МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Брянский государственный аграрный университет»

Институт энергетики и природопользования

Кафедра математики, физики и информатики

Панкова Е.А.

РЯДЫ ФУРЬЕ

Методические указания и задания
для самостоятельной работы по дисциплине
«Дополнительные главы математики»

для магистрантов направления подготовки
13.04.02 Электроэнергетика и электротехника

Брянская область 2017 г.

УДК 517.518.475(076)
ББК 22.16
П 16

Панкова, Е.А.

Ряды Фурье. Методические указания и задания для самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» для магистрантов направления подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» / Е.А. Панкова. – Брянск: Издательство Брянского ГАУ, 2017 г. – 12 с.

Рецензенты:

Рыжик В.Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры математики, физики и информатики
Безик В.А., к.т.н., доцент, зав. кафедрой электроэнергетики и автоматики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования, протокол № 1 от 05.09. 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ 2π и 2ℓ

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n = 0,1,2...), \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad (n = 1,2...). \qquad (3)$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, т.е. $S(x+2\pi)=S(x)$.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма этого ряда $S(x)$ вычисляется:

1) $S(x)=f(x)$ во всех точках неразрывности $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;

2) $S(x_0)=\frac{1}{2}[f\ x_0-0]+f(x_0+0)$, где x_0- точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$;

3) $S(x)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$ на концах промежутка, т.е. при $x=\pm\pi$.

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \qquad (4)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n = 0,1,2...). \qquad (5)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, dx, \tag{6}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx. \tag{7}$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π. В этом случае, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом 2ℓ, для которой выполняются на сегменте $[-\ell,\ \ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right), \tag{8}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \tag{9}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \tag{10}$$

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \tag{11}$$

где

$$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx\,. \tag{12}$$

В случае, когда $f(x)$- нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \tag{13}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \tag{14}$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям

Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких x полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную на интервале $-\pi < x \le \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 1).

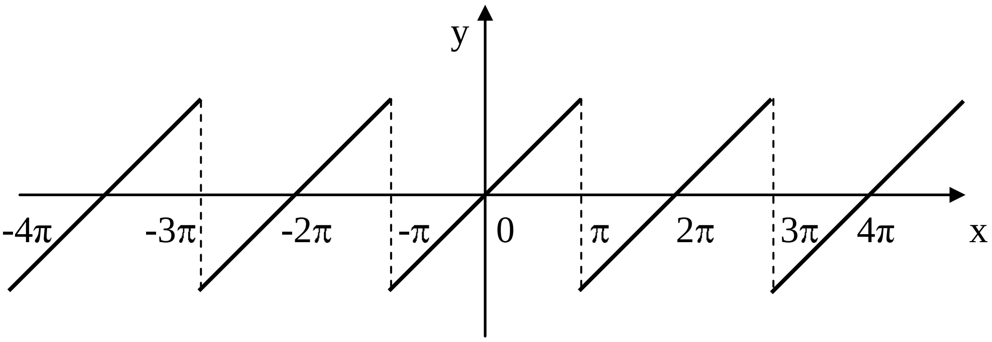

Рис. 1

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулу (7), найдем коэффициенты Фурье

$$\left(\textit{интегрируем по частям} \begin{vmatrix} x = u, & \sin\, nx\, dx = dv \\ dx = du, & v = -\dfrac{1}{n}\cos\, nx \end{vmatrix} \right):$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx \right] = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

т.к. $-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx = -\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx + ... \right].$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-n\pi$ и $n\pi$ сумма ряда равна нулю. На рисунке 2 показаны графики: функции

$f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

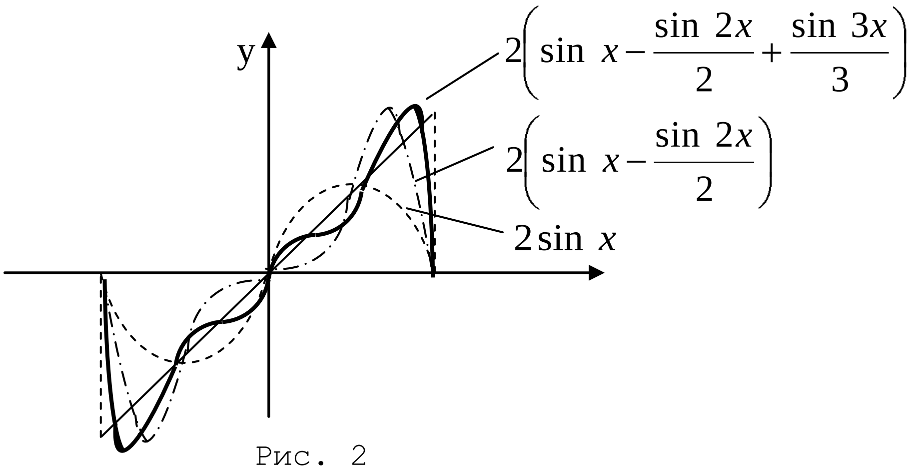

Рис. 2

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $(-\pi,\pi)$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0;\quad a<x\le\pi\\ 1, & 0<x<a\\ \frac{1}{2}, & x=0,\ \ x=a\end{cases}.$$

Построим график функции (рис. 3).

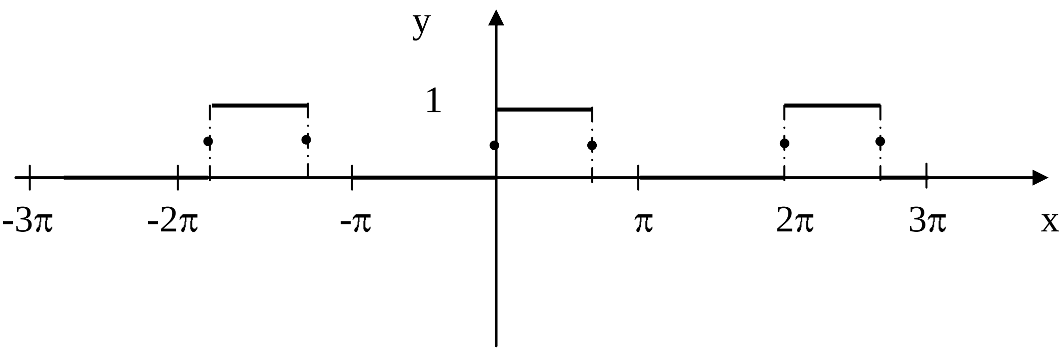

Рис. 3

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулы (2) и (3), находим коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a dx=\frac{x}{\pi}\bigg|_0^a=\frac{a}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\bigg|_0^a=\frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^a f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\sin\ nx\ dx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}(-\cos\ nx)\bigg|_0^a=\frac{\cos\ nx}{\pi n}\bigg|_0^a=\frac{1-\cos na}{n\pi}$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n\pi} \cdot \cos nx + \frac{1 - \cos na}{n\pi} \cdot \sin na.$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 4$, заданную на интервале $(0; 4)$ формулой $f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$

Построим график функции (рис. 4).

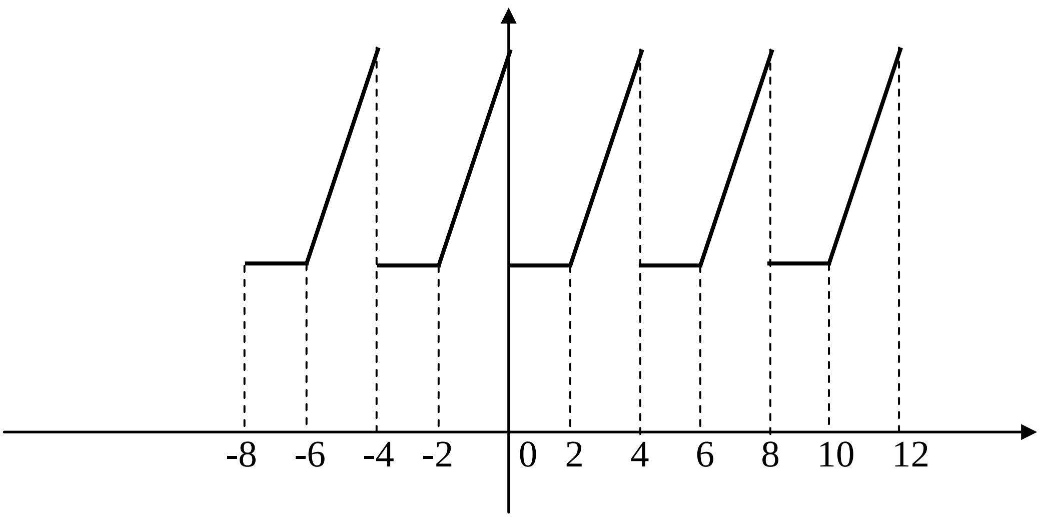

Рис. 4

Решение. Пользуясь формулами (9) и (10), полагая $\ell = 2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x = 2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_2^4 3x\,\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2 + 3\left(\frac{2\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\bigg|_2^4\right] = \frac{6}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi), \quad n \neq 0$$

.

При a – четном $\cos n\pi = 1$ и $x_n = 0$, при n – нечетном $\cos n\pi = -1$ и $a_n = \dfrac{12}{n^2\,\pi^2}$.

При n=0

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx + \int_2^4 3x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(6x\bigg|_0^2 + \frac{3x^2}{2}\bigg|_2^4\right) = 15,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cdot 12\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_2^0+\frac{3}{2}\left[\frac{2x}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_2^4+\int_2^4\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}[12(1-\cos n\pi)-3(2\cdot 4\cos 2\pi n-4\cos\pi n)]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}[12-12\cos n\pi+24+12\cos n\pi]=\frac{-12}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0,2)$ сумма ряда $S(x)=6$, в интервале $(2,4)$ - $S(x)=3x$. В точке разрыва $x=2$,

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(2-0)+f(2+0)]=6.$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T=2$, заданную на интервале $(-1,1)$ формулой $f(x)=|x|$ (рис. 5).

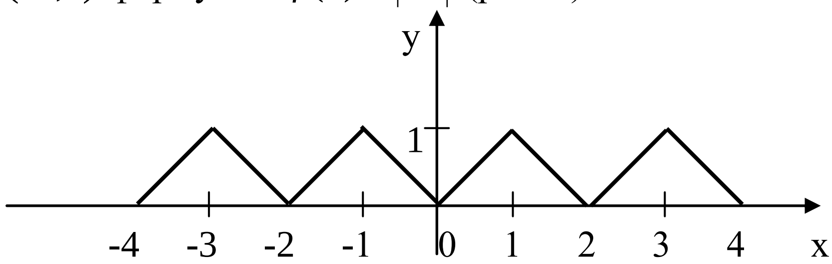

Рис. 5

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулу (12), (функция $f(x)$ - четная), полагая $\ell = 1$, получим $a_0 = 2\int\limits_0^1 x\ dx = 2\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1$,

$$a_n = 2\int\limits_0^1 x\cos n\pi x\ dx = 2\left.\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\right|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{\textit{четное}}, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n - \text{\textit{нечетное}}. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{\textit{при}} \quad -\pi \le x < 0, \\ 3x & \text{\textit{при}} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

Ответ: $f(x) = \dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{10}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{12} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$

$+\left(\dfrac{\sin x}{1} - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[0,\ 2\pi]$ формулой $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

Ответ: $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой $y = |\sin x|$.

Ответ: $f(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \dfrac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{\cos 2kx}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \ldots\right]$.

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

Ответ: $f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\ nx.$

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & при \quad 0\le x<1, \\ 2-x & при \quad 1\le x\le 2, \end{cases} \quad \text{f(x+2)=f(x).}$$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad -3<x\le 0, \\ x & при \quad 0<x<3, \end{cases} \quad \text{f(x+6)=f(x).}$$

Ответ: $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\ \cos\frac{(2n-1)\ \pi x}{3}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ \sin\frac{n\pi x}{3}.$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=10-x \quad при \ \ 5<x<15, \qquad f(x+10)=f(x).$$

Ответ: $f(x)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учебник для вузов. В 3 томах. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский / М.: Издательство «Дрофа», 2004. – 566 с.
2. Косарев, А.А. Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразования Фурье: Методические указания по решению задач математического анализа./ А.А. Косырев, Е.А. Вервейко - Воронеж: Изд-во ВГУ, 2012. - 28 с.
3. Задорожный, В.Н. Высшая математика для технических университетов. Часть IV. Ряды./ В.Н. Задорожный и др. – Томск: Издательство ТПУ, 2006. – 324 с.
4. Привалов, И.И. Ряды Фурье: учебник для вузов / И.И. Привалов. – 5-е изд., стер. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 164 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Панкова

РЯДЫ ФУРЬЕ

Методические указания и задания для самостоятельной работы
по дисциплине «Дополнительные главы математики»

для магистрантов направления подготовки
13.04.02 Электроэнергетика и электротехника

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 30.10.2017
Формат 60x84 1/16. Бумага печатная. Усл. печ. л. 0,70
Тираж 100 экз. Изд. № 5408

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365, Брянская обл., Выгоничский район, п. Кокино, БГАУ