Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
« Брянский государственный аграрный университет»

Факультет среднего профессионального образования

М. М. Сидорова

Методические указания
к практическим и самостоятельным работам
по математике
для студентов 2 курса факультета СПО

Брянская область
2019

УДК 51 (076)
ББК 22.1
С 34

Сидорова, М. М. Методические указания к практическим и самостоятельным работам по математике для студентов 2 курса факультета СПО / М. М. Сидорова. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2019. – 76 с.

Методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика для студентов специальностей 23.02.03 «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта», 35.02.06 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции». Методические указания предназначены для организации учебного процесса по данной дисциплине, а также подготовки и проведению практических занятий и их проверки. Практические задания предназначены для закрепления теоретического материала по учебной дисциплине ЕН.01

Рецензент: преподаватель математики факультета СПО О.В. Дьяченко.

Рекомендовано к изданию цикловой методической комиссией факультета среднего профессионального образования Брянского ГАУ, протокол № 3 от 14.01.2019 года.

Содержание

Пояснительная записка

Методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика для студентов специальностей 23.02.03 «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта», 35.02.06 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции». Методические указания предназначены для организации учебного процесса по данной дисциплине, а также подготовки и проведению практических занятий и их проверки. Практические задания предназначены для закрепления теоретического материала по учебной дисциплине ЕН.01

Математика и выработки навыков его применения в практических расчетах. Практические занятия являются важными видами учебной работы студента по учебной дисциплине и выполняются в пределах часов, предусмотренных учебным планом специальности. Цель данных методических указаний состоит в оказании помощи студентам при проведении практических занятий по изучению данной дисциплины, в формировании готовности к овладению основными умениями, знаниями, а также развитие общих компетенций по специальности.

Содержание программы

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Матрицы. Виды и свойства матриц. Правила действия над ними. Определители второго и третьего порядков и их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Разложение определителя по элементам ряда.

Практическое занятие: Решение систем линейных уравнений в матричной форме, методами Крамера и Гаусса.

Раздел 2. Элементы математического анализа

Тема 2.1 Функция. Предел функции. Непрерывность функции

Функция одной независимой переменной. Предел функции. Свойства пределов. Теоремы о пределах функции. Непрерывные функции и их свойства.

Числовые последовательности. Предел числовой последовательности.

Сходящаяся последовательность. Число е.

Практическое занятие: Вычисление пределов функций в точке и на бесконечности.

Тема 2.2 Дифференциальное исчисление

Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной, ее физический и геометрический смысл. Правила нахождения производных.

Правила и формулы дифференцирования. Теоремы дифференцирования.

Производные элементарных функций.

Применение производных к исследованию функций. Нахождение экстремума.

Наибольшее и наименьшее значение. Дифференциал функции. Приближенные вычисления. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Вогнутость кривой. Точки перегиба.

Правило нахождения точек перегиба. Дифференциал функции как главная часть ее приращения. Основные свойства дифференциала.

Практическое занятие: Вычисление производных элементарных функций в заданных точках. Применение производной к исследованию функции и построению графика.

Тема 2. 3 Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл. Понятие первообразной данной функции.

Свойства неопределенного интеграла. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как площадь криволинейной трапеции. Его принципиальное отличие от неопределенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница. Теорема о среднем. Приближенные методы вычисления определенного интеграла.

Использование определенного интеграла для решения задач прикладного характера. Применение определенного интеграла к вычислению площадей и объемов.

Практическое занятие: Вычисление интегралов. Решение задач на приложения интеграла. Вычисление площадей фигур и объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.

Тема 2.4 Дифференциальные уравнения

Определение дифференциального уравнения. Общее и частное решение дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение I порядка.

Решение задач на составление дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Практическое занятие: Решение дифференциальных уравнений.

Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики

Понятия события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины. Характеристики случайной величины.

Практическое занятие: Решение комбинаторных задач. Решение вероятностных задач.

Раздел 4. Элементы теории комплексных чисел

Комплексное число и его формы. Действия над комплексными числами в различных формах.

Практическое занятие: Комплексные числа и действия над ними.

Критерии оценки выполнения обучающимися практических работ

Оценка знаний студентов производится по пятибалльной системе.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;

- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

- допущена одна существенная ошибка или две-три несущественных ошибки;

- правильно выполнено более 75% заданий.

Отметка «3» ставится, если:

допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;

- при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Отметка «1» ставится, если:

- работа показала полное отсутствие у обучающегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием обучающимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Выполнять пропущенные работы по уважительным и неуважительным причинам обучающийся может на дополнительных занятиях (согласно расписанию), в читальном зале или дома.

1. Элементы линейной алгебры

1. Прямоугольной матрицей размера m на n называется совокупность $m \times n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно в виде $A = (a_{ij})$ (i $= \overline{1,m}$; j $= \overline{1,n}$). Числа a_{ij} составляющие данную матрицу, называются ее элементами; первый индекс указывает на номер строки, второй - на номер столбца. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называются равными, если попарно равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть A = B, если $a_{ij} = b_{ij}$.Матрица, состоящая из одной строки или одного столбца, называется соответственно матрицей-строкой или матрицей-столбцом.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Матрица размера $m \times n$, все элементы которой равны нулю, называются нулевой матрицей и обозначается через 0. Элементы матрицы с одинаковыми индексами называют элементами главной диагонали. Если число строк матрицы равно числу столбцов, то есть m = n, то матрицу называют квадратной порядка n.

Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются диагональными матрицами и записываются так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$ Если все элементы $a_{i\,i}$ диагональной матрицы равны 1, то матрица называется единичной и обозначается буквой Е:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. Транспонированием называется такое преобразование матрицы, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров. Обозначается транспонирование значком Т наверху.

Пусть дана матрица. Переставим строки со столбцами. Получим матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .. & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & .. & a_{n2} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{1n} & a_{2n} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

которая будет транспонированной по отношению к матрице А. В частности, при транспонировании матрицы-столбца получается матрица-строка и наоборот.

Произведением матрицы А на число λ называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы А умножением на число λ:

λ А = $\left(\lambda a_{ij}\right)$. Суммой двух матриц А = $\left(\lambda a_{ij}\right)$и В = $\left(b_{ij}\right)$ одного размера называется матрица С = $\left(c_{ij}\right)$ того же размера, элементы которой определяются по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Произведение АВ матрицы А на матрицу В определяется в предположении, что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Произведением двух матриц А = $\left(a_{ij}\right)$ и В = $\left(b_{ij}\right)$, где i =$\overline{1,n}$, j=$\overline{1,m}$, k=$\overline{1,p}$, заданных в определенном порядке АВ, называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{im} \cdot b_{mk}$$

Иначе говоря, элементы матрицы-произведения определяются следующим образом: элемент i-й строки и k-го столбца матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

1.1. Пример 1.1

Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Имеем: матрица A размера 2 на 3, матрица B размера 3 на 3, тогда произведение AB = C существует и элементы матрицы C равны,

$c_{11} = 1\times1 + 2\times2 + 1\times3 = 8$,
$c_{21} = 3\times1 + 1\times2 + 0\times3 = 5$,
$c_{12} = 1\times2 + 2\times0 + 1\times5 = 7$,
$c_{22} = 3\times2 + 1\times0 + 0\times5 = 6$,
$c_{13} = 1\times3 + 2\times1 + 1\times4 = 9$,
$c_{23} = 3\times3 + 1\times1 + 0\times4 = 10$.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

а произведение BA не существует.

2. Определители

Перестановкой чисел 1, 2,..., n называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. В элементарной алгебре доказывается, что число всех перестановок, которые можно образовать из n чисел, равно 12.N = n!. Например, из трех чисел 1, 2, 3 можно образовать 3!=6 перестановок: 123, 132, 312, 321, 231, 213. Говорят, что в данной перестановке числа i и j составляют *инверсию* (беспорядок), если i>j, но i стоит в этой перестановке раньше j, то есть если большее число стоит левее меньшего.

Перестановка называется *четной* (или *нечетной)*, если в ней соответственно четно (нечетно) общее число инверсий. Операция, посредством которой от одной перестановки переходят к другой, составленной из тех же n чисел, называется *подстановкой n-ой степени*.

Подстановка, переводящая одну перестановку в другую, записывается двумя строками в общих скобках, причем числа, занимающие одинаковые места в рассматриваемых перестановках, называются *соответствующими* и пишутся одно под другим. Например, символ

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

обозначает подстановку, в которой 3 переходит в 4, 1 в 2, 2 в 1, 4 в 3. Подстановка называется *четной* (или *нечетной*), если общее число инверсий в обеих строках подстановки четно (нечетно). Всякая подстановка n-ой степени может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & .. & n \\ q_1 & q_2 & .. & q_n \end{pmatrix},$$

т.е. с натуральным расположением чисел в верхней строке.

Пусть нам дана квадратная матрица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \cdots\ a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \cdots\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим все возможные произведения по n элементов этой матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца, т.е. произведений вида:

$$a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_0}$$

где индексы q_1, q_2,..., q_n составляют некоторую перестановку из чисел 1, 2,..., n. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, т.е. равно n!. Знак произведения равен $(-1)^{q,}$ где q - число инверсий в перестановке вторых индексов элементов.

Определителем n -го порядка, соответствующим матрице, называется алгебраическая сумма n! членов вида. Для записи определителя употребляется символ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(детерминант, или определитель, матрицы А).

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.

2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$ ($j=\overline{1,n}$), то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i-ой, - такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.

8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Минором $M_{i\,j}$ элемента $a_{i\,j}$ определителя d n-го порядка называется определитель порядка n-1, который получается из d вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента $a_{i\,j}$ определителя d называется его минор $M_{i\,j}$, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента $a_{i\,j}$ будем обозначать так $A_{i\,j}$. Таким образом,

$$A_{i\,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i\,j}.$$

Способы практического вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков, дает следующая теорема.

Теорема (разложение определителя по строке или столбцу).

Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеет место разложение d по элементам i-й строки

$d = a_{i\,1} A_{i\,1} + a_{i\,2} A_{i\,2} + ... + a_{i\,n} A_{i\,n} \qquad (i = \overline{1, n})$

или j- го столбца

$d = a_{1\,j} A_{1\,j} + a_{2\,j} A_{2\,j} + ... + a_{n\,j} A_{n\,j} \qquad (j = \overline{1, n})$.

В частности, если все элементы строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

Пример 2.1

Не вычисляя определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, показать, что он равен нулю.

Решение. Вычтем из второй строки первую, получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

равный исходному. Если из третьей строки также вычесть первую,

то получится определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix},$$

в котором две строки пропорциональны. Такой определитель равен нулю.

Пример 2.2

Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

разложив его по элементам второго столбца.

Решение. Разложим определитель по элементам второго столбца:
$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=$

$$=(-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-20$$

3. Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Обозначим Δ =det A.

Квадратная матрица A называется *невырожденной,* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной,* или *особенной*, если $\Delta = 0$.

Квадратная матрица B называется *обратной* для квадратной матрицы A того же порядка, если их произведение A B = B A = E, где E - единичная матрица того же порядка, что и матрицы A и B.

Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную, *необходимо* и *достаточно*, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице A, обозначается через A^{-1}, так что B = A^{-1}. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

где $A_{i\,j}$ - алгебраические дополнения элементов $a_{i\,j}$. Вычисление обратной матрицы по формуле для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратную матрицу с помощью метода элементарных преобразований (ЭП). Любую неособенную матрицу A путем *ЭП* только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице E. Если совершенные над матрицей A *ЭП* в том же порядке применить к единичной матрице E, то в результате получится обратная матрица. Удобно совершать *ЭП* над матрицами A и E одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту.

Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов. Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

Пример 3.1

Для матрицы $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную.

Решение. Находим сначала детерминант матрицы А

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

значит, обратная матрица существует и мы ее можем найти по формуле:

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $A_{i\,j}$ (i,j=1,2,3) - алгебраические дополнения элементов $a_{i\,j}$ исходной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+4=6 \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3 \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3 \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4-1=3 \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2+4=6$$

Откуда $$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Матричный метод

Если матрица А системы линейных уравнений невырожденная, т.е. det A

$\neq 0$, то матрица A имеет обратную, и решение системы совпадает с вектором X $= A^{-1} \cdot B$.

Иначе говоря, данная система имеет единственное решение. Отыскание решения системы по формуле X = $A^{-1} \cdot B$. называют *матричным* способом решения системы, или решением по *методу обратной матрицы*.

Пример 4.1

Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение. Введем обозначения

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ X = (x_1, x_2, x_3)^T,\ B = (6,3,5)^T.$$

Тогда данная система уравнений запишется матричным уравнением AX=B.

Поскольку $\Delta = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$,то матрица A невырожденная и поэтому имеет

обратную: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Для получения решения X мы должны умножить матрицу-столбец B слева на матрицу A: X = A^{-1}B. В данном случае $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ и, следовательно, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Выполняя действия над матрицами, получим:
x1 = 1/5 (1·6+3·3-2·5) = 1/5 (6+9-10) = 1,
x2 = 1/5 (-3·6 +1·3 - 1·5) = 1/5 (- 18 + 3 + 5) = -2,
x3 = 1/5 (1·6 - 2·3 + 3·5) = 1/5 (6 -6 + 15) = 3.
Итак, C = (1, -2, 3).

5. Формулы Крамера

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим *главный определитель системы*, т.е. определитель матрицы A

$\Delta = \det(a_{i\,j})$

и *n вспомогательных определителей* Δ_i (i= $\overline{1,n}$), которые получаются из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы Крамера имеют вид: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ (i = $\overline{1,n}$).

Следует правило Крамера, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы: если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

Если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители $\Delta_i = 0$ (i= $\overline{1,n}$), то система имеет бесчисленное множество решений.

Если главный определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

Пример 5.1

Решить методом Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142 \neq 0$$

значит, система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители Δ_i ($i = \overline{1,4}$), получающиеся из определителя Δ путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при x_i, столбцом из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -284$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426 \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -142$$

Отсюда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 2$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 3$, $x_4 = \dfrac{\Delta_4}{\Delta} = -1$

решение системы - вектор $C=(1, 2, 3, -1)^T$.

6. Метод Гаусса

Метод Гаусса является наиболее распространенным точным методом исследования и решения систем линейного уравнения (как квадратных, так и не квадратных). Основная идея его состоит в том, что посредством *элементарных преобразований* система приводится к равносильной системе треугольного или трапециидального (ступенчатого) вида, по которому легко видеть какая система: совместно или несовместна, определенная или неопределенная. При этом, если система совместна, то все решения определяются непосредственно.

К *элементарным преобразованиям систем* относят следующие:

перестановка любых двух уравнений системы;

умножение любого уравнения системы на число не равное нулю;

вычеркивание уравнения, все коэффициенты которого равны нулю;

вычитание из любого уравнения системы любого другого, умноженного на отличное от нуля число;

переобозначение неизвестных.

Любое элементарное преобразование приводит к равносильной системе. Применение метода Гаусса состоит в поэтапном исключении неизвестных из уравнений.

Пример 6.1

Исследовать систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$ (1)

Преобразуем систему, исключив из второго и третьего уравнений члены содержащие x_1 (добившись, чтобы коэффициенты перед x_1 были равны нулю).

1 шаг. Умножим обе части первого уравнения на коэффициент при x_1, из второго уравнения, взятый с противоположным знаком, т.е. на -2:

$-2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = +2$, (2)

а обе части второго уравнения умножим на коэффициент при x_1 из первого уравнения, т.е. 1. $2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4$. (3)

Сложим почленно уравнения $0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2$. (4)

2 шаг. Аналогичным образом поступим с третьим уравнением. Умножим обе части первого уравнения на коэффициент при x_1 третьего уравнения, взятый с противоположным знаком, т.е. на -4:

$-4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 4$, (5)

а третье уравнение – на коэффициент при x_1 первого уравнения, т.е. на 1:

$4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2$. (6)

Сложим почленно уравнения

$0x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2$. (7)

Подставим в систему (1) вместо второго и третьего уравнений (4) и (7) соответственно. Система (1) примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ 0x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}. \qquad (8)$$

3 шаг. Затем преобразуем третье уравнение, исключив из него член, содержащий x_2. Для этого обе части второго уравнения умножим на коэффициент при x_2 из третьего уравнения, взятый с противоположным знаком, т.е. на 3, получим

$$0x_1 - 9x_2 - 6x_3 = -6 \cdot \qquad (9)$$

Обе части третьего уравнения умножим на коэффициент при x_2 из второго уравнения, т.е. на -3:

$$0x_1 + 9x_2 + 12x_3 = -6 \cdot \qquad (10)$$

Сложим почленно уравнения):

$$0x_1 + 0x_2 + 6x_3 = -12 \cdot \qquad (11)$$

Заменим в системе третье уравнение равносильным уравнением

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 6x_3 = -12 \end{cases}. \qquad (12)$$

Таким образом, от исходной системы (1) мы перешли к равносильной системе (12), которая имеет треугольный вид (ступенчатый). Такое преобразование называют прямым ходом метода Гаусса.

4 шаг (обратный ход). Из последнего уравнения системы найдем x_3:

$$x_3 = -\frac{12}{6} = -2 \cdot$$

Используя второе уравнение и найденное значение x_3, найдем x_2:

$$-3x_2 - 2\cdot(-2) = -2,\ \ -3x_2 - 2\cdot(-2) = -2,\ \ x_2 = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Используя первое уравнение и найденное значение x_3 и x_2, найдем x_1:

$$x_1 + 2 + 2(-2) = -1,\ \ x_1 = -1 + 2 = 1.$$

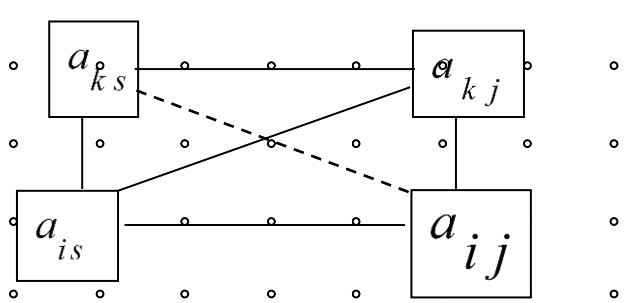
Таким образом, исходная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}.$$

Замечание. Предложенные преобразования систем можно формализовать. Можно выполнять операции не над системой, а на её аналоге – матрице. Построим расширенную матрицу вида

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 6x_3 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Выберем в качестве *разрешающей строки* первую, а в качестве *разрешающего элемента* (в разрешающей строке это любой не нулевой элемент) выберем элемент $a_{11} = 1$ (он выделен жирным шрифтом) и с помощью неё преобразуем вторую и третью строки так, чтобы в первом столбце под 1 получились нули. При этом можно использовать мнемоническое *правило прямоугольников*. Мысленно строится прямоугольник вида



Здесь точками обозначены произвольные элементы матрицы (в том числе и элементы, образованные свободными членами). Здесь элемент a_{ks} разрешающий элемент. Тогда на место элемента a_{ij} (выделен жирным шрифтом) ставится число равное

$$a_{ks} \cdot a_{ij} - a_{is} \cdot a_{kj} \,. \qquad (*)$$

Используя правило прямоугольников, преобразуем вторую и третью строки

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

Затем выберем в качестве разрешающей строки вторую, а в качестве разрешающего элемента элемент $a_{22} = -3$ (он выделен жирным шрифтом). Используя правило прямоугольников, преобразуем третью строку.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right)$$

На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса. Последняя матрица представляет собою символическую запись системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 6x_3 = -12 \end{cases}.$$

Применяя обратный ход, также как это было сделано выше, получим решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}.$$

Пример 6.2

Исследовать систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6\,x_4 = 1 \end{cases}$$

Воспользуемся методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6\,x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 96 \end{array}\right)$$

Поделив вторую строку на 2, а третью на 96, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -4 \\ 0x_1 - 0x_2 + 0x_3 + 0\,x_4 = 1 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения видно, что не существует такого значения x_4, при котором оно будет верным равенством, т.к. левая часть уравнения при любом значении x_4 равна 0, а правая всегда равна 1. Таким образом, можно сделать вывод, что исходная система несовместно.

Пример 6.3

Исследовать систему
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$$

Воспользуемся методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & +3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & =3 \\ x_1 & +5x_2 & -9x_3 & +8x_4 & =1 \\ 5x_1 & +18x_2 & +4x_3 & +5x_4 & =12 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

Поделим элементы третьей строки на 3. Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Очевидно, второе, третье и четвертые уравнения совпадают, поэтому два последних уравнения можно исключить из матрицы (системы):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =5 \\ & -x_2 & +7x_3 & -5x_4 & =1 \end{cases}.$$

Перенесем члены, содержащие неизвестные x_3 и x_4 в правые части (это свободные неизвестные, а x_1 и x_2 - базисные неизвестные). Система примет вид

$$\begin{cases} 2x_1 & +7x_2 & =5 & -3x_3 & -x_4 \\ & -x_2 & =1 & -7x_3 & +5x_4 \end{cases}.$$

Выразим x_2 и x_1 через свободные неизвестные x_3 и x_4, которые могут принимать произвольные значения. Из второго уравнения

$$x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4.$$

Используя это значение, из первого уравнения выразим x_1 через x_3 и x_4.

$$x_1 = \frac{1}{2}\big(5 - 3x_3 - x_4 - 7(-1 + 7x_3 - 5x_4)\big) = \frac{1}{2}\big(12 - 52x_3 + 34x_4\big) =$$
$$= 6 - 26x_3 + 17x_4$$

Таким образом, *общее решение* исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4 \\ x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4 \\ x_3 = C_1 \\ x4 = C_2 \end{cases}.$$

Здесь C_1 и C_2 произвольные константы.

Напомни, что x_1 и x_2 называются *базисными неизвестными*.

Задания для практического занятия

1. Решить системы линейных уравнений: методом обратной матрицы; по формулам Крамера; методом Гаусса (номер варианта совпадает с номером студента по списку)

1.1. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$ 1.3. $\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$ 1.5. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$ 1.9. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$ 1.15. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$ 1.17. $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = 19. \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$ 1.21. $\begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ 2x+y+3z=0, \\ 3x+2y+z=1. \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} 2x+3y+z=12, \\ 2x+y+3z=16, \\ 3x+2y+z=8. \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} x-2y+3z=14, \\ 2x+3y-4z=-16, \\ 3x-2y-5z=-8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x+4y-2z=11, \\ 2x-y-z=4, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} x+5y-6z=-15, \\ 3x+y+4z=13, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} 4x-y=-6, \\ 3x+2y+5z=-14, \\ x-3y+4z=-19. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 5x+2y-4z=-16, \\ x+3z=-6, \\ 2x-3y+z=9. \end{cases}$ 1.29. $\begin{cases} x+4y-z=-9, \\ 4x-y+5z=-2, \\ 3y-7z=-6. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} 7x+4y-z=13, \\ 3x+2y+3z=3, \\ 2x-3y+z=-10. \end{cases}$

Понятие предела функции в точке. Основные теоремы о пределах

Пусть функция y = f(x) определена на некотором промежутке X и пусть точка x_0 є X. Составим из множества X последовательность точек: x_1, $x_2,\ldots,x_n,\ldots$сходящихся к x_0. Значения функции в этих точках также образуют последовательность: $f(x_1)$, $f(x_2),\ldots,f(x_n)$.

Число *A* называется <u>пределом</u> функции $f(\chi)$ в точке $\chi=\chi_0$, если при любых значениях χ, сколь угодно близких к числу χ_0($\chi\neq\chi_0$), значение функции $f(\chi)$ становится угодно близким к числу *A*

Математическое выражение предела даётся в формуле (1.)

$$\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \mathrm{A} \Leftrightarrow \forall\chi\to\chi_0 \Rightarrow f(\chi)\to \mathrm{A}. \quad (1)$$

Основные теоремы о пределах.

Пусть существует $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$, тогда:

Предел аргумента в точке χ_0 равен значению аргумента в этой точке

$$\lim_{\chi\to\chi_0} \chi=\chi_0 \qquad (2)$$

Если с – постоянная величина, то предел постоянной равен самой постоянной

$$\lim_{\chi\to\chi_0} c = c\,,\ c\text{-}const \tag{3}$$

Если с – постоянная величина, то постоянный множитель выносится за знак предела

$$\lim_{\chi\to\chi_0} cx = c\lim_{\chi\to\chi_0} x \tag{4}$$

Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right]=\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi)+\lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi) \tag{5}$$

Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{\chi\leftarrow\chi_0}\left[f(\chi)\cdot g(\chi)\right]=\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi)\cdot\lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi); \tag{6}$$

Предел отношения равен отношению пределов, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\left[f(\chi):g(\chi)\right]=\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi):\lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi),\ \lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi)\neq 0; \tag{7}$$

Предел степени равен степени пределов, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\chi^m=(\lim_{\chi\to\chi_0}\chi)^m \tag{8}$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой функции.

Предел функции на бесконечность

Функция $y=f(x)$ - называется <u>бесконечно малой</u> при $x\to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$

Функция $y=f(x)$ - называется <u>бесконечно большой</u> при $x\to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Если функция $y=f(x)$ бесконечно большая, то функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая и наоборот.

Число А называется <u>пределом</u> функции $y = f(x)$ <u>на бесконечности</u>, если при всех достаточно больших значений х разность $|f(x) - A|$ есть бесконечно малая функция

Правила раскрытия неопределённостей

Часто встречаются случаи, когда непосредственно применить теоремы о пределах нельзя.

В этих случаях необходимо сначала раскрыть неопределенности и потом только вычислять пределы.

В ситуации, когда числитель и знаменатель дроби стремится к нулю, говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо:

а) числитель и знаменатель дроби разложить на множители, а затем сократить на множитель, приведший к неопределенности, при этом можно использовать:

формулы сокращенного умножения,

вынесение общего множителя за скобки,

группировку,

преобразование квадратного трехчлена с помощью дискриминанта или теоремы Виета;

т.к. $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, x_1, x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$,

преобразование многочлена с помощью деления многочлена на $(x-x_0)$,

умножение на сопряженное выражение, т.е. если предел содержит выражение $\sqrt{a} - \sqrt{b},$ то

путем умножения на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ избавляемся от корней, т.к. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

б) использовать первый замечательный предел.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{9}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1 \tag{10}$$

Если числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x \to \infty$, то в таком случае имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия надо разделить числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменной х.

Если имеет место неопределённость ∞^0 и 1^∞, то в этих случаях применяют второй замечательный предел.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{11}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e \tag{12}$$

Если имеют место неопределённости ∞-∞, 0-0, то в этих случаях необходимо заданную функцию привести к дробно-линейному виду, а затем использовать предыдущие правила

Односторонние пределы.

Предел слева - это односторонний предел функции, когда последовательность значений аргумента $x_n \to x_0$ слева от точки x_0, т.е. $x_n < x_0$. Символическая запись левого предела функции функции y=f(x) в точке $x=x_0$ в формуле (13):

$$A = \lim_{\chi\to\chi_0-0} f(x) \tag{13}$$

Предел справа - это односторонний предел функции, когда последовательность значений аргумента $x_n \to x_0$ справа от точки x_0, т.е. $x_n > x_0$. Символическая запись правого предела функции функции y=f(x) в точке $x=x_0$ в формуле (14):

$$B = \lim_{\chi\to\chi_0+0} f(x) \tag{14}$$

Теорема. Функция f(x) имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, и они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.

Табличные пределы .

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{x} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(c\cdot x) = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{c} = \infty$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x} = 0$

Примеры

Пример 1. Вычислить предел функций $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)$

Решение. Используя теоремы о пределах и формулы (2)-(5) получим $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3) = \lim\limits_{x\to 2}(2x) + \lim\limits_{x\to 2}3 = 2\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}3 = 2\cdot 2 + 3 = 7$

Пример 2. Вычислить предел функций $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2^x}{\sqrt{x+3}}$

Решение. Для того, чтобы вычислить предел функции в точке подставим значение аргумента функции в этой точке, т.е. вместо х подставим единицу: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2^x}{\sqrt{x+3}}=\dfrac{1^2+2^1}{\sqrt{1+3}}=\dfrac{3}{2}$

Пример 3. Вычислить предел функций $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Используя правило раскрытия неопределённостей (а) воспользуемся формулами сокращённого умножения: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2}=\left[\dfrac{4}{0}\right]=\infty$.

Пример 4. Вычислить предел функций $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x}{3x^5-2}$

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Используя правило раскрытия неопределённостей, разделим каждое слагаемое почленно на x^5 :

$$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x}{3x^5-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^5}{x^5}+\frac{x}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5}-\frac{2}{x^5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{3-\frac{2}{x^5}}=\left[\frac{1+0}{3-0}\right]=\frac{1}{3}$$

Пример 5. Вычислить предел функций $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}$

Решение. Неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Решим уравнения числителя и знаменателя и разложим трёхчлены на множители: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ =

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{4(x-3)(x+\frac{1}{4})}{3(x-3)(x+\frac{1}{3})}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x+1}{3x+1}=\frac{4\cdot 3+1}{3\cdot 3+1}=1{,}3$$

$$4x^2-11x-3=0,\quad D=169=13^2,\quad x_1=3,\quad x_2=-\frac{1}{4}$$
$$3x^2-8x-3=0,\quad D=100=10^2,\quad x_1=3,\quad x_2=-\frac{1}{3}$$

Пример 6. Вычислить предел функций $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$

Решение. Неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Домножим и числитель, и знаменатель на сопряжённый множитель :

$$\lim\limits_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 6}\frac{(6-x)\cdot(3+\sqrt{x+3})}{(3-\sqrt{x+3})\cdot(3+\sqrt{x+3})}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{(6-x)(3+\sqrt{x+3})}{9-(x+3)}=\lim\limits_{x\to 6}(3+\sqrt{x+3})=6$$

Пример 7. Вычислить предел функций $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 4x}$

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Применим первый замечательный предел, формулы (9), (10) получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{tg\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\frac{tg\,4x}{4x}\cdot 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$$

Пример 8. Вычислить предел функций $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Решение. Применим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}4x}=e^{\frac{4}{3}}$$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

Решение.

Так как числитель и знаменатель обращается в нуль при $x=1$, то 1 – корень обоих многочленов, а значит, каждый из них разлагается на множители, одним из которых будет $(x-1)$. Получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(2(x-1)(x-\frac{1}{2}))^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-\frac{1}{2})^2}{(x+1)(x+2)}=$$

$$=\frac{(1-1)(2-\frac{1}{2})^2}{(1+1)(1+2)}=0$$

Пример 10. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$

Решение.

Избавимся от иррациональности в числителе

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+13-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$$

$$=\frac{-3}{(3+3)(\sqrt{3+13}+2\sqrt{3+1})}=\frac{-3}{6(4+4)}=-\frac{1}{16}$$

Пример 11. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$$

Решение.

Используем первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$,

формулу понижения степени $1-\cos 2x=2\sin^2 x$

формулу $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{-2\sin 2x\cdot\sin 5x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{1}{5}=$$

$$=-1\cdot 1\cdot\frac{1}{10}\cdot 1=-\frac{1}{10}$$

Задание Вычислить пределы функций

1. $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^3-5x^2+x-4\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x^3+x^2-8x+10\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 1}(7x+2)(4x-3)(5x+1)$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-1\right)(x-3)(x-5)$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$
6. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+x}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$
11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$
12. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$
13. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
15. $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3})$
16. $\lim\limits_{x\to -1}(\frac{3}{x^3+1}-\frac{1}{x+1})$
17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x\ \ -2}$
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-8}{2x\ \ -2}$
19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2-1}{x^3+4x^2+2x}$
20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$
21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$
22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}$
23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$
24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{x}$ 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 17x}{8x}$

Контрольные вопросы

Что называется пределом функции $f(\chi)$ в точке $\chi = \chi_0$?

Сформулируйте основные вопросы о пределах.

Когда функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ называется бесконечно большой ?

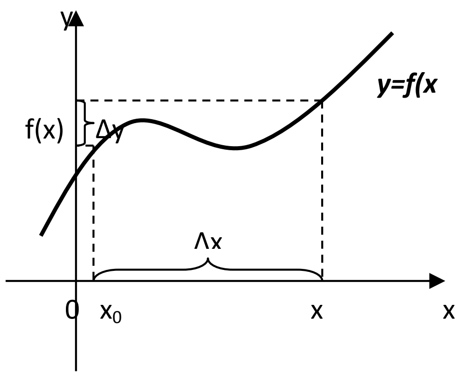
Когда функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ называется бесконечно малой ?

Сформулируйте правила раскрытия неопределённостей.

Что такое замечательные пределы.

Чему равен $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(c\cdot x)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{c}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x}$

Определение производной



Пусть функция *f(x)* определена в окрестности точки *x_0*., тогда $\boxed{\Delta x = x - x_{0,}}$ - называют *приращением аргумента, а*

$\boxed{\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$ - *приращением функции*

Производной функции f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δ у к приращению аргумента Δx при x→0

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)}}$$

Дифференцирование – это процесс вычисления производной.

Правила дифференцирования

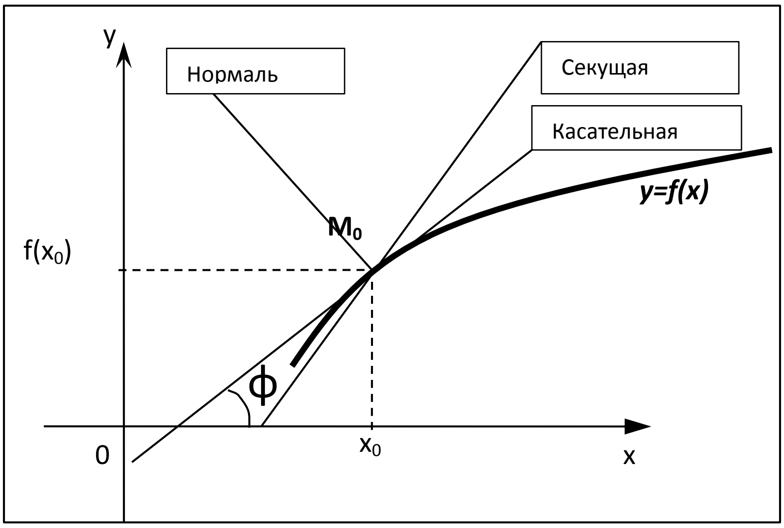
Пусть U,V - дифференцируемые функции независимой переменной *x*, C-0константа; тогда:

1) $(C\cdot U)' = C\cdot U'$ 2) $(U \pm V)' = U' \pm V'$ 3) $(U\cdot V)' = U'\cdot V + V'\cdot U$

4) $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'\cdot V - V'\cdot U}{V^2}$

5) Если *y = f(U), U = g(x)* следовательно, y = f(g(x)) - сложная функция. *Производная сложной функции равна* произведению ее производной по проме-

жуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной. $\boxed{y'_x = y'_U \cdot U'_x}$



Геометрический смысл производной $\boxed{f'(x_0) = k = tg\varphi}$

Производная функция f(x)в точке M_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции *f(x) в этой точке.*.

Касательной к данной кривой в данной точке M_0 называется предельное положение секущей M_0X, когда т. X, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к M_0.

Уравнение касательной к кривой:

$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$

Прямая, проходящая через тM перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к этой кривой в тM. Уравнение нормали к кривой: $\boxed{y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$.

Физический смысл производной

Производная функции показывает скорость изменения функции.

Физический смысл производной функции s(t), где t - время, а s(t) - закон движения (изменения координат) – скорость движения. $v(t) = s'(t)$

Вторая производная функции – ускорение. $a(t) = \mathrm{v}'(t)$

Формулы дифференцирования

№	Производная элементарной функции	Производная сложной функции
1	$(C)' = 0$	
	Степенная функция	
2	$(x)' = 1$	
3	$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$

4	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{1}{U^2} \cdot U'$
Показательная функция		
6	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$	$\left(a^U\right)' = a^U \cdot \ln a \cdot U'$
7	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$
Логарифмическая функция		
8	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\left(\log_a U\right)' = \frac{1}{U \cdot \ln a} \cdot U'$
9	$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(\ln U\right)' = \frac{1}{U} \cdot U'$
10	$\left(\lg x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$	$\left(\lg U\right)' = \frac{1}{U \cdot \ln 10} \cdot U'$
Тригонометрическая функция		
11	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin U\right)' = \cos U \cdot U'$
12	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
13	$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tgU\right)' = \frac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$
14	$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(ctgU\right)' = -\frac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
Обратная тригонометрическая функция		
15	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin U\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
16	$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos U\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
17	$\left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(arctgU\right)' = \frac{1}{1+U^2} \cdot U'$
18	$\left(arcctg\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\left(arcctgU\right)' = -\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$

Производная высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ от функции $y = f(x)$ называется *производной первого порядка, или первой производной.* Тогда производная от первой производной, если она существует, называется *второй производной или производной второго порядка* функции y=f(x) и обозначается y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производной n-го порядка функции *y=f(x),* если она существует, называется производная от производной (n-1) - порядка; $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$.

<u>*Пример1*</u>: Вычислить производную $y = \ln\frac{x}{x-3} - 1$

$$y' = (\ln\frac{x}{x-3} - 1)' = \frac{1}{\frac{x}{x-3}} \cdot \left(\frac{x}{x-3}\right)' = \frac{x-3}{x} \cdot \frac{x'(x-3)-(x-3)'x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{x(x-3)};$$

$$y'' = \left(\frac{-3}{x(x-3)}\right)' = \left(\frac{-3}{x^2-3}\right)' = \frac{-3(x^2-3x)-(x^2-3x)'(-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{(-2x+3)(-3)}{x^2(x-3)^2} = \frac{6x-9}{x^2(x-3)^2};$$

Производная в физике

формулы из физики, где используется производная.

υ(t) = x'(t) – скорость.

a(t) = υ'(t) – ускорение.

I(t) = q'(t) – сила тока.

c(t) = Q'(t) – теплоемкость.

d(l) = m'(l) – линейная плотность.

K(t) = l'(t) – коэффициент линейного расширения.

ω(t) = φ'(t) – угловая скорость.

e(t) = ω'(t) – угловое ускорение.

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности.

N(t) = A'(t) – мощность.

F(x)= A'(x) – Сила есть производная работы по перемещению.

E = Ф'(t) – ЭДС индукции F = p'(t) – 2 закон Ньютона.

Примеры применения производной в физике	
Задача	Решение
Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+t+1$. Какова кинетическая энергия тела в конце 3 сек. после начала движения тела? Какова сила, действующая на тело?	$W_к = (m·v^2)/2$ $x'(t) = v(t) = 2t+1$, $v(3) = 7$, $W_к = (4·7^2)/2=98$ 2. $F = ma$, $a(t) = v'(t) = x''(t)$, $x'(t) = v(t) = 2t+1$, $a(t)= v'(t) = 2$, $F = ma = 4·2 = 8$ Н.
Угол поворота тела вокруг оси изменяется по закону $\varphi(t)=0{,}1t^2-0{,}5t+0{,}2$. Найти угловую скорость вращения тела в момент времени t=20с.	$\omega(t) = \varphi'(t)$; $\omega(t) = \varphi'(t) = 0{,}2t-0{,}5$ $\omega(20) = 3{,}5$
Для любой точки С стержня АВ длиной 10 см, масса куска стержня АС определяется по формуле $m(l)=3l^2+5l$. Найти линейную плотность стержня в середине отрезка АВ, в конце отрезка.	$d(l) = m'(l)$; $d(l) =m'(l) = 6l+5$ $d(5) = 6·5+5=35$ – в середине отрезка $d(10) = 6·10+5=65$ – в конце отрезка

Задания для практической работы

Задание 1. Вычислить производную.

1. $y=\ln(2x^3 + 3x^2)$ 2. $\sqrt{1-3x^2}$ 3. $y=\cos^3\left(\frac{x}{3}\right)$

4. $y = (\sin x + \cos x)^3$ 5. $y= (\cos x + x^2)\, x^4$

Задание 2. Найти производную второго порядка.

1. $y=\frac{1}{3}x^3 - x^2$ 2. $y=\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ 3. $y= 5x^3 - 4x^2 + 7x - 13$ 4. $y= -13x^5 +4x^3 - x$

Задание 3. Найти n-производную функции а) $y=\left(1+x^2\right)^5$ б) $y=\left(1+y^3\right)^6$

$y' =$ $y'' =$ $y''' =$

Задание 4. Решить задачу, используя производную.

1. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+t+1$. Найти действующую на тело силу F, кинетическую энергию тела через *2с* после начала движения.

2. Маховик, задерживаемый тормозом, за время t поворачивается на угол $\varphi(t)=4t-0{,}3t^2$. Найти угловую скорость $\omega(t)$ вращения маховика в момент времени *2 с*.

3. Найти скорость тела, движущегося по закону $s(t)=3t+5$

4. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)=1-2t+t^3$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=3c$.

Контрольные вопросы

Что такое приращение аргумента, функции?

Что такое производная?

Что такое производная n-го порядка?

В чем физический смысл производной?

В чем геометрический смысл производной?

Каковы правила дифференцирования?

Общая схема исследования функции и построения её графика

1. Найти область определения функции;
2. Проверить функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Найти точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Исследовать функцию на монотонность и найти точки экстремума;
5. Найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
6. Найти асимптоты графика функции;
7. Построить график.

Комментарии к схеме:

Совокупность всех тех значений, которые принимает независимая переменная x функции y=f(x)

2) а)D(y) симметрична относительно 0

б) f(–x)= f(x) – функция четная (график симметричен относительно оси Оу)

f(–x)= – f(x) – функция нечетная (график симметричен относительно начала координат)

3) - с осью ОХ (y = 0)

- с осью ОУ (x = 0)

4) Найти производную $f'(x)$ данной функции f(x).

Найти критические точки (внутренние точки области определения, в которых производная функции $f'(x)$ равна нулю или не существует).

Критические точки разбивают область определения функции f(x) на интервалы, в каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.

Определить знак производной на каждом из интервалов монотонности.

Если $f'(x) \geq 0$, то f(x) возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) \leq 0$, то f(x) убывает на этом промежутке.

<u>Исследовать знак производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0</u>.

Если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x0 с «-» на «+», то в этой точке функция f(x) имеет минимум.

Если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x0 с «+» на «-», то в этой точке функция f(x) имеет максимум.

Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку x0 , то в этой точке функция f(x) не имеет экстремумов.

5) Найти вторую производную $f''(x)$ данной функции f(x).

Найти критические точки второго рода (внутренние точки области определения, в которых вторая производная функции $f''(x)$ равна нулю или не существует).

Критические точки второго рода разбивают область определения функции f(x) на интервалы, в каждом из которых производная $f''(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами выпуклости.

Определить знак второй производной на каждом из интервалов выпуклости.

Если $f''(x) > 0$, то график функции f(x) выпуклый вниз.

Если $f''(x) < 0$, то график функции f(x) выпуклый вверх.

Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через критическую точку второго рода, то эта точка будет точкой перегиба графика функции.

6) Асимптота – это прямая, к которой приближаются точки графика функции при бесконечном удалении их от начала координат.

Вертикальная асимптота $\boxed{x=a}$

если:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$

Горизонтальная асимптота $\boxed{y=b}$

если:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b$

Наклонная асимптота $\boxed{y=kx+b}$

если:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}=k \\ \lim\limits_{x\to -\infty}\big(f(x)-kx\big)=b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=k \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\big(f(x)-kx\big)=b \end{cases}$$

7) Отметить данные полученные в ходе исследования, добавить при необходимости некоторое количество точек.

Пример 1: Исследовать функцию $y = x^3 + x^2 - x - 1$ и построить ее график.

Решение: исследуем функцию по схеме:

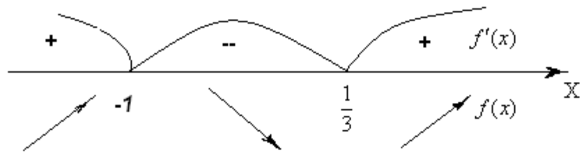
D(y)=R;

$y(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x^3 - x^2 - x + 1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;

Найдем точки пересечения с (OX): $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x = -1$ *и* $x = 1$.

Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если $x = 0$, то $y = -1$;

Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y' = 3x^2 + 2x - 1$. Найдем критические точки функции: $y' = 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Получим: $x_1 = -1$ *и* $x_2 = \frac{1}{3}$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)$ *и* $(\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$. Найдем экстремумы функции:

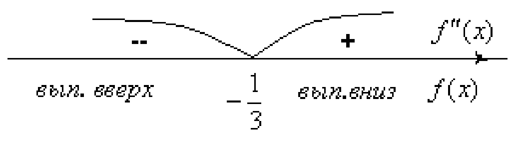
$\max f(x) = f(-1) = 0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1;0)$

$\min f(x) = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную: $y'' = 6x + 2$. Найдем критические точки 2 рода функции:

$6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения

19

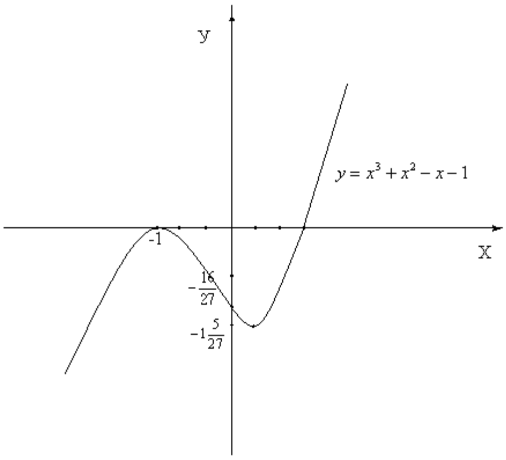


Значит, график функции будет выпуклым вверх на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ и выпуклым вниз на $(-\frac{1}{3};+\infty)$. Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку

$x=-\frac{1}{3}$, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f(-\frac{1}{3})=-\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$.

Асимптот нет;

Построим график:



Задания для практической работы

Задание 1. Исследовать на экстремум и точки перегиба кривую и построить схематический график функции (номер варианта совпадает с номером студента по списку):

1.1. $y=6+\frac{1}{3}x^3-x^2$	1.16. $y=54x^2-50+5x^4-12x^3$
1.2. $y=\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{1}{12}x^4$	1.17. $y=x-2x^3-x^4+36x^2$
1.3. $y=12-24x+x^3-9x^2$	1.18. $y=3x^2-5x-6+x^3$
1.4. $y=3x-12x^2+x^3$	1.19. $y=48x^2-50+x^4-12x^3$
1.5. $y=24x-8+3x^2+x^3$	1.20. $y=2x^2+\frac{1}{3}x^3$
1.6. $y=3x+x^3-5x^2-1$	1.21. $y=6x^2-x^3-15x+10$
1.7. $y=x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}$	1.22. $y=\frac{1}{3}x^3-x$
1.8. $y=8x-2+x^4-4x^3$	1.23. $y=9+2x^3-3x^2-4x$
1.9. $y=-2x^2+\frac{1}{3}x^3$	1.24. $y=\frac{2}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{5}{12}x^4$
1.10. $y=1+x^3-4x^2-2x$	1.25. $y=9x-3+x^3-6x^2$
1.11. $y=4x^2-10+\frac{2}{3}x^3$	1.26. $y=9x-3+x^3-6x^2$

1.12. $y=1+3x^5-5x^2$

1.13. $y=2x^2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^3$

1.14. $y=12x^4-12x^2$

1.15. $y=\frac{1}{6}x^4-x^2$

1.27. $y=-x^3+3x^2$

1.28. $y=-x+\frac{1}{3}x^3$

1.29. $y=x^4-4x-\frac{3}{2}x^2$

1.30. $y=\frac{5}{3}x^3+4x^2-\frac{1}{4}x^4$

Задание 2. Найти асимптоты и промежутки монотонности (номер варианта совпадает с номером студента по списку):

2.1. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$

2.2. $y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$

2.3. $y=e^{\frac{1}{5+x}}$

2.4. $y=\frac{x}{9-x}$

2.5. $y=\frac{4x-x^2-4}{x}$

2.6. $y=\frac{x^2}{4x^2-1}$

2.7. $y=\frac{17-x^2}{4x-5}$

2.8. $y=x+\frac{\ln x}{x}$

2.9. $y=\frac{x}{x+2}$

2.10. $y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$

2.11. $y=\frac{2x^2-x+3}{x-1}$

2.12. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

2.13. $y=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

2.14. $y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$

2.15. $y=\frac{2x^2-1}{x}$

2.16. $y=\frac{x^2}{4-2x}$

2.17. $y=\frac{x^2+6}{x^2+1}$

2.18. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

2.19. $y=\frac{x^2+3x}{x-1}$

2.20. $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

2.21. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$

2.22. $y=\frac{x^5}{x^4-1}$

2.23. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$

2.24. $y=\frac{x^2-3x-2}{x+1}$

2.25. $y=\frac{x^3}{x^4-1}$

2.26. $y=\frac{x^3}{2(x-5)^2}$

2.27. $y=x^2-\frac{1}{x^2}$

2.28. $y=\frac{5x^4+3}{x}$

2.29. $y=\frac{4-2x}{1-x^2}$

2.30. $y=\frac{5x}{4-x^2}$

Задание 3. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики (номер варианта совпадает с номером студента по списку):

3.1. $y=x^3-3x^2+2$

3.2. $y=2x^3+x^2-8x-7$

3.3. $y=-x^4+5x^2-4$

3.4. $y=x^3(2-x)$

3.5. $y=-9x+x^3$

3.16. $y=x^3+x^2-x-1$

3.17. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+\frac{5}{3}$

3.18. $y=2x^4-9x^2+7$

3.19. $y=x^5-5x$

3.20. $y=5x^3-3x^5$

3.6. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

3.7. $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$

3.8. $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$

3.9. $y = x^3 - 4x^2$

3.10. $y = 3x^4 - 4x^3$

3.11. $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2$

3.12. $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$

3.13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$

3.14. $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$

3.15. $y = x^4 - 8x^2 + 1 - 4x^3$

3.21. $y = 8 - 2x - x^2$

3.22. $y = x^3 - 3x^2 + 4$

3.23. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

3.24. $y = 4x^2 - x^4 - 3$

3.25. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

3.26. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$

3.27. $y = 1 - x^5 - \frac{5}{2}x^2$

3.28. $y = \frac{1}{6}x^3 - 2x$

3.29. $y = \frac{1}{3} - 4x + 2{,}5x^2 - \frac{1}{3}x^3$

3.30. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3{,}5x^2 - 10x - \frac{1}{3}$

Контрольные вопросы

Расскажите общую схему исследования функции.

Что такое асимптота?

Как найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба?

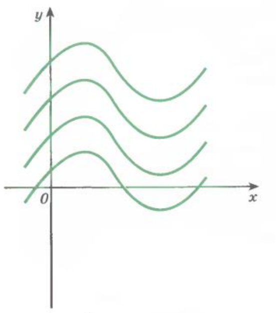
Как найти интервалы монотонности функции и точки экстремума?

Понятие неопределённого интеграла

Первообразная – это такая функция F(x) для функции $y = f(x)$, что имеет место равенство

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

Две первообразные одной функции отличаются друг от друга на постоянную. Другими словами, если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольное постоянное число, также первообразная для функции $f(x)$, потому что $(F(x)+C)' = f(x)$.



а)
Рис. 118

Графики любых двух первообразных для функции получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy (рис. 118, a).

Неопределенный интеграл функции $y = f(x)$ – это совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$. Обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C,$ (2),

где $\int$ – знак интеграла (это стилизованная латинская буква S , означающая суммирование;

f(x) – подынтегральное выражение;

C – постоянная интегрирования, способная принимать любое значение

x – переменная интегрирования.

Интегрирование – это отыскание первообразной по ее производной, это действие обратное дифференцированию.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x) + C.$

2. $\int df(x) = f(x) + C.$

3. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$ - постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ - интеграл суммы равен сумме интегралов.

Методы интегрирования:

Непосредственное интегрирование Метод непосредственного интегрирования заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду.

Таблица интегралов

$\int 0 \cdot dx = c$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	$\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + c$
$\int 1 \cdot dx = x + c$	$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x+a}{x-a} + c$

$\int x^{\alpha}\cdot dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,$ $\alpha\neq -1$	$\int e^{x}\cdot dx=e^{x}+c$	$\int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-ctgx+c$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}}=\ln\left\|x+\sqrt{a^{2}+x^{2}}\right\|+c$
$\int ctgx\cdot dx=\ln\|\sin x\|+c$	$\int\sin x\cdot dx=-\cos x+c$	$\int\frac{dx}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}}=\ln\left\|x+\sqrt{a^{2}+x^{2}}\right\|+c$
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}=$ $=\ln\left\|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}\right\|+c$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$	$\int tgx\cdot dx=-\ln\|\cos x\|+c$	

Интегрирование подстановкой

Существуют подстановки:

а) линейная замена аргумента t=kx+b

б) замена старшей степени переменной

в) замена, содержащая sinx или cosx

г) замена функции, если интеграл содержит и её производную (включает в себя все вышеуказанные подстановки)

Интегрирование по частям

Теорема. Пусть функции u=u(x) и v=v(x) определены и непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям: $\int udv=uv-\int vdu.$ (3)

Алгоритм

Представляют интеграл через u, dv с помощью таблицы (где f(x) – степенная функция)

Интеграл вида:		
$\int f(x)\cdot\sin kx\cdot dx$ $\int f(x)\cdot\cos kx\cdot dx$ $\int f(x)\cdot e^{kx}\cdot dx$ $\int f(x)\cdot a^{kx}\cdot dx$	$\int f(x)\cdot\ln kx\cdot dx$ $\int f(x)\cdot\arcsin kx\cdot dx$ $\int f(x)\cdot\arccos kx\cdot dx$ $\int f(x)\cdot arctg\,kx\cdot dx$ $\int f(x)\cdot arcctg\,kx\cdot dx$	$\int\sin ax\cdot e^{kx}\cdot dx$ $\int\cos ax\cdot e^{kx}\cdot dx$

Замена		
$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\cdot dx$ $dv = \begin{cases} \sin kx \cdot dx \\ \cos kx \cdot dx \\ e^{kx}\cdot dx \\ a^{kx}\cdot dx \end{cases} \Rightarrow$ $v = \begin{cases} \int \sin kx \cdot dx \\ \int \cos kx \cdot dx \\ \int e^{kx}\cdot dx \\ \int a^{kx}\cdot dx \end{cases}$	$u = \begin{cases} \ln \mathrm{kx} \\ \arcsin \mathrm{kx} \\ \arccos \mathrm{kx} \\ \mathrm{arctg\,kx} \\ \mathrm{arcctg\,kx} \end{cases} \Rightarrow$ $du = \begin{cases} (\ln \mathrm{kx})' dx \\ (\arcsin \mathrm{kx})' \cdot dx \\ (\arccos \mathrm{kx})' \cdot dx \\ (\mathrm{arctg\,kx})' \cdot dx \\ (\mathrm{arcctg\,kx})' \cdot dx \end{cases}$ $dv = f(x)\cdot dx \Rightarrow v = \int f(x)\cdot dx$	$u = \mathrm{e}^{\mathrm{kx}} \Rightarrow du = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{kx}}\right)' \cdot dx$ $dv = \begin{cases} \sin ax \cdot dx \\ \cos ax \cdot dx \end{cases} \Rightarrow$ $v = \begin{cases} \int \sin ax \cdot dx \\ \int \cos ax \cdot dx \end{cases}$
Замечание		
Интегрируют по частям столько раз, какова степень многочлена f(x)		*Интегрируют по частям два раза*

Пример 1. Найти неопределенный интеграл

$$\int\left(\frac{3}{x} + 2\sin x\right)dx.$$

Решение:

Используя свойства неопределенного интеграла: интеграл от суммы равен сумме интегралов, и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, получаем:

$$\int\left(\frac{3}{x} + 2\sin x\right)dx = 3\int\frac{dx}{x} + 2\int \sin x dx$$

и затем, используя таблицу интегралов в приложении

$$\int\left(\frac{3}{x} + 2\sin x\right)dx = 3\int\frac{dx}{x} + 2\int \sin x dx = 3\ln|x| - 2\cos x + C.$$

Пример 2. $\int \frac{x^4 - 5x^3 + 1}{x} dx.$

Решение:

почленно разделим на x:

$$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 1}{x} dx = \int x^3 - 5\int x^2 + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + \ln|x| + C.$$

Пример 3. Вычислить неопределённый интеграл
Подстановка (а)

$$\int \frac{dx}{\cos^2(6-5x)} = \left| \begin{array}{l} t = 6-5x \\ dt = -5dx \\ dx = \dfrac{dt}{-5} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{-5\cos^2 t} = -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{5}tg(t) = -\frac{1}{5}tg(6-5x) + C$$

Пример 4. Вычислить неопределённый интеграл
подстановка (б)

$$\int x^3\sqrt{1-x^4}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^4 \\ dt = -4x^3dx \\ x^3dx = \dfrac{dt}{-4} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{-4} = -\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} = -\frac{1}{6}\sqrt{\left(1-x^4\right)^3} + C$$

Пример 5. Вычислить неопределённый интеграл
подстановка (в)

$$\int 2^{3\cos x}\sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = 3\cos x \\ dt = -3\sin x dx \\ \sin x dx = \dfrac{dt}{-3} \end{array} \right| = \int 2^t\,\frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3}\int 2^t\,dt = -\frac{1}{3}\frac{2^t}{\ln 2} = -\frac{2^t}{3\ln 2} = -\frac{2^{3\cos x}}{3\ln 2} + C$$

Пример 6. Вычислить неопределённый интеграл
подстановка (г)

$$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{array} \right| = \int t dt = -\frac{t^2}{2} = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$$

Задания для практической работы

Задание 1. Найти интеграл и проверить результаты дифференцированием.

а) $\int(5x^4 - 4x^2 + 2x - 1)dx$

б) $\int \frac{2x^3-3x+7}{x}dx$

в) $\int\left(x^5 - \frac{2}{x^3} + 3\sqrt{x} - 4\right)dx$

г) $\int(6x^4 - 4x^3 - 5x + 2)dx$

д) $\int \frac{3x^2-2x+9}{x}dx$

е) $\int\left(x^4 - \frac{3}{x^3} + 2\sqrt{x} + 6\right)dx$

Задание 2. Найти интегралы метолом подстановки

а) $\int(5x+2)^7dx$

б) $\int \frac{6dx}{8x-4}$

в) $\int(6x-7)^5dx$

г) $\int \frac{11dx}{5x+3}$

Задание 3. Найти интегралы методом интегрирования по частям (номер варианта совпадает с номером студента по списку):

1.1. $\int x\cos 6x\,dx$	1.11. $\int x\cos(x-7)dx$	1.21. $\int arctg\dfrac{x}{5}dx$
1.2. $\int x\sin(x-5)dx$	1.12. $\int \ln(x+12)dx$	1.22. $\int \arcsin\dfrac{x}{5}dx$
1.3. $\int \arcsin 3x\,dx$	1.13. $\int (x-4)e^{x}\,dx$	1.23. $\int \arccos 2x\,dx$
1.4. $\int arctg\,8x\,dx$	1.14. $\int x e^{-6x}\,dx$	1.24. $\int \ln(2x-1)dx$
1.5. $\int x\sin(x-2)dx$	1.15. $\int arctg\,7x\,dx$	1.25. $\int \ln(2x+3)dx$
1.6. $\int \arcsin 8x\,dx$	1.16. $\int \arcsin 5x\,dx$	1.26. $\int \arccos\dfrac{x}{5}dx$
1.7. $\int x\sin(x+3)dx$	1.17. $\int \ln(x-7)dx$	1.27. $\int arctg\dfrac{x}{4}dx$
1.8. $\int x\cos(x+4)dx$	1.18. $\int x\cos(x+6)dx$	1.28. $\int \arcsin\dfrac{x}{7}dx$
1.9. $\int \arccos 7x\,dx$	1.19. $\int arctg\dfrac{x}{2}dx$	1.29. $\int arctg\,6x\,dx$
1.10. $\int \ln(2x-4)dx$	1.20. $\int \ln(x+8)dx$	1.30. $\int \arccos\dfrac{x}{3}dx$

Контрольные вопросы

Что такое первообразная?
Что такое неопределенный интеграл?
Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
Сформулируйте методы интегрирования.

Определённый интеграл и его свойства

Определенный интеграл – это общий предел всех интегральных сумм функции f(x) на отрезке[a,b].

Интегральная сумма $S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i – произвольная точка существующего отрезка.

Определенный интеграл обозначается: $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$ (1),

где f(x) – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования

Теорема.

Если F(x) – первообразная для непрерывной функции $y=f(x),\, т.е.\, F'(x)=f(x)$, то имеет место формула:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \qquad (2)$$

Эта формула **Ньютона-Лейбница** – основная формула интегрального исчисления, устанавливающая связь между определенным и неопределённым интегралом.

Основные свойства определенного интеграла:

При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (3)$$

Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (4)$$

Отрезок интегрирования можно разбивать на части

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (5)$$

Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.

Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

Если функция $f(x) \geq 0$ всегда на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^a f(x)dx \geq 0.$ (6)

Если $f(x) \leq g(x)$ всюду на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$ (7)

Геометрический смысл определенного интеграла:

Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми x=a; x=b; y=0 и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна (рисунок 1)

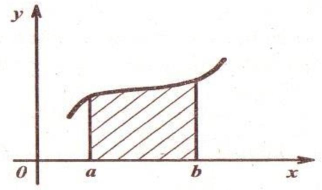
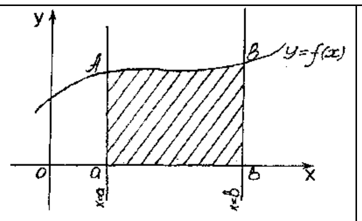
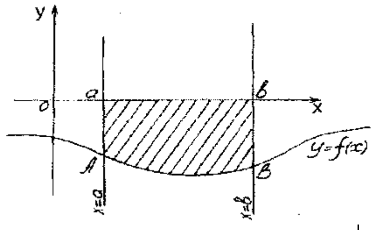
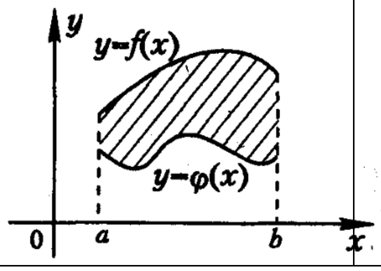
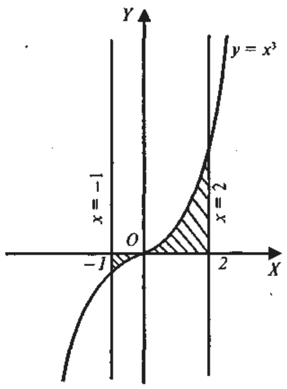


Рис. 2.22. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Основные случаи расположения плоской фигуры

		$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$
		$S = -\int_a^b f(x) \cdot dx$
		$S = \int_a^b \left(f(x) - \varphi(x) \right) \cdot dx$

<u>Пример 1</u>. Найти площадь фигуры, заключённой между линиями $y = x^3$, $x = -1$. $x = 2$ и осью *OX*



Решение: найдем точки пересечения графика функции $y = x^3$ с осью OX (см. рис 4):

$y = x^{3;}$ $y = 0 \Leftrightarrow x = 0;$ Вычислим производную функции: $y' = 3x^{2;}$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Найдем значение второй производной в точке $x=0$: $y'' = 6x$; $y''(0) = 0$. Вычислим $y''(-1) = -=6$; $y''(1) = 6$; $\Leftrightarrow$ Т.к. y'' меняет знак при переходе через $x = 0$ $\Leftrightarrow$ т. $(0;0)$ – точка перегиба. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

$$S = \int_0^2 x^3 dx + \left| \int_{-1}^0 x^3 dx + \right| = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + \left| \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0 \right| = 4 + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| = 4\frac{1}{4} \text{ (кв.ед.)}$$

Физические приложения интеграла

Величины	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа; F – сила; N - мощность.	$F(x)=A'(x)$; $N(t)=A'(t)$.	A=$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$; A=$\int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$.
m –масса тонкого стержня p – линейная плотность	P(x)=m' (x).	m=$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$.
Q –электрический заряд; I – сила тока.	I(t)=q' (t)	Q=$\int_{l_1}^{l_2} I(t)dt$
S –перемещение; v –скорость.	V(t)=S' (t)	S=$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
Q –количество теплоты; c – теплоёмкость.	C(t)=Q' (t)	Q=$\int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

<u>Пример 2.</u> Дано ускорение скорости движения тела $v = t^2 + 4t + 1 (м/с)$. . Найти путь тела, за первые 3 с .

Решение:

Уравнение пути $s(t)$ находится интегрированием:

$$\int_0^3 (t^2 + 4t + 1)\,dx = \left(\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_0^3 = 9 + 18 + 3 = 30 \text{ (м)}$$

<u>Задания для практической работы</u>

Задание 1. Вычислить определенные интегралы

а) $\int_{-1}^{3}(1 - 2x + 3x^2)dx$ б) $\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ в) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Задание 2. Вычислить определенные интегралы методом подстановки.

а) $\int_{-1}^{2}(x^2 - 1)^3\,dx$

б). $\int_0^{\sqrt{x}} 6\sqrt{x^4 + 16} \cdot x^3 dx$

в) $\int_0^1 \frac{6x^2dx}{1+2x^3}$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

1. $y = x^2 + 2 \quad y = x^2 - 2x - 2$
2. $y = x^2 - 5 \quad y = -0{,}5x^2 + 1$

Задание 4. Решить задачу.

1. Скорость точки задана уравнением $v = 6t^2 - 10t$ (м/с). Найти её путь за третью секунду движения.

2. Скорость точки задана уравнением $v = 3t^2 - 8t - 3$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за время от начала движения до остановки.

Контрольные вопросы

Что такое определенный интеграл?

Сформулируйте свойства определенного интеграла.

В чем геометрический смысл определенного интеграла?

Основные понятия дифференциального уравнения

Дифференциальные уравнения – равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Общий вид дифференциального уравнения:

$F(x,y,y',y''\ldots)=0$

где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, y' - её производная первого порядка и т.д.

Решение дифференциального уравнения – функция, подстановка которой в это уравнение обращает его тождество.

Общее решение – решение дифференциального уравнения, содержащее столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Частное решение – это решение, получающееся из общего решения при конкретных определенных значениях произвольных постоянных C

Для нахождения частных решений задают начальные условия.

Порядок дифференциального уравнения – наивысший порядок производных или дифференциалов, входящих в это уравнение.

Интегральная кривая - график *y=F(x),* построенный на плоскости *xOy,*являющийся решением дифференциального уравнения.

Общему решению *y=F(x,C)* соответствует семейство интегральных кривых, зависящих от постоянной *C.*

Теорема Коши: Если функция *f(x,y)* непрерывна и имеет непрерывную производную то решение дифференциального уравнения *y'=f(x,y)* при начальном условии $f(x_0)=y_0$ существует и единственно т.е. через точку (x_0,y_0) проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка		
Название	Вид	Способ решения
С разделяющимися переменными	$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной. Т.е. $f(x)g(y)dx+\varphi(x)q(y)dy=0$ или $y'=f(x)g(y)$	1. разделить переменные $\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx=-\frac{q(y)}{g(y)}dy$ 2. проинтегрировать $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx=\int-\frac{q(y)}{g(y)}=dy$ 3. привести к стандартному виду $y=\varphi(x)+c$ – общее решение
Однородные	$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные функции одного измерения или $y'=\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ (если в функции заменить $x=tx$, $y=ty$ и преобразовать вернемся исходному уравнению)	1. замена $y=tx$, *тогда* $y'=t'x+x't$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}x+\frac{dx}{dx}t$ $dy=tdx+xdt$ 2. привести к уравнению с разделяющимися переменными и решить (см. выше). 3. вернуться к замене, подставить $t=\frac{y}{x}$ 4. привести к стандартному виду $y=\varphi(x)+c$
Линейные	$y'+P(x)y=Q(x)$ (у' и у' входят в первых степенях не перемножаясь между собой) а) линейное однородное $y'+P(x)y=0$ б) линейное неоднородное $y'+P(x)y=Q(x)$ в) уравнение Бернулли $y'+P(x)y=Q(x)y''$	1. замена $y=uv$,тогда $y'=u'v+v'u$ 2. $u'v+v'u+P(x)uv=Q(x)$ $v(u'+P(x)u)+v'u=Q(x)$ (*) 3. в уравнении (*) приравнять скобку к нулю $u'+P(x)u=0$ – с разделенными переменными найти u $u=P(x)$ 4. значение u подставить в уравнение (*) $v'P(x)=Q(x)$ - с разделенными переменными найти v $v=F(x)+c$ 5. вернуться к замене $y=P(x)(F(x)+c)$ – общее решение

<table>
<tr><td colspan="5">Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.</td></tr>
<tr><td>Допускающие понижения порядка</td><td>y’’=f(x)</td><td colspan="3">Решаются двойным интегрированием
$y'=\int y''dx=\int f(x)dx=F(x)+c$
$y=\int y'dx=\int (F(x)+c)dx=F(x)+cx+c_1$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Линейные однородные второго порядка с постоянными коэффициентами</td><td rowspan="6">y’’+py+qy=0
где p, q – заданные числа

Всякое Л.О.У. второго порядка имеет систему двух линейно независимых <u>частных решений</u>.
$\begin{cases} y=y_1(x) \\ y=y_2(x) \end{cases}$
которая называется фундаментальной системой решений.

<u>Общее решение</u> есть линейная комбинация частных решений его фундаментальной системы $y=c_1y_1+c_2y_2$</td><td colspan="3">1.Составить характеристическое уравнение
$k^2+pk+q=0$
2.в зависимости от вида корней, фундаментальная система решений имеет вид:</td></tr>
<tr><td>корни характеристического уравнения</td><td>фундаментальная система частных решений</td><td>общее решение</td></tr>
<tr><td>действительные
Различные
$k_1 \neq k_2 \varepsilon R$</td><td>$y_1=e^{k,x}$
$y_2=e^{k_2x}$</td><td>$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$</td></tr>
<tr><td>Действительные
Равные
$k_1=k_2=k \varepsilon R$</td><td>$y=e^{kx}$
$y=xe^{kx}$</td><td>$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$
или
$y=e^{kx}(c_1+c_2x)$</td></tr>
<tr><td>Комплексные (мнимые)
$k_1=\beta i$
$k_2=-\beta i$</td><td>$y_1=\cos\beta$
$y_2=\sin\beta$</td><td>$y=c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x$</td></tr>
<tr><td>Комплексные
$k_1=\alpha+\beta i$
$k_2=\alpha-\beta i$</td><td>$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$
$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$</td><td>$y=e^{2\alpha}(c_1\cos\beta+c_2\sin\beta x)$</td></tr>
</table>

<u>Пример 1</u>. Найти общие интегралы уравнения:

$(x + 1)^3 dy - (y - 2)^2 dx = 0.$

Решение:

Разделим переменные в данном уравнении, деля его обе части на $(x + 1)^3 (y - 2)^2$.

$$\frac{dx}{(x+1)^3}-\frac{dy}{(y-2)^2}=0$$

$\frac{dy}{(y-2)^2}=\frac{dx}{(x+1)^3}$ перенесли второе слагаемое с противоположным знаком, получили уравнение с разделенными переменными. Полученное уравнение проинтегрируем, получим искомое общее решение: $\frac{-1}{y-2} = \frac{-1}{2(x+1)^2} + C$

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения или решить задачу Коши $\frac{dy}{y} = (x-1`)dx$ при $x_0 = 2$, $y_0 = 5$.

Решение:

$$\frac{dy}{y} = xdx - dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx - \int dx$$

$\ln|y| = 0{,}5x^2 - x + \ln C$

Есть правило: если в решении содержится логарифм, то константу интегрирования С также записываем как lnC. Умножим $(0{,}5x^2 - x)$ на lne, (lne = 1)

$\ln|y| = \ln e^{0{,}5x^2-x} + \ln C;$

$|y| = C \cdot e^{0{,}5x^2-x}$ – это общее решение дифференциального уравнения. Найдём частное решение. Для этого вычислим С при $x_0 = 2$ и $y_0 = 5$.

$5 = Ce^{2-2} \Rightarrow C = 5.$

Частное решение

$y = 5\,e^{0{,}5x^2-x}.$

Пример 3. Решить уравнение $2ydy + \frac{dx}{x+2} = 0$

Решение:

Это уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем оба слагаемых:

$y^2 + \ln|x + 2| = C.$

Задания для практического занятия

Задание 1. Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции (С – постоянная) (номер варианта совпадает с номером студента по списку)

1. $x^2y' - 2xy = 3;\ y = 3x^2 - \frac{1}{x};$
2. $dy + ytgxdx = 0;\ y = 2\cos x;$
6. $xy' = y - 1;\ y = Cx + 1;$
7. $y'ctg + y = 2;\ y = \cos x + 2;$

3. $y' - yctgx = ctgx; y = C\sin x - 1;$

4. $xy^{e} + 2y = e^{-x^3}; y = 3 - e^{-x^3};$

5. $dy = 3x2ydx; y = Ce^{x^3};$

8. $y'x^2 = 3 + 2xy; y = -\frac{1}{x} + 3x^2 + C;$

9. $y = xy + (y')^2; y = 2x + 4;$

10. $\frac{y}{x} = 3x - y'; y = \frac{C}{x} + x^2;$

Задание 2. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными (номер варианта совпадает с номером студента по списку)

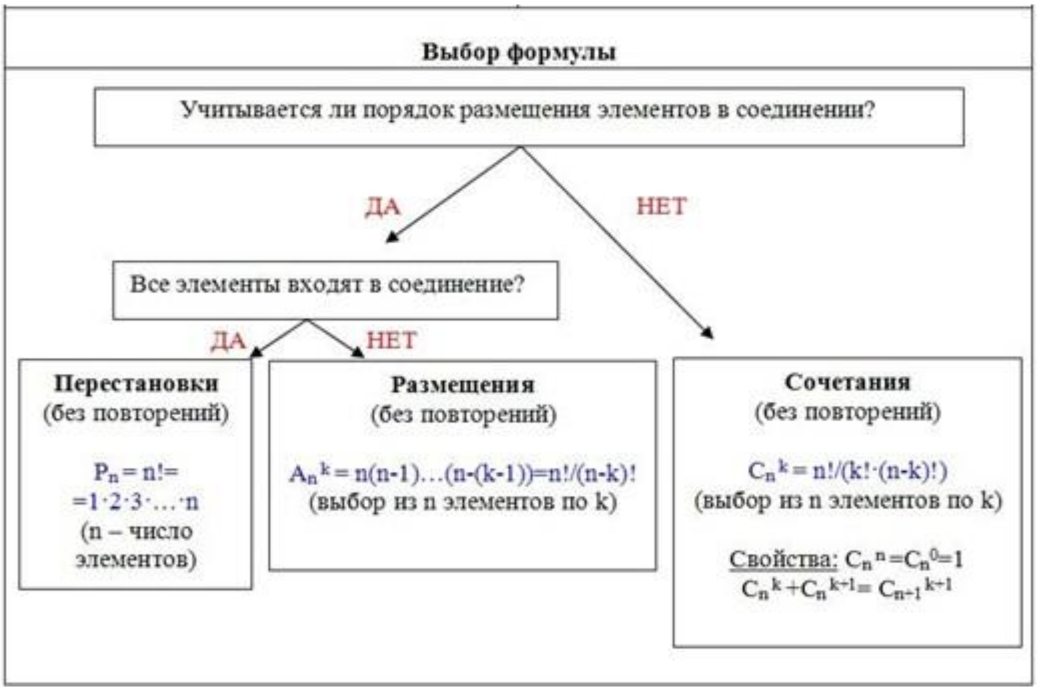
1. $\frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{x} = 0;$
2. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}};$
3. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1};$
4. $e^x dx = ydy;$
5. $2ydy = (1-3x^2)dx;$
6. $tgtdt + \frac{ds}{s} = 0;$
7. $\sqrt{y}dy = 3\sqrt{x}dx;$
8. $dy = (x^2 - 1)dx;$
9. $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1};$
10. $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{dx}{1+x^2};$

Задание 3. Найти частное решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными (номер варианта совпадает с номером студента по списку)

1. $ydx = ctgxdy = 0; y(\frac{\pi}{3}) = -1;$
2. $y' + \frac{tgx}{ctgy} = 0; y = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3};$
3. $(1+x^2)dy - 2xydx = 0; y = 4; x = -1;$
4. $(1+x^3)dy = 3x^2ydx; y = 2; x = 0;$
5. $(1+y^2)dx = xydy; y = 1; x = 2;$
6. $2ydx = (1+x)dy; y(1) = 4;$
7. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}; y = 1; x = 0;$
8. $(2x-1)dy = (y+1)dx; y(5) = 0;$
9. $(1-x^2)dy + xydx = 0; y = 4; x = 0;$
10. $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0; y(0) = -1;$

Решение комбинаторных задач

Комбинаторными задачами называются задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно сделать тот или иной выбор, выполнить какое-либо условие.



Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил – правила суммы и правила произведения.

Выбор правила	Выбор правила
Правило суммы	Правило произведения
Если некоторый объект А можно выбрать m-способами, а другой объект В можно выбрать n- способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить m + n способами.	Если объект А можно выбрать m - способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать n-способами, то выбор пары А и В можно осуществить m *· n способами.

Пусть имеется множество, содержащее n - элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k - элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов:*

$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, где n!=1*2*3*…*n

Пример. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. равно A_7^4. Получаем $= \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7!}{3!} = \dfrac{3!*4*5*6*7}{3!} = 4*5*6*7 = 840$.

Размещения из n - элементов по n элементов называются *перестановками из n- элементов:*

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$.

Пример. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Цифра 5 обязана стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. 5!=5*4*3*2*1=120.

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k элементов:*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно $C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{14!*15*16}{2!*14!} = \frac{15*16}{2} = 120$.

Свойства сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad C_{n+k}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

Задачи для практической работы

Задача 1.

В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?

Задача 2.

Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут Задача 3.

Задача 3.

Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные, а номер не может начинаться с нуля?

Задача 4.

Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?

Задача 5.

В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?

Задача 6.

В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 7.

Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Задача 8.

Из 15 объектов нужно отобрать 10 объектов. Сколькими способами это можно сделать?

Контрольные вопросы

Какие задачи называют комбинаторными?

Что такое размещение из n элементов по k элементов?

Что такое перестановками из n- элементов?

Что такое сочетанием из n элементов по k элементов?

Решение вероятностных задач

Раздел математики, посвященный исследованию количественных оценок случайных событий, называют **теорией вероятностей**.

Основные понятия теории вероятностей

Случайное событие (событие) – это некоторое множество (набор) элементарных событий (исходов), которые являются результатом случайного опыта (эксперимента).

Элементарное событие (исход) – это событие, которое нельзя разделить на более простые события.

Пример **элементарного события**: при одном бросании игральной кости выпало четыре очка.

Пример **случайного события**: при одном бросании игральной кости выпало четное число очков. Данное событие можно разбить на элементарные события: «выпало два очка», «выпало четыре очка», «выпало шесть очков».

Вероятностью случайного события называют число, выражающее шансы наступления этого события (числовая мера его правдоподобия). Это число равно отношению числа опытов, в которых событие А произошло, к общему числу проведенных равновозможных опытов: $P(A)=\frac{N(A)}{N}$, $P(A)\in[0;1]$.

Рассмотрим примеры:

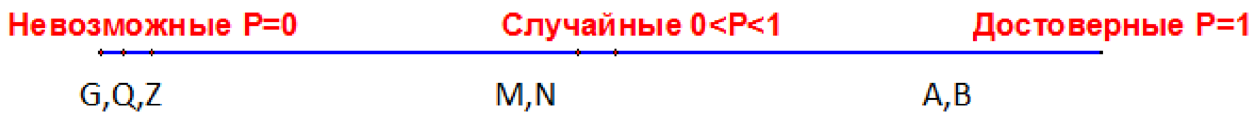
Событие *G* «Лампочка никогда не перегорит» – невозможное событие, его вероятность 0. Событие *Q* «Летом пойдет снег» – практически невозможное, его вероятность ближе к 0. Событие *Z* «Завтра я найду на улице миллион рублей» – маловероятное.

Событие *M* «Бутерброд падает всегда маслом вниз» – случайное событие, его вероятность?, как и вероятность выпадения герба при бросании монеты (Событие N).

Событие *A* «Лампочка рано или поздно перегорит» – достоверное событие, с вероятностью 1.

Событие *B* «Зимой бывает снег» – достоверное, его вероятность близка к 1.

Посмотрим, как будут данные события располагаться на вероятностной шкале:



Замечание 1. Если число равновозможных событий равно *N*, то вероятность каждого из них *1/N*.

Замечание 2. Если результат случайного эксперимента — три элементарных события *a,b,c,* а вероятности этих событий *P(a),P(b),P(c)*, то **сумма вероятностей всех элементарных события в каждом опыте равна 1**, т.е. *P(a) + P(b) + P(c) = 1.*

Пусть случайное событие *A* состоит из элементарных событий. Эти элементарные события называют **благоприятствующими случайному событию** *A*. Все прочие элементарные события данного опыта, не благоприятствующие событию *A*, в совокупности представляют новое событие, не благоприятствующее событию *A*, которое называется событием противоположным событию *A* ($\bar{A}$). События *A* и $\bar{A}$ называют взаимно противоположными событиями.

Замечание 3. Взаимно противоположные события одновременно произойти не могут, но какое-либо из них происходит обязательно. Поэтому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Пример 1 .Студент не успел выучить 3 билета из 30. Какова вероятность, что он сдаст экзамен?

Решение. По определению вероятности: $p = k / n$, где k — число благоприятных событий (исходов), n – общее число событий (исходов).$k = 30 - 3 = 27$, $n = 30$. Тогда искомая вероятность $p = 27 / 30 = 0,9$

Второй способ: $3 / 30 = 0,1$ – вероятность, что студент не сдаст экзамен, тогда вероятность, что сдаст $1 – 0,1 = 0,9$.

Пример 2. Какова вероятность, стоя с закрытыми глазами перед географической картой мира, выбрать точку на суше, показав на нее указкой, если площадь суши 149,1 млн. км^2, а площадь океанов 361,1 млн. км^2?

Решение. Надо знать какую часть всей площади Земли занимает суша. $149,1 + 361,1 = 510,2$ млн. км^2. Отношение этих площадей и даст искомую вероятность: $149,1 : 510,2 = 0,29$.

Геометрическое определение вероятности. $P(A) = S(A) / S(G)$, где G – произвольная область, A – любая подобласть области G.

Операции с вероятностями

Сложение вероятностей. Событие $A \cap B$ наступает, если наступают оба события A и B одновременно.

Пусть A и B – два события одного случайного опыта. Рассмотрим те элементарные события, которые благоприятствуют событию A, и те элементарные события, которые благоприятствуют событию B. Все вместе эти элементарные события благоприятствуют новому событию, которое называется **объединением событий *A* и *B***.

Событие $A \cup B$ наступает, если наступает **хотя бы** одно из событий A или B. Это означает, что наступает либо A, либо B, либо A и B вместе.

Пусть A и B – два события одного случайного опыта. Рассмотрим элементарные события, которые благоприятствуют и событию A и событию B. Все вместе эти элементарные события благоприятствуют новому событию, которое называется **пересечением событий *A* и *B***.

Если события A и B не имеют общих благоприятствующих элементарных событий, то они не могут наступить одновременно в ходе одного и того же опыта (еще говорят взаимоисключающие). Такие события называют **несовместными**, а их пересечение – пустое событие.

А) Если события A и B несовместны, то $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Б) Если A и B – любые события, то $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Пример 3. Мишень представляет три области. Для данного стрелка вероятность попасть в первую область 0,15, во вторую – 0,25, в третью – 0,4.

а) Какова вероятность стрелку попасть с первого выстрела в какую-нибудь из трех областей?

б) Какова вероятность промазать с первого выстрела?

Решение.

а) Одновременно попасть в две (три) области при одном выстреле нельзя, т.е. имеем дело с несовместными событиями, поэтому $P = P1 + P2 + P3 = 0,15 + 0,25 + 0,4 = 0,8$.

б) Событие «промазать» противоположно событию «попасть куда-нибудь». Поэтому $\bar{P} = 1 – P = 1 – 0,8 = 0,2$.

Пример 4.Игральную кость бросают дважды. Какова вероятность, что оба раза выпало разное число очков?

Решение. Событие *A* состоит в том, что в первый раз выпало больше очков, чем во второй. Событие *B* состоит в том, что во второй раз выпало больше очков, чем в первый.

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Выделим в таблице элементарные события, благоприятствующие *A* (15 штук) розовым цветом, а *B* (15 штук) – голубым. Общее число элементарных событий 36. $P(A) = P (B) = 15/36 = 5/12$Общих элементарных событий у событий *A* и *B* нет, т.е. события *A* и *B* несовместны, тогда $P(A \cup B) = P(A) + P (B) = 5/12 + 5/12 = 10/12 = 5/6$. Второй способ: Обозначим $\overline{A \cup B}$ событие «оба раза выпало одинаковое число очков», являющееся противоположным событию $A \cup B$. Ему соответствуют 6 не закрашенных ячеек таблицы. $P(\overline{A \cup B})= 6/36 = 1/6$. Тогда $P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 – 1/6 = 5/6$.

Умножение вероятностей.

Случайный выбор – это выбор наудачу одного предмета из группы предметов.

Выбор наудачу – это разновидность случайного опыта с равновозможными элементарными событиями. Элементарным событием в таком опыте является извлечение одного предмета из группы. Если в группе *N* предметов, то каждый из них может быть выбран с вероятностью *1/N*. После выбора одного предмета случайный выбор можно продолжить, выбрав второй, третий и т. д. предметы или сразу взять наудачу нужное количество предметов. Собранную таким образом группу называют **случайной выборкой**.

Независимые события – это события, которые не связаны друг с другом, т.е. по наступлению одного из них нельзя судить о вероятности другого. Например, при бросании двух костей результат бросания первой кости не влияет на результат бросания второй. Если события A и B независимы, то $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$.

Пример 5. Какова вероятность, что при бросании двух игральных костей выпадут две шестерки.

Решение. Пусть событие A – «на первой кости выпала шестерка», событие B – «на второй кости выпала шестерка», заметим, что $P(A) = P(B) = 1/6$. Общее число элементарных событий 36. Выпадение двух шестерок — новое событие, являющееся пересечением независимых событий A и B. $P(A \cap B) = 1/36$. Получаем, что $P(A \cap B) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36 = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 6. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что на первой кости выпало более трех очков, а на второй – менее трех?

Решение. Событие A состоит в том, что «на первой кости выпало более 3 очков», а событие В, что «на второй кости выпало меньше 3 очков».

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Выделим в таблице элементарные события, благоприятствующие A (18 штук) розовым цветом, а B (12 штук) – голубым, а события, благоприятствующие и A и B (6 штук) – зеленым. Общее число элементарных событий 36. $P(A) = 18/36 = 1/2$; $P\ (B) = 12/36 = 1/3$, $P(A \cap B) = 6/36 = 1/6$.Т.к. события A и B независимые, то $P(A \cap B) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$.

<u>Задачи для практической работы</u>

1. Какова вероятность выпадения трех шестерок подряд при бросании кости?

2. В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси.

3. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

4. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число кратное пяти?

5. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

6. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

7. В Корзине 8 шаров: 3 белых и 5 черных. Какова вероятность, что вынутые наугад два шара окажутся: а) белые, б) черные, в) одного цвета.

8. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работать.

Контрольные вопросы

Что такое случайное событие?

Что такое элементарное событие?

Что такое независимые события?

Что такое вероятность случайного события. Запишите формулу вероятности случайного события?

Перечислите операции с вероятностями.

Основы теории комплексных чисел

Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=a+bi$ (a – вещественное часть, bi – мнимая часть комплексного числа)

Комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным числу $z=a+bi$.

Комплексные числа $z_1=a_1+b_1 i$ и $z_2=a_2+b_2 i$ считаются равными, если $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

Действительные числа можно изобразить точками прямой линии, как показано на рис.1, где точка С изображает число 4. Это число можно изобразить также отрезком ОС, учитывая не только его длину, но и направление.

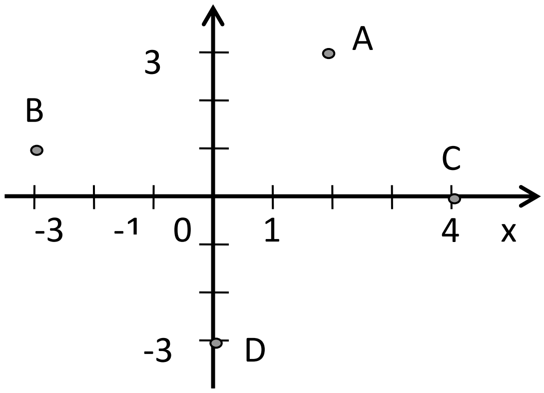


Рис. 1. Геометрическое изображение действительных чисел

Каждая точка C “числовой прямой” изображает некоторое действительное число (рациональное, если отрезок OC соизмерим с единицей длины, и иррациональное, если несоизмерим). Таким образом, на “числовой прямой” не остаётся места для комплексных чисел.

Но комплексные числа можно изобразить на “числовой прямой”. Для этого мы выбираем на плоскости прямоугольную систему координат с одним и тем же масштабом на обеих осях (рис. 2). Комплексное число a + bi мы изображаем точкой, у которой абсцисса x равна абсциссе a комплексного, а ордината y равна ординате b комплексного числа.

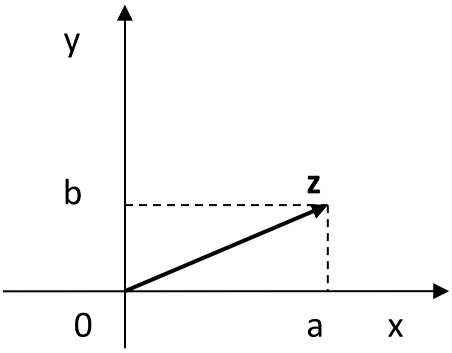


Рис. 2. Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = a + bi$ может также изображаться вектором с координатами a и b, идущим из начала координат в точку (a; b)).

Расстояние от точки z (a; b) до начала координат – модулем комплексного числа z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

По определению модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, (2) модуль комплексного числа равен длине вектора $\overline{OZ}$.

Пример. На рис. 1 точка А с абсциссой x=2 и ординатой y=3 изображает комплексное число 2+3i. Точка B (-3,-1) изображает комплексное число: –3 - i.

Действительные числа (в комплексной форме они имеют вид a + 0i) изображают точками оси OX, а чисто мнимые – точками оси OУ.

Пример. Точка C на рис. 1 изображает действительное число 4, точка D – чисто мнимое число 3i. Начало координат изображает число 0.

Сопряжённые комплексные числа изображаются парой точек, симметричных относительно оси абсцисс.

Комплексные можно изображать также отрезками, начинающимися в точке O и оканчивающимися в соответствующей точке числовой плоскости. Так, комплексное число a + bi можно изобразить не только точкой Z (рис. 1), но также вектором OZ . Давая какому – либо отрезку наименование "вектор", мы подчёркиваем, что существенное значение имеет не только длина, но и направление отрезка.

Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функцией комплексного переменного, расширило область их применения.

Аргументом комплексного числа – угол ϕ, который образует радиус-вектор точки z (a; b) с положительным направлением оси ox.

Для $z \neq 0$ аргумент определяется равенствами:

$$\cos\phi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad ;\sin\phi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad ;tg\phi = \frac{b}{a}$$

Значения аргумента ϕ, удовлетворяющее условию $-\pi \prec \phi \leq \pi$ - главным и обозначают : arg z.

Множество всех значений аргумента – Arg z, Arg z = arg z +2$\pi\kappa, \kappa \in Z$

Равенство $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ - тригонометрической формой комплексного числа, где r, ϕ-полярные координаты, $0 \leq r \prec \infty; -\pi \prec \phi \leq \pi$

Правило: чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической с помощью x=r*cosϕ, y=r*sinϕ связывающих декартовы и полярные координаты, находят модуль комплексного числа |z|, затем cosϕ, sinϕ и определяют ϕ через tg ϕ и соотношений:

$$\phi = \arg z = \begin{cases} arctgz\frac{b}{a} & ,a \succ 0 \\ arctgz\frac{b}{a} + \pi & ,a \prec 0, b \geq 0 \\ arctgz\frac{b}{a} - \pi & ,a \prec 0, b \prec 0 \end{cases}$$

Таблица значений тригонометрических функций

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	1/2	0
$\cos\alpha$	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	1/√3	1	√3	-	-√3	-1	-1/√3	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	-	√3	1	1/√3	0	-1/√3	-1	-√3	-

α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1	-√3/2	-√2/2	-1/2	0
$\cos\alpha$	-√3/2	-√2/2	-1/2	0	1/2	√2/2	√3/2	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	1/√3	1	√3	-	-√3	-1	-1/√3	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	√3	1	1/√3	0	-1/√3	-1	-√3	-

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию

Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?

Что такое мнимая единица?

Какие числа называются сопряженными?

Как представить комплексное число графически?

Что такое модуль числа?

Что такое аргумент числа?

Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?

Как найти аргумент числа?

Практические задания

Задание 1.

Выполнить указанные действия

Таблица 1

n	Задание	*n*	Задание
1.	$(1+4i)\cdot(2-3i)+\dfrac{2i(5+2i)}{1+2i}$	2.	$\dfrac{(2-6i)\cdot i}{-4+2i}-(1-i)^2$
3.	$\dfrac{5+i}{-1-2i}+\dfrac{2+3i}{i}$	4.	$\dfrac{(1-5i)\cdot(2+i)}{-1+i}-i^{7}(2-3i)$
5.	$(2-i)^2+\dfrac{3+i}{1-2i}$	6.	$\dfrac{4-5i^3}{1+i}-3i(5+2i)$
7.	$\dfrac{(1-2i)(1+i)}{3-i}-2i(2-i)$	8.	$\dfrac{5+3i}{1+3i}-i(2+3i)$
9.	$(3-2i)^2+\dfrac{9-8i}{4+2i}-i^5$	10.	$(-1+i)\cdot(3+2i)+\dfrac{i(6-4i)}{2+2i}$
11.	$5-3i+\dfrac{i^3(2-i)}{2+i}$	12.	$(4-i)^2+\dfrac{1+8i^3}{4-2i}$
13.	$\dfrac{(1-2i)^2}{3+i}-1+i$	14.	$\dfrac{5i+2i^6}{1-i}-3+2i$
15.	$\dfrac{i^5(6-i)}{-2+i}-2+3i$	16.	$\dfrac{(1+2i)\cdot(3-i)}{2-i}-i(5+3i)$
17.	$\dfrac{i}{-1+3i}-1+4i^5$	18.	$\dfrac{(1-i)\cdot(5+i)}{-3+i}-i^{3}(1+i)$
19.	$\dfrac{(1+5i)\cdot(1-i)}{-1+2i}-3i$	20.	$\dfrac{2+4i}{1-3i}-i^3(1+3i)$

Задание 2.

Представить комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и экспоненциальной формах и изобразить точками на комплексной плоскости.

Таблица 2

n	Задание	*n*	Задание
1.	$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 3 - 3i$	2.	$z_1 = -4\sqrt{3} + 4\,i$, $z_2 = 0{,}5 + 0{,}5i$
3.	$z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$	4.	$z_1 = -7 + 7\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 3\sqrt{3} + 3i$
5.	$z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = -5i$	6.	$z_1 = 4 - 4\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 0{,}5\,i$
7.	$z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$	8.	$z_1 = 6\sqrt{3} + 6i$, $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
9.	$z_1 = -3 - 3\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -2i$	10.	$z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -0{,}5i$
11.	$z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$	12.	$z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
13.	$z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$, $z_2 = 4 + 4i$	14.	$z_1 = 5 + 5\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$
15.	$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$	16.	$z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = 4i$
17.	$z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 6\sqrt{3} + 6i$	18.	$z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 4 + 4i$
19.	$z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$	20.	$z_1 = -3 + 3\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$

Задание 3.

Для комплексных чисел z_1 и z_2, записанных в тригонометрической форме, из задания 2, выполнить указанные действия.

Таблица 3

n	Задание	*n*	Задание
1.	$z_1^5 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt[4]{z_2}$	2.	$z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1^5}{z_2}$, $\sqrt[3]{z_2}$

Продолжение таблицы 3

3.	$z_1 \cdot z_2^5,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2^5}$	4.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2^5},\ \sqrt[3]{z_1}$
5.	$z_1^7 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_2}$	6.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^4}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1}$
7.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^8}{z_2},\ \sqrt[4]{z_2}$	8.	$z_1^5 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1^5}$
9.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^3}{z_2},\ \sqrt[5]{z_2}$	10.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1^3}$
11.	$z_1^5 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2}$	12.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2^3},\ \sqrt[5]{z_1}$
13.	$z_1 \cdot z_2^6,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1}$	14.	$z_1 \cdot z_2^7,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2}$
15.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^5}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1^5}$	16.	$z_1^3 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1^3}$
17.	$z_1 \cdot z_2^5,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_1}$	18.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2^7},\ \sqrt[4]{z_1}$
19.	$z_1^5 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2}$	20.	$z_1 \cdot z_2,\ z_1 : z_2^3,\ \sqrt[4]{z_2^3}$

Примеры выполнения заданий

Пример 1.

Найти $z_1 + z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ z_1^2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = 2 + 3i$.

Решение:

Сложение и умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, производят подобно сложению и умножению многочленов.

$$z_1 + z_2 = 4 - 5i + 2 + 3i = (4+2) + (-5+3)i = 6 - 2i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4-5i)\cdot(2+3i) = 8 + 12i - 10i - 15i^2 = 8 + 2i - 15(-1) = 23 + 2i$$

$$z_1^2 = (4-5i)^2 = 16 - 40i + 25i^2 = 16 - 40i - 25 = -9 - 40i$$

При делении одного комплексного числа на другое, делимое и делитель умножают на комплексное число, сопряженное делителю.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4-5i}{2+3i}=\frac{(4-5i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)}=\frac{8-10i-12i+15i^2}{2^2-(3i)^2}=\frac{8-22i-15}{4+9}=$$

$$=\frac{-7-22i}{13}=-\frac{7}{13}-\frac{22}{13}i.$$

Пример 2.

Найти i^9, i^{27}.

Решение:

Для любых $q,r\in N$ имеет место равенство

$$i^{4q+r}=i^r$$

Следовательно,

$i^9=i^{4\cdot 2+1}=i^1=i$,

$i^{27}=i^{6\cdot 4+3}=i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$.

Пример 3.

Представить комплексные числа $z_1=1+i$ и $z_2=1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической и экспоненциальной формах.

Решение:

Любое комплексное число можно представить в виде:

$$z=a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где $r=\sqrt{a^2+b^2}$ – модуль комплексного числа z (обозначают $|z|$),

φ – аргумент комплексного числа z (обозначают $\arg z$), обычно выбирают $\varphi\in[0,2\pi)$, реже берут $\varphi\in(-\pi,\pi]$. φ находят из условий:

$$\cos\varphi=\frac{a}{r},\ \sin\varphi=\frac{b}{r}.$$

Символом $e^{i\varphi}$ обозначают комплексное число $\cos\varphi+i\sin\varphi$. Поэтому любое комплексное число можно представить в виде:

$$z=a+bi=r\,e^{i\varphi}$$

Для представления комплексного числа $z_1 = 1 + i$ в тригонометрической и экспоненциальной формах, найдем модуль и аргумент этого числа.

$a_1 = 1,\ b_1 = 1,$

$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$

$$\varphi_1 : \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a_1}{r_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{b_1}{r_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.\ \text{(Рис. 2)}$$

Следовательно,

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма записи z_1.

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ –экспоненциальная форма записи z_1.

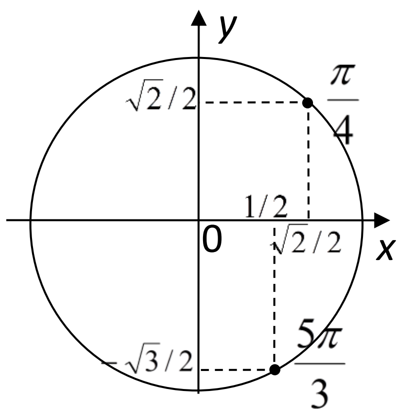


Рис. 2

Представим $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической и экспоненциальной формах.

$a_2 = 1,\ b_2 = -\sqrt{3},$

$r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$

$$\varphi_2 : \begin{cases} \cos\varphi_2 = \dfrac{a_2}{r_2} = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi_2 = \dfrac{b_2}{r_2} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{5\pi}{3}.\ \text{(Рис. 2)}$$

Следовательно,

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$ – тригонометрическая форма записи z_2.

$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$ –экспоненциальная форма записи z_2.

Пример 4.

Для комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, записанных в тригонометрической форме, выполнить действия:

1) $z_1 \cdot z_2$, 2) $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3) z_2^5, 4) $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение:

В примере 4 была получена тригонометрическая форма каждого из данных комплексных чисел:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

1) Чтобы перемножить два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, нужно перемножить их модули, а аргументы сложить:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

2) Чтобы найти частное от деления двух комплексных чисел, нужно найти частное от деления их модулей и разность их аргументов:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12} + 2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12} + 2\pi\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

В рассмотренном примере к полученному аргументу добавлено выражение 2π (период тригонометрических функций $\rho = \cos\varphi$ и $\rho = \sin\varphi$) для того, чтобы получить значение аргумента из промежутка $[0, 2\pi)$.

3) Возведение комплексного числа в натуральную степень производится по формуле Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

$$z_2^5 = 2^5\left(\cos\left(5\cdot\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 32\left(\cos\frac{25\pi}{3}+i\sin\frac{25\pi}{3}\right) =$$

$$= 32\left(\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 32\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

4) Существует ровно *n* корней *n*-ой степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0,1,\dots,n-1$.

В рассматриваемом примере

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{3}\right), \text{ где } k = 0,1,2$$

при k=0 $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi/3}{3}+i\sin\frac{5\pi/3}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right),$

при k=1 $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right),$

при k=2 $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9}+i\sin\frac{17\pi}{9}\right).$

Заметим, что аргументы получившихся комплексных чисел разбивают единичную окружность на три равные дуги. (Рис. 3).

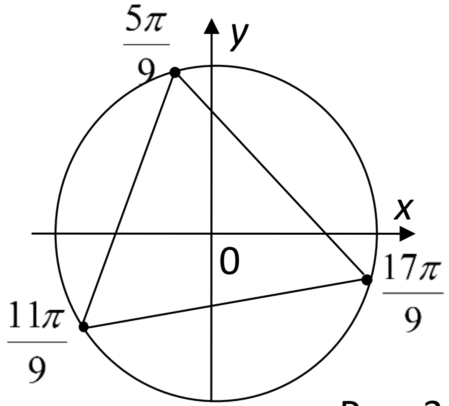


Рис. 3

Литература

1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика: учебник для бакалавров. М.: Изд-во Юрайт, 2015. 396 с.

2. Шапкин А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями: учебное пособие. М.: Дашков и К, 2014. 432 с. Единое окно доступа к электронным ресурсам http://window.edu.ru/

3. Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. М.: Айрис-пресс, 2018. 576 с. Единое окно доступа к электронным ресурсам http://window.edu.ru/

4. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учебное пособие для ССУЗов. М.: Дрофа, 2015.

5. Никольский С.М., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2016. 464 с.

Интернет-ресурсы:

Справочные материалы для студентов. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://mathem.h1.ru/

Электронный учебник по математике. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://mirsmpc.ru/matematics/12.html

Рудяк Ю.В. Математический анализ. Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://free.megacampus.ru/

Введение в математику. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.intuit.ru/studies/courses/107/107/info

Математический анализ. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.intuit.ru/studies/courses/107/107/lecture/3121

Сайт учителя информатики в помощь ученику informatika-1332. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.informatika-1332.ru/

Доступная математика [Электронный ресурс]. Режим доступа: cleverstudents.ru

Образовательный онлайн сервис Webmath. Режим доступа: http://www.webmath.ru/

Учебное издание

Сидорова Марина Михайловна

Методические указания
к практическим и самостоятельным работам
по математике
для студентов 2 курса факультета СПО

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 05.03.2019 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага печатная. Усл. п. л. 4,42. Тираж 25 экз. Изд. № 6333.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ