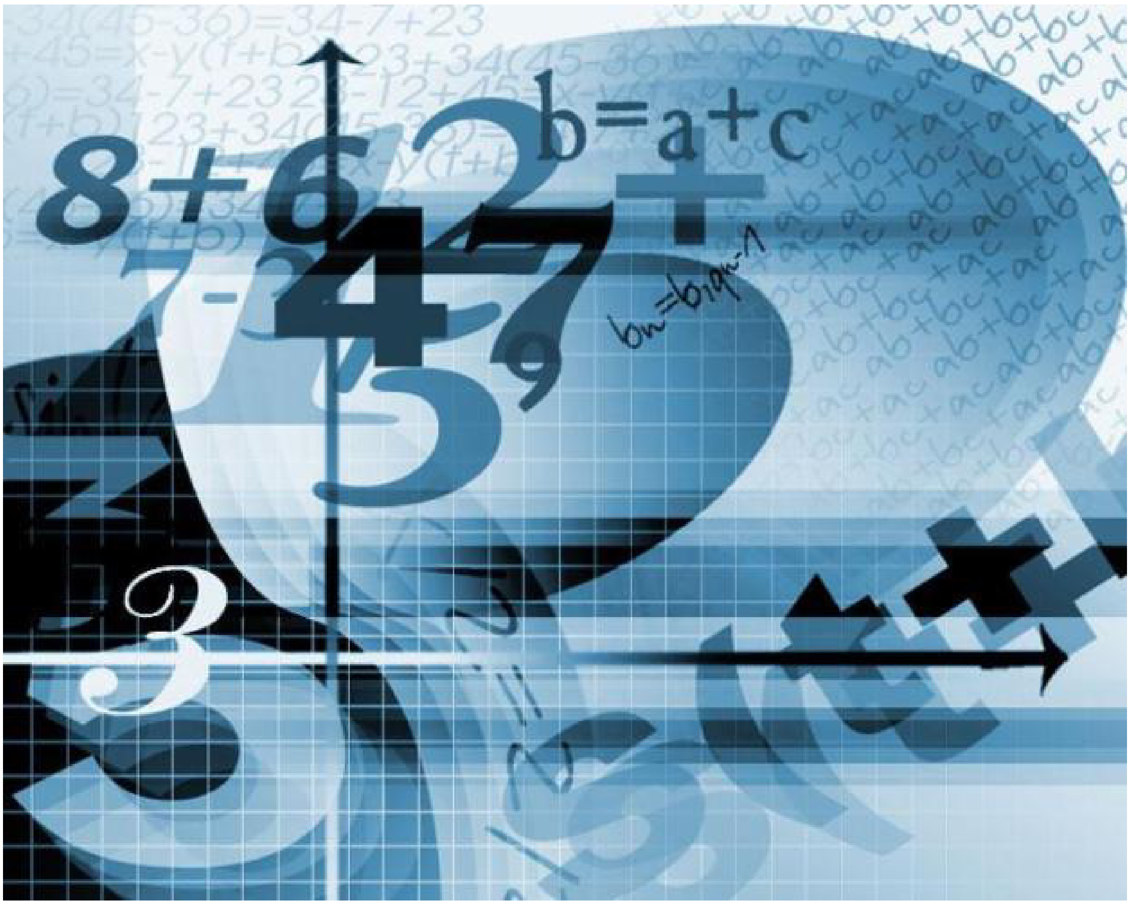
ФГБОУ ВО БРЯНСКИЙ ГОСУДАРТСВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И АГРОБИЗНЕСА
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ

Кубышкина А.В.
Войтова Н.А.

Линейное программирование в экономике



Брянская область
2016

УДК 330.45.519.852.338.55

Линейное программирование в экономике: Методические указания и задания для студентов направлений подготовки Прикладная информатика; Менеджмент; Торговое дело; Экономика / Сост.: Кубышкина А.В., Войтова Н.А. – Брянск: Изд. Брянского ГАУ. – 2016. – 28 с.

Рецензент: ст. преподаватель кафедры информационных систем и технологий Бишутина Л.И.

Рекомендовано к изданию решением учебно-методического совета экономического факультета от 20.01.2016г., протокол №4.

Введение

Математическая экономика - это часть экономической теории, направление в теоретической экономике, использующее математические методы и модели для описания экономических процессов и расчета экономических показателей в ходе анализа, прогнозирования, планирования, программирования.

Экономические процессы в различных отраслях национального хозяйства представляют собой сложные явления, связанные с многочисленными факторами внутреннего и внешнего воздействия на производство, которые, как правило, изменяются с течением времени. Кроме того, эффективность процессов часто зависит от человеческого фактора, что значительно усложняет как разработку, так и интерпретацию полученных результатов моделирования. Представленные материалы имеют целью формирование компетенций и освоение обучающимися видов профессиональной деятельности в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по направлением подготовки.

Так как реальный процесс или явление, как правило, сложная система взаимодействия внутренних и внешних частей и факторов, для их изучения абстрагируются от части взаимодействий и их природы, выделяя те из них, которые в настоящий момент интересуют исследователя. В этом случае принято говорить о модели явления или процесса. Термин «модель» широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Мы рассматриваем только те модели, которые строятся человеком и используются им в качестве инструмента получения знаний.

Модель — это материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так. что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Процесс построения, изучения и применения моделей называется **моделированием.** Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Моделирование в экономике — это воспроизведение экономических объектов и процессов в ограниченных, малых, экспериментальных формах, в искусственно созданных условиях.

В экономике чаще используется математическое моделирование посредством описания экономических процессов математическими зависимостями. Моделирование служит предпосылкой и средством анализа экономики и протекающих в ней явлений, а также методом обоснования принимаемых решений, прогнозирования, планирования, управления экономическими процессами и объектами.

Модель экономического объекта обычно поддерживается реальными статистическими и эмпирическими данными, а результаты расчетов, выполненные в рамках построенной модели, позволяют строить прогнозы и давать объективные оценки исследуемых объектов.

Математические модели должны широко применяться в экономике, анализе, планировании, управлении производством. Применение точных методов в экономических исследованиях и расчётах в настоящее время является весьма актуальным. Изучение данного курса базируется на знаниях студента экономической теории, информатики, математики, статистики, экономике и других дисциплин. Приведённый цифровой материал является условным.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача линейного программирования с двумя неизвестными состоит в следующем: дана система, состоящая из m неравенств с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \qquad (2)$$

Найти:

$$\min(\max) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (3)$$

Каждое из неравенств системы (1) определяет одну из полуплоскостей относительно соответствующих прямых системы (4)

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{matrix} \qquad (4)$$

Совокупность неравенств системы (1) образует выпуклую многогранную область M (необязательно замкнутую), которая называется областью допустимых –решений задачи линейного программирования.

В силу условия (2) эта область находится в первой четверти системы координат.

Нахождение решения задачи линейного программирования включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (1) знаков неравенств на знаки равенства.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи. Чтобы определить полуплоскость, определяемую неравенством, надо в него подставить координаты точки (0,0). Если неравенство выполняется, то оно определяет полуплоскость, ближайшую к началу координат, если нет, то наиболее удалённую от начала координат.
3. Находят область допустимых значений.
4. Строят вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$.
5. Строят прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$.
6. Передвигают прямую в (противоположном) направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает (минимальное) максимальное значение, либо устанавливают неограниченность функции на множестве планов.
7. Определяют координаты точки (минимума) максимума функции, вычисляют значения целевой функции в этой точке.

Индивидуальные задания:

1. Найти $\max(\min) f(x) = 2x_1 + x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ 4x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_2 \ge 8 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

2. Изготовление продукции двух видов требует использования сырья четырёх видов. Запасы сырья ограничены. Количество сырья, необходимого для изготовления единицы каждого вида продукции задано табл. 1.

Таблица 1

Вид сырья	Вид продукции		запасы сырья
	1	2	
1	2	3	19
2	2	1	13
3	0	3	15
4	3	0	15
Стоимость единицы продукции, ден. ед.	7	5	

Требуется составить такой план выпуска продукции, чтобы доход предприятия от реализации был максимальным.

3. Найти $\max(\min) f(x) = x_1 + 2x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \ge -5 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

4. Найти $\max(\min) f(x) = 2x_1 + 4x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 40 \\ 12x_1 + 2x_2 \ge 24 \\ 2x_1 \le 6 \\ x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

5. Требуется составить наиболее эффективный рацион для клеточных несушек. Суточная норма их кормления должна содержать не менее 4 г кальция, 1 г фосфора и 20 г переваримого протеина. В рацион входят комбикорм и зерновая смесь. Содержание питательных веществ в 1 кг этих кормов задано табл. 2.

Таблица 2

Корма	Кальций, мг	Фосфор, мг	Переваримый протеин, г
Комбикорм Зерновая смесь	21 1	15 3	180 90
Стоимость 1 кг, ден. ед.	12	10	

6. Человек должен употреблять в сутки некоторое количество жиров, белков, углеводов, витаминов и воды. Содержание этих веществ в единице каждого из видов пищи таково (табл. 3):

Таблица 3

Питательные вещества	Норма	Вид пищи	
		1	2
Жиры	10	1	5
Белки	12	3	2
Углеводы	16	2	4
Вода	10	2	2
Витамины	1	1	0
Стоимость единицы пищи, ден. ед.		2	3

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в питательных веществах, при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

7. Найти $\max(\min) f(x) = x_1 + x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

8. Найти $\max(\min) f(x) = 2x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 12 \\ 2x_1 \le 6 \\ 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

9. Найти $\max(\min) f(x) = 8x_1 + 8x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 8x_1 + 6x_2 \ge 48 \\ 6x_1 + 9x_2 \ge 54 \\ 4x_1 \ge 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

10. В хозяйстве производят два вида кормов: силос и зерно, содержащих переваримый протеин, каротин, кальций, фосфор. Выход питательных веществ (в условных единицах) с 1 га следующий (табл. 4):

Таблица 4

Питательные вещества	Силос	Зерно	Потребность
Переваримый протеин	3	7	19
Каротин	7	3	21
Кальций	2	0	4
Фосфор	0	5	5
Стоимость 1 ед. корма, ден. ед.	2	14	

Составить план производства кормов, при котором их стоимость была бы минимальной.

11. Найти $\max(\min) f(x) = x_1 - 2x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 3x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

12. Найти $\max(\min) f(x) = 4x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 10 \\ 2x_1 \le 7 \\ 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

13. Найти $\max(\min) f(x) = 4x_1 + x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 16 \\ 2x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1 - x_2 \ge -5 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

14. Найти $\max(\min) f(x) = 3x_1 - x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 36 \\ 12x_1 + 2x_2 \ge 21 \\ 2x_1 \le 8 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

В настоящее время оптимизация находит применение в науке, технике и в любой другой области человеческой деятельности.

Оптимизация – целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

Поиски оптимальных решений привели к созданию специальных математических методов и уже в 18 веке были заложены математические основы оптимизации (вариационное исчисление, численные методы и др). Однако до второй половины 20 века методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись очень редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев - невозможно.

Постановка задачи оптимизации предполагает существование конкурирующих свойств процесса, например: количество продукции - расход сырья, количество продукции - качество продукции. Выбор компромиссного варианта для указанных свойств и представляет собой процедуру решения оптимизационной задачи.

При постановке задачи оптимизации необходимо:

1. Наличие объекта оптимизации и цели оптимизации. При этом формулировка каждой задачи оптимизации должна требовать экстремального значения лишь одной величины, т.е. одновременно системе не должно приписываться два и более критериев оптимизации, т.к. практически всегда экстремум одного критерия не соответствует экстремуму другого. Приведем примеры.

Типичный пример неправильной постановки задачи оптимизации:

«Получить максимальную производительность при минимальной себестоимости». Ошибка заключается в том, что ставится задача поиска оптимальности 2-х величин, противоречащих друг другу по своей сути.

Правильная постановка задачи могла быть следующая:

а) получить максимальную производительность при заданной себестоимости;

б) получить минимальную себестоимость при заданной производительности;

В первом случае критерий оптимизации – производительность, а во втором - себестоимость.

2. Наличие ресурсов оптимизации, под которыми понимают возможность выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта.

3. Возможность количественной оценки оптимизируемой величины, поскольку только в этом случае можно сравнивать эффекты от выбора тех или иных управляющих воздействий.

Симплексный метод задач линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает (при условии, что данная задача имеет оптимальный план, и каждый ее опорный план является невырожденным). Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план.

Индивидуальные задания:

1. Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов трёх культур: озимой ржи, озимой пшеницы и картофеля. Под посевы отведено 1000 га пашни, которая должна использоваться полностью. Общие ресурсы труда составляют 30000 чел.-ч. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 5).

Таблица 5

Показатели	Озимая рожь	Озимая пшеница	Картофель
Урожайность с 1 га, ц	32	40	250
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	16	20	80
Производственные затраты на 1 га, ден. ед.	214	226	782

По плану требуется произвести 32 000 ц зерна и 40 000 ц картофеля. Критерий оптимальности – минимум производственных затрат.

2. Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов трёх зерновых культур: озимой пшеницы, ярового ячменя и овса. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 6).

Таблица 6

Показатели	Озимая пшеница	Яровой ячмень	Овёс
Урожайность с 1 га, ц	40	35	30
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	20	15	13
Затраты удобрений на 1 га, ден. ед.	80	50	40

Производственные ресурсы: пашня 1600 га, труд – 27 000 чел.-ч., удобрения – 99 000 ден. ед.
В структуре посевов площадь под озимой пшеницей должна составлять не менее 800 га.
Критерий оптимальности – максимум производства зерна.

3. Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов трёх культур: озимой ржи, озимой пшеницы и картофеля.

Под посев отведено 2000 га пашни. Ресурсы труда составляют 72000 чел.-ч., резерв минеральных удобрений – 3730 ц действующего вещества.

Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 7).

Таблица 7

Показатели	Озимая рожь	Озимая пшеница	Картофель
Урожайность с 1 га, ц	28	36	220
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	18	22	105
Минеральные удобрения на 1 га, д. в..	1,75	2,1	1,8
прибыль на 1 ц, ден. ед.	9,3	8,65	2,4

В структуре посевов зерновые должны составлять не менее 1600 га.
Критерий оптимальности – максимум прибыли от реализации продукции.

4. Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов трёх культур: кормовых корнеплодов, кукурузы на силос, однолетних трав на зелёный корм. Под посевы отведено 1500 га пашни. Ресурсы труда составляют 40 630 чел.-ч. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 8).

Таблица 8

Показатели	Кормовые корнеплоды	Кукуруза на силос	Однолетние травы
Урожайность с 1 га, ц	600	400	200
Содержание в 1 ц., ц корм. Ед.	0,12	0,2	0,16
Затраты труда на 1 га, чел. –ч.	81,3	28,6	10,3

По плану требуется произвести 100 тыс. ц кормовых корнеплодов, 200 тыс. ц силоса и 120 тыс. ц зелёного корма.
Критерий оптимальности – максимум производства кормов.

5. Составить экономико-математическую модель оптимизации сочетания способов уборки многолетних трав на сено, сенаж и силос. Площадь посева трав составляет 1000 га, а ресурсы труда – 150760 чел.-ч. По плану требуется произвести не менее 21000 ц корм. ед. грубых кормов и 12000 ц корм. ед. силоса. Производство многолетних трав в зависимости от способа уборки характеризуется следующими показателями (табл. 9).

Таблица 9

Показатели	Многолетние травы		
	на сено	на сенаж	на силос
Выход продукции с 1 га, ц	50	125	250
Содержание кормовых единиц в 1 ц корма, ц	0,5	0,4	0,16
Затраты труда на 1 ц, чел.-ч.	0,2	0,128	0,1

Критерий оптимальности – максимум производства кормов.

6. В хозяйстве возделываются три культуры: горох, овёс и кормовая свёкла. Площадь пашни 500 га. Трудовые ресурсы – 4200 чел.-дней. Материально-денежные средства составляют 100000 тысяч рублей.

Посевная площадь кормовой свёклы должна быть не более 50 га. Эффективность возделывания этих культур приведена в табл. 10.

Таблица 10

Показатели	Горох	Овёс	Кормовая свёкла
Затраты труда на 1 га, чел. - дн.	4,2	3	42
Производственные затраты на 1 га, тыс. руб.	100	100	250
Выход валовой продукции с 1 га, тыс. руб.	250	300	800

Определить при данных условиях оптимальное сочетание посевов сельскохозяйственных культур, обеспечивающее максимум производства валовой продукции.

7. В хозяйстве возделываются многолетние травы на зелёный корм и на сено и однолетние травы на зелёный корм и на сено. Площадь пашни 400 га, трудовые ресурсы – 2000 чел.-дней. Площадь многолетних трав на зелёный корм – не более 100 га. Эффективность возделывания кормовых культур приведена в табл. 11.

Таблица 11

Показатели	Многолетние травы		Однолетние травы	
	на зелёный корм	на сено	на зелёный корм	на сено
Затраты труда на 1 га, чел.-дн.	2	3	4	5
Выход кормов с 1 га, ц корм. Ед.	30	25	25	20

Критерий оптимальности – максимум производства кормов.

8. В хозяйстве возделываются следующие культуры: овёс, озимая пшеница и картофель. Площадь пашни 700 га. Посевная площадь озимых зерновых – не более 160 га, посевная площадь картофеля – не более 200 га. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 12).

Таблица 12

Показатели	Овёс	Озимая пшеница	Картофель
Урожайность с 1 га, ц	20	25	150
Прибыль на 1 ц, тыс. руб.	40	80	35

Определить оптимальное сочетание посевных площадей этих культур, обеспечивающее максимум прибыли от реализации продукции.

9. Возделываются три культуры: овёс, кукуруза на силос и многолетние травы на сено. Площадь пашни 600 га. Посевная площадь овса не должна превышать 200 га. Трудовые ресурсы составляют 3000 чел.-

дней. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 13).

Таблица 13

Показатели	Овёс	Кукуруза на силос	Многолетние на сено
Выход кормов с 1 га, ц корм.ед.	25	44	16
Затраты труда на 1 га, чел.-дн.	3	4	2,5

Найти оптимальное сочетание посевов этих культур для производства максимального количества кормов.

10. Определить оптимальное сочетание отраслей растениеводства, если площадь пашни 1000 га, объем минеральных удобрений – 850 ц.д.в.

Возделываются картофель, ячмень и горох. Площадь картофеля не должна быть более 250 га. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 14).

Таблица 14

Показатели	Картофель	Ячмень	Горох
Урожайность с 1 га, ц	100	20	15
Минеральные удобрения на 1 га, ц.д.в.	1,8	1	2
Прибыль на 1 ц, тыс. руб.	42	38	12

Критерий оптимальности – максимум прибыли от реализации продукции.

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Каждой задаче ЛП модно определённым образом сопоставить некоторую другую задачу ЛП, называемую двойственной по исходной или прямой.

Правила составления задачи, двойственной исходной:

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному виду, а именно: если в исходной задаче отыскивается максимум линейной формы, то все неравенства системы привести к виду «≤», если минимум – то к виду «≥».
2. Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи (после преобразований), и аналогичная матрица в двойственной задаче получаются друг из друга транспортированием (т. е. заменой строк столбцами, столбцов троками).
3. Число переменных в двойственной задаче равно числу переменных в исходной задаче.
4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в исходной задаче, а правыми частями двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.
5. Если прямая задача решается на максимум и ограничения вида «≤», то двойственная задача решается на минимум и ограничения имеют знак «≥».

Задача. Прямая задача имеет вид: max $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 26 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 20 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \le 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 12 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

Составим задачу двойственную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Сформулируем двойственную задачу:

найти min $g(y) = 26y_1 + 20y_2 + 4y_3 + 12y_4$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 \geq 3 \\ 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 5y_4 \geq 2 \\ 5y_1 + 4y_2 - y_3 - 2y_4 \geq 4 \end{cases}$$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

ТЕОРЕМА1. Достаточный признак оптимальности.

Если $X(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ есть допустимое решения прямой (исходной) задачи, а $Y(y_1, y_2,\ldots,y_m)$ есть допустимое решение двойственной задачи и при этом $f(x)=g(y)$, то X есть оптимальное решение исходной задачи, а Y-оптимальное решение двойственной задачи.

ТЕОРЕМА2. Основная теорема двойственности.

а) Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то вторая также имеет оптимальное решение с тем же значением целевой функции.

б) Если одна из задач не имеет оптимального решения из-за неограниченности целевой функции, то система ограничений второй задачи несовместна.

ТЕОРЕМА3. Условия дополняющей нежёсткости.

Пусть $X(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ есть оптимальное решение прямой задачи, а $Y(y_1, y_2,\ldots,y_m)$ – оптимальное решение двойственной задачи.

В этом случае должны выполняться условия дополняющей нежёсткости:

а) если $_i$ – ограничение прямой задачи оптимальным решением обращается в строгое равенство, то соответствующая переменная двойственной задачи будет строго положительна ($y_i>0$);

б) если $_i$ – ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, то соответствующая переменная двойственной задачи будет равна нулю ($y_i=0$) и наоборот.

Порядок работы

1. Составить задачу, двойственную исходной.
2. Решить двойственную задачу на ЭВМ.
3. Пользуясь теоремами двойственности, найти значение целевой функции прямой задачи.

Индивидуальные задания:

1. $\max f(x) = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 6 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

2. max $f(x) = 2x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

3. max $f(x) = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 5 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

4. max $f(x) = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ x_1 - x_2 \ge -5 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

5. max $f(x) = 2x_1 - x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 0 \\ -x_1 - 2x_2 \le -2 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

6. max $f(x) = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \ge -6 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

7. min f(x) = $2x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \le 0 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

8. min f(x) = $2x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 - 6x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

9. min f(x) = $x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ 3x_1 - x_2 \le 0 \\ -x_1 + x_2 \ge 3 \\ -x_1 \ge -4 \\ -x_2 \ge -5 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

10.min f(x) = $2x_1 - 10x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 5 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

11.min f(x) = $2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ x_1 - x_2 \le 0 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

12. $\min f(x) = 2x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 - 6x_2 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

13. $\min f(x) = 3x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 8 \\ 3x_1 - x_2 \le 0 \\ -x_1 + x_2 \ge 3 \\ -x_1 \ge -6 \\ -x_2 \ge -5 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

14. $\min f(x) = x_1 - 8x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 10 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

В сельском хозяйстве значительную часть общих затрат на производство продукции составляют транспортные издержки. Поэтому рациональное сокращение этого рода затрат является одним из путей повышения эффективности сельскохозяйственного производства.

Транспортная задача принадлежит к классу задач линейного программирования. В общем виде транспортную задачу можно представить следующим образом.

Из m пунктов отправления или производства A_1, A_2, …, A_m вывозится однородный груз в количестве a_1, a_2,…,a_m единиц соответственно в n пунктов назначения или потребления B_1, B_2,…,B_n в количестве b_1, b_2,…,b_n. Причём суммарные запасы грузов отправления равны суммарной потребности в грузе пунктов назначения, т. е. $\sum A_i = \sum B_j$.

Стоимость перевозки единицы груза от i-пункта отправления (i = 1, 2, …, m) до j-пункта назначения (j = 1, 2, …, n) составляет C_{ij} денежных единиц.

Требуется составить такой план перевозки, при котором общие издержки были бы минимальными.

Обозначим через X_{ij} (i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n) количество груза, перевозимого от i-пункта отправления до j-пункта назначения. Условия задачи записываются в матрицу перевозок.

Таблица 15

Матрица перевозок

Пункт отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	… …	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	… …	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	… …	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$\sum A_i = \sum B_j$

Запишем математическую модель транспортной задачи

Найти min $f(x)=\sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$

при условиях

$x_{11}+x_{12}+ \ldots + x_{1n} = a_1$

$x_{21}+x_{22}+ \ldots + x_{2n} = a_2$

……………………………

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m$

$x_{11}+x_{12}+ \ldots +x_{1n}= b_1$

$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=b_2$
....
$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=b_m$

Решение некоторых экономических задач сводится к решению транспортной задачи.

Задачи для самостоятельного решения

1. Три хозяйства выращивают сахарную свёклу. Первое хозяйство вырастило 4000 т, второе – 5000 т, третье – 2000 т свёклы. Эту свёклу необходимо доставить в четыре пункта переработки. Первому пункту требуется 2500 т, второму 1000 т, третьему – 1750 т, четвёртому – 2250 т. Стоимость перевозки одной тонны свёклы от каждого хозяйства к каждому пункту переработки задана таблицей (в единицах). Составить план транспортировки свёклы так, чтобы затраты на неё были минимальными.

Таблица 16

Совхозы	Пункты переработки			
	1	2	3	4
1	1	3	5	6
2	4	7	8	10
3	2	4	3	9

2. Сено нужно доставить от 4 участков к 3 фермам. Запасы сена на участках, потребности в сене каждой фермы (в т), а также стоимость перевозки 1 т сена от участков к фермам (в единицах) даны в таблице. Требуется составить такой план, чтобы стоимость перевозки была минимальной.

Таблица 17

Участки	Фермы			Запасы
	1	2	3	
1	3	1	2	20
2	4	5	6	35
3	2	3	1	17
4	7	2	4	23
Потребности	24	21	50	

3. Хозяйство имеет 5 животноводческих ферм, расположенных в разных местах и на различном расстоянии от полей севооборота. Кукуруза на силос возделывается на 4 полях. Производно силосной массы составит по прогнозу 400, 1200, 600, 400 т. Потребности ферм равны 800, 500, 600, 200, 500 т. Транспортные издержки (в единицах) даны в табл. 18:

Таблица 18

Поля севооборота	Фермы				
	1	2	3	4	5
1	5	8	3	10	4
2	10	7	9	6	5
3	7	3	6	4	12
4	6	3	11	5	4

Составить такой план перевозок, при котором транспортные издержки будут минимальными.

4. В хозяйстве имеются три картофелехранилища, в которых хранится картофель в следующем количестве: в первом – 100 т, во втором – 130 т, в третьем – 170 т. Картофель распределён между четырьмя фермами. Первой ферме требуется 150 т. картофеля, второй – 120 т, третьей - 80 т и четвёртой – 50 т. Стоимость перевозки 1 т от каждого хранилища к каждой ферме задана таблицей (в единицах).

Таблица 19

Картофелехранилища	Фермы			
	1	2	3	4
1	3	5	7	11
2	1	4	6	3
3	5	8	12	7

Составить такой план перевозки картофеля, чтобы стоимость всей транспортировки была минимальной.

5. С трёх фуражных складов корма должны поступить на 4 фермы. На первую ферму требуется 300 т, на вторую – 400 т, на третью 500 т, на четвертую – 600 т. На первом складе имеется 500 т кормов, на втором – 700 т, на третьем – 600 т. Затраты на перевозку 1 т (в единицах) заданы таблицей.

Таблица 20

Склады	Фермы			
	1	2	3	4
1	4	3	5	1
2	2	1	4	5
3	2	8	4	5

Определить план перевозок кормов на фермы с минимальными транспортными затратами.

6. Молоко трёх ферм доставляется в четыре магазина, причём 1 магазину требуется 300 ц, 2 – 170 ц, 3 – 260 ц, 4 – 180 ц. На фермах имеется следующее количество молока: на 1 – 450 ц, на 2 – 350 ц, на 3 – 150 ц. Затраты на перевозку 1 ц молока к магазинам заданы таблицей (в единицах).

Таблица 21

Фермы	Магазины			
	1	2	3	4
1	3	4	6	7
2	7	3	4	4
3	6	5	3	5

Определить план перевозок молока к магазинам с минимальными транспортными затратами.

7. Органические удобрения с 4 ферм необходимо развести на 5 участков. На 1 ферме имеется 3700 т, на 2 – 4300 т, на 3 – 4600 т, на 4 – 5000 т. Каждому участку необходимо получить удобрения в следующем количестве: 1 – 3520 т, 2 – 3960 т, 3 – 3480 т, 4 – 3200 т, 5 -3540 т. Затраты на перевозку органического удобрения к участкам заданы таблицей (в единицах).

Таблица 22

Фермы	Участки				
	1	2	3	4	5
1	4	4	5	7	7
2	2	3	3	5	3
3	4	4	2	3	5
4	4	5	2	5	5

Определите план перевозок органических удобрений на полевые участки с минимальными транспортными затратами.

8. В хозяйстве возделываются следующие кормовые культуры: кормовая свёкла – 280 га, кукуруза на силос – 440 га, подсолнечник на силос – 310 га и однолетние травы на силос – 390 га. Известна урожайность этих культур на различных участках, ц корм. ед.

Таблица 23

Культуры	Участки			
	1	2	3	4
Кормовая свёкла	75	60	68	66
Кукуруза на силос	72	62	75	57
Подсолнечник на силос	50	53	44	43
Однолетние травы на силос	40	32	36	35
Площадь участка, га	260	350	420	390

Распределите посевы кормовых культур по участкам земли различного плодородия таким образом, чтобы валовой сбор кормов был максимальным.

9. В хозяйстве возделывается три сорта яровой пшеницы: Краснозерная – на площади 300 га, Харьковская – 250 га, Стрела – 190 га. Известна средняя многолетняя урожайность этих сортов по различным предшественникам, ц с 1 га.

Таблица 24

Предшественники	Сорта		
	Краснозерная	Харьковская	Стрела
Чистый пар	30	32	28
Бобовые	29	31	27
Озимые	27	26	25
Многолетние травы	31	31	24

Площадь чистых паров в хозяйстве составляет 160 га, под бобовыми – 120 га, озимыми – 260 га и многолетними – 200 га. Требуется так разместить посевы яровой пшеницы по предшественникам, чтобы ожидаемый валовой сбор зерна был максимальным.

10. Три комбикормовых завода в области производят в год 200 тыс. т. комбикорма для 4 птицефабрик, в том числе первый – 90 тыс. т, второй – 60 тыс. т, третий – 50 тыс. т. Потребность птицефабрик в комбикормах следующая: первой – 40 тыс. т, второй 65 тыс. т, третьей – 35 тыс. т, четвёртой – 60 тыс. т. Себестоимость (ден. ед) доставки 1 т комбикорма от заводов до птицефабрик приведена в таблице.

Таблица 25

Заводы	Птицефабрики			
	1	2	3	4
первый	7,2	2,5	3,4	4,8
второй	0,9	3,8	4,1	3,2
третий	3,4	2,3	1,8	2,1

Составить такой план перевозок комбикорма, чтобы транспортные затраты были минимальными.

11. Молоко с трёх ферм доставляется в четыре магазина, причём 1 магазину требуется 400 ц, 2 – 200 ц, 3 – 200 ц, 4 – 300 ц. На фермах имеется следующее количество молока: на 1 – 600 ц, на 2 – 300 ц, на 3 – 200 ц. Затраты на перевозку 1 ц молока к магазинам заданы таблицей (в единицах).

Таблица 26

Фермы	Магазины			
	1	2	3	4
1	3	4	6	7
2	7	3	4	4
3	6	5	3	5

Определить план перевозок молока к магазинам с минимальными транспортными затратами.

12. В хозяйстве имеется три картофелехранилища, в которых хранится картофель в следующем количестве: в первом – 200 т, во втором – 100 т, в третьем – 200 т. Картофель распределен между четырьмя фермами. Первой ферме требуется 150 т картофеля, второй – 150 т, третьей – 80 т

и четвёртой – 120 т. Стоимость перевозки 1 т от каждого хранилища к каждой ферме задан таблицей (в единицах).

Таблица 27

Картофелехранилище	Фермы			
	1	2	3	4
1	2	5	4	9
2	1	2	6	3
3	5	8	12	7

Составить такой план перевозки картофеля, чтобы стоимость всей транспортировки была минимальной.

13. Картофель с трёх полей доставляется в четыре магазина, причём, 1 магазину требуется 300 т, 2 – 100 т, 3 – 200 т, 4 – 300 т. На полях имеется следующее количество картофеля: на 1 – 500 т, на 2 – 300 т, на 3 – 100 т. Затраты на перевозку 1 т картофеля к магазинам заданы таблицей (в единицах).

Таблица 28

Фермы	Магазины			
	1	2	3	4
1	3	2	6	4
2	7	3	7	4
3	3	5	3	5

Определить план перевозок картофеля к магазинам с минимальными транспортными затратами.

14. Органические удобрения с 4-х ферм необходимо развести на 5 участков. На 1 ферме имеется 300 т, на 2 – 400 т, на 3 -400 т, на 4 – 500 т. Каждому участку необходимо получить удобрения в следующем количестве: 1 – 500 т, 2 – 300 т, 3 – 200 т, 4 – 300 т, 5 – 300 т. Затраты на перевозку органического удобрения к участкам заданы таблицей (в единицах).

Таблица 29

Фермы	Участки				
	1	2	3	4	5
1	4	4	5	7	7
2	2	3	3	5	3
3	4	4	2	3	5
4	4	5	2	5	5

Определить план перевозок органических удобрений на полевые участки с минимальными транспортными затратами.

Содержание

Литература

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие для студентов экономических спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Гатаулин А.М. Система прикладных статистико-математических методов обработки экспериментальных данных в сельском хозяйстве. В 2-х частях. -М.: Изд. ТСХА,1992. -23,5 п.л
3. Карасев А. И., Кремер Н. Ш., Савельева Т. И. Математические методы и модели в планировании. – М.: Экономика, 1997.
4. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Microsoft Excel. – СПб.: BHV – Санкт – Петербург, 1997.
5. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.Н. и др.; Под ред. А.М. Гатаулина. - СПб.: ООО «ИТК ГРАНИТ», 2009. -432 с.: ил. (первое издание было выпущено в 1990 г.: - М.:Агропромиздат, 1990, - 432 с.)
6. Погонышева Д. А. Индивидуальные задания по моделированию социально-экономических процессов для студентов специальностей 060500, 060900, 061100, 061500, 061400. – Брянск, БГСХА, 1998.

Линейное программирование в экономике

Методические указания и задания для студентов
направлений подготовки Прикладная информатика; Менеджмент; Торговое дело; Экономика

Кубышкина Александра Васильевна
Войтова Надежда Александровна

Подписано к печати Формат 60х94.
Бумага печатная. Тираж 100. Изд. Номер

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365, Брянская обл., Выгоничский район, п. Кокино, БГАУ