис. 51

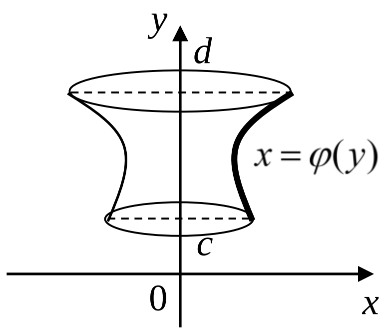


Рис. 52

Пример 14. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной гиперболой $xy = -4$, осью абсцисс и прямыми $x = 1,\ x = 6$.

Решение.

Построим указанные линии (см. рис. 53). По формуле (1) будем иметь:

$$V_{Ox} = \pi \int_1^6 \frac{16}{x^2}dx = 16\pi \int_1^6 x^{-2}dx = 16\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^6 =$$

$$= -16\pi\left(\frac{1}{6} - 1\right) = -16\pi\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{40\pi}{3} \text{ (куб.ед.)}.$$

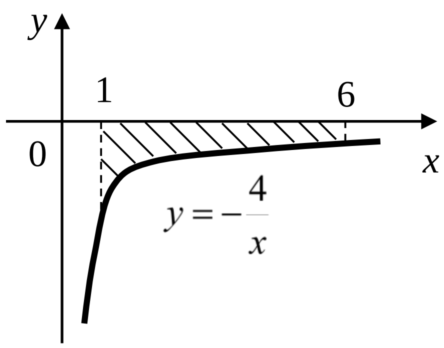


Рис. 53

Пример 15. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, заключенной между линиями, заданными уравнениями $y = x^2,\ 2x - y = 0$.

Решение.

Искомый объем определяется разностью $V_{Oy} = V_2 - V_1$, где V_1- объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy треугольника OAB; V_2- объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $OCAB$.

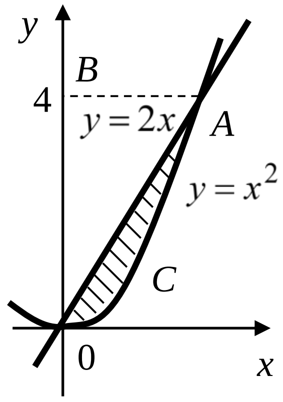


Рис. 54

Чтобы найти пределы интегрирования, определим координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ 2x - x^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ x(2-x) = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда $y_1 = c = 0,\ y_2 = d = 4$.

По формуле (2) получим:

$$V_1 = \pi \int_0^4 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4}\int_0^4 y^2 dy = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{16\pi}{3} \text{ (куб. ед.)}$$

$$V_2 = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^4 y\, dy = \pi\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^4 = 8\pi \text{ (куб. ед.)}$$

Тогда $V_{Oy} = 8\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$ (куб. ед.)

9 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

9.1.1 Основные понятия

В математике и физике часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить уравнение, содержащее не только неизвестную функцию и ее аргумент, но и производную неизвестной функции.

Определение. Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', y''', ..., y^{(n)}$, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Например, уравнения $y' + xy - x^2 = 0$, $yy' - 1 = 0$ будут дифференциальными уравнениями первого порядка; уравнения $xy'' - (y')^3 - y = 0$, $y'' - y' = 1$ будут дифференциальными уравнениями второго порядка; уравнение $y^2 - y''' + x^5 = 0$ имеет третий порядок.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* (1) на интервале $(a;b)$, если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала $(a;b)$.

Определение. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения (1), называется *интегралом дифференциального уравнения*. График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Это название не случайно, так как нахождение решений обычно связано с процессом интегрирования. Поскольку процесс интегрирования функции приводит к появлению множества функций, то и решений любое дифференциальное уравнение тоже будет иметь множество. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений данного дифференциального уравнения в заданной области (в явной или неявной форме).

9.1.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно производной

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная искомая функция, F – заданная функция трех переменных. Если из равенства (2) выразить явным образом производную y', получим уравнение вида

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Уравнение (2) называется уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной*. Для уравнения вида (2.2) справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (Коши). Пусть в уравнении (2) функция $f(x, y)$ удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости Oxy;

2) ее частная производная $f'_y(x, y)$ в области D ограничена.

Тогда для любой точки $M_0(x_0;\ y_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2.2), определенное в некотором интервале $(a;\ b)$, содержащем точку x_0, и удовлетворяющее условию $y_0 = \varphi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются *начальными значениями* для решения $y = \varphi(x)$, а условие $y_0 = \varphi(x_0)$ – *начальным условием* решения. Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющего начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$, называется *задачей Коши*. Поэтому теорему 2.1 называют *теоремой существования и единственности решения задачи Коши*.

Геометрически задание начального условия означает, что на плоскости Oxy задается точка $M_0(x_0;\ y_0)$, через которую проходит интегральная кривая. Согласно теореме 1, через каждую точку области D проходит, и притом единственная, интегральная кривая уравнения (2). Закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значение y_0 (так, чтобы точка $(x_0;\ y_0)$

принадлежала области D), для каждого числа y_0 будем получать свое решение. В результате, вся область D будет покрыта интегральными кривыми, которые нигде между собой не пересекаются (рис.55).

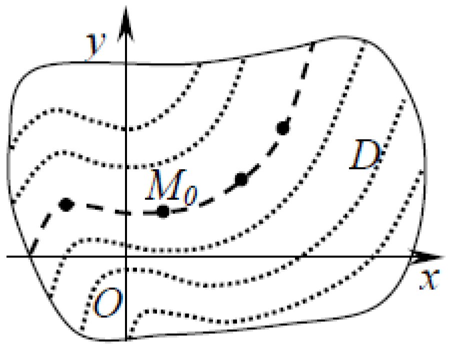


Рис. 55

Таким образом, теорема 1 подтверждает предположение о том, что дифференциальное уравнение имеет множество решений и говорит о том, что эта совокупность решений зависит от произвольной постоянной.

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения* (2) в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) при любом допустимом значении постоянной C она удовлетворяет уравнению (2);
2) каково бы ни было начальное условие $y_0 = \varphi(x_0)$ можно найти единственное значение C_0 такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$удовлетворяет данному начальному условию.

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется *общим интегралом уравнения*.

Замечание. Теорема 1 дает достаточные условия существования (1 условие теоремы) и единственности (2 условие теоремы) решения задачи Коши. Поэтому возможно, что в точке $(x_0;\ y_0)$ условия теоремы 1 не выполняются, а решение $y = y(x)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$, существует и единственно.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется *частным решением*. Очевидно, что любое частное решение (интеграл) получается из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной C.

Общее решение не всегда описывает все множество решений дифференциального уравнения. Решение (интеграл) $y=\psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т. е. через каждую точку интегральной кривой $y=\psi(x)$ проходит еще хотя бы одна интегральная кривая), называется *особым решением*. Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. График особого решения называют *особой интегральной кривой уравнения*.

9.1.3 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_2(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_1(y)dy=0, \qquad (1)$$

где функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ - непрерывны, называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Иначе говоря, *уравнение с разделяющимися переменными, это уравнение, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y*.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$f_2(x)\cdot\varphi_1(y)dy=-f_1(x)\cdot\varphi_2(y)dx.$$

Разделим обе части уравнения на произведение $f_2(x)\cdot\varphi_2(y)$:

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy=-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx. \qquad (2)$$

В уравнении (2) переменные уже разделены: слева только функции и дифференциалы, зависящие от y, а справа – только от x.

Проинтегрируем теперь обе части уравнения (2):

$$\int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy=-\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx.$$

Пусть $\Phi(y)$ - первообразная для функции $\dfrac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}$; $F(x)$ - первообразная для функции $-\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Тогда с точностью до произвольной константы C получим равенство

$$\Phi(y)=F(x)+C. \tag{3}$$

Равенство (3) представляет собой общее решение уравнения (1) *в неявном виде* (его общий интеграл). Если в нем можно выразить y, приводим его к явному виду $y=y(x;C)$.

Замечание 1. Деление $f_2(x)\cdot\varphi_2(y)$ может привести к потере решений, обращающих в нуль это произведение. Поэтому, чтобы получить полное решение, необходимо рассмотреть корни уравнений $f_2(x)=0$, $\varphi_2(y)=0$.

Замечание 2. Разделение переменных в уравнении удобнее проводить поэтапно: 1) слагаемое с дифференциалом dy оставляем в левой части уравнения, слагаемое с dx переносим в правую часть; 2) разделение переменных начинаем с левой части уравнения – оставляем только функции, зависящие от переменной y, в правой части оставляем только функции переменной x; 3) после интегрирования общую константу C для двух интегралов записываем в правой части уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $2x\sqrt{y}dx+(1-x^2)dy=0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$(1-x^2)dy=-2x\sqrt{y}dx.$$

Разделим переменные в уравнении:

$$(1-x^2)dy=-2x\sqrt{y}dx \quad \Big| :(1-x^2)\neq 0,$$

$$dy=-\frac{2x}{1-x^2}\cdot\sqrt{y}dx \quad \Big| : \sqrt{y}\neq 0,$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{2x}{x^2-1}dx.$$

Проинтегрируем теперь обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int\frac{2x}{x^2-1}dx, \qquad \int y^{-\frac{1}{2}}dy=\left|\begin{array}{l} t=x^2-1 \\ dt=2xdx \end{array}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C,$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\ln\left|x^2-1\right|+C, \qquad 2\sqrt{y}=\ln\left|x^2-1\right|+C,$$

$$\sqrt{y}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2-1\right|+C\right),\quad \sqrt{y}=\ln\sqrt{\left|x^2-1\right|}+\frac{1}{2}C,\qquad y=\left(\ln\sqrt{\left|x^2-1\right|}+\frac{1}{2}C\right)^2.$$

Так как C – произвольная постоянная, то $\frac{1}{2}C$ можно переобозначить через C. Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид

$$y=\left(\ln\sqrt{\left|x^2-1\right|}+C\right)^2.$$

Далее, при делении на $\left(1-x^2\right)$ и $\sqrt{y}$ могли быть потеряны решения. Поэтому необходимо рассмотреть уравнения:

1) $1-x^2=0,\quad x=\pm1$

Подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $x=\pm1$ являются решениями. Проверим, входят ли они в общий интеграл. Имеем

$$2\sqrt{y}-\ln\left|x^2-1\right|=C,$$

$$x^2-1=\pm e^{-C}\cdot e^{2\sqrt{y}},\ \text{обозначим}\ \ \tilde{C}=\pm e^{-C}\neq 0.$$

$$x=\pm\sqrt{1+\tilde{C}e^{2\sqrt{y}}}.$$

Решения $x=\pm1$ могут быть включены в общее решение, если снять ограничение на $\tilde{C}$.

2) $\sqrt{y}=0,\quad y=0$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, убеждаемся, что $y=0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и в общее решение (интеграл) не входит. Следовательно, это особое решение уравнения.

Ответ: $y=\left(\ln\sqrt{\left|x^2-1\right|}+C\right)^2$, $y=0$.

9.1.4 Однородные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными всегда можно привести уравнения, которые получили название однородных.

Определение. Функция $M(x,y)$ называется *однородной измерения* m (или однородной степени m), если при любом $t\neq 0$ справедливо равенство

$$M(t\cdot x,\ t\cdot y)=t^m\cdot M(x,y).$$

Определение. Уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *однородным относительно x и y*, если $f(x, y)$ – *однородная функция нулевого измерения*.

Покажем, как уравнение, однородное относительно *x* и *y*, можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.

По определению имеем $f(t \cdot x,\, t \cdot y) = f(x, y)$ для любого $t \neq 0$. Положим в этом тождестве $t = \frac{1}{x}$ и получим $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, т.е. однородная функция нулевого измерения зависит от отношения $\frac{y}{x}$. Следовательно, дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ можно записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (1)$$

Выполним замену переменной $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + ux'$, $y' = u'x + u$. Подставляя эти выражения в (1), получим уравнение

$$u'x + u = \varphi(u), \text{ или } \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Подставив теперь вместо u отношение $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' = -\frac{x + y}{x + 2y}$.

Решение.

Функция $f(x, y) = -\frac{x + y}{x + 2y}$ - однородная нулевого измерения. Действительно,

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = -\frac{tx + ty}{tx + 2ty} = -\frac{x + y}{x + 2y} = t^0 \cdot f(x, y), \quad m = 0.$$

Следовательно, заданное уравнение является *однородным*.

Разделим числитель и знаменатель дроби на x, получим уравнение:

$$y' = -\frac{1+\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}}.$$

Выполним замену переменной $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + ux'$, $y' = u'x + u$.

Подставляя в уравнение, получим

$$u'x + u = -\frac{1+u}{1+2u}, \qquad \frac{du}{dx}x = -\frac{1+u}{1+2u} - u,$$

$$\frac{du}{dx}x = -\left(\frac{1+u}{1+2u} + u\right), \quad \frac{du}{dx}x = -\frac{1+2u+2u^2}{1+2u}.$$

Разделяя переменные, получим уравнение:

$$\frac{1+2u}{1+2u+2u^2}du = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем теперь обе части уравнения:

$$\int \frac{1+2u}{1+2u+2u^2}du = -\int \frac{dx}{x}.$$

Вычислим интеграл в левой части уравнения отдельно:

$$\int \frac{1+2u}{1+2u+2u^2}du = \left| \begin{array}{l} z = 1+2u+2u^2 \\ dz = (2+4u)du \\ (1+2u)du = \frac{1}{2}dz \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{1}{2}\ln\left(1+2u+2u^2\right) + C_1$$

Тогда для исходного уравнения имеем:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+2u+2u^2\right) = -\ln|x| + C,$$

$$\ln\left(1+2u+2u^2\right) + 2\ln|x| = 2C,$$

$$\ln\left(1+2u+2u^2\right) + \ln x^2 = 2C,$$

$$\ln\left(\left(1+2u+2u^2\right)\cdot x^2\right) = 2C,$$

$$\left(1+2u+2u^2\right)\cdot x^2 = e^{2C}, \text{ обозначим } \tilde{C} = e^{2C} = const.$$

$$\left(1+2u+2u^2\right)\cdot x^2 = \tilde{C}.$$

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем $\left(1 + 2\frac{y}{x} + 2\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot x^2 = \tilde{C}$, тогда общий интеграл уравнения имеет вид

$$x^2+2xy+2y^2=\tilde{C}.$$

Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $1+2u+2u^2\neq 0$ для любого u, а $x=0$ не является решением уравнения.

Ответ: $x^2+2xy+2y^2=\tilde{C}$.

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью подстановки $u=\dfrac{x}{y}$, которая, как легко убедиться, также приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

9.1.5 Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Определение. Линейным *дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, которое может быть записано в виде

$$a(x)y'+b(x)y=c(x), \tag{1}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - заданные непрерывные функции.

Если $c(x)=0$, то уравнение (1) называется *однородным*. Линейное однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Если $c(x)\neq 0$, то уравнение (5.1) называется *неоднородным*. Рассмотрим один из методов решения линейных неоднородных уравнений первого порядка, который называется *методом Бернулли*.

Будем искать решение уравнения (1) в виде произведения двух непрерывно дифференцируемых функций от x:

$$y=u(x)\cdot v(x). \tag{2}$$

Тогда $y'=u'v+uv'$, и, выполнив подстановку в уравнение (5.1), получим

$$a(x)(u'v+uv')+b(x)uv=c(x),$$

$$a(x)\cdot u'v+u\,(a(x)v'+b(x)v)=c(x). \tag{3}$$

Подберем функцию $v=v(x)$ так, чтобы выражение в скобках в уравнении (3) обращалось в нуль, то есть

$$a(x)v'+b(x)v=0,\quad a(x)\frac{dv}{dx}=-b(x)v.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{b(x)}{a(x)}dx,\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx,\quad \ln|v|=P(x)+C.$$

Полагая $C=0$, находим функцию $v = e^{P(x)}$. Подставим её теперь в уравнение (3) и найдем функцию $u=u(x)$, полагая $u'=\frac{du}{dx}$:

$$a(x)e^{P(x)}\frac{du}{dx}=c(x).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$du=\frac{c(x)}{a(x)e^{P(x)}}dx,\ \int du=\int\frac{c(x)}{a(x)e^{P(x)}}dx,$$

$$u=\int\frac{c(x)}{a(x)e^{P(x)}}dx+C.$$

Подставив найденные решения $u(x)$ и $v(x)$ в формулу (2), получим общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1):

$$y=e^{P(x)}\left(\int\frac{c(x)}{a(x)e^{P(x)}}dx+C\right).$$

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'-\frac{y}{x}=x$.

Решение.

Полагаем $y=u(x)v(x)$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляя в уравнение, получим:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x,$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=x.\qquad (*)$$

Подберем функцию $v=v(x)$ так, чтобы $v'-\frac{v}{x}=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x},\quad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x},\quad \ln|v|=\ln|x|+C.$$

Полагая $C=0$, получим $\ln|v|=\ln|x|$, $|v|=|x|$, откуда находим $v=x$.

Подставим теперь найденную функцию $v=x$ в уравнение (*), получим:

$$u'\cdot x=x,\quad \frac{du}{dx}=1,\quad du=dx,\quad \int du=\int dx,\quad u=x+C.$$

Таким образом, $y = uv = x(x + C)$ - общее решение заданного по условию дифференциального уравнения.

Определение. Уравнение, которое может быть записано в виде

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)y^n, \qquad (4)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - заданные непрерывные функции; $n \neq 0$, $n \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*.

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого достаточно обе части уравнения Бернулли разделить на y^n, а затем выполнить замену переменной

$$z = y^{1-n}.$$

Замечание. Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее решение) и особым при $0 < n < 1$.

9.2 Дифференциальные уравнения высших порядков

9.2.1 Дифференциальные уравнения *n*-го порядка. Основные понятия и определения

Определение. Дифференциальными уравнениями высшего порядка называют уравнения порядка выше первого. В общем случае такие уравнения имеют вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

где $n > 1$.

Функция F может не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, но обязательно в уравнении (1) должна присутствовать производная n-го порядка.

Если уравнение (1) может быть записано в виде

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \qquad (2)$$

то его называют *уравнением, разрешенным относительно старшей производной*.

Также как и дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Каждое из этих решений изображается на плоскости Oxy некоторой кривой (интегральной кривой). Чтобы из этого множества решений выбрать определенное, надо задать n условий, которым должно удовлетворять искомое решение. Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до $n-1$ порядка включительно при некотором значении аргумента $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (3)$$

Совокупность этих условий называется ***начальными условиями*** для дифференциального уравнения n-го порядка.

Нахождение решения уравнения (1) или (2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3), называется ***решением задачи Коши*** для этого уравнения. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, порядка n, разрешенного относительно старшей производной, дает следующая теорема.

Теорема (Коши). Пусть в уравнении (2) функция $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ удовлетворяет двум условиям:

1) функция $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ непрерывна как функция $(n+1)$-ой переменной в некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства;

2) её частные производные по переменным $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ в области D ограничены.

Тогда для любой точки $\left(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2), определенное в некотором интервале $(a; b)$, содержащем точку x_0, и удовлетворяющее начальным условиям (3).

Определение. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется ***общим решением дифференциального уравнения*** (2) в некоторой области D существования и единственности решения задачи Коши, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ она удовлетворяет уравнению (2);

2) каковы бы ни были начальные условия (3), можно так подобрать значения постоянных $C_0^1,\ C_0^2, \ldots,\ C_0^n$, что решение $y = \varphi\left(x, C_0^1,\ C_0^2, \ldots,\ C_0^n\right)$ будет удовлетворять заданным начальным условиям (3).

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется *общим интегралом уравнения*.

Решение (интеграл) дифференциального уравнения (2) называется *частным*, если в каждой его точке сохраняется единственность решения задачи Коши. Любое частное решение (интеграл) получается из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Решение (интеграл) дифференциального уравнения (2), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется *особым*. Очевидно, что особое решение не может быть получено из общего решения. Оно будет среди тех решений, которые «теряются» в процессе преобразований.

9.2.2 Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

Одним из основных методов, применяемых при интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков, является понижение порядка уравнения. Мы рассмотрим несколько типов уравнений, которые можно проинтегрировать подобным образом.

$\boxed{1.}$ *Дифференциальные уравнения, не содержащие явным образом переменную* y: $f\left(x, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$.

Введем новую функцию вида $z(x) = y'$, тогда $z'(x) = y''$, $z''(x) = y'''$ и т.д. Таким образом, порядок исходного уравнения можно понизить на единицу.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 3\dfrac{y'}{x} = x$.

Решение. Пусть $z(x) = y'$, тогда $z'(x) = y''$. Подставляем в исходное уравнение, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$z' - 3\frac{z}{x} = x.$$

Будем искать его решение в виде $z = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, тогда $z' = u'v + uv'$. Имеем:

$$u'v + uv' - \frac{3}{x} \cdot uv = x, \quad u'v + u\left(v' - \frac{3}{x} \cdot v\right) = x, \ (*)$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы $v' - \dfrac{3}{x} \cdot v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{3}{x}\cdot v,\ \ \frac{dv}{v}=3\frac{dx}{x},\ \ \int\frac{dv}{v}=3\int\frac{dx}{x},\ \ \ln|v|=3\ln|x|+C.$$

Полагая $C=0$, получим: $\ln|v|=3\ln|x|,\ \ln|v|=\ln\left|x^3\right|,\ |v|=\left|x^3\right|$, откуда $v=x^3$.

Подставляем найденную функцию $v=x^3$ в уравнение (*):

$$u'x^3=x,\ \ u'x^2=1,\ \ \frac{du}{dx}x^2=1,\ \ du=\frac{dx}{x^2},\ \ \int du=\int\frac{dx}{x^2},\ \ u=-\frac{1}{x}+C_1.$$

Тогда функция $z=uv=\left(-\frac{1}{x}+C_1\right)x^3=-x^2+C_1x^3$. С учетом того, что $z(x)=y'$, получаем дифференциальное уравнение:

$$y'=-x^2+C_1x^3,\ \ \frac{dy}{dx}=-x^2+C_1x^3,\ \ dy=\left(-x^2+C_1x^3\right)dx.$$

Интегрируя обе части полученного уравнения, находим общее решение исходного уравнения второго порядка:

$$\int dy=\int\left(-x^2+C_1x^3\right)dx,\ \ y=-\int x^2dx+C_1\int x^3dx,$$

$$y=-\frac{x^3}{3}+C_1\frac{x^4}{4}+C_2,\text{ где } C_1, C_2 -\text{произвольные постоянные.}$$

$\boxed{2.}$ *Дифференциальные уравнения, не содержащие явным образом переменную* x: $f\left(y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$.

Введем новую функцию $p(y)=y'$. Тогда

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot y'=p'\cdot p,$$

$$y'''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)\frac{dy}{dx}=\left(\frac{d^2p}{dy^2}\cdot p+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)\cdot p=p''p^2+(p')^2\cdot p\quad\text{и т.д.}$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно p как функции переменной y.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $yy''-2y'^2=0$.

Решение. Полагая $p(y)=y'$, $y''=p'\cdot p$, где $p=p(y)$, получим уравнение

$$y\cdot p'\cdot p-2p^2=0,\ \ p\left(y\frac{dp}{dy}-2p\right)=0,$$

откуда находим, что

1) $p=0$, $y'=0$, $y=C=const$;

2) $y\frac{dp}{dy}-2p=0$, $y\frac{dp}{dy}=2p$, $\frac{dp}{p}=\frac{2dy}{y}$, $\int\frac{dp}{p}=2\int\frac{dy}{y}$, $\ln|p|=2\ln|y|+C$.

Положим для удобства $C=\ln C_1=const$. Тогда

$$\ln|p|=2\ln|y|+\ln C_1,\quad \ln|p|=\ln\left(C_1y^2\right),\quad |p|=C_1y^2,\; p=C_1y^2.$$

Учитывая, что $p=y'$, получаем уравнение:

$$y'=C_1y^2,\; \frac{dy}{dx}=C_1y^2,\; \frac{dy}{y^2}=C_1dx,\; \int\frac{dy}{y^2}=C_1\int dx,\; -\frac{1}{y}=C_1x+C_2,$$

или $y=-\frac{1}{C_1x+C_2}$ - общее решение заданного дифференциального уравнения.

Решение, полученное в пункте 1, содержится в общем решении исходного уравнения при $C_1=0$.

9.2.3 Понятие комплексного числа

Комплексные числа возникли при решении алгебраических уравнений. Математики не могли согласиться с тем, что уравнение $z^2-1=0$ имеет решение, а уравнение $z^2+1=0$ – нет. Поскольку среди действительных чисел нет ни одного, квадрат которого бы равнялся -1, то договорились, что таким свойством будет обладать символ i, т.е. $i^2=-1$. Поэтому уравнение $z^2+1=0$ имеет два решения: $z=i$ и $z=-i$, как и обычное квадратное уравнение. Так появились сначала в математической среде, а потом и в технических науках комплексные числа. В настоящее время раздел комплексного анализа – современная ветвь математики, широко развитая, которая находит применение во многих инженерных дисциплинах.

Определение. Комплексным числом называется число вида

$$z=a+bi, \tag{1}$$

где $a=\operatorname{Re}z$ − действительная часть комплексного числа z; $b=\operatorname{Im}z$ − мнимая часть комплексного числа z; $a,b\in R$; i− мнимая единица.

Множество всех комплексных чисел обозначается С. Формула (1) называется также *алгебраической формой* записи комплексного числа. Примеры комплексных чисел: $2+3i$, $-5i$, $-1-i$.

Если $b=0$, комплексное число превращается в действительное: $z=b$. Поэтому множество действительных чисел является подмножеством комплексных чисел: $R\subset C$. Комплексное число, у которого $b\neq 0, a=0$, называется *чисто мнимым*. Комплексный нуль – это $0+0\cdot i$, но пишут и просто 0.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ считаются *равными*, если равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Неравенства для комплексных чисел смысла не имеют.

Если действительные части двух комплексных чисел одинаковы, а мнимые части отличаются только знаком, то такие числа называются *комплексно-сопряженными*. Обозначают число, комплексно-сопряженное к числу (1) , следующим образом: $\bar{z} = a - bi$. Например, для комплексного числа $z = -5 + 8i$ комплексно-сопряженным будет число $\bar{z} = -5 - 8i$.

Пример 1. Найти корни квадратного уравнения $x^2 + 9 = 0$.

Решение.

$x^2 = -9$,

$x_1 = \sqrt{-9} = \sqrt{-1\cdot 9} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{9} = 3i$,

$x_2 = -\sqrt{-9} = -\sqrt{-1\cdot 9} = -\sqrt{-1}\cdot\sqrt{9} = -3i$.

Пример 2. Найти корни квадратного уравнения $x^2 + 4x + 8 = 0$.

Решение. Находим дискриминант:

$D = b^2 - 4ac = 16 - 4\cdot 1\cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$, значит, действительных корней это уравнение не имеет, но будут комплексные корни, определяем их по формулам корней:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{-16}}{2} = \frac{-4+\sqrt{-1\cdot 16}}{2} = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i;$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{-16}}{2} = \frac{-4-\sqrt{-1\cdot 16}}{2} = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i.$$

Очевидно, что решениями уравнения являются два комплексно-сопряженных числа.

9.2.4 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным* дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad (1)$$

где $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.

Класс однородных уравнений с постоянными коэффициентами замечателен тем, что для него нахождение фундаментальной системы решений сводится к решению алгебраического уравнения n-й степени.

Общим решением дифференциального уравнения (4.1) является функция вида

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{2}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ - фундаментальная система решений уравнения (1), C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Определение. *Фундаментальной системой решений* называется всякая система линейно независимых решений, содержащая столько функций, каков порядок дифференциального уравнения.

Определение. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются *линейно зависимыми* на интервале $(a;b)$, если существуют постоянные числа $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, такие что $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ для любых $x \in (a;b)$. Если же указанное тождество выполняется только в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале $(a;b)$.

Вид уравнения (1) наводит на мысль, что решения этого уравнения следует искать, прежде всего, среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому решения уравнения (1) будем искать в виде

$$y = e^{kx}, \tag{3}$$

где k – неизвестная постоянная, которую нужно выбрать так, чтобы функция (3) обращала уравнение (1) в тождество.

Для функции (3) имеем: $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим эти производные в уравнение (1), получим:

$$e^{kx}\left(ak^2 + bk + c\right) = 0.$$

Поскольку $e^{kx} \neq 0$, то решение (2) удовлетворяет уравнению (1), если

$$ak^2 + bk + c = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (1), многочлен $ak^2 + bk + c$ - *характеристическим многочленом*.

В зависимости от корней характеристического уравнения (4) выделяют следующие фундаментальные системы решений и вид общего решения дифференциального уравнения (1) (см. табл.1).

Таблица 1

№	Корни характеристического уравнения	Фундаментальная система решений	Общее решение дифференциального уравнения
1	k_1, k_2-два различных действительных корня, $k_1 \neq k_2$	$y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	k - единственный действительный корень, $k = k_1 = k_2$	$y_1(x) = e^{kx}$, $y_2(x) = xe^{kx}$	$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$
3	k_1, k_2- комплексно-сопряженные корни, $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$	$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 11y' = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение. В нашем случае $a = 1,\ b = -11,\ c = 0$, тогда получим:

$$k^2 - 11k = 0,\ \ k(k - 11) = 0,$$
$$k_1 = 0,\ \ k_2 = 11$$

Получили два различных действительных корня, согласно таблице 1 записываем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{11x} = C_1 + C_2 e^{11x}.$$

Пример 2. Найти решение задачи Коши: $y'' - 4y' + 4 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение. В нашем случае $a = 1,\ b = -4,\ c = 4$, тогда получим:

$$k^2 - 4k + 4 = 0,$$
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0,\ \ k_1 = k_2 = 2.$$

Согласно таблице 1, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Найдем значения констант C_1, C_2. Для этого подставим в найденное решение начальные условия:

$$y(0)=0,\ 0=C_1e^{0\cdot x}+C_2\cdot 0\cdot e^{0\cdot x},\quad C_1=0;$$

$$y'=\left(C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}\right)'=2C_1e^{2x}+C_2\left(e^{2x}+2xe^{2x}\right),$$

$$y'(0)=1,\ 1=2C_1e^{0\cdot x}+C_2\left(e^{0\cdot x}+2\cdot 0\cdot e^{0\cdot x}\right),\quad 2C_1+C_2=1.$$

В итоге получаем систему уравнений для нахождения констант C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1=0, \\ 2C_1+C_2=1; \end{cases}\qquad \begin{cases} C_1=0, \\ C_2=1. \end{cases}$$

Таким образом, решением задачи Коши является функция $y=xe^{2x}$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+37y=0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение. В нашем случае $a=1,\ b=-2,\ c=37$, тогда получим:

$$k^2-2k+37=0,$$

$$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 37=4-148=-144,$$

$$k_1=\frac{2+\sqrt{-144}}{2}=\frac{2+\sqrt{-1\cdot 144}}{2}=\frac{2+12i}{2}=1+6i,$$

$$k_2=\frac{2-\sqrt{-144}}{2}=\frac{2-\sqrt{-1\cdot 144}}{2}=\frac{2-12i}{2}=1-6i.$$

Согласно таблице 1, при $\alpha=1,\ \beta=6$ получим общее решение исходного дифференциального уравнения $y=e^x\left(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2014. 208 с.
2. Горлач Б.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник. СПб.: Лань, 2017. 300 с
3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие для вузов. М.: Физматлит, 2011. 168 с.
4. Кожухов И.Б. Сборник задач по математике для втузов. В 4 т. Т. 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры: учеб. пособие для втузов. М.: Физматлит, 2009. 288 с.
5. Козлов В.М. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2009. 320 с.
6. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Мн.: Вышэйшая шк., 2011. 304 с.
7. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие / И.А. Соловьев, В.В. Шевелев, А.В. Червяков и др. СПб.: Лань, 2009. 320 с.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб.: Профессия, 2001. 432 с.
9. Бермант А.Ф., Араманович И.Г Краткий курс математического анализа для вузов. СПб: Лань, 2005. 736 с.
10. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: АСТ, 2001. 656 с.
11. Сборник задач по математическому анализу. Т 2. Интегралы. Ряды: учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 504 с.
12. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 336 с.
13. Шипачев В.С. Высшая математика: учебное пособие для вузов. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 447 с. (Бакалавр и специалист).

ISBN 978-5-534-12319-7. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/447322
14. Шипачев В.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 212 с. (Бакалавр. Прикладной курс). ISBN 978-5-534-04282-5. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437924
15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т. 1: учебник для бакалавров. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 703 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-9916-3701-5. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/425369
16. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 кн. Кн. 1: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 253 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-534-02148-6. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437223
17. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник: учебное пособие для академического бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 192 с. (Бакалавр. Академический курс). ISBN 978-5-9916-7568-0. Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/433433

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 25.10.2023 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 6,74. Тираж 50 экз. Изд. 7590.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии.
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ