Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика»

Брянская область 2021

УДК 517.37 (07)
ББК 22.161.1
Р 19

Ракул, Е. А. Дифференциальные уравнения: учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2021. – 53 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 20.03.02 Природообустройство и водопользование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 35.03.06 Агроинженерия. Учебно-методическое пособие может быть использовано как для аудиторной работы, так и для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Высшая математика».

Рецензенты:
Панов М.В., к.т.н., доцент кафедры автоматики, физики и математики.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 26.02.2021 г., протокол № 5.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.2 Основные понятия

В математике и физике часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить уравнение, содержащее не только неизвестную функцию и ее аргумент, но и производную неизвестной функции.

Определение. Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', y''', ..., y^{(n)}$, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Например, уравнения $y' + xy - x^2 = 0$, $yy' - 1 = 0$ будут дифференциальными уравнениями первого порядка; уравнения $xy'' - (y')^3 - y = 0$, $y'' - y' = 1$ будут дифференциальными уравнениями второго порядка; уравнение $y^2 - y''' + x^5 = 0$ имеет третий порядок.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* (1.1) на интервале $(a; b)$, если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала $(a; b)$.

Определение. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения (1.1), называется *интегралом дифференциального уравнения*. График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Это название не случайно, так как нахождение решений обычно связано с процессом интегрирования. Поскольку процесс интегрирования функции приводит к появлению множества функций, то и решений любое дифференциальное уравнение тоже будет иметь множество. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений данного дифференциального уравнения в заданной области (в явной или неявной форме).

1.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно производной

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная искомая функция, F – заданная функция трех переменных. Если из равенства (2) выразить явным образом производную y', получим уравнение вида

$$y' = f(x, y). \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной*. Для уравнения вида (2.2) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 (Коши). *Пусть в уравнении (2.2) функция $f(x, y)$ удовлетворяет двум условиям:*
1) $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости Oxy;
2) ее частная производная $f'_y(x, y)$ в области D ограничена.
Тогда для любой точки $M_0(x_0;\ y_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2.2), определенное в некотором интервале $(a;\ b)$, содержащем точку x_0, и удовлетворяющее условию $y_0 = \varphi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются *начальными значениями* для решения $y = \varphi(x)$, а условие $y_0 = \varphi(x_0)$ – *начальным условием* решения. Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющего начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$, называется *задачей Коши*. Поэтому теорему 2.1 называют *теоремой существования и единственности решения задачи Коши*.

Геометрически задание начального условия означает, что на плоскости Oxy задается точка $M_0(x_0;\ y_0)$, через которую проходит интегральная кривая. Согласно теореме 2.1, через каждую точку области D проходит, и притом единственная, интегральная кривая уравнения (2.2). Закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значение y_0 (так, чтобы точка $(x_0;\ y_0)$

принадлежала области *D*), для каждого числа y_0 будем получать свое решение. В результате, вся область *D* будет покрыта интегральными кривыми, которые нигде между собой не пересекаются (рис.1).

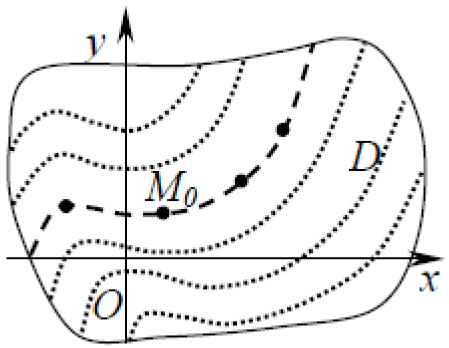

Рис. 1

Таким образом, теорема 2.1 подтверждает предположение о том, что дифференциальное уравнение имеет множество решений и говорит о том, что эта совокупность решений зависит от произвольной постоянной.

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения* (2.2) в области *D* называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) при любом допустимом значении постоянной *C* она удовлетворяет уравнению (2.2);

2) каково бы ни было начальное условие $y_0 = \varphi(x_0)$ можно найти единственное значение C_0 такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$удовлетворяет данному начальному условию.

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется *общим интегралом уравнения*.

Замечание. Теорема 2.1 дает достаточные условия существования (1 условие теоремы) и единственности (2 условие теоремы) решения задачи Коши. Поэтому возможно, что в точке $(x_0;\ y_0)$ условия теоремы 2.1 не выполняются, а решение $y = y(x)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$, существует и единственно.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется *частным решением*. Очевидно, что любое частное решение (интеграл) получается из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной *C*.

Общее решение не всегда описывает все множество решений дифференциального уравнения. Решение (интеграл) $y=\psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т. е. через каждую точку интегральной кривой $y=\psi(x)$ проходит еще хотя бы одна интегральная кривая), называется *особым решением*. Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. График особого решения называют *особой интегральной кривой уравнения*.

1.3 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_2(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_1(y)dy=0, \tag{3.1}$$

где функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ - непрерывны, называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Иначе говоря, *уравнение с разделяющимися переменными, это уравнение, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от* x *и только от* y.

Перепишем уравнение (3.1) в виде

$$f_2(x)\cdot\varphi_1(y)dy=-f_1(x)\cdot\varphi_2(y)dx.$$

Разделим обе части уравнения на произведение $f_2(x)\cdot\varphi_2(y)$:

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy=-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx. \tag{3.2}$$

В уравнении (3.2) переменные уже разделены: слева только функции и дифференциалы, зависящие от y, а справа – только от x.

Проинтегрируем теперь обе части уравнения (3.2):

$$\int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy=-\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx.$$

Пусть $\Phi(y)$ - первообразная для функции $\dfrac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}$; $F(x)$ - первообразная для функции $-\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Тогда с точностью до произвольной константы C получим равенство

$$\Phi(y) = F(x) + C. \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) представляет собой общее решение уравнения (3.1) *в неявном виде* (его общий интеграл). Если в нем можно выразить y, приводим его к явному виду $y = y(x;C)$.

Замечание 1. Деление $f_2(x) \cdot \varphi_2(y)$ может привести к потере решений, обращающих в нуль это произведение. Поэтому, чтобы получить полное решение, необходимо рассмотреть корни уравнений $f_2(x) = 0,\ \varphi_2(y) = 0$.

Замечание 2. Разделение переменных в уравнении удобнее проводить поэтапно: 1) слагаемое с дифференциалом dy оставляем в левой части уравнения, слагаемое с dx переносим в правую часть; 2) разделение переменных начинаем с левой части уравнения – оставляем только функции, зависящие от переменной y, в правой части оставляем только функции переменной x; 3) после интегрирования общую константу C для двух интегралов записываем в правой части уравнения.

Пример 3.1. Решить уравнение $2x\sqrt{y}dx + (1 - x^2)dy = 0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$(1 - x^2)dy = -2x\sqrt{y}dx.$$

Разделим переменные в уравнении:

$$(1 - x^2)dy = -2x\sqrt{y}dx \quad \Big|: (1 - x^2) \neq 0,$$

$$dy = -\frac{2x}{1 - x^2} \cdot \sqrt{y}dx \quad \Big|: \sqrt{y} \neq 0,$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2x}{x^2 - 1}dx.$$

Проинтегрируем теперь обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{2x}{x^2-1}dx, \qquad \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \begin{vmatrix} t = x^2-1 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C,$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \ln\left|x^2-1\right| + C, \qquad 2\sqrt{y} = \ln\left|x^2-1\right| + C,$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2-1\right| + C\right), \quad \sqrt{y} = \ln\sqrt{\left|x^2-1\right|} + \frac{1}{2}C, \qquad y = \left(\ln\sqrt{\left|x^2-1\right|} + \frac{1}{2}C\right)^2.$$

Так как C – произвольная постоянная, то $\frac{1}{2}C$ можно переобозначить через C. Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = \left(\ln\sqrt{\left|x^2-1\right|} + C\right)^2.$$

Далее, при делении на $\left(1-x^2\right)$ и $\sqrt{y}$ могли быть потеряны решения. Поэтому необходимо рассмотреть уравнения:

1) $1-x^2=0, \quad x=\pm 1$

Подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $x=\pm 1$ являются решениями. Проверим, входят ли они в общий интеграл. Имеем

$$2\sqrt{y} - \ln\left|x^2-1\right| = C,$$

$$x^2-1 = \pm e^{-C}\cdot e^{2\sqrt{y}}, \text{ обозначим } \tilde{C} = \pm e^{-C} \neq 0.$$

$$x = \pm\sqrt{1+\tilde{C}e^{2\sqrt{y}}}.$$

Решения $x=\pm 1$ могут быть включены в общее решение, если снять ограничение на $\tilde{C}$.

2) $\sqrt{y}=0, \quad y=0$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, убеждаемся, что $y=0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и в общее решение (интеграл) не входит. Следовательно, это особое решение уравнения.

Ответ: $y = \left(\ln\sqrt{\left|x^2-1\right|} + C\right)^2$, $y=0$.

1.4 Однородные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными всегда можно привести уравнения, которые получили название однородных.

Определение. Функция $M(x,y)$ называется *однородной измерения* m (или однородной степени m), если при любом $t \neq 0$ справедливо равенство

$$M(t \cdot x,\ t \cdot y) = t^m \cdot M(x,y).$$

Определение. Уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется *однородным относительно* x *и* y, если $f(x,y)$ *– однородная функция нулевого измерения*.

Покажем, как уравнение, однородное относительно x и y, можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.

По определению имеем $f(t \cdot x,\ t \cdot y) = f(x,y)$ для любого $t \neq 0$. Положим в этом тождестве $t = \dfrac{1}{x}$ и получим $f(x,y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$, т.е. однородная функция нулевого измерения зависит от отношения $\dfrac{y}{x}$. Следовательно, дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ можно записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4.1)$$

Выполним замену переменной $u = \dfrac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + ux'$, $y' = u'x + u$. Подставляя эти выражения в (4.1), получим уравнение

$$u'x + u = \varphi(u), \text{ или } \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Подставив теперь вместо u отношение $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения $y' = -\frac{x+y}{x+2y}$.

Решение.

Функция $f(x, y) = -\frac{x+y}{x+2y}$ - однородная нулевого измерения. Действительно,

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = -\frac{tx+ty}{tx+2ty} = -\frac{x+y}{x+2y} = t^0 \cdot f(x, y), \; m = 0.$$

Следовательно, заданное уравнение является *однородным*.
Разделим числитель и знаменатель дроби на x, получим уравнение:

$$y' = -\frac{1+\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}}.$$

Выполним замену переменной $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + ux'$, $y' = u'x + u$.
Подставляя в уравнение, получим

$$u'x + u = -\frac{1+u}{1+2u}, \quad \frac{du}{dx}x = -\frac{1+u}{1+2u} - u,$$

$$\frac{du}{dx}x = -\left(\frac{1+u}{1+2u} + u\right), \quad \frac{du}{dx}x = -\frac{1+2u+2u^2}{1+2u}.$$

Разделяя переменные, получим уравнение:

$$\frac{1+2u}{1+2u+2u^2}du = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем теперь обе части уравнения:

$$\int \frac{1+2u}{1+2u+2u^2}du = -\int \frac{dx}{x}.$$

Вычислим интеграл в левой части уравнения отдельно:

$$\int \frac{1+2u}{1+2u+2u^2}\,du = \left| \begin{array}{l} z = 1+2u+2u^2 \\ dz = (2+4u)du \\ (1+2u)du = \frac{1}{2}dz \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{1}{2}\ln\left(1+2u+2u^2\right) + C_1$$

Тогда для исходного уравнения имеем:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+2u+2u^2\right) = -\ln|x| + C,$$

$$\ln\left(1+2u+2u^2\right) + 2\ln|x| = 2C,$$

$$\ln\left(1+2u+2u^2\right) + \ln x^2 = 2C,$$

$$\ln\left(\left(1+2u+2u^2\right)\cdot x^2\right) = 2C,$$

$$\left(1+2u+2u^2\right)\cdot x^2 = e^{2C}, \text{ обозначим } \tilde{C} = e^{2C} = const.$$

$$\left(1+2u+2u^2\right)\cdot x^2 = \tilde{C}.$$

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем $\left(1 + 2\frac{y}{x} + 2\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot x^2 = \tilde{C}$, тогда общий интеграл уравнения имеет вид

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = \tilde{C}.$$

Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $1+2u+2u^2 \neq 0$ для любого u, а $x = 0$ не является решением уравнения.

Ответ: $x^2 + 2xy + 2y^2 = \tilde{C}$.

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью подстановки $u = \frac{x}{y}$, которая, как легко убедиться, также приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

1.5 Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Определение. Линейным *дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, которое может быть записано в виде

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{5.1}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - заданные непрерывные функции.

Если $c(x) = 0$, то уравнение (5.1) называется *однородным*. Линейное однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (см. параграф 3).

Если $c(x) \neq 0$, то уравнение (5.1) называется *неоднородным*. Рассмотрим один из методов решения линейных неоднородных уравнений первого порядка, который называется *методом Бернулли*.

Будем искать решение уравнения (5.1) в виде произведения двух непрерывно дифференцируемых функций от x:

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{5.2}$$

Тогда $y' = u'v + uv'$, и, выполнив подстановку в уравнение (5.1), получим

$$a(x)(u'v + uv') + b(x)uv = c(x),$$
$$a(x) \cdot u'v + u\,(a(x)v' + b(x)v) = c(x). \tag{5.3}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках в уравнении (5.3) обращалось в нуль, то есть

$$a(x)v' + b(x)v = 0, \quad a(x)\frac{dv}{dx} = -b(x)v\,.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx, \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{b(x)}{a(x)}dx, \quad \ln|v| = P(x) + C\,.$$

Полагая $C=0$, находим функцию $v = e^{P(x)}$. Подставим её теперь в уравнение (5.3) и найдем функцию $u=u(x)$, полагая $u' = \dfrac{du}{dx}$:

$$a(x)e^{P(x)}\frac{du}{dx}=c(x).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$du=\frac{c(x)}{a(x)e^{P(x)}}dx,\ \int du=\int\frac{c(x)}{a(x)e^{P(x)}}dx,$$
$$u=\int\frac{c(x)}{a(x)e^{P(x)}}dx+C.$$

Подставив найденные решения $u(x)$ и $v(x)$ в формулу (5.2), получим общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.1):

$$y=e^{P(x)}\left(\int\frac{c(x)}{a(x)e^{P(x)}}dx+C\right).$$

Пример 5.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'-\dfrac{y}{x}=x$.

Решение.

Полагаем $y=u(x)v(x)$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляя в уравнение, получим:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x,$$
$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=x. \quad (*)$$

Подберем функцию $v=v(x)$ так, чтобы $v'-\dfrac{v}{x}=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x},\quad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x},\quad \ln|v|=\ln|x|+C.$$

Полагая $C=0$, получим $\ln|v|=\ln|x|$, $|v|=|x|$, откуда находим $v=x$.
Подставим теперь найденную функцию $v=x$ в уравнение (*), получим:

$$u'\cdot x=x,\qquad \frac{du}{dx}=1,\qquad du=dx,\qquad \int du=\int dx,\qquad u=x+C.$$

Таким образом, $y=uv=x(x+C)$ - общее решение заданного по условию дифференциального уравнения.

Определение. Уравнение, которое может быть записано в виде

$$a(x)y'+b(x)y=c(x)y^n, \tag{5.4}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - заданные непрерывные функции; $n\neq 0$, $n\neq 1$, называется *уравнением Бернулли*.

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого достаточно обе части уравнения Бернулли разделить на y^n, а затем выполнить замену переменной

$$z=y^{1-n}.$$

Замечание. Уравнение Бернулли при $n>0$ имеет решение $y=0$. Оно будет частным решением при $n>1$ (обычно входит в общее решение) и особым при $0<n<1$.

1.6 Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{6.1}$$

где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$ в некоторой области D, называется *уравнением в полных дифференциалах*.

Если уравнение (6.1) является уравнением в полных дифференциалах, то его можно записать следующим образом:

$$dF(x, y) = 0.$$

где $F(x, y)$ - такая функция, что

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (6.2)$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения (6.1) в неявном виде определяется уравнением

$$F(x, y) = C,$$

где C – произвольная постоянная.

Таким образом, задача интегрирования дифференциального уравнения в полных дифференциалах фактически сводится к задаче отыскания функции двух переменных по ее полному дифференциалу. Помочь в этом может следующая теорема.

***Теорема**. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны в области D плоскости Oxy и имеют в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Для того, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ представляло собой полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Таким образом, если выполняются условия теоремы и справедлива формула (6.2), то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \qquad (6.3)$$

Интегрируя первое равенство (6.3) по x, находим

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y), \qquad (6.4)$$

где $C(y)$ - произвольная функция от y.

Теперь подберем функцию $C(y)$ так, чтобы выполнялось второе равенство (6.3). Для этого продифференцируем правую часть равенства (6.4) по y и производную приравняем $Q(x, y)$.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)\,dx\right) + C'(y) = Q(x, y). \qquad (6.5)$$

Из полученного уравнения (6.5) определяем $C'(y)$ и находим функцию $C(y)$, которую затем подставляем в равенство (6.4) и получаем искомую функцию $F(x,\ y)$.

Чтобы выделить из общего решения частное, удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$, надо в общем решении $F(x, y) = C$ заменить переменные x, y их начальными значениями x_0, y_0, тогда $C = F(x_0, y_0)$ и $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ - искомое частное решение.

Пример 6.1. Найти решение дифференциального уравнения $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

Решение.

Пусть $P(x, y) = x + y + 1$, $Q(x, y) = x - y^2 + 3$, тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = (x + y + 1)'_y = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = (x - y^2 + 3)'_x = 1$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy$ - полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$. Имеем

$$F(x, y) = \int P(x, y)\,dx + C(y) = \int (x + y + 1)dx + C(y) = \int x\,dx + y\int dx + \int dx + C(y) =$$
$$= \frac{x^2}{2} + xy + x + C(y).$$

Найдем функцию $C(y)$, используя формулу (6.5):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + x\right) + C'(y) = x - y^2 + 3,$$

$$x + C'(y) = x - y^2 + 3,$$

$$C'(y) = -y^2 + 3, \quad \text{или} \quad \frac{dC}{dy} = -y^2 + 3, \text{откуда } dC = \left(-y^2 + 3\right)dy.$$

Интегрируя, получим:

$$\int dC = \int \left(-y^2 + 3\right)dy,$$

$$C(y) = -\int y^2 dy + 3\int dy = -\frac{y^3}{3} + 3y + C_1.$$

Тогда искомая функция $F(x, y)$ имеет вид:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1.$$

Данное по условию уравнение принимает вид $dF(x, y) = 0$, а его общее решение определяется уравнением $F(x, y) = C_2$, или

$$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1 = C_2.$$

Умножим обе части равенства на 6, чтобы избавиться от дробей:

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y + 6C_1 = 6C_2,$$
$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = 6\left(C_2 - C_1\right).$$

Полагая $6\left(C_2 - C_1\right) = C_3$ - произвольная постоянная, получаем уравнение, определяющее неявно общее решение исходного дифференциального уравнения

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C_3.$$

Найдем теперь значение постоянной C_3, подставив начальные условия в полученное решение: Имеем: $3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = C_3$, откуда находим $C_3 = 9$. Тогда искомое частное решение дифференциального уравнения определяется уравнением:

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = 9.$$

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1 Дифференциальные уравнения *n*-го порядка. Основные понятия и определения

Определение. *Дифференциальными уравнениями высшего порядка называют уравнения порядка выше первого. В общем случае такие уравнения имеют вид*

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1.1)$$

где $n > 1$.

Функция F может не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', ..., y^{(n)}$, но обязательно в уравнении (1.1) должна присутствовать производная n-го порядка.

Если уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right), \qquad (1.2)$$

то его называют *уравнением, разрешенным относительно старшей производной*.

Также как и дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Каждое из этих решений изображается на плоскости Oxy некоторой кривой (интегральной кривой). Чтобы из этого множества решений выбрать определенное, надо задать n условий, которым должно удовлетворять искомое решение. Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до $n-1$ порядка включительно при некотором значении аргумента $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (1.3)$$

Совокупность этих условий называется *начальными условиями* для дифференциального уравнения n-го порядка.

Нахождение решения уравнения (1.1) или (1.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (1.3), называется *решением задачи Коши* для этого уравнения. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, порядка n, разрешенного относительно старшей производной, дает следующая теорема.

Теорема (Коши). Пусть в уравнении (1.2) функция $f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ удовлетворяет двум условиям:

1) функция $f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ непрерывна как функция $(n+1)$-ой переменной в некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства;

2) её частные производные по переменным $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ в области D ограничены.

Тогда для любой точки $\left(x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.2), определенное в некотором интервале $(a;b)$, содержащем точку x_0, и удовлетворяющее начальным условиям (1.3).

Определение. *Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется общим решением дифференциального уравнения (1.2) в некоторой области D существования и единственности решения задачи Коши, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ она удовлетворяет уравнению (1.2);

2) каковы бы ни были начальные условия (1.3), можно так подобрать значения постоянных $C_0^1,\ C_0^2, ...,\ C_0^n$, что решение $y = \varphi\left(x, C_0^1,\ C_0^2, ...,\ C_0^n\right)$ будет удовлетворять заданным начальным условиям (1.3).

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется *общим интегралом уравнения***.**

Решение (интеграл) дифференциального уравнения (1.2) называется *частным*, если в каждой его точке сохраняется единственность решения задачи Коши. Любое частное решение (интеграл) получается из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Решение (интеграл) дифференциального уравнения (1.2), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется *особым*. Очевидно, что особое решение не может быть получено из общего решения. Оно будет среди тех решений, которые «теряются» в процессе преобразований.

2.2 Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

Одним из основных методов, применяемых при интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков, является понижение порядка уравнения. Мы рассмотрим несколько типов уравнений, которые можно проинтегрировать подобным образом.

$\boxed{1.}$ *Дифференциальные уравнения, не содержащие явным образом переменную* y: $f\left(x, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$.

Введем новую функцию вида $z(x) = y'$, тогда $z'(x) = y''$, $z''(x) = y'''$ и т.д. Таким образом, порядок исходного уравнения можно понизить на единицу.

Пример 2.1. Найти общее решение уравнения $y'' - 3\dfrac{y'}{x} = x$.

Решение

Пусть $z(x) = y'$, тогда $z'(x) = y''$. Подставляем в исходное уравнение, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$z' - 3\frac{z}{x} = x.$$

Будем искать его решение в виде $z = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, тогда $z' = u'v + uv'$. Имеем:

$$u'v + uv' - \frac{3}{x} \cdot uv = x, \quad u'v + u\left(v' - \frac{3}{x} \cdot v\right) = x, \ (*)$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы $v' - \dfrac{3}{x} \cdot v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3}{x} \cdot v, \ \frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}, \ \int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x}, \ \ln|v| = 3\ln|x| + C.$$

Полагая $C = 0$, получим: $\ln|v| = 3\ln|x|$, $\ln|v| = \ln\left|x^3\right|$, $|v| = \left|x^3\right|$, откуда $v = x^3$. Подставляем найденную функцию $v = x^3$ в уравнение (*):

$$u'x^3 = x, \ u'x^2 = 1, \ \frac{du}{dx}x^2 = 1, \ du = \frac{dx}{x^2}, \ \int du = \int \frac{dx}{x^2}, \ u = -\frac{1}{x} + C_1.$$

Тогда функция $z = uv = \left(-\dfrac{1}{x} + C_1\right)x^3 = -x^2 + C_1x^3$. С учетом того, что $z(x) = y'$, получаем дифференциальное уравнение:

$$y' = -x^2 + C_1x^3, \ \frac{dy}{dx} = -x^2 + C_1x^3, \ dy = \left(-x^2 + C_1x^3\right)dx.$$

Интегрируя обе части полученного уравнения, находим общее решение исходного уравнения второго порядка:

$$\int dy = \int \left(-x^2 + C_1 x^3\right)dx,\ \ y = -\int x^2 dx + C_1 \int x^3 dx,$$

$$y = -\frac{x^3}{3} + C_1 \frac{x^4}{4} + C_2,$$ где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

$\boxed{2.}$ *Дифференциальные уравнения, не содержащие явным образом переменную* x: $f\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$.

Введем новую функцию $p(y) = y'$. Тогда

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p' \cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 p}{dy^2} \cdot p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) \cdot p = p'' p^2 + (p')^2 \cdot p \quad \text{и т.д.}$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно p как функции переменной y.

Пример 2.2. Найти общее решение уравнения $yy'' - 2y'^2 = 0$.

Решение.

Полагая $p(y) = y'$, $y'' = p' \cdot p$, где $p = p(y)$, получим уравнение

$$y \cdot p' \cdot p - 2p^2 = 0,\ \ p\left(y\frac{dp}{dy} - 2p\right) = 0,$$

откуда находим, что

1) $p = 0$, $y' = 0$, $y = C = const$;

2) $y\dfrac{dp}{dy} - 2p = 0$, $\quad y\dfrac{dp}{dy} = 2p$, $\quad \dfrac{dp}{p} = \dfrac{2dy}{y}$, $\quad \displaystyle\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y}$, $\quad \ln|p| = 2\ln|y| + C$.

Положим для удобства $C = \ln C_1 = const$. Тогда

$$\ln|p| = 2\ln|y| + \ln C_1,\quad \ln|p| = \ln\left(C_1 y^2\right),\quad |p| = C_1 y^2,\ \ p = C_1 y^2.$$

Учитывая, что $p = y'$, получаем уравнение:

$$y' = C_1 y^2,\ \ \frac{dy}{dx} = C_1 y^2,\ \ \frac{dy}{y^2} = C_1 dx,\ \ \int \frac{dy}{y^2} = C_1 \int dx,\ \ -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2,$$

или $y = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2}$ - общее решение заданного дифференциального уравнения. Решение, полученное в пункте 1, содержится в общем решении исходного уравнения при $C_1 = 0$.

2.3 Понятие комплексного числа

Комплексные числа возникли при решении алгебраических уравнений. Математики не могли согласиться с тем, что уравнение $z^2 - 1 = 0$ имеет решение, а уравнение $z^2 + 1 = 0$ – нет. Поскольку среди действительных чисел нет ни одного, квадрат которого бы равнялся −1, то договорились, что таким свойством будет обладать символ i, т.е. $i^2 = -1$. Поэтому уравнение $z^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $z = i$ и $z = -i$, как и обычное квадратное уравнение. Так появились сначала в математической среде, а потом и в технических науках комплексные числа. В настоящее время раздел комплексного анализа – современная ветвь математики, широко развитая, которая находит применение во многих инженерных дисциплинах.

Определение. *Комплексным числом называется число вида*

$$z = a + bi, \tag{3.1}$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа z; $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа z; $a, b \in R$; i – мнимая единица.

Множество всех комплексных чисел обозначается С. Формула (3.1) называется также *алгебраической формой* записи комплексного числа. Примеры комплексных чисел: $2 + 3i$, $-5i$, $-1 - i$.

Если $b = 0$, комплексное число превращается в действительное: $z = b$. Поэтому множество действительных чисел является подмножеством комплексных чисел: $R \subset C$. Комплексное число, у которого $b \neq 0, a = 0$, называется *чисто мнимым*. Комплексный нуль – это $0 + 0 \cdot i$, но пишут и просто 0.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ считаются *равными,* если равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Неравенства для комплексных чисел смысла не имеют.

Если действительные части двух комплексных чисел одинаковы, а мнимые части отличаются только знаком, то такие числа называются *комплексно-сопряженными*. Обозначают число, комплексно-сопряженное к числу (3.1) , следующим образом: $\bar{z} = a - bi$. Например, для комплексного числа $z = -5 + 8i$ комплексно-сопряженным будет число $\bar{z} = -5 - 8i$.

Пример 3.1. Найти корни квадратного уравнения $x^2 + 9 = 0$.

Решение

$x^2 = -9$,

$x_1 = \sqrt{-9} = \sqrt{-1 \cdot 9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = 3i$,

$x_2 = -\sqrt{-9} = -\sqrt{-1 \cdot 9} = -\sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = -3i$.

Пример 3.2. Найти корни квадратного уравнения $x^2 + 4x + 8 = 0$.

Решение

Находим дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$, значит, действительных корней это уравнение не имеет, но будут комплексные корни, определяем их по формулам корней:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{-1 \cdot 16}}{2} = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{-4 - \sqrt{-1 \cdot 16}}{2} = \frac{-4 - 4i}{2} = -2 - 2i.$$

Очевидно, что решениями уравнения являются два комплексно-сопряженных числа.

2.4 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение*. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.1}$$

где $a, b, c \in R,\ a \neq 0$.

Класс однородных уравнений с постоянными коэффициентами замечателен тем, что для него нахождение фундаментальной системы решений сводится к решению алгебраического уравнения n-й степени.

Общим решением дифференциального уравнения (4.1) является функция вида

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (4.2)$$

где $y_1(x),\ y_2(x)$ - фундаментальная система решений уравнения (4.1), C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Определение. *Фундаментальной системой решений называется всякая система линейно независимых решений, содержащая столько функций, каков порядок дифференциального уравнения.*

Определение. *Функции $y_1(x),\ y_2(x)$ называются линейно зависимыми на интервале $(a;b)$, если существуют постоянные числа $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, такие что $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ для любых $x \in (a;b)$. Если же указанное тождество выполняется только в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то функции $y_1(x),\ y_2(x)$ называются линейно независимыми на интервале $(a;b)$.*

Кратко *критерий линейной независимости* может быть сформулирован следующим образом: *функции $y_1(x),\ y_2(x)$ являются линейно независимыми, если определитель Вронского (вронскиан)*

$$W(y_1(x),\ y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля для любых $x \in (a;b)$. В противном случае функции $y_1(x),\ y_2(x)$ линейно зависимы.

Вид уравнения (4.1) наводит на мысль, что решения этого уравнения следует искать, прежде всего, среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому решения уравнения (4.1) будем искать в виде

$$y = e^{kx}, \qquad (4.3)$$

где k – неизвестная постоянная, которую нужно выбрать так, чтобы функция (4.3) обращала уравнение (4.1) в тождество.

Для функции (4.3) имеем: $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим эти производные в уравнение (4.1), получим:

$$e^{kx}\left(ak^2+bk+c\right)=0.$$

Поскольку $e^{kx}\neq 0$, то решение (4.2) удовлетворяет уравнению (4.1), если

$$ak^2+bk+c=0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (4.1), многочлен ak^2+bk+c - *характеристическим многочленом*.

В зависимости от корней характеристического уравнения (4.4) выделяют следующие фундаментальные системы решений и вид общего решения дифференциального уравнения (4.1) (см. табл.1).

Таблица 1

№	Корни характеристического уравнения	Фундаментальная система решений	Общее решение дифференциального уравнения
1	k_1, k_2-два различных действительных корня, $k_1\neq k_2$	$y_1(x)=e^{k_1x}$, $y_2(x)=e^{k_2x}$	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2	k - единственный действительный корень, $k=k_1=k_2$	$y_1(x)=e^{kx}$, $y_2(x)=xe^{kx}$	$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$
3	k_1, k_2- комплексно-сопряженные корни, $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$	$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения $y''-11y'=0$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение. В нашем случае $a=1,\ b=-11,\ c=0$, тогда получим:

$$k^2-11k=0,\ \ k(k-11)=0,$$
$$k_1=0,\ \ k_2=11$$

Получили два различных действительных корня, согласно таблице 1 записываем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{11x}=C_1+C_2e^{11x}.$$

Пример 4.2. Найти решение задачи Коши: $y'' - 4y' + 4 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение. В нашем случае $a = 1,\ b = -4,\ c = 4$, тогда получим:

$$k^2 - 4k + 4 = 0,$$
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0, \quad k_1 = k_2 = 2.$$

Согласно таблице 1, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Найдем значения констант C_1, C_2. Для этого подставим в найденное решение начальные условия:

$$y(0) = 0,\ 0 = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{0 \cdot x}, \quad C_1 = 0;$$
$$y' = \left(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}\right)' = 2C_1 e^{2x} + C_2\left(e^{2x} + 2x e^{2x}\right),$$
$$y'(0) = 1,\ 1 = 2C_1 e^{0 \cdot x} + C_2\left(e^{0 \cdot x} + 2 \cdot 0 \cdot e^{0 \cdot x}\right), \quad 2C_1 + C_2 = 1.$$

В итоге получаем систему уравнений для нахождения констант C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ 2C_1 + C_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, решением задачи Коши является функция $y = x e^{2x}$.

Пример 4.3. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 37y = 0$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение. В нашем случае $a = 1,\ b = -2,\ c = 37$, тогда получим:

$$k^2 - 2k + 37 = 0,$$
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 37 = 4 - 148 = -144,$$
$$k_1 = \frac{2 + \sqrt{-144}}{2} = \frac{2 + \sqrt{-1 \cdot 144}}{2} = \frac{2 + 12i}{2} = 1 + 6i,$$
$$k_2 = \frac{2 - \sqrt{-144}}{2} = \frac{2 - \sqrt{-1 \cdot 144}}{2} = \frac{2 - 12i}{2} = 1 - 6i.$$

Согласно таблице 1, при $\alpha = 1,\ \beta = 6$ получим общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = e^{x}\left(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x\right).$$

2.5 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

***Определение**. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{5.1}$$

где $a, b, c \in R,\ a \neq 0,\ f(x)$ - некоторая функция.

Рассмотрим один из наиболее простых методов решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка – *метод неопределенных коэффициентов*. При этом правая часть уравнения, функция $f(x)$, должна иметь определенный специальный вид.

***Теорема** (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). Общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка (5.1) равно сумме общего решения* $y_{одн}$ *соответствующего однородного уравнения* $ay'' + by' + cy = 0$ *и какого-нибудь частного решения* $y_{част}$ *неоднородного уравнения (5.1), т.е.*

$$y(x) = y_{одн} + y_{част}. \tag{5.2}$$

Метод отыскания общего решения линейного однородного уравнения $y_{одн}$ подробно изложен в предыдущем параграфе. Рассмотрим метод отыскания частного решения неоднородного уравнения (5.1) $y_{част}$ по *специальному виду правой части* $f(x)$.

Рассмотрим случаи:

$\boxed{1.}$ Пусть $f(x) = P(x)$, где $P(x)$- некоторый многочлен. Тогда если:

а) $\alpha = 0$ - не корень характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (5.1) $y_{част}$ будем искать в виде

$$y_{част} = Q(x), \tag{5.3}$$

где $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неизвестными коэффициентами.

б) $\alpha = 0$ - корень характеристического уравнения кратности $m = 1$, то частное решение неоднородного уравнения (5.1) $y_{част}$ будем искать в виде

$$y_{част} = x \cdot Q(x). \tag{5.4}$$

$\boxed{2.}$ Пусть $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x)$- некоторый многочлен, $\alpha \neq 0$. Тогда если:

а) α - не корень характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (5.1) $y_{част}$ будем искать в виде

$$y_{част} = Q(x)e^{\alpha x}, \tag{5.5}$$

где $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неизвестными коэффициентами.

б) α - корень характеристического уравнения кратности $m = 1,2$, то частное решение неоднородного уравнения (5.1) $y_{част}$ будем искать в виде

$$y_{част} = x^m Q(x)e^{\alpha x}. \tag{5.6}$$

$\boxed{3.}$ Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$, где $P_1(x), P_2(x)$ - некоторые многочлены, $\alpha, \beta \in R$. Тогда если:

а) $\alpha + i \cdot \beta$ - не корень характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (5.1) $y_{част}$ будем искать в виде

$$y_{част} = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x), \tag{5.7}$$

где $Q_1(x), Q_2(x)$ - многочлены той же степени, что и $P_1(x), P_2(x)$ соответственно, но с неизвестными коэффициентами.

б) $\alpha + i \cdot \beta$- корень характеристического уравнения кратности $m = 1$, то частное решение неоднородного уравнения (5.1) $y_{част}$ будем искать в виде

$$y_{част} = x \cdot e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x). \tag{5.8}$$

Пример 5.1. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}$.

Решение

Будем искать решение данного уравнения в виде $y(x) = y_{одн} + y_{част}$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y'' - 6y' + 8y = 0$. Составим характеристическое уравнение. Так как $a = 1, b = -6, c = 8$, то характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2-6k+8=0,\quad D=36-4\cdot 1\cdot 8=36-32=4,$$
$$k_1=\frac{6+\sqrt{4}}{2}=\frac{8}{2}=4,\quad k_2=\frac{6-\sqrt{4}}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Тогда $y_{одн}=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}$ - общее решение однородного уравнения.

Рассмотрим правую часть уравнения: $f(x)=3e^{2x}$. Вид правой части соответствует случаю 2 при $\alpha=2$, $P(x)=3$ (в данном случае многочлен $P(x)$ является числом). Так как $\alpha=2$ - корень характеристического уравнения кратности $m=1$, то частное решение $y_{част}$ будем искать по формуле (5.6) в виде

$$y_{част}=x\cdot Ae^{2x},$$

где $Q(x)=A$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$; поскольку $P(x)$ - это число, то и $Q(x)$ тоже представляет собой число, пока неизвестное.

Чтобы найти значение *A*, подставим решение $y_{част}$ в исходное уравнение. Для этого найдем его первую и вторую производные:

$$y'_{част}=A\left(x'\cdot e^{2x}+x\cdot\left(e^{2x}\right)'\right)=A\left(e^{2x}+2xe^{2x}\right)=e^{2x}(A+2Ax);$$
$$y''_{част}=\left(e^{2x}\right)'(A+2Ax)+e^{2x}(A+2Ax)'=2e^{2x}(A+2Ax)+e^{2x}\cdot 2A=$$
$$=e^{2x}(2A+4Ax+2A)=e^{2x}(4A+4Ax).$$

Подставим $y''_{част}$, $y'_{част}$, $y_{част}$ в исходное уравнение, получим:

$$e^{2x}(4A+4Ax)-6e^{2x}(A+2Ax)+8Axe^{2x}=3e^{2x},$$
$$e^{2x}(4A+4Ax-6A-12Ax+8Ax)=3e^{2x}.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $e^{2x}\neq 0$, получим

$$-2A=3,\quad A=-\frac{3}{2}.$$

Значит, частное решение имеет вид $y_{част}=-\frac{3}{2}xe^{2x}$.

Таким образом, общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}-\frac{3}{2}xe^{2x}.$$

ПРАКТИКУМ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Задача 1. Решить уравнение $y' - x^2 y = 2xy$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение:

$$y' = x^2 y + 2xy, \quad \frac{dy}{dx} = y\left(x^2 + 2x\right).$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные. Для этого сначала умножим обе части уравнения на $dx \neq 0$:

$$dy = y\left(x^2 + 2x\right)dx.$$

Теперь разделим обе части уравнения на $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \left(x^2 + 2x\right)dx.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(x^2 + 2x\right)dx, \qquad \ln|y| = \int x^2 dx + 2\int x dx,$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + x^2 + C, \text{ откуда } |y| = e^{\frac{x^3}{3} + x^2 + C}.$$

Раскрывая модуль и применяя свойства степени, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = \pm e^C \cdot e^{\frac{x^3}{3} + x^2}, \text{ обозначим } C_1 = \pm e^C = const,$$

$$y = C_1 e^{\frac{x^3}{3} + x^2}.$$

Рассмотрим отдельно случай $y = 0$. Подстановка в уравнение показывает, что $y = 0$ также является решением исходного дифференциального уравнения.

Однако, заметим, что оно формально получается из решения $y = C_1 e^{\frac{x^3}{3}+x^2}$ при $C_1 = 0$, поэтому не является особым.

Задача 2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$xydx + \left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}\,dy = 0, \quad y\left(\sqrt{8}\right)=1.$$

Решение

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Запишем уравнение в виде:

$$\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}\,dy = -xydx.$$

Разделим переменные, для этого разделим обе части уравнения на $\sqrt{1+x^2} > 0$:

$$\left(1+y^2\right)dy = -\frac{xydx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Разделим теперь обе части уравнения на $y \neq 0$:

$$\frac{1+y^2}{y}dy = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения:

$$\int\left(\frac{1}{y}+y\right)dy = -\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int\frac{dy}{y}+\int ydy = \left|\begin{array}{l} t=1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array}\right| = -\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}},$$

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C, \quad \ln|y| + \frac{y^2}{2} = -\sqrt{1+x^2} + C.$$

При разделении переменных мы полагали, что $y \neq 0$, что могло привести к потере решений. Рассмотри отдельно случай, когда $y = 0$. Подстановка в исходное уравнение дает, что $y = 0$ является решением данного дифференциального уравнения. Однако заметим, что оно не может быть получено из общего интеграла ни при каком частном значении произвольной постоянной *C*. Следовательно, $y = 0$ - особое решение уравнения.

Далее подставим в общий интеграл начальное условие $y\left(\sqrt{8}\right) = 1$:

$$\ln 1 + \frac{1}{2} = -\sqrt{1+8} + C, \text{ откуда находим } C = \frac{7}{2}.$$

Таким образом, искомый частный интеграл имеет вид:

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} + \sqrt{1+x^2} = \frac{7}{2}.$$

Задача 3. Найти общий интеграл уравнения $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x}$.

Решение

Преобразуем уравнение к виду: $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x}$. Это однородное уравнение первого порядка. Выполним подстановку $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Получим:

$$u'x + u = u + \cos^2 u, \quad \frac{du}{dx}x = \cos^2 u.$$

Разделим переменные в этом уравнении:

$$\frac{du}{\cos^2 u} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int\frac{du}{\cos^2 u} = \int\frac{dx}{x}, \quad tgu = \ln|x| + C.$$

Тогда общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид:

$$tg\frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

В процессе решения мы делили уравнение на $\cos^2 u$, что могло привести к потере решений. Рассмотрим случай $\cos u = 0$, тогда $u = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, или

$y = x\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$. Это особые решения, т.к. они не входят в общий интеграл ни при каком значении постоянной C.

Задача 4. Найти общий интеграл уравнения $\left(xy + y^2\right)dx - \left(2x^2 + xy\right)dy = 0$.

Решение

Разрешим данное уравнение относительно производной:

$$\left(2x^2 + xy\right)dy = \left(xy + y^2\right)dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}.$$

Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на x^2, получим:

$$y' = \frac{\dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2 + \dfrac{y}{x}}.$$

Следовательно, данное по условию уравнение является однородным.

Введем теперь новую функцию $u = \dfrac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Получим:

$$u'x + u = \frac{u + u^2}{2 + u},\quad u'x = \frac{u + u^2}{2 + u} - u,\quad u'x = \frac{-u}{2 + u},\quad \frac{du}{dx}x = -\frac{u}{2 + u}.$$

Разделим переменные в последнем уравнении:

$$\frac{2 + u}{u}du = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{2 + u}{u}du = -\int \frac{dx}{x},$$

$$2\int \frac{1}{u}du + \int du = -\ln|x| + C,$$

$$2\ln|u| + u = -\ln|x| + C,$$

$$\ln u^2 + u = -\ln|x| + C.$$

Таким образом, общий интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = -\ln|x| + C.$$

При разделении переменных мы делили на $u \neq 0$. Рассмотрим случай, когда $u = 0$, тогда $y = 0$. Подстановкой в исходное уравнение можно убедиться, что $y = 0$ является решением дифференциального уравнения; это особое решение данного уравнения.

Задача 5. Найти решение задачи Коши: $y'x\ln x - y = \dfrac{2x^2\ln^2 x}{1+x^2}$, $y(e) = 0$.

Решение

Нам задано линейное уравнение первого порядка. Будем искать общее решение уравнения в виде $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя в уравнение, получим:

$$x\ln x(u'v + uv') - uv = \frac{2x^2\ln^2 x}{1+x^2},$$

$$x\ln x \cdot u'v + u\left(x\ln x \cdot v' - v\right) = \frac{2x^2\ln^2 x}{1+x^2}. \quad (*)$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы $x\ln x \cdot v' - v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\ln x \cdot v' = v, \quad x\ln x \cdot \frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x\ln x}.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения:

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x\ln x}, \quad \ln|v| = \left|\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Полагая $C = 0$, находим $|v| = |\ln x|$, или $v = \ln x$.

Подставим функцию $v = \ln x$ в уравнение (*), получим:

$$x\ln^2 x \cdot u' = \frac{2x^2\ln^2 x}{1+x^2}, \quad u' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}, \quad du = \frac{2x}{1+x^2}dx.$$

Интегрируя, находим

$$\int du = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx,$$

$$u = \begin{vmatrix} t = 1 + x^2 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left(1 + x^2\right) + C.$$

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \left(\ln\left(1 + x^2\right) + C\right)\ln x.$$

Для отыскания решения задачи Коши подставим в общее решение начальное условие $y(e) = 0$. Получим:

$$0 = \left(\ln\left(1 + e^2\right) + C\right)\ln e, \quad C = -\ln\left(1 + e^2\right).$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$y = \left(\ln\left(1 + x^2\right) - \ln\left(1 + e^2\right)\right)\ln x, \quad \text{или} \quad y = \ln\frac{1 + x^2}{1 + e^2}\ln x.$$

Задача 6. Найти общий интеграл уравнения:

$$2x\cos^2 y dx + \left(8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y\right)dy = 0.$$

Решение.

Здесь $P(x, y) = 2x\cos^2 y$, $Q(x, y) = 8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(-2\cos y \sin y) = -2x\sin 2y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x\sin 2y.$$

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и левая часть исходного уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$. Имеем

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y) = \int \left(2x\cos^2 y\right)dx + C(y) = 2\cos^2 y \int xdx + C(y) =$$

$$= 2\cos^2 y \cdot \frac{x^2}{2} + C(y) = x^2 \cos^2 y + C(y).$$

Найдем функцию $C(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\cos^2 y\right)+C'(y)=8\sqrt[3]{y}-x^2\sin 2y,$$

$$-2x^2\cos y\sin y+C'(y)=8\sqrt[3]{y}-x^2\sin 2y,$$

$$-x^2\sin 2y+C'(y)=8\sqrt[3]{y}-x^2\sin 2y,$$

$$C'(y)=8\sqrt[3]{y},$$

$$\text{или } \frac{dC}{dy}=8\sqrt[3]{y}, \quad dC=8\sqrt[3]{y}dy.$$

Интегрируя, получим:

$$\int dC=8\int\sqrt[3]{y}dy,$$

$$C(y)=8\int y^{\frac{1}{3}}dy=8\cdot\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C_1=6\sqrt[3]{y^4}+C_1.$$

Тогда искомая функция $F(x,y)$ имеет вид:

$$F(x,y)=x^2\cos^2 y+6\sqrt[3]{y^4}+C_1.$$

Данное по условию уравнение принимает вид $dF(x,y)=0$, а его общее решение определяется уравнением $F(x,y)=C_2$, или

$$x^2\cos^2 y+6\sqrt[3]{y^4}+C_1=C_2,$$

$$x^2\cos^2 y+6\sqrt[3]{y^4}=C_2-C_1.$$

Полагая $C_2-C_1=C_3$ - произвольная постоянная, получаем уравнение, определяющее неявно общее решение исходного дифференциального уравнения

$$x^2\cos^2 y+6\sqrt[3]{y^4}=C_3.$$

2 Дифференциальные уравнения второго порядка

Задача 7. Решить уравнение $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

Решение

Данное уравнение не содержит явным образом функцию y. Положим $p = y'$, где $p = p(x)$, тогда $p' = y''$, и уравнение примет вид

$$xp' = p\ln\frac{p}{x}, \quad p' = \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}.$$

Таким образом, мы получили однородное уравнение первого порядка. Для его решения воспользуемся подстановкой $u = \frac{p}{x}$, $p = ux$, тогда $p' = u'x + u$. После подстановки получаем:

$$u'x + u = u\ln u, \quad u'x = u\ln u - u, \quad u'x = u(\ln u - 1).$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{dx}x = u(\ln u - 1), \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \begin{vmatrix} t = \ln u - 1 \\ dt = \dfrac{du}{u} \end{vmatrix} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C.$$

Полагая для удобства $C = \ln C_1$, получим

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln C_1, \ \ln|\ln u - 1| = \ln C_1|x|, \text{ откуда } \ln u - 1 = C_1 x,$$
$$u = e^{C_1 x + 1}.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем:

$$\frac{p}{x} = e^{C_1 x+1}, \quad p = xe^{C_1 x+1}, \quad y' = xe^{C_1 x+1}, \quad \frac{dy}{dx} = xe^{C_1 x+1}, \quad dy = xe^{C_1 x+1}dx.$$

Интегрируя по частям, находим общее решение исходного уравнения:

$$y=\int xe^{C_1x+1}dx=\left|\begin{aligned}&u=x,\ dv=e^{C_1x+1}dx\\&du=dx,\\&v=\int e^{C_1x+1}dx=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\end{aligned}\right|=\frac{1}{C_1}xe^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1}\int e^{C_1x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{C_1}xe^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

Задача 8. Решить уравнение $y''tgy=2y'^2$.

Решение

Данное уравнение не содержит явным образом переменную x. Положим $y'=p$, где $p=p(y)$, тогда $y''=p'\cdot p$, и данное уравнение преобразуется к виду

$$p'p\,tgy=2p^2,\quad \frac{dp}{dy}tgy=2p,\quad \frac{dp}{p}=2\frac{dy}{tgy}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int\frac{dp}{p}=2\int\frac{dy}{tgy},$$

$$\ln|p|=2\int\frac{\cos y}{\sin y}dy=\left|\begin{aligned}&t=\sin y\\&dt=\cos y dy\end{aligned}\right|=2\int\frac{dt}{t}=2\ln|t|+C=2\ln|\sin y|+\ln C_1=$$
$$=\ln C_1\left|\sin^2 y\right|.$$

$$p=C_1\sin^2 y,\ \text{или}\ y'=C_1\sin^2 y,\ \frac{dy}{dx}=C_1\sin^2 y,\ \frac{dy}{\sin^2 y}=C_1dx.$$

Интегрируя, получим общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\int\frac{dy}{\sin^2 y}=\int C_1dx,\qquad -ctgy=C_1x+C_2.$$

Задача 9. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y''+9y'+20y=0$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=-1.$

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+9k+20=0,$$
$$D=81-4\cdot1\cdot20=81-80=1,$$
$$k_1=-4,\ k_2=-5.$$

Тогда общее решение линейного однородного уравнения имеет вид:

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-5x}.$$

Далее по заданным начальным условиям определим постоянные C_1, C_2:

$$y(0)=0,\ 0=C_1e^0+C_2e^0,\ C_1+C_2=0;$$
$$y'=-4C_1e^{-4x}-5C_2e^{-5x},$$
$$y'(0)=-1,\ -1=-4C_1e^0-5C_2e^0,\ -1=-4C_1-5C_2.$$

Получили следующую систему уравнений для нахождения констант C_1, C_2:

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ -4C_1-5C_2=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}C_2=-C_1,\\ -4C_1+5C_1=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=1.\end{cases}$$

Тогда искомое решение задачи Коши имеет вид:

$$y=-e^{-4x}+e^{-5x}.$$

Задача 10. Найти общее решение уравнения $y''+2y'=e^x\left(3x^2+2x+9\right)$.

Решение.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение: $y''+2y'=0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+2k=0,\ k(k+2)=0,\ k_1=0,\ k_2=-2.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{одн}=C_1+C_2e^{-2x}.$$

Рассмотрим правую часть $f(x)=e^x\left(3x^2+2x+9\right)$. Здесь $\alpha=1$ - не корень характеристического уравнения, значит, частное решение $y_{част}$ будем искать в виде:

$$y_{част} = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right).$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты *A, B, C*, подставим решение $y_{част}$ в исходное уравнение. Для этого найдем его первую и вторую производные:

$$y'_{част} = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + e^x(2Ax + B) = e^x\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + C\right),$$
$$y''_{част} = e^x\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + C\right) + e^x(2Ax + B + 2A) =$$
$$= e^x\left(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2A + 2B + C\right).$$

Подставим теперь $y''_{част}$, $y'_{част}$ в исходное уравнение:

$$e^x\left(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2A + 2B + C\right) + 2e^x\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + C\right) = e^x\left(3x^2 + 2x + 9\right)$$
$$3Ax^2 + (3B + 8A)x + (2A + 4B + 3C) = 3x^2 + 2x + 9.$$

Отсюда получаем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов *A, B, C*:

$$\begin{cases} 3A = 3, \\ 3B + 8A = 2, \\ 2A + 4B + 3C = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ 3B + 8 = 2, \\ 2 + 4B + 3C = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 5. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y_{част} = e^x\left(x^2 - 2x + 5\right).$$

Следовательно, общее решение линейного неоднородного уравнения можно записать в виде

$$y = y_{одн} + y_{част} = C_1 + C_2 e^{-2x} + e^x\left(x^2 - 2x + 5\right).$$

Задача 11. Найти общее решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$.

Решение.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение: $y'' + 8y' + 16y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 8k + 16 = 0,$$
$$D = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0,$$

$$k=-\frac{8}{2}=-4.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{одн}=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}.$$

Рассмотрим правую часть $f(x)=-10e^{-4x}$. Здесь $\alpha=-4$ - корень характеристического уравнения кратности $m=2$, значит, частное решение $y_{част}$ будем искать в виде:

$$y_{част}=Ax^2e^{-4x}.$$

Чтобы найти неизвестный коэффициент A, подставим решение $y_{част}$ в исходное уравнение. Для этого найдем его первую и вторую производные:

$$y'_{част}=A\left(2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x}\right)=e^{-4x}\left(2Ax-4Ax^2\right),$$

$$y''_{част}=-4e^{-4x}\left(2Ax-4Ax^2\right)+e^{-4x}(2A-8Ax)=e^{-4x}\left(-8Ax+16Ax^2+2A-8Ax\right)=$$
$$=e^{-4x}\left(16Ax^2-16Ax+2A\right).$$

Подставим теперь $y''_{част}$, $y'_{част}$, $y_{част}$ в исходное уравнение:

$$e^{-4x}\left(16Ax^2-16Ax+2A\right)+8e^{-4x}\left(2Ax-4Ax^2\right)+16Ax^2e^{-4x}=-10e^{-4x},$$
$$16Ax^2-16Ax+2A+16Ax-32Ax^2+16Ax^2=-10,$$
$$2A=-10,\quad A=-5.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y_{част}=-5x^2e^{-4x}.$$

Следовательно, общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y=y_{одн}+y_{част}=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}-5x^2e^{-4x}.$$

Задача 12. Найти общее решение уравнения $y''+4y=3x\cos x$.

Решение

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение: $y''+4y=0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+4=0,\ k^2=-4,$$
$$k_1=\sqrt{-4}=2i,\ k_2=-\sqrt{-4}=-2i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{одн}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Рассмотрим правую часть $f(x)=3x\cos x$. Здесь $\alpha=0,\ \beta=1,\ P_1(x)=3x$, $P_2(x)=0$. Поскольку число $\alpha+i\cdot\beta=i$ - не корень характеристического уравнения, значит, частное решение $y_{част}$ будем искать в виде:

$$y_{част}=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x.$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты *A, B, C и D*, подставим решение $y_{част}$ в исходное уравнение. Для этого найдем его первую и вторую производные:

$$y'_{част}=A\cos x-(Ax+B)\sin x+C\sin x+(Cx+D)\cos x=$$
$$=(Cx+D+A)\cos x+(C-Ax-B)\sin x;$$
$$y''_{част}=C\cos x-(Cx+D+A)\sin x-A\sin x+(C-Ax-B)\cos x=$$
$$=(2C-Ax-B)\cos x+(-Cx-D-2A)\sin x.$$

Подставим теперь $y''_{част}$, $y_{част}$ в исходное уравнение:

$$(2C-Ax-B)\cos x+(-Cx-D-2A)\sin x+4(Ax+B)\cos x+4(Cx+D)\sin x=$$
$$=3x\cos x;$$
$$(2C-Ax-B+4Ax+4B)\cos x+(-Cx-D-2A+4Cx+4D)\sin x=3x\cos x;$$
$$(3Ax+3B+2C)\cos x+(3Cx+3D-2A)\sin x=3x\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $x\cos x,\ \cos x,\ x\sin x,\ \sin x$, получаем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases}3A=3,\\ 3B+2C=0,\\ 3C=0,\\ 3D-2A=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}A=1,\\ B=0,\\ C=0,\\ D=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y_{част} = x\cos x + \frac{2}{3}\sin x.$$

Следовательно, общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_{одн} + y_{част} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x\cos x + \frac{2}{3}\sin x.$$

Задача 13. Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 9\cos 3x + 16\sin 3x$

Решение

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение: $y'' + 9y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 9 = 0,\ k^2 = -9,$$
$$k_1 = \sqrt{-9} = 3i,\ k_2 = -\sqrt{-9} = -3i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{одн} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x.$$

Рассмотрим правую часть $f(x) = 9\cos 3x + 16\sin 3x$. Здесь $\alpha = 0,\ \beta = 3$, $P_1(x) = 9$, $P_2(x) = 16$. Поскольку число $\alpha + i\cdot\beta = 3i$ - корень характеристического уравнения кратности $m = 1$, значит, частное решение $y_{част}$ будем искать в виде:

$$y_{част} = x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты *A, B*, подставим решение $y_{част}$ в исходное уравнение. Для этого найдем его первую и вторую производные:

$$y'_{част} = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) =$$
$$= (A + 3Bx)\cos 3x + (B - 3Ax)\sin 3x;$$

$$y''_{част} = 3B\cos 3x - 3(A + 3Bx)\sin 3x - 3A\sin 3x + 3(B - 3Ax)\cos 3x =$$
$$= (6B - 9Ax)\cos 3x + (-6A - 9Bx)\sin 3x.$$

Подставим теперь $y''_{част}$, $y_{част}$ в исходное уравнение:

$$(6B - 9Ax)\cos 3x + (-6A - 9Bx)\sin 3x + 9Ax\cos 3x + 9Bx\sin 3x = 9\cos 3x + 16\sin 3x$$
$$6B\cos 3x + (-6A)\sin 3x = 9\cos 3x + 16\sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 3x, \sin 3x$, получаем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} 6B = 9, \\ -6A = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} B = \dfrac{3}{2}, \\ A = -\dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y_{част} = x\left(-\frac{8}{3}\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x\right).$$

Следовательно, общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_{одн} + y_{част} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x\left(-\frac{8}{3}\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x\right).$$

Задача 14. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y'' - 2y' = e^x\left(x^2 + x - 3\right)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Решение

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение: $y'' - 2y' = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k = 0,\ k(k-2) = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 2.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{одн} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Рассмотрим правую часть $f(x) = e^x\left(x^2 + x - 3\right)$. Здесь $\alpha = 1$ - не корень характеристического уравнения, значит, частное решение $y_{част}$ будем искать в виде:

$$y_{част} = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right).$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты *A, B* и *C*, подставим решение $y_{част}$ в исходное уравнение. Для этого найдем его первую и вторую производные:

$$y'_{част} = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + e^x(2Ax + B) = e^x\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + C\right),$$

$$y''_{част} = e^x\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + C\right) + e^x(2Ax + B + 2A) =$$
$$= e^x\left(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A + C\right).$$

Подставим теперь $y''_{част}$, $y'_{част}$ в исходное уравнение:

$$e^x\left(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A + C\right) - 2e^x\left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + C\right) =$$
$$= e^x\left(x^2 + x - 3\right);$$

$$-Ax^2 - Bx + 2A - C = x^2 + x - 3;$$

Отсюда получаем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов *A, B, C*:

$$\begin{cases} -A = 1, \\ -B = 1, \\ 2A - C = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1, \\ B = -1, \\ C = 1. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y_{част} = e^x\left(-x^2 - x + 1\right).$$

Следовательно, общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_{одн} + y_{част} = C_1 + C_2e^{2x} + e^x\left(-x^2 - x + 1\right).$$

Чтобы найти искомое частное решение, определим значения постоянных C_1 и C_2. Для этого воспользуемся начальными условиями:

$y(0) = 2$, $2 = C_1 + C_2e^0 + e^0(0 + 0 + 1)$, $2 = C_1 + C_2 + 1$, $C_1 + C_2 = 1$.

$$y' = \left(C_1 + C_2e^{2x} + e^x\left(-x^2 - x + 1\right)\right)' = 2C_2e^{2x} + e^x\left(-x^2 - x + 1\right) + e^x(-2x - 1) =$$
$$= 2C_2e^{2x} + e^x\left(-x^2 - 3x\right)$$

$y'(0) = 2$, $2 = 2C_2e^0 + e^0(0 + 0)$, $2C_2 = 2$, $C_2 = 1$.

В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y = e^{2x} + e^{x}\left(-x^2 - x + 1\right).$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1	$x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$
2	$\left(e^x+8\right)dy-ye^x dx=0$
3	$2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx$
4	$\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$
5	$6xy^2dx-ydy=yx^2dy-3y^2dx$
6	$y\ln y+xy'=0$
7	$\left(1+e^x\right)y'=ye^x$
8	$\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$
9	$6xdx-2ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$
10	$y\left(1+\ln y\right)+xy'=0$
11	$\left(3+e^x\right)yy'=e^x$
12	$\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}yy'=0$
13	$xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$
14	$4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
15	$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
16	$\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
17	$x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$
18	$\sqrt{16+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
19	$6xdx-6ydy=2x^2ydy+3x^2dx$
20	$\left(e^x+5\right)dy+ye^{2x}dx=0$
21	$yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$
22	$6xdx+6ydy=3x^2ydy-3xy^2dx$
23	$x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$
24	$y\left(4+e^x\right)dx-e^xdy=0$
25	$\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$

26	$yy' = \frac{1-2x}{y}$
27	$\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$
28	$y' = 10^x \cdot 10^y$
29	$y' = \frac{1-y^2}{1-x^2}$
30	$\sin 2x \cos 2x dy = \cos 2y \sin 2x dx$

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижения порядка.

1	$x^3 y'' + x^2 y = 1$
2	$y'' + y' tgx = \sin 2x$
3	$yy'' + (y')^2 = 0$
4	$y'' + 2y(y')^3 = 0$
5	$y'' x \ln x = y'$
6	$xy'' - y' = e^x x^2$
7	$y'' tgy = 2(y')^2$
8	$y'' + 2x(y')^2 = 0$
9	$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$
10	$2yy'' = 1 + (y')^2$
11	$2yy'' = (y')^2$
12	$y'' tgx = y' + 1$
13	$xy'' + y' = \ln x$
14	$2y'y'' - (y')^2 = 0$
15	$(1-x^2)y'' = xy'$
16	$2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$
17	$y'' + \frac{1}{x} y' = x^2$
18	$1 + (y')^2 + yy'' = 0$
19	$y''(1+y) - 5(y')^2 = 0$
20	$y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)(y')^2 = 0$
21	$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$

22	$2(y')^2 = (y-1)y''$
23	$(1-x^2)y'' - xy' = 2$
24	$x^4 y'' + x^3 y' = 1$
25	$y'' + \dfrac{2x}{x^2+1} y' = 2x$
26	$(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$
27	$xy'' + y' = 5x^2$
28	$y'' = (y')^3$
29	$x^3 y'' + 4x^2 y' = 10$
30	$y'' = 18y^3$

Задача 3. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

№	Уравнение	$f(x)$	$f(x)$
1	$y'' - 2y' + y = f(x)$	$e^x(x^2 - x)$	$2\sin x + \cos x$
2	$y'' + 3y' + 2y = f(x)$	$4xe^{-2x}$	$\sin 2x + 2\cos 2x$
3	$y'' - 2y' = f(x)$	$2x^2 + 3x - 4$	$3\sin 3x$
4	$y'' + 4y' + 4y = f(x)$	$e^{-2x}(2x+1)$	$2\sin x - 3\cos x$
5	$y'' + 2y' + y = f(x)$	$e^{-x}(2x-5)$	$15\sin 2x$
6	$y'' + 5y' + 6y = f(x)$	$(3x-4)e^{-3x}$	$5\sin 2x$
7	$y'' + y' - 2y = f(x)$	$(1-4x)e^x$	$2\sin 4x + 3\cos 4x$
8	$y'' - 4y = f(x)$	$3x e^{2x}$	$2\cos x$
9	$y'' - 7y = f(x)$	$2x^2 + 3x - 4$	$\cos 5x$
10	$y'' - 3y' + 2y = f(x)$	$(3x-4)e^x$	$\sin 2x + 3\cos 2x$
11	$y'' + 2y' + y = f(x)$	$(x+1)e^{-x}$	$5\sin x - 3\cos x$
12	$y'' - 5y' = f(x)$	$x^2 + 2x - 4$	$3\cos 3x$
13	$y'' - y' = f(x)$	$(x^2+4)e^x$	$2\sin 2x + \cos 2x$
14	$y'' - 2y' + y = f(x)$	$(x-2)e^x$	$2\cos 2x$
15	$y'' + 8y' = f(x)$	$8x + 3$	$\sin x - 2\cos x$
16	$y'' + 4y' + 3y = f(x)$	$2x e^{-3x}$	$2\sin x - 3\cos x$
17	$y'' - 4y' = f(x)$	$3 - 4x$	$2\sin 2x - \cos 2x$
18	$y'' + y' - 2y = f(x)$	$2x^2 - x + 3$	$12\cos 2x$
19	$y'' + 4y = f(x)$	$(x+3)e^x$	$\sin 2x + 4\cos 2x$
20	$y'' - 2y' = f(x)$	$24x + 3$	$-5\sin 2x$

21	$y'' - 2y' + y = f(x)$	$(9-2x)e^{x}$	$2\sin x + 5\cos x$
22	$y'' + 9y = f(x)$	$(x-6)e^{x}$	$\sin 3x + 3\cos 3x$
23	$y'' - 2y' = f(x)$	$4x^2 - 5x + 1$	$3\cos 2x$
24	$y'' - 3y' + 2y = f(x)$	$(x-4)e^{2x}$	$\sin x - 2\cos x$
25	$y'' - 6y' + 9y = f(x)$	$(x+5)e^{3x}$	$6\sin 3x$
26	$y'' + 16y = f(x)$	$2x^2 + 3x - 7$	$2\sin 4x - \cos 4x$
27	$y'' - 5y' = f(x)$	$10x + 3$	$6\sin 5x$
28	$y'' + 5y' = f(x)$	$(2x+3)e^{-5x}$	$2\sin 2x + \cos 2x$
29	$y'' - 4y' + 3y = f(x)$	$(x+5)e^{3x}$	$17\cos 2x$
30	$y'' - 4y = f(x)$	$(x+6)e^{2x}$	$\sin 2x + 3\cos 2x$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов. СПб.: Лань, 2010. 736 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1985. 384 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. В 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 253 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/437223
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник: учеб. пособие для академического бакалавриата. М.: Изд-во Юрайт, 2019. 192 с. // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/433433
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1990. 624 с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Физматлит, 2003. 336 с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров / под ред. А.Н. Тихонова. М.: Юрайт, 2012. 607 с.
8. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2003. 304 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

Дифференциальные уравнения

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Высшая математика»

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 02.04.2021 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 3,08. Тираж 25 экз. Изд. № 6889.
Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ