

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

ФГОУ ВПО «БРЯНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра эксплуатации машинно-тракторного парка

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИЙ РАЗМЕРНО-
СТЕЙ И ПОДОБИЯ ПРИ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ
ЭКСПЕРИМЕНТА**

Методические указания
для выполнения практической работы по дисциплине
«Основы научных исследований и патентоведение»
студентам инженерно-технологического факультета
обучающихся по профилям:
110800-01 «Технические системы в агробизнесе»
110800-03 «Машины и оборудование для хранения и
переработки сельскохозяйственной продукции»
190100-01 «Машины и оборудование природообустройства
и дорожного строительства»

Брянск 2013

УДК 631.3.072:629.3(076)

ББК 39.3:40.72

Д 93

Дьяченко, А.В. Использование методов теорий размерностей и подобия при постановке задачи эксперимента : методические указания / А.В. Дьяченко. - Брянск: Издательство Брянской ГСХА, 2013.-12с.

Методические указания предназначены для выполнения практической работы по дисциплине «Основы научных исследований и патентоведение» для студентов инженерно-технологического факультета обучающихся по профилям 110800-01 «Технические системы в агробизнесе», 110800-03 «Машины и оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции», 190100-01 «Машины и оборудование природообустройства и дорожного строительства». Целью выполнения практической работы является получение навыков использования методов теорий размерностей и подобия при постановке задач эксперимента и нахождения критериев подобия.

Рецензент: к.э.н., доцент каф. ТОЖиП Исаев Х.М.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-технологического факультета Брянской государственной сельскохозяйственной академии, протокол № 1 от 27 сентября 2013 г.

© Брянская ГСХА, 2013

© Дьяченко А.В., 2013

1 Сущность методов теории подобия

При исследованиях сложных систем, обычно имеют дело с моделями объектов исследования.

Модель (от латинского *modus* – копия, образ) – особого рода промежуточный предмет исследования, построенный из материальных или воображаемых элементов, находящихся в определенном соответствии с самим познаваемым объектом и способный замещать его на некоторых этапах познания.

Различают модели физические и математические. Физические модели, в свою очередь, могут быть *натурными*, в которых протекают те же физические процессы, что и в объекте исследования, и *аналоговыми*, в которых используются физические аналогии между различными физическими понятиями (например, механическими характеристиками и электрическими – ёмкость конденсатора является аналогом эластичности пружины и т.д.). Математические модели объектов эксперимента часто представляют собой регрессионные уравнения связи между исследуемыми параметрами. Эксперимент здесь является звеном, устанавливающим связь между физической моделью и математической.

Даже реальная машина, подготовленная для исследований, является в некотором смысле моделью, так как исследуется какая-нибудь одна сторона её работы, и принимаются меры для устранения влияния целого ряда факторов, называемых побочными. Кроме того, исследования проводятся в ограниченном диапазоне режимов работы и нагрузок, а результаты их затем распространяют на все подобные случаи эксплуатации, а иногда и на другие машины, в определенном смысле подобные исследуемой. Поэтому исследуемый объект является моделью всех аналогичных объектов.

Чем на большее количество подобных объектов и режимов их работы можно распространить результаты эксперимента, тем они ценнее. Другими словами, для подобных объектов не нужно проводить отдельные исследования, и объём экспериментальных исследований значительно сокращается.

Теория подобия устанавливает условие подобия объектов экспериментальных исследований и правила пересчёта резуль

результатов эксперимента на подобные объекты, в том числе и с модели модели – на реальный объект, с моделируемых условий работы – на реальные условия.

В физически подобных объектах протекают процессы, подчиняющиеся одним и тем же законам физики. Более того, подобные объекты описываются одними и теми же уравнениями физики, в которые входят, наряду с измеряемыми в процессе эксперимента величинами, индивидуальные характеристики объектов: размеры, характеристики материала, режимов работы и т.д. В ходе эксперимента эти характеристики не изменяются, и зависимость результатов эксперимента от них мы получить не можем. Её нужно угадать ещё при постановке задач эксперимента.

Для этого используют теорию размерностей физических величин, то есть известные формулы связи между единицами измерения различных физических величин (например, единица силы равна единица массы умноженная на единицу ускорения: $1\text{Н} = 1\text{кг}\cdot 1\text{м}/\text{с}^2$).

Уравнения, описывающие исследуемый объект, являются сложной комбинацией простых формул, выражающих элементарные законы физики. Но и формулы размерностей физических величин установлены на основе комбинаций этих же элементарных законов физики. Например, приведённая выше формула выражает второй закон Ньютона и зависимость пройденного пути от ускорения и времени действия ускорения. Следовательно, если установить заранее все параметры, которые участвуют в описании исследуемого объекта, и проанализировать соотношения между их размерностями, можно составить из этих параметров ряд формул, выражающих элементарные законы физики, возможно имеющие место в исследуемом объекте. Например, если в характеристику движения объекта входят масса m , ускорение a , пройденный путь S , время t , внешняя сила F , то в уравнения, описывающие его движение, могут входить выражения известных физических законов

$$\frac{F}{ma} = \text{const}, \quad \frac{at^2}{S} = \text{const}, \quad \frac{Ft}{m\frac{S}{t}} = \text{const}.$$

Здесь последняя формула выражает соотношение между импульсом силы и количеством движения объекта. Эти выражения получены из анализа размерностей величин \mathbf{F} , \mathbf{m} , \mathbf{a} , \mathbf{t} , \mathbf{S} , без предварительного знания о действительных законах движения объекта. Задачей эксперимента и является определение конкретной комбинации из приведённых выражений, которой описывается поведение исследуемой системы. При этом вместо пяти исходных переменных в эксперименте можно рассматривать только три, соответствующие трём приведённым выражениям, что значительно сокращает объём исследований.

Нужно отметить, что некоторые соотношения между параметрами объекта могут быть заранее известны и из других теоретических или экспериментальных исследований. Но далее рассматривается только случай установления их из анализа размерностей.

2 Использование методов теорий размерностей и подобия при постановке задачи эксперимента

Обычно целью эксперимента является получение математической модели объекта исследования в виде регрессионного уравнения зависимости определяемого параметра \mathbf{R} от определяющих параметров $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ в виде

$$\mathbf{R} = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n),$$

где n – количество определяющих параметров.

Для этого выполняют предварительный анализ поведения рассматриваемого объекта.

2.1 Выбор определяющих параметров

В число определяющих параметров $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ включают основные характеристики объекта (размеры, массу и т.д.), характеристики внешних условий движения (ускорение свободно-

го падения g , другие константы внешних условий), начальные (граничные) условия, все те параметры, которые вошли бы в дифференциальные уравнения физических процессов в рассматриваемой системе, если бы мы взяли их составлять.

2.2 Анализ размерностей задачи

Определяют количество независимых размерностей в задаче r . Всего в физике шесть независимых размерностей: длины [L] (метр), времени [T] (секунда), массы [M] (килограмм), сила тока [I] (ампер), силы света [J] (свеча Кельвина), температуры [Θ] (градус Кельвина). В задачах механики обычно не рассматривают электрические, оптические и тепловые явления, поэтому в них бывает только три независимые размерности: [L], [T], [M]. Размерности остальных величин, как известно, выражаются через указанные независимые размерности.

Из n определяющих параметров можно ставить $n-r$ независимых безразмерных комплексов – определяющих критериев подобия.

2.3 Выбор базисных параметров

Из n определяющих параметров выбирают r базисных (первичных) U_i ($i=1,2,\dots,r$), имеющих не выражаемые друг через друга размерности

$$[U_i] = [M_i]^{\mu_i} \cdot [L_i]^{\lambda_i} \cdot [T_i]^{\tau_i} \dots,$$

где $\mu_i, \lambda_i, \tau_i, \dots$ – показатели степеней, с которыми входят в размерность i – того базисного параметра размерности массы, длины, времени и другие независимые размерности задачи.

Обычно в качестве базисных выбирают параметры с наиболее простыми размерностями, а также величины, постоянные в ходе эксперимента (например, ускорение свободного падения g). Проверить независимость размерностей базисных параметров

можно, составив из показателей степени $\mu_i, \lambda_i, \tau_i, \dots$ матрицу, определитель которой не должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \lambda_1 & \tau_1 & \dots \\ \mu_2 & \lambda_2 & \tau_2 & \dots \\ \mu_3 & \lambda_3 & \tau_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_r & \lambda_r & \tau_r & \dots \end{vmatrix} \neq 0.$$

Например, длина объекта l (м), его масса m (кг) и ускорение свободного падения g (м/с^2) могут быть тремя базисными параметрами, т.к. их размерности не выражаются друг через друга (секунда не выражается через метр и килограмм).

Тогда $U_1=l, U_2=m, U_3=g,$

$$[U_1] = [M]^0 [L]^1 [T]^0;$$

$$[U_2] = [M]^1 [L]^0 [T]^0;$$

$$[U_3] = [M]^0 [L]^1 [T]^{-2};$$

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \lambda_1 & \tau_1 \\ \mu_2 & \lambda_2 & \tau_2 \\ \mu_3 & \lambda_3 & \tau_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

2.4 Составление безразмерных комплексов методом нулевых размерностей

Для $n-r$ определяющих параметров A_k (кроме базисных) составляются безразмерные комплексы в виде:

$$P_k = A_k \cdot U_1^\alpha \cdot U_2^\beta \cdot \dots \cdot U_r^\epsilon, \quad (k=1,2,\dots,n-r),$$

где показатели степени базисных параметров $U_i = \alpha, \beta, \gamma, \dots$ - выбираются из условия, чтобы величина P_k получалась безразмерной.

$$[\Pi_k] = [M]^0 [L]^0 [T]^0 \dots$$

Для этого выражают размерности параметров $A_k, U_1, U_2, \dots, U_r$ через $[M], [L], [T]$, а затем показатели степени одинаковых размерностей суммируют и приравнивают нулю. Полученные уравнения для показателей степени решают и получают необходимые показатели $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varepsilon$. Например, используя базисные параметры из предыдущего примера l, m и g , можно построить безразмерный комплекс для мощности $A_k = N, \text{Вт}$:

$$[A_k] = N \cdot m / c = \text{кг} \cdot m^2 / c^3 = [M]^1 [L]^2 [T]^{-3};$$

$$\Pi_k = \Pi_N = N \cdot m^\alpha \cdot l^\beta \cdot g^\gamma;$$

$$[\Pi_k] = [\Pi_N] = \{ [M]^1 [L]^2 [T]^{-3} \} \cdot [M]^\alpha \cdot [L]^\beta \cdot \{ [L]^1 [T]^{-2} \}^\gamma = \\ = [M]^{1+\alpha} \cdot [L]^{2+\beta+\gamma} \cdot [T]^{-3-2\gamma}.$$

Для безразмерности комплекса $\Pi_k = \Pi_N$ должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha &= 0, \\ 2 + \beta + \gamma &= 0, \\ -3 - 2\gamma &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{откуда } \alpha = -1, \quad \beta = -1/2, \quad \gamma = -3/2.$$

Безразмерный комплекс для мощности имеет вид:

$$\Pi_N = N \cdot m^{-1} \cdot l^{-1/2} \cdot g^{-3/2} = N / (m \cdot \sqrt{l} \cdot g \cdot \sqrt{g}).$$

После составления безразмерных комплексов для всех определяющих параметров A_k (кроме базисных) составляется тем же методом безразмерный комплекс для определяемого параметра **R**.

$$\Pi_R = R \cdot U_1^\alpha \cdot U_2^\beta \cdot U_3^\gamma \cdot \dots \cdot U_r^\varepsilon.$$

Теперь целью эксперимента является получение уравнения зависимости:

$$\Pi_R = f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}).$$

Задача эксперимента упростилась: параметры стали безразмерными, а их число уменьшилось на r . Кроме того, если для модели и реального объекта величины $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$ равны, то и величины Π_R для них будут равны. Такие модели и реальные объекты называют физически подобными. В них физические процессы сохраняют свой характер, эффект изменения масштаба, материалов и т.д. не сказывается на их протекании. Например, если модель в ходе эксперимента не разрушилась, то и реальный подобный ей объект не разрушится в подобных условиях; если в модельном трубопроводе течение жидкости было ламинарным, то и в подобном модели реальном трубопроводе оно не будет переходить в турбулентное. Сохранение подобия является необходимым и достаточным условием переноса результатов эксперимента с модели на реальные объекты.

2.5 Анализ предполагаемых связей и вида регрессионной зависимости

Далее анализируется возможная форма зависимости определяемого параметра от каждого из определяющих параметров в отдельности

$$\Pi_R = f(\Pi_1), \quad \Pi_R = f(\Pi_2), \quad \Pi_R = f_{n-r}(\Pi_{n-r}).$$

При этом используют известные до эксперимента данные теории и других экспериментов.

Затем обозначают:

$$\Pi_R = y; \quad f_1(\Pi_1) = x_1; \quad f_2(\Pi_2) = x_2, \dots, \quad f_{n-r}(\Pi_{n-r}) = x_{n-r}.$$

В процессе эксперимента обычно ищут зависимость выходного параметра y от входных факторов x_1, x_2, x_3, \dots в виде поли:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots \\ \dots + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + \dots ,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{11}, \dots, a_{12}, \dots$ - постоянные коэффициенты, получаемые путём обработки результатов эксперимента методами математической статистики (регрессионного анализа).

Литература

1. Теории подобия и размерностей. Моделирование./П.М. Алабужев и др.—М.: Высшая школа, 1986. – 208 с.

Содержание

1	Сущность методов теории подобия.....	3
2	Использование методов теорий размерностей и подобия при постановке задачи эксперимента.....	5
2.1	Выбор определяющих параметров.....	5
2.2	Анализ размерностей задачи.....	6
2.3	Выбор базисных параметров.....	6
2.4	Составление безразмерных комплексов методом нулевых размерностей.....	7
2.5	Анализ предполагаемых связей и вида регрессионной зависимости.....	9
	Литература.....	10

Учебное издание

Дьяченко Антон Вячеславович

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИЙ РАЗМЕРНОСТЕЙ И
ПОДОБИЯ ПРИ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Подписано к печати . . . 2013 г. Формат 60 x 84. 1/16.
Бумага печатная. Усл. п .л. 0,75. Тираж 50 экз. Изд. № .

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365 Брянская область, Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА