

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ГРУНТОВИЧ Надежда Владимировна
ГРУНТОВИЧ Николай Васильевич

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Часть II

Брянск 2015 г.

УДК 681.5(07)

ББК 32.965

Г 90

Грунтович, Н.В. **Теория автоматических систем управления:** учебное пособие для бакалавров направлений подготовки 13.04.02 – Электроэнергетика и электротехника, 15.03.02 – Автоматизация технологических процессов и производств. / Над.В. Грунтович, Ник.В. Грунтович. – Брянск: Издательство Брянский ГАУ, 2015. - 180 с.

Рассмотрены принципы построения САР, их математические модели. Даются понятия типовых звеньев, исследуются критерии устойчивости и коррекция САР. Анализируются особенности нелинейных САР и методы оценки их устойчивости.

ISBN 978-5-88517-231-8

Рецензенты:

заведующий кафедрой СЭ, профессор Маркарянц Л.М.

доктор технических наук, доцент кафедры механики ФГБОУ ВПО БГИТА Кисель Ю.Е.

Рекомендовано решением учебно-методической комиссией факультета энергетики и природопользования от 2 марта 2015 года протокол № 2.

ISBN 978-5-88517-231-8

© Брянский ГАУ, 2015

© Грунтович Надежда Владимировна, 2015

© Грунтович Николай Васильевич, 2015

Содержание

<i>Глава 4. Устойчивость систем автоматического регулирования</i>	7
4.1. Физические основы устойчивости	7
4.2. Аналитические методы исследования устойчивости	16
4.3. Суждение об устойчивости по корням характеристического уравнения системы	17
4.4. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Гурвица	24
4.5. Критерий В. Михайлова	27
4.6. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости. Критерий устойчивости Найквиста	35
4.6.1. Физические основы критерия	35
4.6.2. Математическая трактовка амплитудно-фазового критерия устойчивости	39
4.7. Логарифмический критерий устойчивости	46
4.8. Запасы устойчивости систем автоматического регулирования	53
4.9. Сравнительная оценка критериев устойчивости	56
<i>Глава 5. Качество систем автоматического регулирования</i>	58
5.1. Общие положения	58
5.2. Некоторые показатели качества переходного процесса, определяемые по переходной характеристике системы	60
5.3. Определение длительности переходного процесса по корням характеристического уравнения замкнутой системы	63
5.4. Определение показателей качества переходного процесса с помощью частотных характеристик	68
5.5. Метод трапецидальных характеристик	74
5.6. Расчет и построение вещественной частотной характеристики замкнутой системы	74
5.7. Приближенное построение переходной характеристики замкнутой системы по ее вещественной частотной характеристике	77
5.8. Интегральная h -функция для единичной трапецидальной характеристики	80
5.9. Расчет и построение переходных характеристик систем методом профессора В.В. Солодовникова	82
<i>Глава 6. Коррекция систем автоматического управления</i>	89
6.1. Понятие о коррекции	89
6.2. Коррекция САУ изменением параметров системы	89
6.2.1. Уменьшение коэффициента усиления разомкнутой системы	89
6.2.2. Изменение постоянных времени звеньев	91
6.3. Коррекция систем автоматического регулирования изменением структуры схемы	92
6.3.1. Методы коррекции	93
6.3.2. Коррекция САУ с помощью дифференцирующих устройств	96
6.3.3. Физический смысл введения производной в закон регулирования	97
6.3.4. Коррекция САУ с помощью интегрирующих устройств	101

6.4. Последовательное включение корректирующих устройств	104
6.5. Параллельное включение корректирующих устройств	107
6.6. Инвариантность САР	108
6.6.1. Обеспечение инвариантности корректирующими устройствами по задающим воздействиям	109
6.6.2. Обеспечение инвариантности корректирующими устройствами по возмущению	110
<i>Глава 7. Синтез корректирующих устройств</i>	113
7.1. Постановка задачи синтеза	113
7.2. Построение желаемой логарифмической частотной характеристики системы	114
7.3. Синтез последовательных корректирующих устройств	117
7.4. Синтез параллельных корректирующих устройств	123
<i>8. Примеры нелинейных элементов автоматических систем</i>	130
8.1. Элементы, нелинейность которых обусловлена нелинейностью дифференциальных уравнений	130
8.2. Элементы, нелинейности которых обусловлены нелинейностями статических характеристик	133
<i>9. Исследование нелинейных систем автоматического регулирования методом гармонической линеаризации</i>	136
9.1. Особенности нелинейных систем	136
9.2. Гармоническая линеаризация нелинейного элемента	137
9.3. Передаточная функция нелинейного элемента	141
9.4. Типовые нелинейности и их частотные функции	143
9.5. Использование метода гармонической линеаризации для исследования автоколебаний в нелинейных автоматических системах	147
<i>10. Исследование нелинейных систем автоматического управления методом фазовых портретов</i>	155
10.1. Фазовые портреты линейных систем второго порядка	156
10.2. Особенности фазовых портретов нелинейных систем автоматического управления	163
10.3. Метод изоклин	164
10.4. Построение графика переходного процесса с помощью фазовых траекторий	167
<i>11. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления</i>	170
11.1. Суждение об устойчивости САР по фазовым портретам	171
11.2. Абсолютная устойчивость нелинейных систем	172
11.3. Сравнение методов анализа устойчивости нелинейных систем	178
Литература	179

ВВЕДЕНИЕ

Автоматическое управление разнообразными техническими объектами и технологическими процессами, то есть управление ими при помощи специальных автоматических устройств без непосредственного участия человека, все более широко внедряется во все области промышленности. Без преувеличения можно сказать, что автоматизация - одно из самых прогрессивных направлений в общем развитии науки и техники нашего времени.

Повышающиеся требования к качеству процессов делают ручное управление ими недостаточными в отношении точности, быстродействия, эффективности и надежности, так как оно связано с ограниченной скоростью реакций человека, его утомляемостью и субъективными ошибками. Кроме того, существуют такие быстропротекающие процессы, ручное управление которыми не представляется возможным, например: управление ядерными реакторами, выведение на нужную орбиту космических ракет, управление технологическими процессами на химических, нефтеперерабатывающих, газоперерабатывающих предприятиях. Автоматическое управление является более точным, быстродействующим и эффективным по сравнению с ручным управлением, поэтому тенденция его повсеместного внедрения, глубоко оправдана. Автоматизация в промышленности означает дальнейший рост производительности труда.

Характерной особенностью современного этапа развития науки, промышленности, сельского хозяйства и военного дела является широкое применение автоматизированных систем управления, робототехнических систем.

Современная автоматизированная система состоит из большого количества вычислительных машин, соединенных в один могучий комплекс управления, в котором координирующее действие и контроль осуществляет человек.

Комплексная автоматизация означает объединение всех систем управления в единую систему, решающую задачи централизованного сбора и обработки информации о состоянии и готовности технических средств, выработки рекомендаций по оптимизации технологического процесса.

При всем разнообразии систем автоматического управления и регулирования построение их основано на некоторых общих принципах, а действия подчинены определенным общим законам. Изучение этих принципов и закономерностей является первым шагом в овладении техникой автоматических систем.

Теория автоматического управления и регулирования является в настоящее время самостоятельной учебной дисциплиной, изучаемой с разной степенью подробности во всех технических вузах. Эта теория стала в ряд важнейших технических наук общего применения. Она дает основную теоретическую базу для исследования, проектирования и эксплуатации любых автоматических систем во всех областях техники, военного дела и народного хозяйства.

Система автоматического управления может быть нелинейна в результате нелинейности дифференциальных уравнений, которыми описывается один или несколько элементов системы. В последнем случае нелинейности проявляются в динамических режимах работы, хотя для установившихся режимов связь между входными и выходными сигналами линейна. Один из путей исследования САУ заключается в линеаризации дифференциальных уравнений, которыми они описываются. Однако не всегда линеаризация осуществима, так как описываемые линейными уравнениями модели зачастую не сохраняют основных свойств нелинейных оригиналов. Вследствие этого результаты теоретического исследования САУ, полученные с использованием методов линейной теории автоматического управления, приводят к существенным расхождениям с результатами, полученными на практике. Рассматриваемые в учебном пособии элементы теории нелинейных систем исключают вышеуказанные недостатки, присущие линейной теории. Большой вклад в разработку нелинейной теории автоматического управления внесли видные советские ученые А.А. Андронов, Б.В. Булгаков, Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, Е.П. Попов и др.

Глава 4

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

4.1. Физические основы устойчивости

Как отмечалось в гл. 1, системы автоматического регулирования предназначены для поддержания неизменного значения регулируемой величины с заданной степенью точности либо для изменения этой величины по определенному (наперед заданному или произвольному) закону. Во всяком случае после прекращения действия возмущения, приложенного к объекту регулирования или ко входу регулятора, система должна обеспечить возвращение регулируемой величины (по истечении переходного процесса) к прежнему или новому установившемуся значению.

Способность системы возвращаться к прежнему равновесному состоянию или занимать новое состояние равновесия после прекращения действия возмущающих сил называется устойчивостью.

Устойчивость является необходимым условием работоспособности системы. Между тем, замкнутые системы автоматического регулирования при определенных условиях могут оказываться неустойчивыми. Неустойчивое движение системы возникает либо из-за чрезмерного количества энергии, вводимой в систему извне через ее элементы (например, усилители), либо из-за инерционности объекта регулирования и регулятора. Потребление и преобразование энергии элементами системы характеризуется коэффициентами усиления (передачи), а инерционность элементов - постоянными времени. Коэффициенты усиления (передачи) и постоянные времени являются параметрами системы. Для уяснения физической сущности неустойчивости, обусловленной параметрами элементов, рассмотрим схему (рис. 4.1).

На этом рисунке: G - генератор постоянного тока с независимым возбуждением, $ОВГ$ - обмотка возбуждения генератора, $MУ$ - магнитный усилитель с выходом на постоянном токе, W_o - обмотка управления МУ, к которой приложено опорное напряжение U_o ; W_{oc} - обмотка обратной связи; U - напряжение на зажимах генератора (выходное напряжение).

Если разомкнуть главную обратную связь системы (рис. 4.2, а) и на вход МУ подать скачкообразно изменяющееся напряжение U_o , то после окончания переходного процесса, вызванного наличием индуктивности в обмотках МУ и генератора, на выходе генератора уста-

новится напряжение (см. рис.4.2, б).

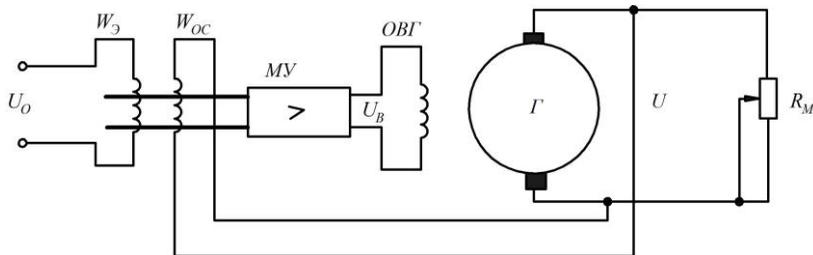


Рис. 4.1

$$U = kU_0,$$

где k - коэффициент усиления разомкнутой системы, представляющей собой отношение напряжения на выходе разомкнутой системы к напряжению на ее входе в установившемся режиме.

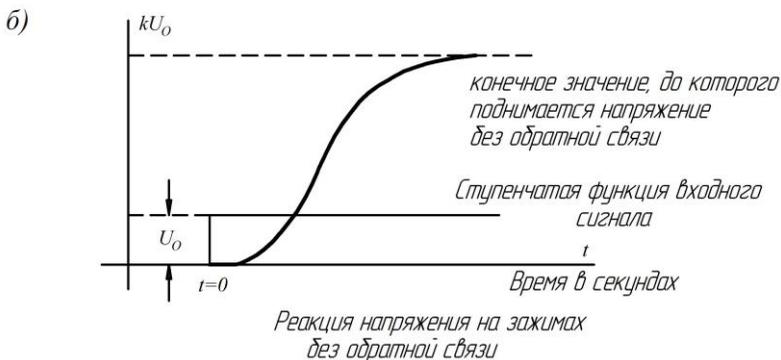
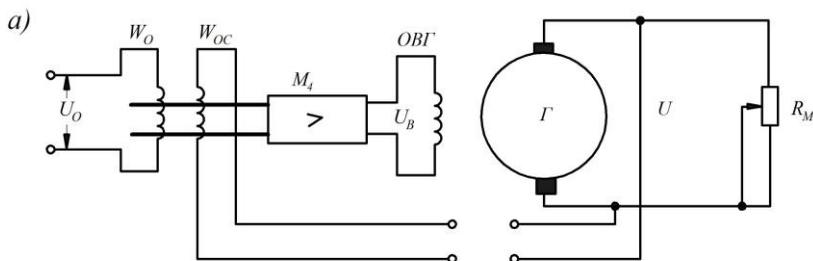


Рис. 4.2

Если обратную связь замкнуть, то напряжение на генераторе в начальные моменты времени после приложения напряжения будет изменяться примерно так же, как и в разомкнутой системе.

Однако в последующие моменты времени характер изменения напряжения U в замкнутой системе будет иным, так как на усилитель воздействует не постоянное напряжение U_0 , а величина $\Delta U = U_0 - U$, зависящая от самого напряжения генератора.

При достаточно большом коэффициенте k малые отклонения напряжения генератора ΔU от заданного значения U_0 вызовут значительные изменения тока и потока возбуждения генератора, а значит и напряжения на нагрузке (на выходе генератора), что приведет к дальнейшему увеличению отклонения напряжения. Это, в свою очередь, может еще больше увеличить ток и поток возбуждения генератора и т.д. Характер изменения выходного напряжения в этом случае показан на рис. 4.3. Из графика видно, что начальная реакция напряжения генератора при включении U_0 в замкнутой системе будет похожа на таковую в разомкнутой системе (начальный участок кривой в интервале времени от $t = 0$ до $t = t_1$).

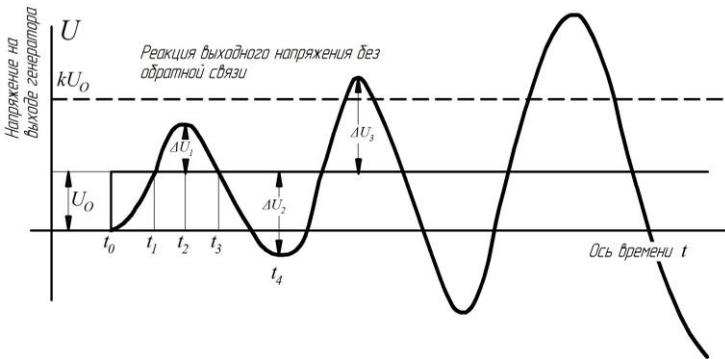


Рис. 4.3

В момент времени t_1 напряжение U генератора станет равным заданному напряжению U_0 , сигнал рассогласований станет равным нулю и в дальнейшем начнет изменять свой знак.

Однако магнитная инерционность обмоток (характеризующая-

ся постоянными времени) мешает уменьшению тока возбуждения. Этот ток продолжает увеличивать напряжение генератора в первоначальном направлении до момента времени $t = t_2$.

Так как разность между регулируемым напряжением и его заданным значением изменила знак, то магнитное поле возбуждения генератора начнет теперь уменьшать напряжение на зажимах до тех пор, пока при времени $t = t_3$ это рассогласование не станет снова равным нулю. Действующее рассогласование напряжений после $t = t_3$ вновь изменит знак, хотя накопленная энергия в обмотках обусловит дальнейшее уменьшение напряжения на зажимах до момента $t = t_4$, при котором оно будет отличаться от заданного на величину ΔU_2 . При большом коэффициенте усиления в следующих друг за другом моментах времени t_0, t_2, t_4 и т.д., когда скорость изменения напряжения на зажимах генератора становится равной нулю, абсолютное значение действующего рассогласования возрастет. Следовательно, напряжение на зажимах генератора (регулируемое напряжение) может не остановиться на заданном значении U_0 , а будет продолжать колебаться с возрастающей амплитудой, пока насыщение или какая-либо другая причина не остановит этот расходящийся процесс. Такая система будет неустойчивой.

При уменьшении коэффициента усиления следующие друг за другом небольшие отклонения $\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3$ и т.д., когда скорость изменения напряжения на зажимах генератора становится равной нулю, будет уменьшаться. Такая реакция регулируемого напряжения на зажимах генератора на возмущение U_0 , показанная на рис. 4.4, характеризует устойчивую систему.

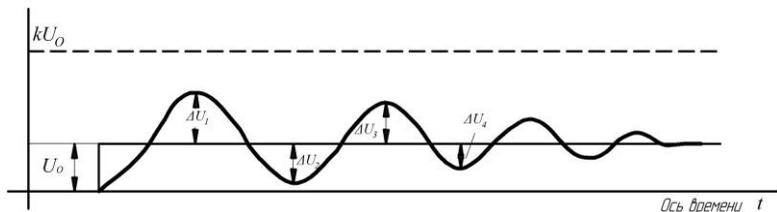


Рис. 4.4

Из вышеизложенного следует, что для обеспечения устойчивой работы системы надо уменьшить коэффициент усиления k . Так как рассматриваемая замкнутая система является статической, то ей присуща статическая ошибка $\Delta U_{\text{ст}}$, где $\Delta U_{\text{ст}}$ - разность между заданным и фактическим значением регулируемой величины в установившемся режиме:

$$\Delta U_{\text{ст}} = U - U_0 \quad \text{и} \quad U = kU_0.$$

Решая совместно эти два уравнения относительно $\Delta U_{\text{ст}}$ (для установившегося режима), получим

$$\Delta U_{\text{ст}} = \frac{U_0}{1+k}.$$

Отсюда видно, что уменьшение k ведет к увеличению статической ошибки, то есть к загроблению системы. Изменение постоянных времени элементов также влияет на устойчивость системы, в частности, уменьшение инерционности элементов повышает устойчивость простейших систем.

Изменяя параметры системы, можно добиться компромиссного решения по удовлетворению требований к ее устойчивости при обеспечении заданной статической ошибки.

Такие системы, устойчивость которых может быть достигнута за счет изменения параметров, называются структурно-устойчивыми.

Встречаются системы, устойчивость которых не может быть достигнута ни при каком изменении параметров. Они неустойчивы по самой своей структуре. В этом случае для достижения устойчивости необходимо изменить саму структуру системы, введя в нее дополнительные, так называемые стабилизирующие элементы.

Системы автоматического регулирования, устойчивость которых не может быть достигнута изменением параметров, называются структурно-неустойчивыми.

Рассмотрим структурно-неустойчивую систему на примере автоматического регулирования курса корабля. Упрощенная схема авторулевого (без внутренней обратной связи) показана на рис.4.5,а.

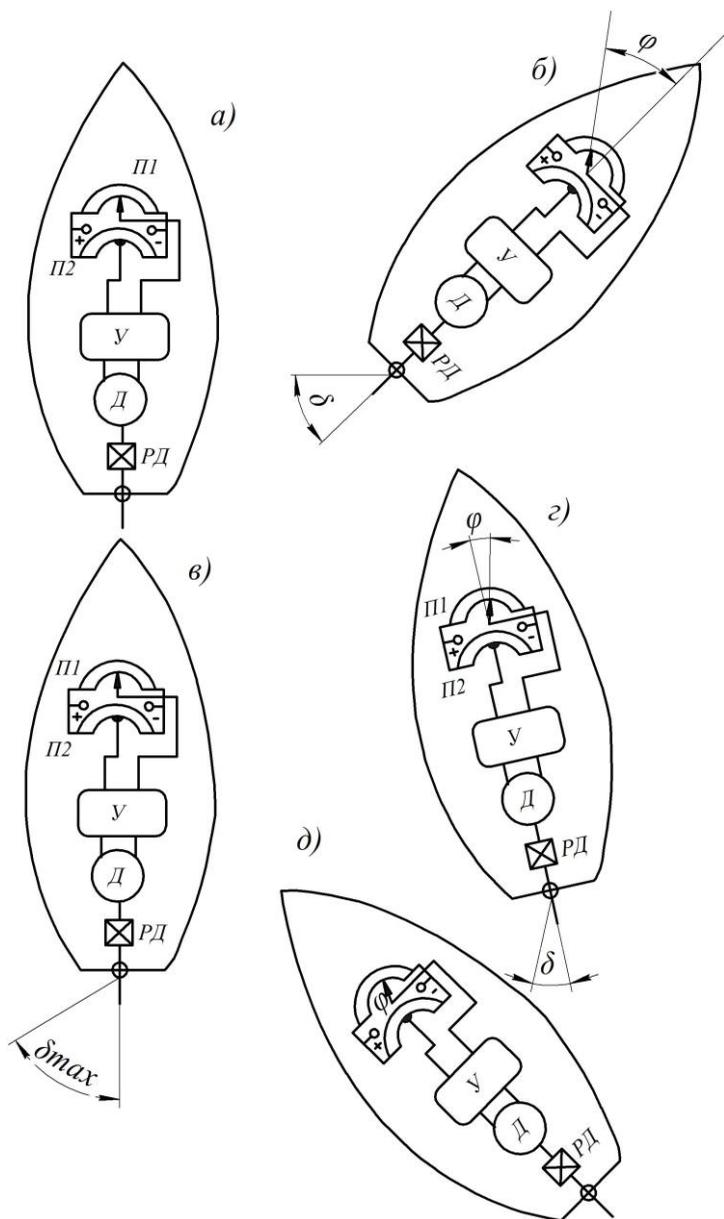


Рис. 4.5

Потенциометры П1 и П2 образуют равновесный измерительный мост. К одной диагонали моста подключен источник напряжения, а в другую диагональ включен усилитель. Оба потенциометра жестко связаны с корпусом корабля, а их ось совпадает с продольной осью корабля, направление которой характеризует фактический курс. Движок потенциометра П1 жестко связан с указателем гирокомпаса и задает требуемый курс. Подвижный контакт этого движка может перемещаться относительно потенциометра П1. Неподвижный контакт находится в средней точке потенциометра П2. Таким образом, на вход усилителя подается разность потенциалов между подвижным контактом потенциометра П1 и неподвижным контактом потенциометра П2.

Если корабль движется по заданному курсу, то движок потенциометра П1, жестко связанный с указателем гирокомпаса, находится в средней точке потенциометра П1. В этом случае измерительный мост сбалансирован и напряжение на измерительной диагонали равно нулю. Двигатель *Д*, связанный с баллером руля через редуктор *РД*, неподвижен. Плоскость руля должна совпадать при этом с диаметральной плоскостью корабля. При отклонении корабля от курса, например вправо, вследствие порыва ветра или удара волны, движок потенциометра П1, жестко связанный с указателем гирокомпаса, смещается относительно средней точки потенциометра влево на угол Φ , равный углу отклонения корабля от курса (см. рис. 4.5, б). Измерительный мост разбалансируется. Возникшее при этом напряжение в измерительной диагонали, пропорциональное отклонению корабля от курса, подается через усилитель на двигатель, который через редуктор поворачивает руль влево на угол δ от диаметральной плоскости корабля. Вследствие этого корабль начинает поворачиваться в левую сторону, то есть в сторону уменьшения отклонения от заданного курса.

По мере поворота корабля смещение движка потенциометра П1 от средней точки будет уменьшаться и вместе с этим будет уменьшаться напряжение, питающее двигатель. Скорость вращения двигателя будет падать. Однако руль будет продолжать поворачиваться влево до тех пор, пока напряжение, снимаемое с диагонали моста, не станет равным нулю, то есть пока корабль не придет на заданный курс. При этом руль корабля окажется отклоненным в левую сторону на максимальный угол (см. рис. 4.5, в) и корабль будет продолжать поворот влево, то есть отклоняться от курса в противоположную сторону. Движок потенциометра П1 начнет смещаться вправо от средней точки. Напряжение, снимаемое с диагонали моста, изменит знак, и двигатель будет вращаться в противоположном направлении, поворачивая руль вправо (см. рис. 4.5, г). Однако корабль будет продолжать отклоняться

от курса в левую сторону до тех пор, пока угол поворота руля δ не станет равным нулю (см. рис. 4.5, д), то есть пока корабль не окажется расположенным симметрично положению рис. 4.5, б относительно заданного курса.

Дальнейшее поведение корабля будет такое же, что и рассмотренное выше, с той лишь разницей, что повороты корабля и руля будут происходить в противоположных по отношению к рассмотренным направлениях. Таким образом, корабль будет совершать незатухающие колебания относительно заданного курса.

В приведенных выше рассуждениях не была учтена инерция корабля. Так как корабль обладает инерцией, то он будет продолжать отклоняться от курса даже тогда, когда угол поворота руля станет равным нулю (см. рис. 4.5, д), и лишь при отклонении руля вправо, когда угловая скорость поворота корабля станет равной нулю, начнется поворот его в противоположную сторону. Влияние инерции корабля сказывается в том, что каждое последующее отклонение от курса будет больше по абсолютной величине предшествующего ему отклонения в противоположную сторону. Таким образом, корабль будет совершать колебания с возрастающей амплитудой. Такая система автоматического регулирования, как указывалось выше, будет неустойчивой и поэтому не сможет выполнить своего назначения.

Причиной незатухающих колебаний, или колебаний с возрастающей амплитудой является то обстоятельство, что при достижении кораблем заданного курса руль его отклонен на максимальный угол δ_{\max} . Для устранения этой причины необходимо до возвращения корабля на заданный курс остановить двигатель, а затем изменить направление его вращения на противоположное. В этом случае руль начнет возвращаться к диаметральной плоскости корабля еще до прихода корабля к заданному курсу и совпадает с ней в момент выхода на заданный курс. Двигатель при этом должен быть вновь остановлен. Это можно осуществлять различными способами.

Один из вариантов схемы автоматического регулятора курса с устройством, обеспечивающим отключение двигателя до прихода корабля на курс, приведен на рис.4.6. В отличие от схемы рис. 4.5, а, где средняя точка потенциометра П2 была неподвижной, в схеме рис. 4.6 потенциометр П2 имеет подвижный контакт, жестко связанный через передачу с баллером руля. Таким образом, перемещение движка П2 пропорционально углу отклонения руля δ от диаметральной плоскости корабля.

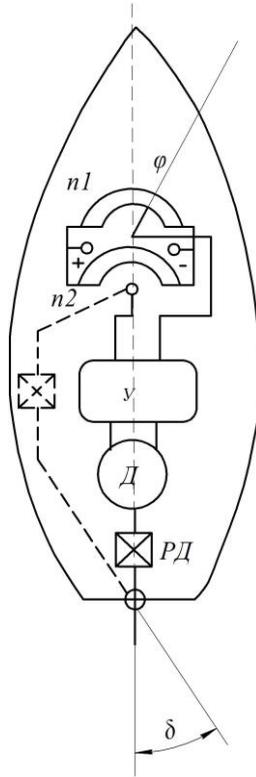


Рис. 4.6

Следовательно, при работе двигателя поворачивается руль и одновременно перемещается подвижный контакт П2 в сторону, соответствующую отклонению руля. Угол рассогласования между движком П1, связанным с гирокомпасом, и движком П2, связанным с баллером руля через передачу,

$$\alpha = \varphi - k\sigma$$

где α - угол рассогласования между движками П1 и П2;

φ - отклонение корабля от курса;

σ - отклонение руля от диаметральной плоскости корабля;

k - передаточное число механической связи между баллером руля и движком П2.

Благодаря этому при возвращении корабля на курс двигатель будет остановлен ранее, чем это было прежде. Если руль переключается достаточно быстро по сравнению со скоростью поворота самого корабля, то всегда будет поддерживаться значение $\alpha \approx 0$, то есть $\varphi = k\delta$. Поэтому теперь угол переключки руля будет пропорционален отклонению корабля от заданного курса. При уменьшении угла φ до нуля угол δ также станет равным нулю, и корабль пойдет по заданному курсу. Приведенные рассуждения являются приближенными, так как в них не учитывается инерционность корабля и регулятора. При учете инерционности анализ процесса регулирования курса корабля существенно усложняется. Исходя из этого, в систему приходится вводить дополнительные внутренние связи для обеспечения устойчивости и требуемых характеристик процесса регулирования.

На практике всегда желательно иметь данные о действительной реакции системы на ступенчатое или какое-либо другое возмущение. Однако экспериментальные исследования отнимают много времени и довольно дороги. Ограничиваться только качественной физической картиной процесса также совершенно недостаточно. Необходимо для исследования систем применять количественные методы, аналитические или графические, которые позволили бы определить устойчивость системы и другие характеристики процесса регулирования, необходимые для эксплуатации.

4.2. Аналитические методы исследования устойчивости

Математические условия устойчивости динамических систем в общем виде исследованы А.М. Ляпуновым в его классическом труде "Общая задача об устойчивости движения". Результаты этих исследований лежат в основе анализа устойчивости систем автоматического регулирования.

Согласно выводам А.М. Ляпунова, следует различать устойчивость в "малом" и устойчивость в "большом".

Под устойчивостью в "малом" понимается устойчивость динамической системы при малых отклонениях ее координат относительно какого-либо установившегося значения, соответствующих малым изменениям внешних воздействий, то есть малым возмущениям.

Под устойчивостью в "большом" понимается устойчивость динамической системы при больших, но ограниченных по величине изменениях внешних воздействий, вызывающих большие отклонения координат от каких-либо установившихся значений.

Важнейший вывод А.М. Ляпунова состоит в том, что если

устойчива в "малом" линейная модель реальной нелинейной системы, то устойчива в "малом" и сама реальная система.

Этот вывод дает нам право исследовать устойчивость реальной нелинейной системы в "малом" по уравнениям линейной модели реальной системы.

Устойчивость нелинейной системы в "малом", определяемая по устойчивости ее линейной модели, не может гарантировать устойчивость системы в "большом" и даже устойчивость ее в "малом" вблизи других установившихся состояний. Поэтому исследование устойчивости реальной нелинейной системы по уравнениям линейного приближения необходимо проводить не для одного какого-либо установившегося состояния, а вблизи ряда установившихся состояний.

Для суждения об устойчивости системы регулирования достаточно было бы, задавшись каким-либо возмущением, проинтегрировать дифференциальное уравнение движения системы тем или иным способом, то есть получить аналитическое выражение или график переходного процесса и установить его сходимости или расходимости. Однако этот путь является, во-первых, достаточно трудоемким, во-вторых, в случае неустойчивости такое решение было бы бесполезным из-за непригодности системы для практического использования. Поэтому во избежание напрасной траты труда и времени необходимо до расчета переходного процесса убедиться в устойчивости исследуемой системы. А в случае неустойчивости следует осуществить меры, обеспечивающие устойчивость, после чего можно приступить к расчету переходного процесса устойчивой системы и оценке его качества.

Существует ряд методов проверки устойчивости линеаризованной системы. С основными из них мы ознакомимся ниже.

4.3. Суждение об устойчивости по корням характеристического уравнения системы

Дифференциальное уравнение процесса регулирования, получаемое из совокупности уравнений элементов системы или по передаточным функциям замкнутой системы, представляет собой неоднородное линейное уравнение n – ГО порядка с постоянными коэффициентами. Записанное для одного из возмущений $y(t)$, в операторной форме оно имеет вид

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n)x(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + b_m)y(s)$$

или в классической форме

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_m y$$

В этом уравнении $y(t)$ есть заданная функция времени, а $x(t)$ искомая функция времени (регулируемая величина).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение $x(t)$ неоднородного линейного уравнения равняется сумме общего решения $x_c(t)$ однородного уравнения:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0$$

и какого-либо частного решения $x_b(t)$ данного неоднородного уравнения

$$x(t) = x_c(t) + x_b(t).$$

Общее решение $x_c(t)$ однородного уравнения характеризует, как известно, свободное движение системы, выведенной из равновесного состояния и предоставленной самой себе. Именно свободная составляющая имеет важнейшее значение, так как она характеризует собственные динамические свойства системы, ее способность или неспособность возвращаться в равновесное состояние после прекращения возмущений. Частное решение $x_b(t)$ соответствует вынужденному установившемуся движению системы при установившемся внешнем воздействии. Так, например, при единичном скачкообразном

возмущении $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

все производные правой части исходного уравнения обращаются в нуль:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \dots = \frac{d^m y}{dt^m} = 0,$$

поэтому правая часть уравнения становится постоянной величиной, равной b_m и уравнение процесса регулирования принимает вид

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = b_m \quad (4.1)$$

или в операторной форме

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) x(s) = \frac{b_m}{s} \quad (4.2)$$

Вынужденная составляющая представляет собой постоянную величину, равную

$$x_b(t) = \frac{b_m}{a_n},$$

так как, очевидно, именно это частное решение удовлетворяет уравнению (4.1). Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости системы, то есть ее способности совершать установившееся вынужденное движение при установившемся внешнем воздействии, является затухание свободного движения после прекращения действия возмущений, то есть

$$x_c(t) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$.

Из сказанного следует, что для исследования устойчивости системы автоматического регулирования достаточно рассмотреть общее решение однородного уравнения

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0. \quad (4.3)$$

Для получения общего решения этого уравнения необходимо, как известно, вычислить корни характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) = 0. \quad (4.4)$$

Обозначим корни этого уравнения n -ой степени через s_1, s_2, \dots, s_n .

Тогда при отсутствии кратных корней общее решение однородного линейного уравнения запишется в виде суммы

$$x_C(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}, \quad (4.5)$$

содержащей n слагаемых и n постоянных интегрирования C_1, C_2, \dots, C_n . Последние определяются из начальных условий движения.

Свободная составляющая движения системы будет обращаться в нуль, то есть переходный процесс будет сходящимся при $t \rightarrow \infty$ в том случае, если:

- все вещественные корни характеристического уравнения отрицательные, так как если $s_i < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} c_i e^{s_i t} = 0$ при $t \rightarrow \infty$;

- все вещественные части комплексных попарно сопряженных корней вида

$s_k = \alpha + j\omega$ и $s_{k+1} = \alpha - j\omega$ также будут отрицательными, так как пара комплексных сопряженных корней в общем решении соответствует сумма двух членов,

$$C_k e^{s_k t} + C_{k+1} e^{s_{k+1} t},$$

которая приводится к виду

$$Re^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$$

где R и φ - новые постоянные интегрирования.

Если $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} Re^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В случае кратных вещественных корней в общем решении появятся члены вида

$$C_i t^r e^{s_i t},$$

пределом которых при $t \rightarrow \infty$ и $s_i < 0$ также является нуль.

Действительно,

$$\lim t^r e^{s_i t} = \lim \frac{t^r}{e^{-s_i t}} = \lim \frac{d^r(t^r)}{d^r(e^{-s_i t})} = \lim \frac{r!}{(-s_i)^r} e^{s_i t} = 0. \quad (4.6)$$

Аналогичным образом можно показать, что и при кратных комплексных корнях с отрицательными вещественными частями соответствующие члены решения при $t \rightarrow \infty$ принимают нулевые значения.

Таким образом, наличие кратных отрицательных вещественных корней, а также кратных комплексных корней с отрицательными вещественными частями не препятствует сходимости переходного процесса.

При наличии одного нулевого корня $s_i = 0$ один из членов общего решения принимает постоянное значение C_i . В этом случае

$$\lim \sum_{i=1}^{i=n} C_i e^{s_i t} = C_i \quad (4.7)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Это означает, что свободная составляющая движения системы не затухает, но и не расходится. Система находится на границе устойчивости, если все остальные члены решения являются затухающими.

Если же нулевой корень является кратным, то уже при двух нулевых корнях в решении появляются возрастающие слагаемые, так как в этом случае сумма двух членов, соответствующая двум нулевым корням, имеет вид

$$C_i + C_{i+1} t \quad (4.8)$$

и при $t \rightarrow \infty$ второе слагаемое возрастает.

Следовательно, наличие кратных нулевых корней характеристического уравнения делает переходный процесс расходящимся, а систему неустойчивой.

Наконец, при наличии одной пары сопряженных чисто мнимых корней $S_i = j\omega$ и $S_{i+1} = -j\omega$ в общем решении будут слагаемые

$$C_i e^{j\omega t} + C_{i+1} e^{-j\omega t},$$

сумма которых приводится к виду

$$R \sin(\omega t + \varphi).$$

Очевидно, такие члены определяют незатухающие колебания выходной величины и поэтому переходный процесс не может считаться сходящимся. Вместе с тем, его нельзя считать и расходящимся. Следовательно, наличие одной пары сопряженных чисто мнимых корней характеристического уравнения соответствует границе устойчивости.

Если же сопряженные мнимые корни являются кратными, то при наличии хотя бы двух пар таких корней в решении появляются члены вида $Rt \sin(\omega t + \varphi)$, что соответствует расходящемуся переходному процессу. Различные виды свободных составляющих движения системы иллюстрируются на рис. 4.7.

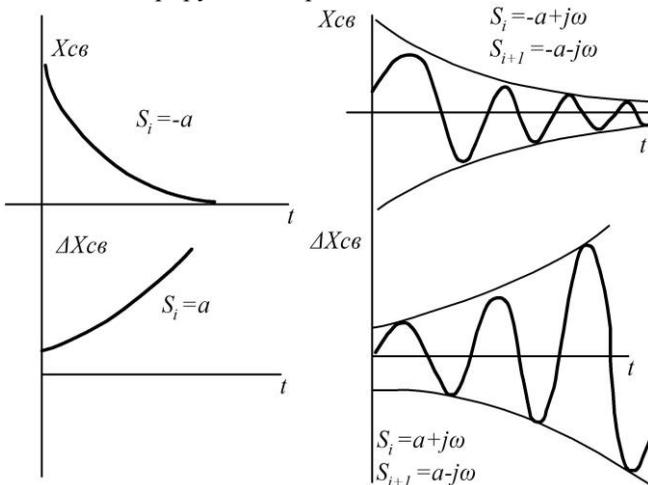


Рис. 4.7

Обобщая результаты анализа влияния вида и знаков корней характеристического уравнения на сходимость общего решения однородного уравнения, можно сформулировать следующие условия устойчивости линейной системы автоматического регулирования.

Для устойчивости линейной системы автоматического регулирования необходимо и достаточно, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения были отрицательными, а все комплексные корни имели отрицательные вещественные части.

Если хотя бы один вещественный корень или вещественная часть одной пары комплексных сопряженных корней будут положительными, а также будут в наличии кратные нулевые или часто мнимые корни, система будет неустойчива.

При одном нулевом корне, а также при одной паре чисто мнимых корней система находится на границе устойчивости.

Геометрически эти условия означают, что на комплексной плоскости S все точки, соответствующие корням характеристического уравнения, должны лежать слева от мнимой оси. Если хотя бы один корень лежит справа от нее, система неустойчива. Так же неустойчива она в случае, когда на мнимой оси располагаются два или более нулевых корня, а также две или более пары мнимых корней. Если на мнимой оси лежат один нулевой корень или одна пара мнимых корней, система находится на границе устойчивости.

Таким образом, для суждения об устойчивости системы достаточно выяснить, все ли корни характеристического уравнения являются "левыми". Для этого необходимо лишь установить знаки вещественных корней и знаки вещественных частей комплексных корней, а также определить число нулевых и число мнимых корней.

В большинстве случаев системы автоматического регулирования описываются дифференциальными уравнениями высокого порядка, поэтому нахождение корней характеристических уравнений путем их непосредственного решения сопряжено с определенными затруднениями, возникающими при решении алгебраических уравнений высокой степени.

На практике факт отрицательности вещественных частей корней характеристических уравнений устанавливают не непосредственным решением, а другими более удобными методами, которые называются критериями устойчивости.

Таким образом, критерии устойчивости позволяют составить суждение об устойчивости системы автоматического регулирования (установить факт отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения) без непосредственного решения дифференци-

альных и характеристических уравнений автоматической системы.

Вид корней, их величины и знаки зависят от коэффициентов характеристического уравнения, поэтому важно найти зависимость, которая позволит судить о корнях характеристического уравнения по его коэффициентам. На основе этой зависимости могут быть получены различные критерии устойчивости.

Существует две группы критериев устойчивости: алгебраические критерии и частотные критерии.

Алгебраическими называются критерии, которые позволяют проверить устойчивость системы при помощи алгебраических операций над коэффициентами характеристического уравнения, не прибегая к каким-либо геометрическим построениям.

Частотными называются критерии, основанные на использовании тех или иных частотных характеристик системы, то есть графиков или годографов частотных функций.

4.4. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Гурвица

К алгебраическим критериям устойчивости относятся критерии Рауса, Гурица, Стодола, Вышнеградского.

Мы рассмотрим наиболее общий из них и достаточно удобный в практическом применении - критерий Гурвица.

Критерий Гурвица формулируется следующим образом. Для устойчивости замкнутой линейной системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы n определителей Гурвица, составленных из коэффициентов характеристического уравнения $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$, при условии $a_0 > 0$ были положительны.

Главным или старшим определителем Гурвица Δn называется определитель n -го порядка, составленный из всех коэффициентов характеристического уравнения по следующим правилам:

- по главной диагонали, идущей вниз направо, выписываются последовательно n коэффициентов характеристического уравнения, начиная с a_1 , кончая a_n ;

- столбцы определителя образуются из коэффициентов уравнения, записываемых вверх от диагонального элемента - в порядке последовательного возрастания их индексов, вниз - в порядке их убывания;

- если индекс коэффициента становится меньше нуля или большим a_n , то на месте такого элемента ставится нуль.

Например, для характеристического уравнения пятого порядка

$$a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_4 s + a_5 = 0 \quad (4.9)$$

старший определитель Гурвица имеет вид

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} & & \Delta_1 & & \Delta_2 & & \Delta_3 & & \Delta_4 \\ & a_1 & & a_3 & & a_5 & & 0 & & 0 \\ & a_0 & & a_2 & & a_4 & & 0 & & 0 \\ 0 & & a_1 & & a_3 & & a_5 & & & 0 \\ 0 & & a_0 & & a_2 & & a_4 & & & a_1 \\ 0 & & 0 & & a_1 & & a_3 & & & a_5 \end{vmatrix}$$

Все остальные $n - 1$ определителей Гурвица представляют собой диагональные миноры главного определителя, отмеченные пунктирными линиями, то есть

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_1 & a_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Для проверки устойчивости системы необходимо вычислить по коэффициентам ее характеристического уравнения все n определителей Гурвица. Если все они будут положительными (при $a_0 > 0$), то система будет устойчивой, если же хотя бы один из определителей будет отрицательным, то система будет неустойчивой,

В применении к простейшим системам первого, второго и третьего порядка критерий Гурвица сводится к удовлетворению следующих требований к коэффициентам характеристического уравнения:

1. Система (звено) первого порядка имеет характеристическое уравнение $a_0s + a_1 = 0$, $a_0 > 0$. Главный и единственный определитель $\Delta_1 = a_1$, следовательно, для устойчивости системы (звена) необходимо и достаточно иметь $a_1 > 0$ при $a_0 > 0$, то есть достаточно положительности коэффициентов уравнения.

2. Система (звено) второго порядка имеет характеристическое уравнение

$$a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0.$$

Условия устойчивости по Гурвицу

$$a_0 > 0; \Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 > 0.$$

Следовательно, и в этом случае необходимо и достаточно иметь положительными все три коэффициента уравнения:

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0.$$

3. Система третьего порядка имеет характеристическое уравнение

$$a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0.$$

Условия устойчивости по Гурвицу

$$a_0 > 0; \Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0.$$

Из этих неравенств вытекает требование положительности всех коэффициентов уравнения, однако это условие является лишь необходимым, но не, достаточным. Дополнительным условием является $a_1 a_2 > a_0 a_3$, вытекающее из условия $\Delta_2 > 0$.

Таким образом, для системы третьего порядка необходимыми и достаточными являются условия

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0$$

и, кроме того, $a_1 a_2 > a_0 a_3$, то есть произведение средних коэффициентов должно быть больше произведения крайних.

Эти условия для уравнения третьего порядка были впервые сформулированы И.А. Вышнеградским в 1876 году.

4.5. Критерий А.В. Михайлова

Критерий, разработанный инженером А.В. Михайловым в 1936 г., является одним из частотных критериев и основан на свойствах годографа характеристического полинома замкнутой системы.

Пусть характеристический полином системы имеет вид

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0, \quad (4.10)$$

что соответствует линейному уравнению n -го порядка.

Дадим комплексной переменной S чисто мнимое значение $S = j\Omega$, причем вещественная частота Ω может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Физически это соответствует подаче на вход системы и получению на ее выходе установившихся гармонических колебаний всех возможных частот (на практике только при $0 < \omega < 0$).

Тогда характеристический полином имеет вид

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n = 0. \quad (4.11)$$

Четные степени $j\omega$ будут вещественными, а нечетные степени - мнимыми величинами, таким образом, в полиноме выделяются вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ части:

$$D(j\omega) = (a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 \dots) + j(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 + \dots),$$

следовательно:

$$P(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 + \dots;$$

$$Q(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 + \dots$$

Функции $D(j\omega)$, $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ назовем функциями Михайлова, при этом

$$D(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Как и всякую комплексную величину, функцию $D(j\omega)$ можно записать в показательной форме:

$$D(j\omega) = R(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.12)$$

где

$$P(\omega) = \operatorname{mod}|D(j\omega)| = \sqrt{|P(\omega)|^2 + |Q(\omega)|^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arg|D(j\omega)| = \operatorname{arctg} \left| \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right|.$$

Функция $D(j\omega)$ на комплексной плоскости изображается в виде некоторой кривой (рис.4.8), описываемой концом вектора $P(\omega)$ при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$, то есть представляет собой годограф вектора $P(\omega)$ функции $D(j\omega)$. Этот годограф называется годографом характеристического полинома системы или годографом Михайлова.

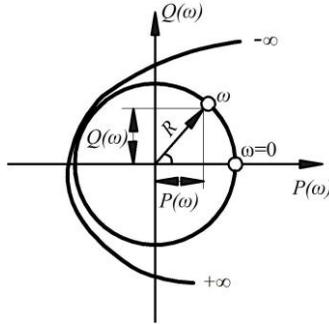


Рис. 4.8

Прямоугольными координатами точек годографа являются величины $P(\omega)$ и $Q(\omega)$.

Начальной точкой годографа, соответствующей частоте $\omega = 0$, является точка с координатами $P(0) = a_n$ и $Q(0) = 0$, следовательно, годограф Михайлова начинается на вещественной оси на расстоянии a_n от начала координат.

При изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ годограф симметричен относительно вещественной оси, поэтому нет необходимости рассматривать изменение функции во всем диапазоне частот от $-\infty$ до $+\infty$; достаточно рассмотреть лишь область положительных частот от $\omega = 0$ до $\omega \rightarrow 0$.

Свойства годографа характеристического полинома системы связаны с распределением его корней, поэтому вид годографа позволяет судить об устойчивости системы.

Для выяснения этих свойств положим, что характеристическое уравнение (или характеристический полином) имеет корни s_1, s_2, \dots, s_n . Тогда характеристический полином системы может быть представлен в виде произведения

$$D(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n),$$

а функция Михайлова будет иметь вид

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)...(j\omega - s_n). \quad (4.13)$$

В общем случае каждый из n сомножителей $(j\omega - s_i)$ будет комплексной величиной, которую мы обозначим Z_i :

$$Z_i = j\omega - s_i,$$

или в показательной форме

$$Z_i = r_i e^{j\varphi_i}.$$

Поскольку функция $D(j\omega)$ представляет собой произведение a_0 на все Z_i , то аргумент Φ_n этой функции будет равен сумме аргументов φ_i всех n сомножителей Z_i .

Критерий Михайлова основывается на закономерности изменения аргумента $\Phi_n(\omega)$ функции $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ . Эта закономерность зависит от закономерностей изменения аргументов φ_i отдельных сомножителей $Z_i = j\omega - s_i$ и тем самым от вида и знаков корней характеристического полинома системы.

Будем помнить при этом, что устойчивость системы обеспечивается лишь при отрицательных вещественных частях всех корней характеристического уравнения.

Выясним закономерности изменения аргумента φ_i сомножителей $Z_i = j\omega - s_i$ функции Михайлова для различных видов корней характеристического полинома системы.

Пусть какой-либо из корней характеристического полинома будет вещественным отрицательным, то есть "левым" корнем $s_i = -\alpha_i$. Сомножитель Z_i , соответствующий такому корню, будет равняться $Z_i = \alpha + j\omega$ или в показательной форме

$$Z_i = r_i e^{j\varphi_i},$$

где

$$r_i = \text{mod}|Z_i| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2};$$

$$\varphi_i = \arg|Z_i| = \text{arctg} \frac{\omega}{\alpha}.$$

Поскольку $\alpha_i - \text{const}$, функция Z_i изображается на комплексной плоскости прямой, параллельной мнимой оси, отстоящей от нее на расстоянии α_i (рис.4.9). Значению $\omega = 0$ соответствует точка с абсциссой α_i на вещественной оси; при $\omega \rightarrow \infty$ прямая уходит в бесконечность в верхней полуплоскости.

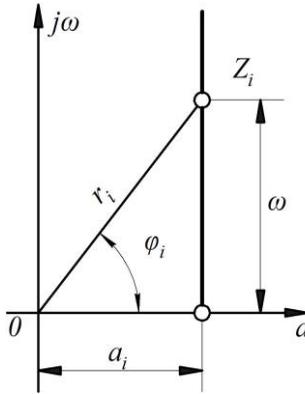


Рис. 4.9

Таким образом, годографом функции Z_i , или годографом вектора r_i является полупрямая, параллельная мнимой оси, лежащая при положительных частотах в верхней полуплоскости (см. рис. А. 9).

Из зависимости

$$\varphi_i(\omega) = \text{arctg} \frac{\omega}{\alpha_i}.$$

следует, что при изменении ω от 0 до ∞ угол φ_i монотонно увеличивается от $\varphi_i = 0$ до $\varphi_i = \frac{\pi}{2}$, а вектор r_i монотонно поворачивается в положительном направлении - против часовой стрелки - на угол 90° .

Таким образом, каждому вещественному отрицательному корню характеристического полинома при изменении ω от 0 до ∞ соответствует поворот вектора характеристического полинома на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Если таких корней k , то вектор должен повернуться на угол $\frac{\pi}{2}k$, а годограф должен последовательно пройти

k квадрантов, имея начало в точке на положительной ветви вещественной оси и поочередно пересекая мнимую и вещественную оси, уходя в k -ом квадранте в бесконечность. Очевидно, если бы вещественный корень был положительным, то вращение вектора r_i происходило бы в отрицательном направлении.

Рассмотрим теперь случай комплексных сопряженных корней с отрицательными вещественными частями.

Пара таких корней имеет вид

$$s_i = -\alpha_i + j\beta \quad s_{i+1} = -\alpha_i - j\beta.$$

Следовательно, сомножители функции Михайлова, соответствующие этим корням

$$Z_i = j\omega - s_i = \alpha_i + j(\omega - \beta),$$

$$Z_{i+1} = j\omega - s_{i+1} = \alpha_i + j(\omega + \beta),$$

а их произведение

$$Z_i Z_{i+1} = (\alpha_i^2 + \beta^2 - \omega^2) + 2j\alpha_i\omega.$$

Искомый аргумент φ_i этого произведения

$$\varphi_i = \arctg \frac{2\alpha_i\omega}{\alpha_i^2 + \beta^2 - \omega^2}. \quad (4.15)$$

Полученное выражение показывает, что аргумент Φ_i с изменением ω от 0 до ∞ монотонно возрастает от $\Phi_i = 0$ при $\omega = 0$ до $\Phi_i = \pi$ при $\omega \rightarrow \infty$, что отвечает вращению вектора Михайлова в положительном направлении на угол 180° .

Таким образом, каждой паре комплексных сопряженных корней характеристического полинома с отрицательными вещественными частями соответствует поворот вектора Михайлова на угол π в положительном направлении.

Следовательно, если число пар комплексных сопряженных корней характеристического полинома с отрицательными вещественными частями равняется P , то вектор Михайлова должен повернуться на угол $P\pi$, а годограф должен последовательно пройти $2P$ квадрантов.

Можно показать, что при положительных вещественных частях комплексных сопряженных корней вращение вектора происходит в отрицательном направлении - по часовой стрелке.

Рассмотренные выше закономерности изменения аргументов сомножителей функции $D(j\omega)$ приводят к следующим заключениям:

- отрицательным вещественным корням характеристического полинома системы, а также комплексным сопряженным корням с отрицательными вещественными частями соответствует монотонное вращение вектора Михайлова в положительном направлении против часовой стрелки, а поскольку такие корни отвечают устойчивости системы, то монотонность вращения вектора Михайлова в положительном направлении является необходимым условием устойчивой системы;

- корням полинома с положительными вещественными частями соответствует вращение вектора Михайлова по часовой стрелке, а так как наличие хотя бы одного такого корня или пары комплексных корней является признаком неустойчивости системы, то и поворот вектора по часовой стрелке на какой угодно угол служит необходимым и достаточным признаком неустойчивой системы.

Для определения достаточного условия устойчивости найдем суммарный угол поворота $\Delta\varphi$ вектора функции $D(j\omega)$ устойчивой системы как сумму аргументов Φ_i сомножителей этой функции.

Если характеристическое уравнение устойчивой системы имеет степень n , то есть имеет n корней, из которых k корней веще-

ственных отрицательных, а остальные $(n-k)$ корней или $\frac{1}{2}(n-k)$ пар корней комплексных сопряженных с отрицательными вещественными частями, то

$$\Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i = k \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(n-k)\pi = n \frac{\pi}{2}. \quad (4.16)$$

Таким образом, суммарный угол поворота вектора Михайлова для устойчивой системы n -го порядка должен равняться $n \frac{\pi}{2}$, а учитывая направление его вращения, можно сказать, что годограф характеристического полинома устойчивой системы n -го порядка должен последовательно пройти против часовой стрелки n , но не более и не менее квадрантов комплексной плоскости.

В соответствии с изложенным, критерий А.В. Михайлова можно сформулировать следующим образом: для устойчивой линейной системы автоматического регулирования n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора характеристического полинома системы при изменении частоты от 0 до ∞ , начинаясь на положительной вещественной оси, последовательно и монотонно проходил против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, нигде не обращаясь в нуль.

Годографы, удовлетворяющие этим условиям для систем различных порядков от 1 до 6 показаны на рис. 4.10. Такие годографы называются правильными.

Неустойчивым системам соответствуют неправильные годографы. Примеры неправильных годографов приведены на рис. 4.11.

Так как в случае правильного годографа декартовы координаты $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, его точек обращаются в нуль строго поочередно и притом точно n раз (рис. 4.12), то, построив графики функций

$$P(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 + \dots;$$

$$Q(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 + \dots$$

в прямоугольных системах координат $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ (рис. 4.13), мы можем судить об устойчивости системы по чередованию нулей этих функций: устойчивой системе соответствует правильное чередование нулей функций $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, а нарушение правильности чередования свидетельствует о неустойчивости системы.

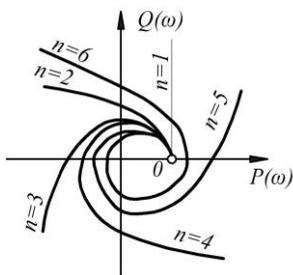


Рис. 4.10

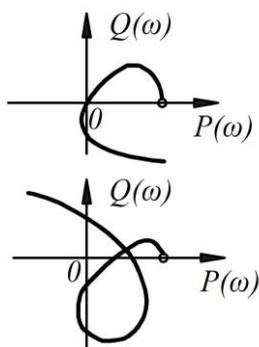


Рис. 4.11

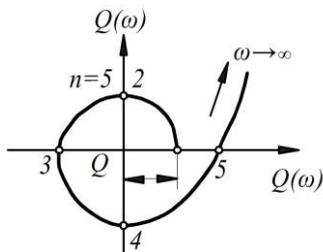


Рис. 4.12

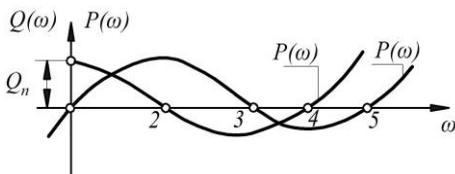


Рис. 4.13

4.6. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости. Критерий устойчивости Найквиста

4.6.1. Физические основы критерия

Рассмотренные выше критерии устойчивости были чисто математическими, тогда как критерий устойчивости Найквиста больше опирается на физические представления.

Как известно, регулятор должен быть подсоединен к объекту регулирования таким образом, чтобы компенсировать изменение регулируемой величины, возникшее под влиянием возмущений. Такое дей-

стве регулятора обеспечивается только в том случае, если направление выходной величины системы при осуществлении главной обратной связи (при подаче ее на вход регулятора) изменяется на противоположное.

Разорвем главную обратную связь, получим разомкнутую систему (рис. 4.14). Если на вход разомкнутой системы будем подавать гармонические колебания с неизменной амплитудой A и изменяющейся частотой Ω , то при данной частоте в установившемся режиме на выходе получим гармонические колебания той же частоты, однако амплитуда и фаза выходных колебаний будут в общем случае отличаться от амплитуды и фазы входных колебаний.

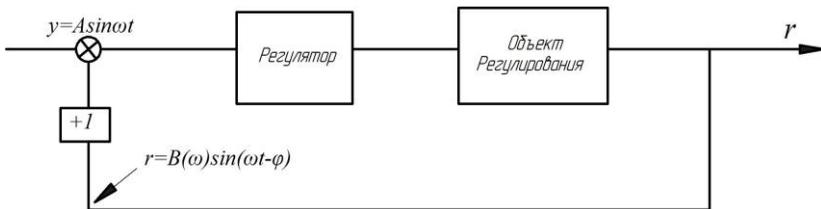


Рис. 4.14

Более того, при неизменной амплитуде и фазе входных колебаний амплитуда и фаза выходных колебаний изменяется при изменении частоты Ω . Зависимость между амплитудами и фазами входных и выходных колебаний в установившемся режиме при различных частотах определяется амплитудно-фазовой характеристикой системы. Всякая амплитудно-фазовая характеристика показывает усиление амплитуды и сдвиг фазы выходных колебаний по отношению к входным.

Действительно, модуль АФХ $R(\omega) = \frac{B(\omega)}{A}$ показывает, во сколько раз амплитуда выходного сигнала больше (меньше) входного, аргумент $\varphi(\omega)$ модуля $R(\omega)$ характеризует сдвиг по фазе выходных колебаний относительно входных (рис. 4.15).

Если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходит через точку $(-1; j = 0)$ (рис. 4.16), то это значит, что выходные колебания при некоторой частоте Ω_c имеют амплитуду, равную амплитуде входных колебаний, и сдвинуты по фазе на угол $-\pi$ относительно входного гармонического колебания, фаза которого равна нулю.

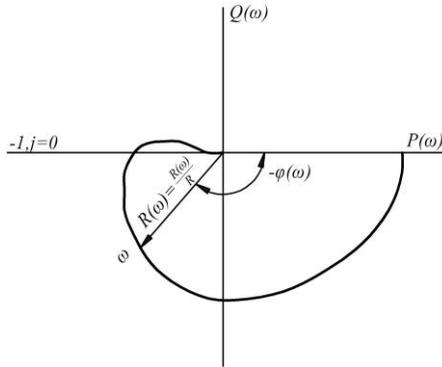


Рис. 4.15

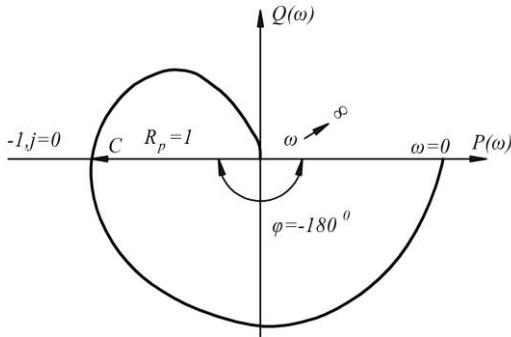


Рис. 4.16

Так как при замыкании системы обратная связь осуществляет изменение направления выходного сигнала на противоположное, то при подаче на вход выходные колебания точно совпадут по фазе с входными и в замкнутой системе установятся незатухающие колебания с частотой Ω_c и амплитудой, равной амплитуде входного сигнала, который в этом случае может быть вообще отключен. Незатухающие собственные колебания в этом случае поддерживаются воздействием на систему внешних сил (например, источников энергии) в определенные моменты времени, определяемые самой системой, и называются автоколебаниями.

Таким образом, для возникновения в замкнутой системе автоколебаний необходимо выполнить два условия самовозбуждения:

- во-первых, амплитуда колебаний сигнала обратной связи должна быть равна амплитуде входных колебаний, то есть при прохождении колебаний по замкнутой цепи системы их амплитуда должна сохранить неизменные значения (баланс амплитуд);

- во-вторых, гармонические колебания, представляющие собой сигнал обратной связи, должны совпадать по фазе с входным гармоническим сигналом, то есть должна иметь место положительная обратная связь по гармоническим колебаниям (баланс фаз).

Если параметры системы таковы, что при ее свободных колебаниях с частотой Ω_c выполняются условия самовозбуждения, то при действии на систему возмущения возникшие в ней свободные колебания с частотой Ω_c являются незатухающими (автоколебаниями).

Из вышеизложенных рассуждений следует, что если в замкнутой системе выполняются условия самовозбуждения (возникновение незатухающих собственных колебаний), то АФХ разомкнутой системы должна проходить через точку с координатами $(-1; j=0)$.

Если АФХ разомкнутой системы пересекает отрицательную ось абсцисс правее точки $(-1; j=0)$ (см. рис. 4.15), то при $\varphi(\omega_\pi) = -180^\circ R(\omega_\pi) < 1$. Амплитуда выходных колебаний убывает, что говорит о затухающем переходном процессе, то есть об устойчивости системы. Наоборот, если АФХ разомкнутой системы пересекает отрицательную ось абсцисс левее точки $(-1; j=0)$, то при $\varphi(\omega_\pi) = -180^\circ R(\omega_\pi) > 1$. Амплитуда выходных колебаний больше амплитуды входных (рис. 4.17).

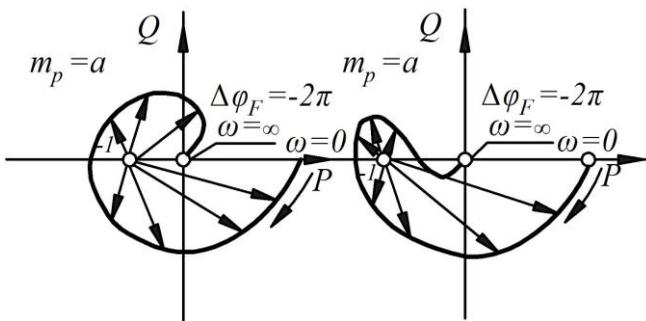


Рис. 4.17

Это значит, что при прохождении колебаний по данной цепи их амплитуда увеличивается и, следовательно, при замыкании системы амплитуда свободных колебаний в ней при каждом повторном прохождении по цепи с течением времени будет все больше увеличиваться.

Выше уже говорилось о том, что система с затухающими собственными колебаниями (т.е. затухающим переходным процессом) является устойчивой, а с расходящимися неустойчивой.

Отсюда вытекает амплитудно-фазовый критерий устойчивости: для устойчивости замкнутой системы требуется, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой цепи этой системы не охватывала точку с координатами $(-1; j = 0)$.

Следует заметить, что вышеприведенная формулировка критерия пригодна только в том случае, если разомкнутая система устойчива либо находится на границе устойчивости.

Если же разомкнутая система неустойчива, то формулировка критерия изменяется, становясь более сложной.

При прохождении амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через точку с координатами $(-1; j = 0)$ замкнутая система находится на границе устойчивости.

Чтобы замкнутая система была не только устойчивой, но и имела бы хорошее качество затухания переходного процесса без сильных колебаний (без большого перерегулирования), нужно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика была достаточно удалена вправо от критической точки $(-1; j = 0)$. Количественные показатели устойчивости, а также качество переходного процесса могут быть определены по степени этого удаления.

Выше приведены физические предпосылки амплитудно-фазового критерия устойчивости. Эти же предпосылки могут быть облечены в строгую математическую форму, которая позволяет дать формулировку критерия не только для простейшего случая (когда разомкнутая система устойчива), но и для общего случая, когда разомкнутая система неустойчива.

4.6.2. Математическая трактовка амплитудно-фазового критерия устойчивости

Предположим, что нам задана передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{Q(s)}{D(s)}, \quad (4.17)$$

где $x(s)$ - изображение выходной величины разомкнутой системы;

$y(s)$ - изображение входной величины разомкнутой системы;

$Q(s)$ - оператор воздействия разомкнутой системы;

$D(s)$ - собственный оператор разомкнутой системы (он же характеристический полином разомкнутой системы).

Как правило, порядок оператора воздействия всегда ниже порядка собственного оператора, поэтому порядок передаточной функции определяется собственным оператором. Придавая комплексной переменной S чисто мнимое значение $j\omega$, получим из передаточной функции аналитическое выражение для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы

$$W_p(j\omega) = \frac{Q_p(j\omega)}{D_p(j\omega)}. \quad (4.18)$$

Введем функцию $F(j\omega) = 1 + W_p(j\omega)$. С учетом (4.18) можно записать

$$F(j\omega) = 1 + \frac{Q_p(j\omega)}{D_p(j\omega)} = \frac{D_p(j\omega) + Q_p(j\omega)}{D_p(j\omega)}. \quad (4.19)$$

Числитель дроби (4.19) представляет собой характеристический полином замкнутой системы, у которого переменная S заменена на $j\omega$, то есть функцию Михайлова для замкнутой системы.

Знаменатель дроби также является функцией Михайлова, но для разомкнутой системы. Записывая комплексные функции в показательной форме, получим

$$F(j\omega) = R_F(\omega)e^{j\varphi_F(\omega)} = \frac{R_3(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)}}{R_p(\omega)e^{j\varphi_p(\omega)}} = \frac{R_3(\omega)}{R_p(\omega)} = e^{j[\varphi_3(\omega) - \varphi_p(\omega)]}. \quad (4.20)$$

- В приведенном выражении
- модуль комплексной функции;
 - аргумент функции;

- модуль и аргумент функции Михайлова для замкнутой системы;
- модуль и аргумент функции Михайлова для разомкнутой системы.

Следовательно, модуль вновь введенной функции $F(j\omega)$ равен отношению модулей функции Михайлова замкнутой и разомкнутой системы, а аргумент функции $F(j\omega)$ равен разности аргументов функции Михайлова замкнутой и разомкнутой системы:

$$R_F(\omega) = \frac{R_3(\omega)}{R_p(\omega)}, \quad \varphi_F(\omega) = \varphi_3(\omega) - \varphi_p(\omega). \quad (4.21)$$

Если разомкнутая система устойчива (т.е. если корни характеристического полинома разомкнутой системы $D_p(s) = 0$ имеют отрицательную вещественную часть), то при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ приращение угла поворота вектора Михайлова разомкнутой системы равно

$$\Delta\varphi_p = \frac{\pi}{2}n,$$

где n - порядок характеристического полинома разомкнутой системы.

Если замкнутая система тоже устойчива, то при изменении частоты от 0 до ∞ вектора Михайлова замкнутой системы повернется в том же направлении на угол $\frac{\pi}{2}n$, так как порядок характеристического полинома замкнутой системы равен порядку характеристического полинома разомкнутой системы.

Результирующий угол поворота модуля функции $F(j\omega)$

$$\Delta\varphi_F = \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}n = 0. \quad (4.22)$$

Если при устойчивой разомкнутой системе замкнутая система окажется неустойчивой, то при изменении частоты от 0 до ∞ вектор Михайлова замкнутой системы повернется на угол, отличный от $\frac{\pi}{2}n$,

и результирующий угол поворота изображающего вектора функции $F(j\omega)$ не будет равен нулю. Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать следующее положение: если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от 0 до ∞ результирующий угол поворота изображающего вектора функции $F(j\omega)$ равен нулю.

Найдем годограф вектора функции $F(j\omega)$ и его связь с годографом частотной функции разомкнутой системы, то есть амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы. Для этого запишем обе функции в показательной форме:

$$\left. \begin{aligned} W_p(j\omega) &= R_p(\omega)e^{j\varphi_p(\omega)}; \\ F(j\omega) &= R_F(\omega)e^{j\varphi_F(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Пусть амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы, то есть годограф вектора $R_p(\omega)$ функции $W_p(j\omega)$ имеет вид, указанный на рис. 4.18. Полусом этого годографа служит начало системы прямоугольных координат $P(\omega)$, $jQ(\omega)$. Поскольку функция $F(j\omega)$ на единицу больше функции $W_p(j\omega)$, большей на единицу является только ее вещественная часть, а мнимые части одинаковы.

Действительно, в алгебраической форме

$$W_p(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

поэтому

$$F(j\omega) = [1 + P(\omega)] + jQ(\omega). \quad (4.24)$$

Следовательно, годографом вектора $R_F(\omega)$ функции $F(j\omega)$ является та же амплитудно-фазовая характеристика, однако полюсом годографа служит точка C вещественной оси $P(\omega)$ с абсциссой (-1) (см. рис. 4.18).

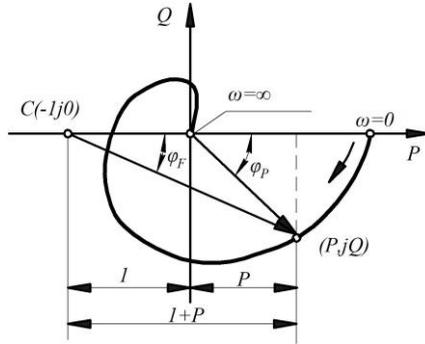


Рис. 4.18

Из рис.4.18 следует, что результирующий угол поворота вектора $R_F(\omega)$ при изменении частоты в пределах $0 < \omega < \infty$ может быть равен нулю только в том случае, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывает точку C , координаты которой $(-1; j = 0)$, что подтверждается также рисунком 4.19, на котором приведены различные формы АФХ.

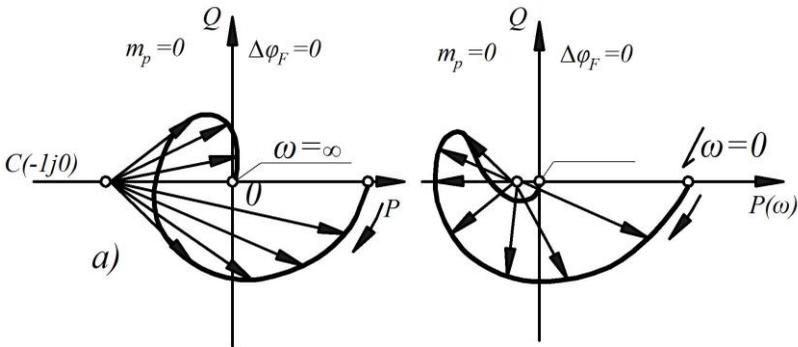


Рис. 4.19

Если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы охватывает точку $(-1; j = 0)$, то при изменении частоты ω от нуля до бесконечности результирующий угол поворота вектора $R_F(\omega)$ не будет равен нулю (см. рис. 4.17).

Следовательно, при устойчивой разомкнутой системе амплитудно-фазовый критерий устойчивости может быть сформулирован следующим образом: если разомкнутая система устойчива, то для ее устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку с координатами $-1; j = 0$. Эту точку называют полюсом устойчивости или критической точкой АФХ.

В такой формулировке амплитудно-фазовый критерий устойчивости приходится применять наиболее часто, так как в большинстве случаев разомкнутая система устойчива.

Можно показать также, что приведенная формулировка справедлива и при одном нулевом корне характеристического уравнения разомкнутой системы, то есть в случае, когда разомкнутая система находится на границе устойчивости. Учитывая последнее замечание, амплитудно-фазовый критерий устойчивости (в простейшем случае) можно сформулировать так: если все корни характеристического уравнения разомкнутой системы имеют отрицательные вещественные части или если имеется один нулевой корень, а вещественные части остальных корней отрицательны, для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала бы точку с координатами $(-1; j = 0)$.

Как отмечалось выше, результирующий угол поворота вектора $R_F(\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ равен разности $\Delta\varphi_3$ и $\Delta\varphi_p$ при изменении частоты в тех же пределах:

$$\Delta\varphi_F = \Delta\varphi_3 - \Delta\varphi_p,$$

где $\Delta\varphi_F$ - изменение соответствующего аргумента при изменении частоты от 0 до ∞ .

Пусть замкнутая система устойчива, а разомкнутая - неустойчива и ее характеристическое уравнение n -го порядка имеет m_p корней с положительной вещественной частью. Тогда количество корней с отрицательной вещественной частью в характеристическом полиноме разомкнутой системы составляет:

$$n - m_p.$$

Каждый корень с отрицательной вещественной частью дает поворот вектора Михайлова на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки при изменении частоты от 0 до ∞ , а каждый корень с положительной вещественной частью дает поворот вектора Михайлова при том же интервале изменения частоты на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке. Следовательно,

$$\Delta\varphi_3 = \frac{\pi}{2}n;$$

$$\Delta\varphi_p = (n - m_p)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}m_p.$$

Результирующий угол поворота вектора $R_{pc}(\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ равен

$$\Delta\varphi_F = \Delta\varphi_3 - \Delta\varphi_p = \frac{\pi}{2}n - (n - m_p)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}m_p = \pi m_p. \quad (4.25)$$

Следовательно, если разомкнутая система неустойчива и имеет m_p корней с положительной вещественной частью, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы изображающий вектор $R_F(\omega)$ частотной функции $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ повернулся против часовой стрелки на угол, равный πm_p . Таким образом, для оценки устойчивости замкнутой системы автоматического регулирования достаточно, зная число m_p правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы, определить по амплитудно-фазовой характеристике угол $\Delta\varphi_F$ поворота вектора $R_F(\omega)$ при движении его конца в направлении от $\omega = 0$ до $\omega \rightarrow \infty$ и сопоставить найденное значение $\Delta\varphi_F$ с произведением πm_p . Если $\Delta\varphi_F$ окажется равным πm_p , замкнутая система устойчива. При $\Delta\varphi_F \neq \pi m_p$ система неустойчива.

4.7. Логарифмический критерий устойчивости

Логарифмический критерий устойчивости является одной из возможных интерпретаций амплитудно-фазового критерия. Прежде чем рассматривать логарифмический критерий, покажем, что суждение об устойчивости замкнутой системы можно составить на основании взаимного расположения и вида амплитудной и фазовой частотных характеристик разомкнутой системы.

Напомним, что амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы представляет собой зависимость модуля изображающего вектора амплитудно-фазовой характеристики от частоты $R_p(\omega)$.

Фазовая частотная характеристика разомкнутой системы представляет собой зависимость аргумента изображающего вектора амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы от частоты $\varphi_p(\omega)$. Эти характеристики могут быть построены либо экспериментально, либо аналитически по известным формулам:

$$R_p(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)};$$

либо графоаналитически, если задана амплитудно-фазовая характеристика на комплексной плоскости.

Пусть амплитудно-фазовая характеристика устойчивой разомкнутой системы имеет вид, указанный на рис. 4.18.

Так как она не охватывает точку с координатами $(-1; j=0)$, то замкнутая система, соответствующая данной разомкнутой, также устойчива. Построим с помощью приведенной АФХ амплитудную и фазовую частотные характеристики, расположив их одна под другой. При этом вверху строится амплитудная частотная характеристика (АЧХ), под ней - фазовая частотная характеристика (ФЧХ). Амплитудная частотная характеристика строится в координатных осях $R_p(\omega)$, ω ; фазовая частотная характеристика - в координатных осях $\varphi_p(\omega)$, ω .

При построении АЧХ по оси ординат откладывается длина вектора $R_p(\omega)$ (модуль), снятая с заданной АФХ при определенной частоте. По оси ординат ФЧХ откладывается аргумент (фазовый угол) соответствующего вектора при той же частоте. По оси абсцисс на обоих графиках откладывается частота. Построение по заданной АФХ приведено на рис. 4.20.

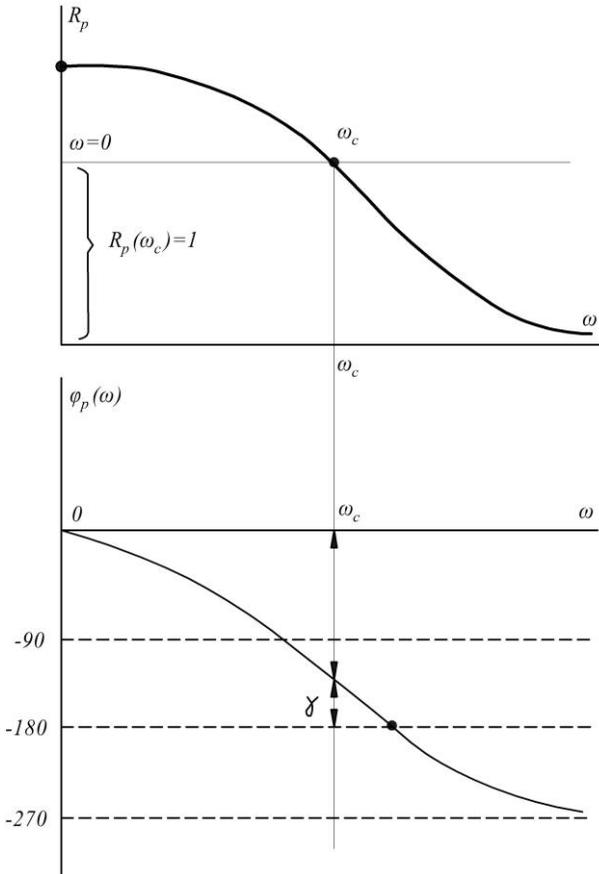


Рис. 4.20

Если бы замкнутая система находилась на границе устойчивости, то АФХ разомкнутой системы проходила бы через точку C с координатами $(-1; j = 0)$ (см. рис. 4.16). В этом случае единичному вектору $R_p = 1$, проведенному из начала координат в точку C , соответствовал бы фазовый угол, равный -180° .

При устойчивой замкнутой системе АФХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс правее точки C , поэтому единичному вектору $R_p = 1$, проведенному из начала координат, соответствует отри-

цательный фазовый угол $\varphi(\omega_C)$, по абсолютной величине меньший 180° (рис. 4.21). На основании вышеизложенного можно амплитудно-фазовый критерий сформулировать таким образом: если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы единичному вектору, проведенному из начала координат АФХ разомкнутой системы, соответствовал бы отрицательный фазовый угол, по абсолютной величине меньший 180° . Заметим, что частотам, соответствующая единичному вектору $R_p(\omega_C) = 1$, называется частотой среза и обозначается ω_C .

Приведенная формулировка амплитудно-фазового критерия устойчивости может быть использована при определении устойчивости замкнутой системы по виду и взаимному расположению амплитудной и фазовой частотных характеристик разомкнутой системы, представленных на рис.4.20. Для этого на амплитудно-частотной характеристике вверх от начала координат откладываем в выбранном для построения АЧХ масштабе единичный вектор (модуль) $R_p = 1$ и находим соответствующую ему частоту среза, как указано на рис. 4.20.

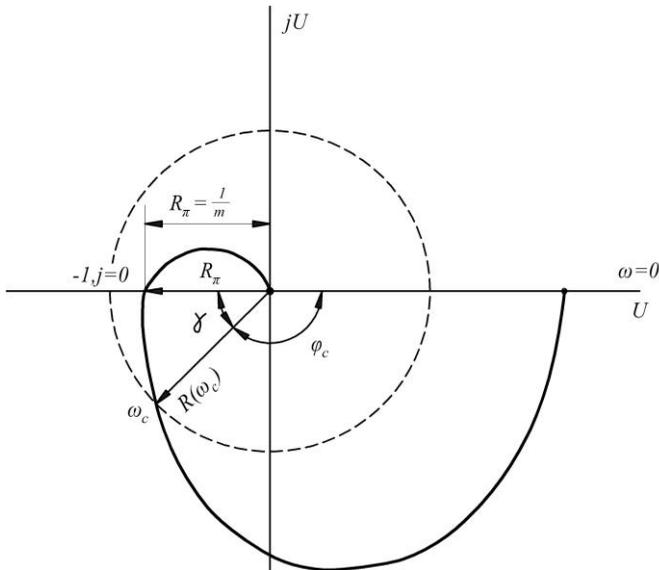


Рис. 4.21

Если частоте среза соответствует отрицательный фазовый угол (определяемый по ФЧХ), меньший по абсолютной величине 180° , то замкнутая система устойчива.

Логарифмические частотные характеристики - это те же амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики, представленные в логарифмическом и полулогарифмическом масштабе. Следовательно, по их виду и взаимному расположению также можно судить об устойчивости замкнутой системы. Логарифмические амплитудные характеристики строятся в координатных осях L_p и $\lg \omega$. Логарифмическая фазовая характеристика - в осях Φ_p , $\lg \omega$.

По оси ординат ЛАХ откладывается модуль изображающего вектора $R_p(\omega)$ в логарифмическом масштабе - в децибелах:

$$L_p(\omega) = 20 \lg R_p(\omega).$$

В интервале частот $0 < \omega < \omega_C$, где $R_p(\omega) > 1$,

$$L_p(\omega) > 0.$$

При частоте среза ω_C , которой соответствует единичный модуль амплитудной характеристики $L_p(\omega_C) = 20 \lg 1 = 0$, ЛАХ пересекает ось абсцисс.

В интервале частот $\omega_C < \omega < \infty$, где модуль амплитудной характеристики $R_p(\omega) < 1$,

$$L_p(\omega) = 20 \lg R_p(\omega) < 0.$$

Что касается логарифмической фазовой характеристики, то она мало отличается от ФЧХ, построенной в натуральных числах. На рис. 4.22 приведены ЛАХ и ЛФХ, соответствующие АЧХ и ФЧХ, представленным на рис. 4.20.

Учитывая, что при частоте среза ω_C модуль амплитудной характеристики равен 1, логарифмический критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом: если разомкнутая система устойчива или находится на границе устойчивости, то для устойчи-

ности замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы частоте среза ЛАХ соответствовал бы отрицательный фазовый угол, по абсолютной величине меньший 180° .

Выше предполагалось, что АФХ устойчивой разомкнутой системы пересекает отрицательную полуось абсцисс правее точки $C(-1; j=0)$ и только один раз. В соответствии с этим были построены ЛАХ и ЛФХ и сформулирован логарифмический критерий устойчивости.

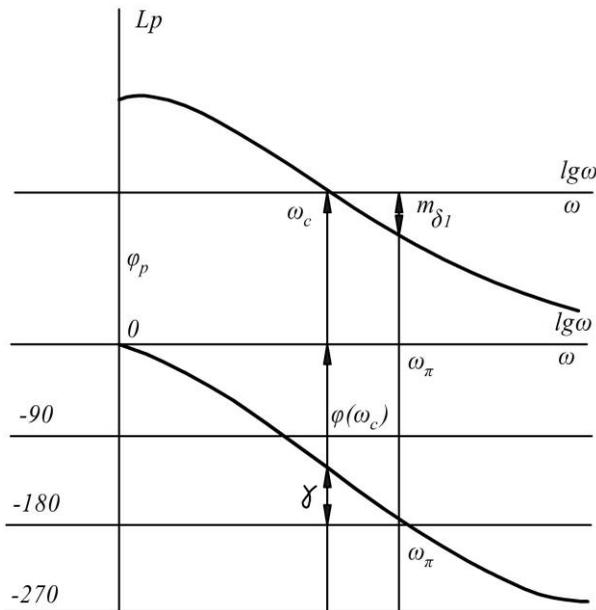


Рис. 4.22

Между тем, АФХ разомкнутой системы может, не охватывая полюс устойчивости (точку с координатами $(-1; j=0)$), пересекать несколько раз отрицательную вещественную полуось левее точки $(-1; j=0)$ и при этом замкнутая система будет устойчивой (рис. 4.23). Применительно к логарифмическим характеристикам это означает, что фазовая характеристика несколько раз пересекается с линией $\Phi_p = -\pi$ при положительных значениях ЛАХ, то есть при частотах,

меньших частоты среза Ω_C (рис. 4.24). Поэтому для оценки устойчивости замкнутой системы по логарифмическим частотным характеристикам достаточно рассмотреть лишь течение (ход) логарифмической фазовой характеристики в области положительных значений логарифмических амплитуд, то есть при $L_p > 0$, $R_p > 1$. Как известно, при устойчивой разомкнутой системе для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку с координатами $(-1; j=0)$.

Это возможно лишь в случаях, когда она либо ни разу не пересекает ось абсцисс левее точки $(-1; j=0)$ (см. рис. 4.21), либо пересекает ее левее этой точки, но так, что число пересечений снизу вверх равняется числу пересечений сверху вниз (см. рис. 4.23).

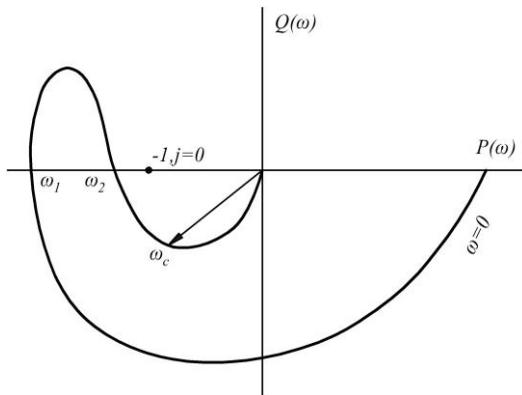


Рис. 4.23

Применительно к логарифмическим характеристикам эти условия можно сформулировать следующим образом: если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы в области положительных ординат логарифмической амплитудной частотной характеристики логарифмическая фазовая характеристика пересекала линию $\Phi_p = -\pi$ равное число раз сверху вниз и снизу вверх или, что то же, разность числа переходов логарифмической фазовой характеристики через прямую $\Phi_p = -\pi$ сверху вниз и снизу вверх должна равняться нулю.

Эта формулировка логарифмического критерия устойчивости более общая по сравнению с вышеприведенной для простейшего случая, когда АФХ не распространяется левее полюса устойчивости. Однако и она носит частный характер и справедлива только при устойчивой разомкнутой системе ($m_p = 0$).

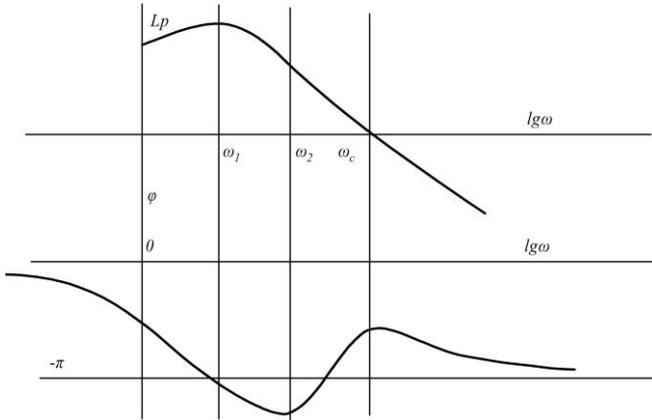


Рис. 4.24

В случае неустойчивой разомкнутой системы ($m_p \neq 0$) устойчивость замкнутой системы обеспечивается при условии, что при положительных значениях L_p число переходов логарифмической фазовой характеристики через прямую $\varphi_p = -\pi$ снизу вверх на $\frac{m_p}{2}$ больше числа переходов сверху вниз.

Логарифмическая амплитудная характеристика, показанная на рис. 4.25, имеет две области частот, в которых $L_p > 0$. Фазовая логарифмическая характеристика проходит в этих областях через прямую $\varphi_p = -\pi$ сверху вниз один раз (точка 1), а снизу вверх - два раза (точки 2 и 3), то есть число переходов снизу вверх на один больше числа переходов сверху вниз. Следовательно, замкнутая система может быть устойчива только в том случае, если $\frac{m_p}{2} = 1$, то есть при $m_p = 2$. Во

всех других случаях и, в частности, при $m_p = 0$, когда разомкнутая система устойчива, замкнутая система была бы неустойчивой. Вышеприведенные рассуждения базируются на согласовании формулировки амплитудно-фазового критерия устойчивости в случае неустойчивой разомкнутой системы с логарифмическими характеристиками разомкнутой системы.

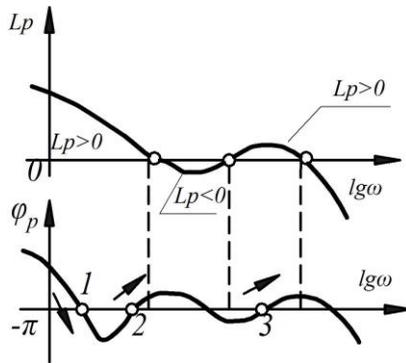


Рис. 4.25

4.8. Запасы устойчивости систем автоматического регулирования

Запас устойчивости является количественной характеристикой устойчивости системы автоматического регулирования. Для того чтобы надежно обеспечить устойчивую работу системы, необходимо при расчете системы ориентироваться на заданное значение запаса устойчивости.

Запас устойчивости может быть выражен различными способами в зависимости от того, какой критерий принят в основу расчета.

Если используется критерий Михайлова и нахождение системы на границе устойчивости обозначается тем, что годограф Михайлова проходит через начало координат, запас устойчивости задается как радиус окружности с центром в начале координат (рис. 4.26).

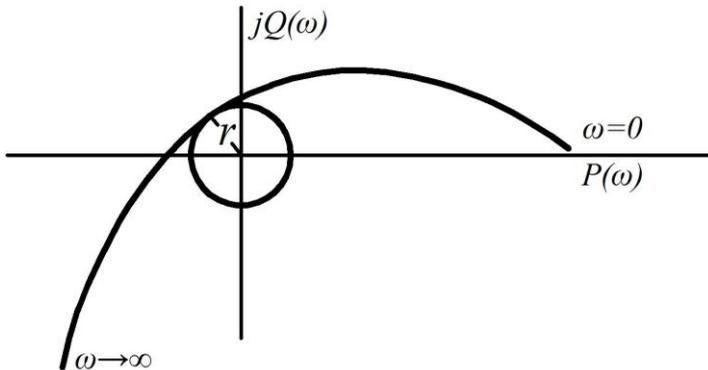


Рис. 4.26

Для амплитудно-фазового критерия критической является точка с координатами $(-1; j = 0)$. Если АФХ разомкнутой системы проходит через точку, то замкнутая система находится на границе устойчивости. В этом случае единичному радиусу - вектору АФХ разомкнутой системы соответствует фазовый угол, равный -180° . Для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы единичному радиусу - вектору АФХ разомкнутой системы соответствовал отрицательный фазовый угол, по абсолютной величине меньший 180° . Для определения фазового угла $\varphi(\omega_C)$, соответствующего единичному радиусу-вектору, необходимо, как показано на рис. 4.21, через точку $(-1; j = 0)$ провести окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Угол между положительной ветвью вещественной оси и направлением радиуса-вектора $R_p = 1$, проведенного из начала координат к точке пересечения АФХ с окружностью, и будет искомым углом $\varphi(\omega_C)$.

Угол γ (см. рис. 4.21), определяющий удаление фазового угла от критического угла $-\pi$, соответствующего границе устойчивости, характеризует запас устойчивости по фазе:

$$\gamma = 180 - |\varphi(\omega_C)|. \quad (4.26)$$

Практически допустимым считается запас устойчивости по фазе $\gamma \approx 25^\circ - 45^\circ$. Запас устойчивости по фазе можно также тракто-

вать как дополнение фазового угла $\varphi(\omega_C)$, соответствующего единичному вектору АФХ, до -180° , взятое с обратным знаком. Кроме запаса устойчивости по фазе работоспособная система должна обладать необходимым запасом устойчивости по амплитуде. Запас устойчивости по амплитуде характеризуется удалением точки пересечения АФХ разомкнутой системы с вещественной осью от критической точки $(-1; j=0)$. Однако более удобной мерой запаса устойчивости по амплитуде является величина m , обратная длине радиуса-вектора R_π точки пересечения АФХ разомкнутой системы с отрицательной ветвью вещественной оси (см.рис. 4.21):

$$m = \frac{1}{R_\pi}. \quad (4.27)$$

Эту величину удобно выражать в децибелах

$$m_{\text{дБ}} = 20 \lg R_\pi. \quad (4.28)$$

Практически допустимым считается запас по амплитуде не менее 10 дБ, что соответствует $R_\pi = 0,316$. Для логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик запас устойчивости по амплитуде определяется следующим образом: из точки пересечения логарифмической фазовой частотной характеристики с линии $\varphi_p = -\pi$ проводится перпендикуляр к вещественной координатной оси (см.рис.4.24). Отрезок этого перпендикуляра, заключенный между вещественной осью и точкой пересечения перпендикуляра с ЛАЧХ и равный по абсолютной величине $20 \lg R_\pi$, и является запасом по амплитуде.

Запас устойчивости по фазе определяется как угол γ являющийся дополнением до 180° угла при частоте среза $\varphi(\omega_C)$.

Кроме того, задавать запас устойчивости можно и при использовании алгебраических критериев. Действительно условие устойчивости по критерию Гурвица для систем 3-го порядка выражается неравенством, в правой части которого стоит нуль:

$$a_1 a_3 - a_0 a_2 \geq 0.$$

Если необходимо задавать запас устойчивости, то следует взять вместо нуля некоторое малое положительное число ε и записать

$$a_1 a_3 - a_0 a_2 \geq \varepsilon.$$

В заключение этой главы уточним физическую сущность логарифмической амплитудной характеристики. Как уже отмечалось,

$$L = 20 \lg R = 20 \lg \frac{B}{A}.$$

По условию определения частотных характеристик, амплитуда входного сигнала постоянна на любой частоте, то есть

$$A = \text{const}$$

Амплитуда выходного сигнала B может быть неизменной, может увеличиваться или уменьшаться.

Тогда $20 \lg R$ показывает, во-первых, изменение коэффициента усиления (передачи) в зависимости от частоты ω входного сигнала, а во-вторых, изменение выходной (регулируемой) величины в относительных единицах также в зависимости от изменения частоты ω входного сигнала (см.рис.2.16-2.19,2.22).

Как следует из рис.2.19, коэффициент усиления форсирующего звена $20 \lg R$ является постоянным до частоты излома ω_T , а после частоты излома увеличивается со скоростью +20дБ/дек.

Для апериодического звена на рис. 2.21 коэффициент усиления $20 \lg R$ после частоты излома ω_T уменьшается со скоростью -20 дБ/дек.

4.9. Сравнительная оценка критериев устойчивости

Рассмотренные выше критерии устойчивости применяются при оценке устойчивости систем автоматического регулирования и дают один и тот же результат.

Однако с точки зрения практического использования они не равноценны и каждый имеет свои достоинства и недостатки.

Амплитудно-фазовый критерий применяется в тех случаях, когда трудно получить уравнения всех звеньев и систем в целом, но можно получить экспериментальную амплитудно-фазовую характери-

стику разомкнутой системы. Этим критерием можно пользоваться и при теоретических расчетах. Однако вычисление АФХ аналитическим путем сложнее, чем вычисление кривой Михайлова. Кроме того, само расположение АФХ еще не дает прямого ответа на вопрос, устойчива или неустойчива замкнутая система, а требует дополнительных исследований, в частности выяснения, устойчива или неустойчива система в разомкнутом состоянии.

Критерий Михайлова весьма эффективен и может применяться для систем любого порядка. Недостатком является громоздкость и сложность вычислений при расчете кривой Михайлова для систем высокого порядка. Алгебраические критерии устойчивости позволяют получить только качественное суждение о характере протекания процесса регулирования. На вопрос, как быстро процесс затухает, они ответа не дают. Кроме того, алгебраические критерии можно применять только в тех случаях, когда задано уравнение системы в целом (известны коэффициенты характеристического уравнения). Использование алгебраических критериев для выбора параметров системы высокого порядка крайне затруднено, так как приходится иметь дело с громоздкими неравенствами. Вместе с тем, когда известны числовые значения коэффициентов и требуется установить факт устойчивости (или неустойчивости) системы невысокого порядка (третьего, пятого), алгебраические критерии незаменимы.

Наиболее простым и в то же время достаточно полноценным является логарифмический критерий, особенно для исследования устойчивости минимально-фазовых систем. Он позволяет путем несложных построений (с помощью специальных шаблонов) ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы составить суждение об устойчивости замкнутой системы, а также в первом приближении определить характер процесса регулирования. Более того, с помощью этого критерия можно осуществить синтез системы, то есть определить типы корректирующих устройств, которые необходимо ввести в состав системы.

Вопросы для самоконтроля

1. Отличие структурно-устойчивых от структурно-неустойчивых систем.
2. При наличии каких корней уравнения САР будет неустойчивой?
3. При помощи каких критериев можно оценить устойчивость САР третьего порядка?
4. Физический смысл запаса устойчивости по фазе и по амплитуде.

Глава 5

КАЧЕСТВО СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

5.1. Общие положения

Устойчивость является необходимым, но недостаточным условием работоспособности системы. Кроме устойчивости автоматическая система обладает другими динамическими свойствами, которые в общей совокупности определяют качество процесса регулирования. Процесс регулирования представляет собой изменение регулируемой величины во времени, вызванное непрерывно изменяющимися внешними воздействиями (возмущениями) и восстанавливающим действием регулятора. Так как реальная система автоматического регулирования все время находится в движении, то для удобства оценки ее динамических свойств внешние воздействия целесообразно детерминировать и рассматривать реакцию системы на некоторое детерминированное воздействие. Наиболее удобным для исследования динамических свойств и в то же время наиболее тяжелым для системы является ступенчатое возмущение - мгновенное изменение внешнего воздействия на постоянную величину, чаще всего равную единице.

Изменение регулируемой величины (состояния системы) под действием отдельного ступенчатого возмущения называется переходным процессом. Кроме того, вводится понятие переходной характеристики систем $h(t)$, под которой следует понимать переходный процесс при единичном ступенчатом возмущении. Даже в том случае, если в системе обеспечены заданные запасы устойчивости по фазе и амплитуде, переходный процесс, протекающий в ней, может оказаться слишком длительным. Переход к новому равновесному состоянию может иметь колебательный характер с большими отклонениями регулируемой величины от нового установившегося значения, да и само новое установившееся значение регулируемой величины существенно отличается от заданного. В связи с этим возникает необходимость кроме проверки устойчивости исследовать переходный процесс и установить показатели его качества. Показатели качества переходного процесса определяют либо по переходной характеристике, которую рассчитывают непосредственно с помощью дифференциального уравнения движения системы, либо различными приближенными методами, иногда даже без построения характеристики.

Переходная характеристика (как уже отмечалось) представляет собой реакцию системы на единичное возмущение $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Изображение единичного скачка с помощью преобразований Лапласа

$$y(s) = \frac{1}{s}.$$

Тогда изображение переходной характеристики можно получить из операторного уравнения замкнутой системы

$$D_3(s)h(s) = \frac{Q_3(s)}{s}. \quad (5.1)$$

Решая уравнение (5.1) относительно $h(s)$, получим

$$h(s) = \frac{Q_3(s)}{sD_3(s)} = \frac{W_3(s)}{s}, \quad (5.2)$$

так как передаточная функция замкнутой системы по данному возмущению

$$W_3(s) = \frac{h(s)}{y(s)} = \frac{Q_3(s)}{D_3(s)}. \quad (5.3)$$

Переход к оригиналу при помощи обратного преобразования Лапласа дает искомую функцию $h(t) = L^{-1}[h(s)]$. Как прямое интегрирование дифференциального уравнения переходного процесса, так и интегрирование его методами операционного исчисления требует вычисления корней характеристического уравнения $D_3(s) = 0$, что в случае уравнений выше четвертого порядка затруднено. Однако по мере того, как в инженерной практике все больше будут использоваться цифровые вычислительные машины, в которых численное решение дифференциальных уравнений высоких порядков не требует больших затрат труда и времени, анализ качества переходного процесса путем

непосредственного расчета переходной характеристики будет приниматься более широко.

В настоящее время в расчетной практике большое распространение нашли приближенные методы определения переходной функции и переходной характеристики системы, исключаящие вычисления корней алгебраических уравнений высоких степеней.

5.2. Некоторые показатели качества переходного процесса, определяемые по переходной характеристике системы

Переходная характеристика системы дает возможность определить некоторые показатели качества переходного процесса, важные для оценки системы автоматического регулирования. Такими показателями являются:

- время регулирования - продолжительность переходного процесса;
- динамические отклонения регулируемой величины от ее установившегося значения и число таких отклонений за время переходного процесса;
- точность системы в установившемся режиме.

Эти показатели определяют характер затухания переходного процесса, который может быть либо колебательным (рис. 5.1, а, б, в), либо апериодическим (см. рис. 5.1, г).

Время регулирования t_p определяется как промежуток времени от начала переходного процесса до того момента, при котором отклонение регулируемой величины от ее нового установившегося значения $h_{уст}$ достигает по абсолютной величине заданного значения δ и далее при всех t , больших t_p , остается меньшим δ . Время регулирования характеризует быстроту затухания переходного процесса и перехода системы в установившийся режим. Обычно величина δ принимается равной $0,05h_{уст}$. Если же $h_{уст} = 0$ (см. рис. 5.1, в), то принимается $\delta = 0,05\Delta h_{m1}$, где Δh_{m1} - максимальное динамическое отклонение (первый максимум) регулируемой величины от ее установившегося значения.

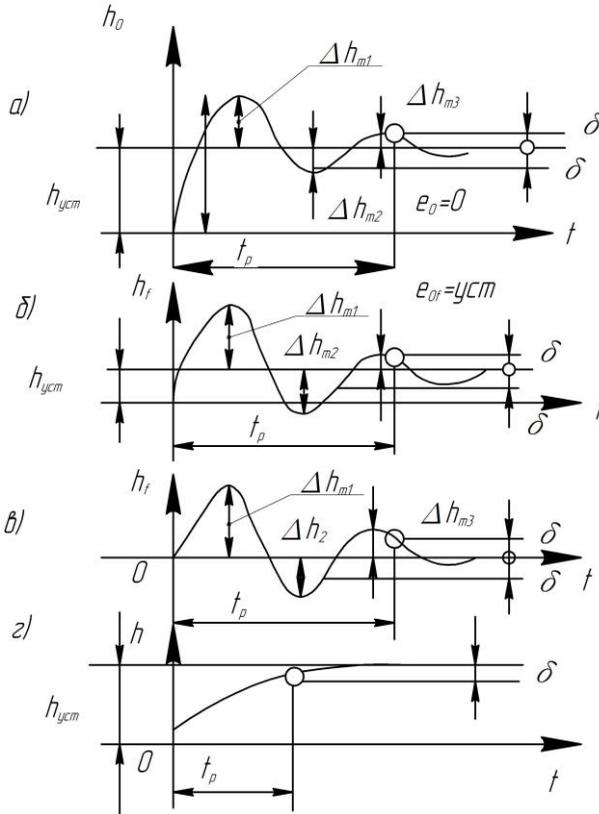


Рис. 5.1

Являясь характеристикой быстродействия системы, время регулирования лимитируется в зависимости от скорости протекания регулируемых процессов. Так, например, при регулировании быстро изменяющейся нейтронной мощности ядерного реактора система должна иметь высокое быстродействие, при этом t_p составляет примерно 0,1 - 0,001 с. При регулировании температуры в инерционных теплообменниках требование к быстродействию системы снижается и t_p может составлять несколько секунд.

Динамические отклонения Δh_{mi} регулируемой величины относительно ее нового установившегося значения определяются как абсолютные величины разностей максимальных и минимальных откло-

нений регулируемой величины и ее установившегося значения за время регулирования:

$$\Delta h_{mi} = |h_{mi} - h_{уст}|.$$

Эти величины называются перерегулированиями за время переходного процесса.

Величины динамических отклонений и их число за время регулирования характеризует колебательность переходного процесса.

Наибольшее из динамических отклонений Δh_{mi} , а также число отклонений ограничивается требованиями к системе регулирования той или иной величиной.

Большое отклонение мощности реактора от заданного значения (свыше 20%) может вызвать срабатывание аварийной защиты, что приводит к нарушению режима работы энергетической установки. Если регулируется скорость вращения турбины, то при чрезмерном увеличении числа оборотов ротора под действием возросших центробежных сил могут возникнуть механические повреждения.

Точность системы регулирования характеризуется величиной установившейся ошибки, определяемой как разность установившихся значений регулируемой величины до и после приложения внешнего воздействия.

Напомним, что установившиеся ошибки системы определяются выражениями

$$e_0 = 1 - W_{3d}(0); \quad e_f = -W_{3f}(0),$$

первое из которых определяет ошибку по заданному воздействию, второе - по какому-либо возмущению $f(t)$. В этих выражениях $W_{3d}(s)$ - передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию (по заданному значению регулируемой величины), $W_{3f}(s)$ - по возмущению $f(t)$, вычисляемые при $s = 0$.

Кроме показателей качества переходного процесса, определяемых по переходной характеристике системы, применяются другие показатели, основанные на свойствах частотных характеристик, свойствах корневой характеристической системы, а также специальные интегральные оценки качества переходного процесса.

Непосредственное определение вышеуказанных показателей

качества по переходной характеристике является наиболее точным, однако сопряжено с трудностями, возникающими при ее построении. Поэтому разработан ряд приближенных методов, с помощью которых можно определить некоторые из показателей качества либо без построения переходной характеристики, либо путем приближенного способа построения этой характеристики.

5.3. Определение длительности переходного процесса по корням характеристического уравнения замкнутой системы

Чем быстрее затухает свободное движение системы, тем скорее приходит система к равновесному состоянию, то есть к установившемуся режиму.

Общее решение уравнения движения системы, как известно, состоит из суммы слагаемых (составляющих), каждое из которых определяется соответствующим корнем характеристического уравнения

$$D_3(s) = 0.$$

Для вещественного отрицательного корня $s_i = -\alpha$ свободная составляющая имеет затухающий аperiodический характер

$$x_i(t) = C_i e^{-\alpha t}; \quad (5.4)$$

для пары сопряженных комплексных корней

$$s_i = -\alpha + j\omega, \quad s_{i+1} = -\alpha - j\omega,$$

имеющих отрицательную вещественную часть - колебательный характер с затухающей амплитудой:

$$x_i(t) = C_i e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (5.5)$$

Определив соответствующие каждому корню характеристического уравнения слагаемые и просуммировав их, а также учитывая частное решение уравнения движения, получим переходную функцию:

$$h(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t} + h_{уст},$$

или

$$h(t) = \sum_{C=1}^{t=n} x_i(t) + h_{уст}, \quad (5.6)$$

где $h_{уст}$ - установившееся значение выходной (регулируемой) величины;

x_i - составляющая свободного движения, определенная корнями характеристического уравнения;

C_i - постоянные интегрирования;

S_i - корни характеристического уравнения.

Из приведенных рассуждений следует, что длительность переходного процесса определяется значениями вещественных частей, а частота колебаний в переходном процессе - значениями мнимых частей корней. Это заключение позволяет приближенно определить длительность переходного процесса, не находя всех корней характеристического уравнения. Из уравнений (5.4) и (5.5) следует, что для устойчивых систем наибольшее влияние на длительность переходного процесса оказывает корень с минимальной по модулю вещественной частью.

Будем считать, что длительность переходного процесса определяется только этим корнем. Тогда можно записать отклонение регулируемой величины от установившегося значения:

$$\Delta h(t_p) = h_{уст} - h(t_p), \quad (5.7)$$

где $h(t_p)$ - значение регулируемой величины при $t = t_p$ (при учете только одной составляющей, соответствующей корню с минимальной вещественной частью).

Учитывая (5.4) и (5.6), получим

$$h(t_p) = h_{уст} (1 - e^{s_i t_p}) \quad (5.8)$$

Следовательно,

$$\Delta h(t_p) = h_{уст} e^{s_i t_p}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta h(t_p)}{h_{уст}} = \xi = e^{s_1 t_p}. \quad (5.9)$$

Логарифмируя обе части уравнения, получим

$$\ln \xi = s_1 t_p,$$

откуда

$$t_p = \frac{\ln \xi}{\operatorname{Re} s_1} \quad (5.10)$$

Обычно $\xi = 0,05$, тогда

$$t_p = \frac{\ln 0,05}{\operatorname{Re} s_1}. \quad (5.11)$$

Следовательно, для определения длительности переходного процесса необходимо найти корень характеристического уравнения с минимальным значением модуля вещественной части. Это может быть сделано методом подбора. Зададимся каким-то значением $\operatorname{Re} s_1 = \alpha_1$ и убедимся, что характеристическое уравнение не имеет корней, по модулю меньших α_1 . Для этого перенесем мнимую ось влево на величину α_1 и запишем характеристическое уравнение в новой системе координат:

$$a_0(s - \alpha_1)^n + a_1(s - \alpha_1)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(s - \alpha_1) + a_n = 0. \quad (5.12)$$

С помощью критерия Гурвица можно определить, имеет ли уравнение (5.12) корни, лежащие в правой полуплоскости, то есть меньшие по модулю, чем α_1 . В зависимости от результатов этой проверки нужно задаться новым значением $\alpha_2 > \alpha_1$, если в новой системе координат система устойчива, и $\alpha_2 < \alpha_1$, если система неустойчи-

ва. Так следует продолжать до тех пор, пока система не окажется на границе неустойчивости, что будет свидетельствовать о том, что искомым корень найден. По нему может быть найдена и величина t_p . Следует отметить, что указанный приближенный метод дает завышенное значение длительности переходного процесса, так как не учитывает влияния остальных корней.

Пример. Определить длительность переходного процесса в астатической системе, передаточная функция которой при разомкнутом состоянии равна

$$W_p(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \frac{Q_p(s)}{D_p(s)} = \frac{x(s)}{y(s)}. \quad (5.13)$$

При этом

$$k = 10; T_1 = 0,002\text{с}; T_2 = 0,005\text{с}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D_p(s) + Q_p(s) = 0.$$

Подставляя значения $D_p(s)$ и $Q_p(s)$ из (5.13), получим

$$s(T_1s + 1)(T_2s + 1) + k = 0. \quad (5.14)$$

Учитывая значения параметров, будем иметь

$$0,001s^3 + 0,07s^2 + s + 10 = 0. \quad (5.15)$$

Зададимся значением $\text{Re } s$ корня, ближайшего к мнимой оси $\alpha = -10$. Тогда в смещенной системе координат уравнение (5.15) будет

$$0,001(s - 10)^3 + 0,07(s - 10)^2 + 10s + 10 = 0. \quad (5.16)$$

После упрощения получаем

$$0,001s^3 + 0,04s^2 - 0,1s + 6 = 0. \quad (5.17)$$

В этом уравнении коэффициенты имеют разные знаки, что говорит о неустойчивости системы. Следовательно, исходное уравнение (5.15) имеет корень, лежащий ближе к мнимой оси, чем выбранный корень $\alpha_1 = -10$. Поэтому для следующего приближения нужно взять корень, лежащий ближе к мнимой оси, например, $\alpha_2 = -5$. Тогда характеристическое уравнение в смещенной системе координат будет

$$0,001(s - 5)^3 + 0,07(s - 5)^2 + s - 5 = 0, \quad (5.18)$$

или после упрощения

$$0,001s^3 + 0,055s^2 + 0,375s + 6,625 = 0. \quad (5.19)$$

Используя критерий Гурвица, находим второй минор:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,055 & 0,001 \\ 6,625 & 0,375 \end{vmatrix} = 0,055 \cdot 0,375 - 6,625 \cdot 0,001 \approx 0,014 > 0.$$

Минор положителен, это значит, что система при смещении мнимой оси на $\alpha = -5$ устойчива. Теперь нужно, увеличивая по модулю α , дойти до границы устойчивости. Берем $\alpha_3 = -7,5$. Составляем и упрощаем уравнение в смещенной системе координат

$$0,001s^3 + 0,0475s^2 + 0,11875s + 6,0156 = 0. \quad (5.20)$$

Второй минор будет

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,0475 & 0,001 \\ 6,0156 & 0,11875 \end{vmatrix} = 0,0475 \cdot 0,11875 - 6,0156 \cdot 0,001 \approx 0,000375$$

В связи с малостью величины второго минора можно считать, что при таком смещении мнимой оси система будет находиться на границе устойчивости. По значению корня можно определить длительность переходного процесса:

$$t_p = \frac{\ln 0,05}{-7,5} \approx 0,4 \text{ с.}$$

Приведенный пример показывает значительную трудоемкость даже этого приближенного метода определения только одного показателя переходной функции. Кроме того, следует учесть, что полученный результат несколько завышен, поэтому использование корней характеристического уравнения для определения показателей переходного процесса можно рекомендовать только при возможности использования цифровых вычислительных машин.

5.4. Определение показателей качества переходного процесса с помощью частотных характеристик

Поскольку для анализа устойчивости в основном используют логарифмические характеристики разомкнутой системы, желательно их же применить и при определении показателей качества переходного процесса. Вначале покажем связь между ЛАХ и переходной характеристикой на нескольких примерах.

Описываемый ниже способ определения показателей переходного процесса применим только к наиболее часто встречающимся минимально-фазовым системам, у которых имеется однозначная связь между амплитудной и фазовой характеристиками.

На рис. 5.2,а изображена структурная схема простейшей системы автоматического регулирования, состоящей из одного интегрирующего звена, постоянная времени которого $T = 1$, то есть

$$W_p(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega} = \frac{k}{j\omega}.$$

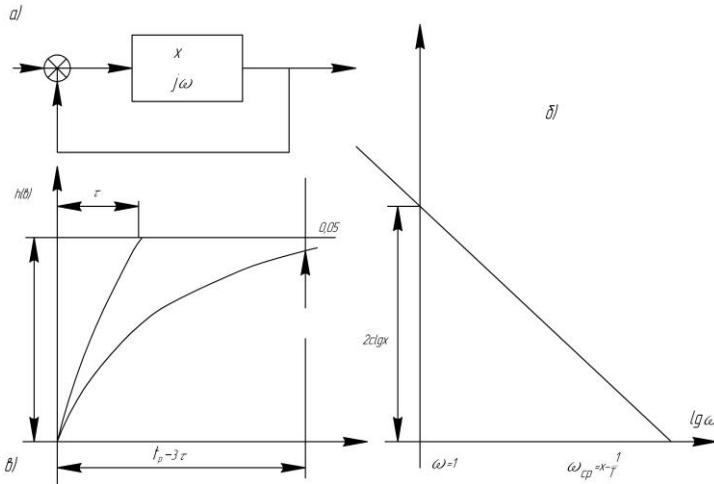


Рис. 5.2

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика системы при ее разомкнутом состоянии приведены на рис.5.2, б. Так как при замыкании интегрирующего звена жесткой отрицательной обратной связью оно преобразуется в апериодическое, то переходная характеристика замкнутой системы будет иметь вид экспоненты.

Частотная функция замкнутой системы

$$W_3(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} = \frac{k}{Tj\omega + k} = \frac{1}{\tau j\omega + 1}, \quad (5.21)$$

где $\tau = \frac{T}{k}$ - постоянная времени экспоненты.

Длительность переходного процесса в этом случае

$$t_p \cong 3\tau = \frac{3T}{k}.$$

Так как в рассматриваемой схеме $T = 1$, то

$$t_p \cong \frac{3}{k}. \quad (5.22)$$

Как следует из ЛАХ (см.рис.5.2, б), $\omega_C = k$, следовательно,

$$t_p = \frac{3}{\omega_C}. \quad (5.23)$$

Формула (5.23) связывает основные показатели ЛАХ и переходной функции, а именно: длительность переходного процесса в замкнутой системе, состоящей из одного интегрирующего звена, обратно пропорциональна частоте среза ЛАХ этого звена. Рассмотрим более сложную систему, состоящую из последовательно соединенных интегрирующего и инерционного звеньев (рис.5.3, а).

Передаточная Функция разомкнутой системы в этом случае

$$W_p(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)}. \quad (5.24)$$

Частотная функция разомкнутой системы

$$W_p(j\omega) = \frac{k}{j\omega(T_1j\omega + 1)}. \quad (5.24)$$

Характеристическое уравнение замкнутой САР

$$T_1s^2 + s + k = 0. \quad (5.26)$$

Корни характеристического уравнения

$$s_1 = \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{1 - 4kT_1}{4T_1^2}}; \quad s_2 = \frac{1}{2T_1} - \sqrt{\frac{1 - 4kT_1}{4T_1^2}}. \quad (5.27)$$

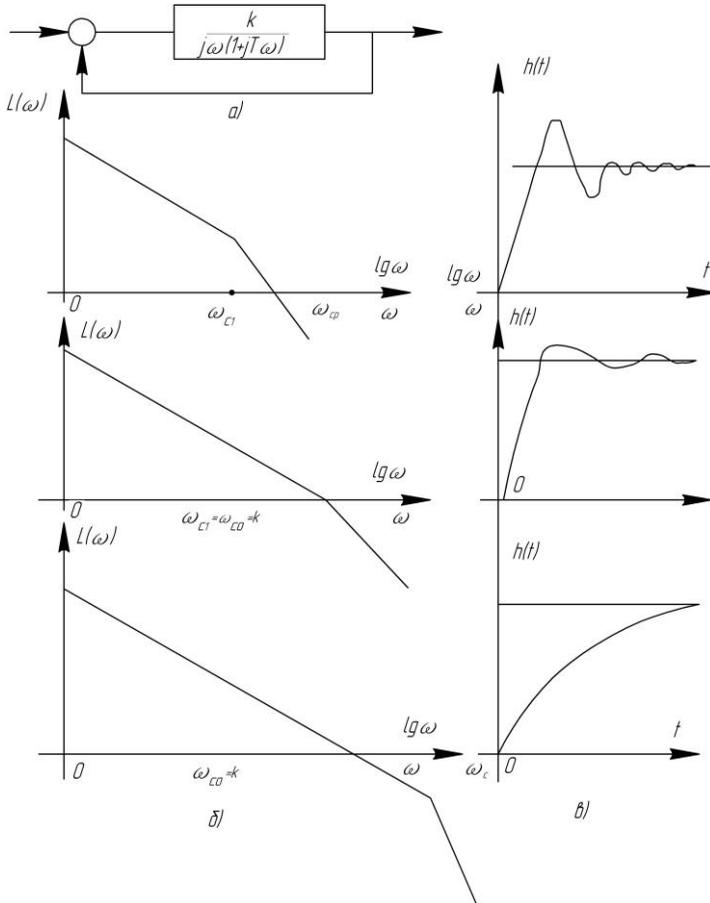


Рис. 5.3

Могут быть три случая соотношения параметров звеньев системы

$$\omega_{C_1} = \frac{1}{T_1} < \omega_C < k; \quad (5.28)$$

$$\omega_{C_1} = \frac{1}{T_1} = \omega_C = k; \quad (5.29)$$

$$\omega_{C_1} = \frac{1}{T_1} > \omega_C = k. \quad (5.30)$$

ЛАХ и переходные функции этих трех случаев приведены соответственно на рис. 5.3, б и 5.3, в. Если постоянная времени T_1 мала, то $\omega_{C_1} = \frac{1}{T_1} > \omega_C$. В этом случае оба корня характеристического уравнения вещественны и отрицательны (при условии, что $4kT_1 < 1$). Переходная характеристика будет иметь аperiодический характер, близкий к экспоненте. Чем больше отношение $\frac{\omega_{C_1}}{\omega_C}$, то есть чем меньше T_1 , тем больше переходная функция, приближенная к экспоненте с постоянной времени $\tau = \frac{1}{\omega_C}$, то есть при этом переходная функция будет определяться в основном интегрирующим звеном. К этому выводу можно прийти и при качественном анализе ЛАХ. Действительно, если постоянная времени T_1 мала, то есть сопряженная частота ω_{C_1} значительно больше частоты среза, то инерционное звено практически мало будет сказываться на процессах в системе и, в частности, на устойчивости системы. Следует обратить внимание на то, что при $\omega_{C_1} > \omega_C$ частота среза приходится на участок ЛАХ, имеющий наклон -20 дБ/дек. Следовательно, из анализа простейшей САУ, состоящей только из двух звеньев, можно сделать вывод: чтобы переходная функция была близка к экспоненте, ЛАХ в районе частоты среза должна иметь наклон -20 дБ/дек. При этом чем шире зона ЛАХ, имеющая такой наклон вокруг частоты среза, тем ближе переходная функция к экспоненте. Можно показать, что вывод этот справедлив и для более сложных систем, состоящих из большого числа звеньев.

Если постоянная времени T_1 велика ($\omega_{C_1} < \omega_C$), то корни характеристического уравнения (5.27) комплексные и сопряженные ($4kT_1 > 1$):

$$s_1 = -\alpha + j\omega; \quad s_2 = -\alpha - j\omega, \quad (5.27)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{2T_1}; \quad \omega = \sqrt{\frac{4kT_1 - 1}{4T_1^2}}.$$

В этом случае переходная характеристика в соответствии с (5.5) будет иметь колебательный характер с медленным затуханием. Поэтому на практике всегда стремятся к тому, чтобы ЛАХ в районе частоты среза имела бы наклон -20 дБ/дек. При этом можно считать, что переходная функция будет близка к экспоненте и длительность переходного процесса будет обратно пропорциональной частоте среза.

Пример. Определить длительность переходного процесса в астатической системе (рис.5.4) с параметрами $k = 0$, $T_1 = 0,02$ с и $T_2 = 0,05$ с.

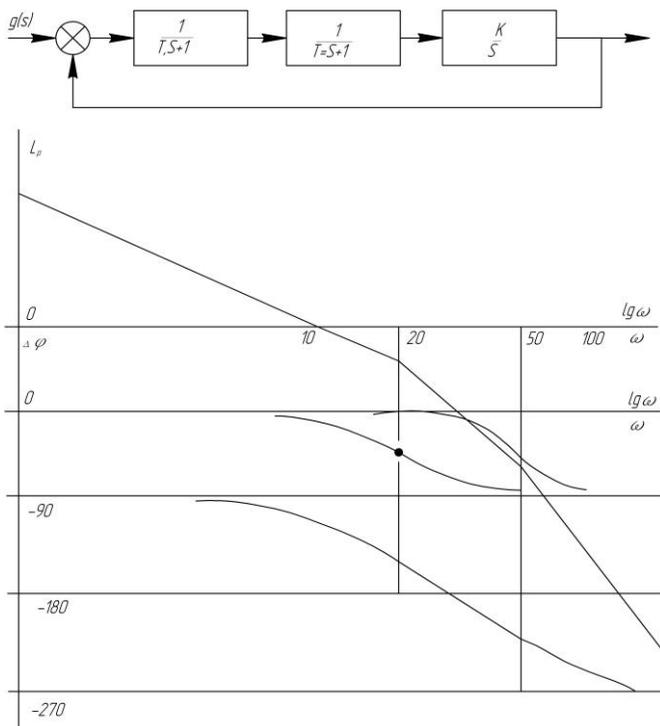


Рис. 5.4

С помощью ЛАХ определяем $\omega_C = 10 \text{ 1/с}$, а отсюда $t_p \cong \frac{3}{10} = 0,3 \text{ с}$. Инерционные звенья с относительно малыми постоянными времени T_1 и T_2 существенного влияния ни на устойчивость, ни на переходный процесс не оказывают.

5.5. Метод трапецеидальных характеристик

Наиболее точным из всех приближенных методов определения показателей качества является метод профессора В.В. Солодовникова, или метод трапецеидальных характеристик. С помощью этого метода с достаточной для инженерной практики точностью строится переходная характеристика замкнутой системы, а затем по этой характеристике определяются показатели качества. Построение переходной характеристики базируется на том, что между переходной характеристикой $h(t)$ и вещественной частью характеристики $W_3(j\omega)$ замкнутой системы существует однозначная связь, выраженная формулой

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (5.32)$$

В этой формуле

ω - угловая частота;

t - время в секундах;

$P(\omega)$ - вещественная частотная характеристика замкнутой системы, то есть вещественная часть частотной функции $W_3(j\omega)$ (АФХ) замкнутой системы.

5.6. Расчет и построение вещественной частотной характеристики замкнутой системы

Вещественная частотная характеристика, необходимая для построения переходной характеристики систем, может быть получена по ее уравнению, найденному из выражения частотной функции:

$$W_3(j\omega) = \frac{Q_3(j\omega)}{D_p(j\omega)}$$

либо ординаты ее можно определить по логарифмическим частотным

характеристикам замкнутой системы, получаемым по логарифмическим характеристикам разомкнутой системы при помощи номограммы замыкания.

Для определения уравнения вещественной частотной характеристики необходимо выделить вещественную и мнимую части числителя и знаменателя частотной функции:

$$D_3(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega);$$

$$Q_3(j\omega) = u(\omega) + j\vartheta(\omega).$$

Тогда можно записать

$$P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{u + j\vartheta}{x + jy} = \frac{(u + j\vartheta)(x - jy)}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$P(\omega) = \frac{ux + \vartheta y}{x^2 + y^2},$$

Задаваясь рядом значений ω , можно по этой формуле вычислить ординаты $P(\omega)$ вещественной частотной характеристики и построить ее по точкам.

При использовании логарифмических частотных характеристик замкнутой системы необходимо для ряда значений ω определить пары значений $L_3(\omega)$ и $\varphi_3(\omega)$. По величинам $L_3(\omega) = 20 \lg R_3(\omega)$ определяются значения модуля частотной функции $R_3(\omega)$, а ординаты вещественной частотной характеристики вычисляются по очевидному соотношению

$$P(\omega) = R_3(\omega) \cos \varphi_3(\omega).$$

Вещественные частотные характеристики могут иметь различные формы. Одна из форм показана на рис. 5.5.

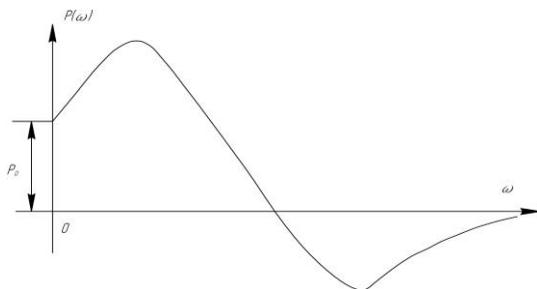


Рис. 5.5

Начальная ордината P_0 вещественной частотной характеристики, соответствующая $\omega = 0$, определяется значением передаточной функции при $s = 0$:

$$P_0 = W_3(0).$$

Кроме того, эта ордината определяет значение переходной функции $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то есть установившееся значение отклонения регулируемой величины от ее первоначального значения, имевшего место до начала переходного процесса. Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{W_3(s)}{s} = W_3(0) = P_0.$$

При $t = 0$ и $s \rightarrow \infty$ предельный переход дает

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{W_3(s)}{s} = W_3(\infty).$$

Поскольку при $t = 0$ $h = 0$, то

$$W_3(\infty) = P(\infty) + jQ(\infty) = 0,$$

следовательно, $P(\infty) = 0$.

Это означает, что при $\Omega \rightarrow \infty$ ордината вещественной частотной характеристики обращается в нуль.

Из свойств вещественной частотной характеристики следует, что ее начальный участок, соответствующий близким к нулю частотам, отвечает окончанию переходного процесса ($t \rightarrow \infty$), а конечный ее участок, соответствующий высоким частотам ($\Omega \rightarrow \infty$), - отвечает началу переходного процесса.

5.7. Приближенное построение переходной характеристики замкнутой системы по ее вещественной частотной характеристике

Аналитическое выражение вещественной частотной характеристики замкнутой системы (ВЧХ), как правило, оказывается весьма сложным, поэтому определить точную переходную характеристику системы путем вычисления интеграла по формуле (5.32) не представляется возможным. Приходится определять переходную характеристику приближенным способом.

Предположим, что полученная вещественная частотная характеристика оказалась прямоугольной трапецией, указанной на рис. 5.6. Основными параметрами этой прямоугольной трапеции являются:

P_i - высота трапеции;

Ω_k - интервал пропускания частот;

Ω_d - интервал равномерного пропускания частот;

$\chi = \frac{\Omega_d}{\Omega_k}$ - коэффициент наклона (главный параметр), он может изменяться в пределах от 0 до 1.

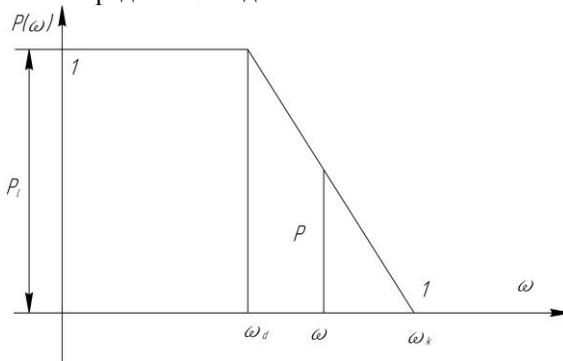


Рис. 5.6

Если $\omega_d = 0$, то $\chi = 0$ и прямоугольная трапеция превращается в прямоугольный треугольник. Второй предельный случай $\chi = 1$. Прямоугольная трапеция превращается в прямоугольник.

При заданных параметрах трапециевидальная характеристика может быть описана относительно простым уравнением, что позволит вычислить интеграл, то есть определить переходную характеристику. Для прямоугольной трапеции уравнение горизонтальной прямой в интервале частот $0 < \omega < \omega_d$ имеет вид

$$P(\omega) = P_i(\omega) - const. \quad (5.33)$$

Уравнение наклонной прямой в интервале частот $\omega_d < \omega < \omega_k$

$$P(\omega) = \frac{P_i}{1 - \chi} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_k} \right).$$

Переходная функция, соответствующая прямоугольной трапеции, определяется как сумма ее составляющих на участках $0 < \omega < \omega_d$ и $\omega_d < \omega < \omega_k$.

Для горизонтального участка характеристики при $P(\omega) = P_i$ и частоте, изменяющейся от 0 до ω_d , найдем

$$h'(t) = \frac{2P_i}{\pi} \int_0^{\omega d} \frac{\sin \omega t}{\omega t} d(\omega t).$$

Полученный интеграл вида $\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz$, где $z = \omega t$, представляет собой специальную функцию, называемую интегральным синусом и обозначаемую

$$Si z = \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz.$$

Таким образом, для горизонтального участка характеристики

$$h'(t) = \frac{2}{\pi} P_i Si\omega_d t = \frac{2}{\pi} P_i Si\chi\omega_k t.$$

Для наклонного участка трапецеидальной характеристики получим

$$\begin{aligned} h''(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_d}^{\omega_k} \frac{P_i}{1-\chi} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_k}\right) \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega = \frac{2P_i}{\pi(1-\chi)} \left[\int_{\omega_d}^{\omega_k} \frac{\sin\omega t}{\omega} d(\omega t) - \frac{1}{\omega_k t} \int_{\omega_d}^{\omega_k} \sin\omega t d(\omega t) \right] = \\ &= \frac{2P_i}{\pi(1-\chi)} \left(Si\omega_k t - Si\omega_d t - \frac{-\cos\omega_k t + \cos\omega_d t}{\omega_k t} \right), \end{aligned}$$

или

$$h''(t) = \frac{2P_i}{\pi(1-\chi)} \left(Si\omega_k t - Si\omega_d t - \frac{\cos\omega_d t - \cos\omega_k t}{\omega_k t} \right).$$

Суммируя выражения $h'(t)$ и $h''(t)$ получим переходную функцию, отвечающую трапецеидальной характеристике:

$$h(t) = \frac{2P_i}{\pi(1-\chi)} \left(Si\omega_k t - \chi Si\chi\omega_k t - \frac{\cos\chi\omega_k t - \cos\omega_k t}{\omega_k t} \right).$$

Произведение $\omega_k t$ представляет собой безразмерную переменную величину, пропорциональную времени t . Обозначим ее через τ :

$$\tau = \omega_k t.$$

Тогда выражение переходной функции можно записать в виде

$$h(t) = \frac{2P_i}{\pi(1-\chi)} \left(Si\tau - \chi Si\chi\tau - \frac{\cos\chi\tau - \cos\tau}{\tau} \right). \quad (5.34)$$

По этой формуле могут быть вычислены для различных зна-

чений τ , а следовательно и t , ординаты $h(t)$ переходной характеристики для прямоугольной трапеции.

В частном случае для треугольника ($\chi = 0$) получим

$$h(t) = \frac{2P_i}{\pi} \left(Si\tau - \frac{1 - \cos\tau}{\tau} \right).$$

5.8. Интегральная h -функция для единичной трапецеидальной характеристики

Практическое применение формулы (5.34) для расчета переходных характеристик существенно упрощается, если ввести в рассмотрение единичные трапецеидальные характеристики.

Единичной называется трапецеидальная характеристика, имеющая равные единице наибольшую ординату ($P_c = 1$) и наибольшую абсциссу ($\omega_k = 1$), то есть охватывающая полосу пропускания частот, равную единице. Переменным параметром такой характеристики служит, как и для неединичной характеристики, относительная ширина полосы равномерного пропускания частот χ .

Переходную функцию, отвечающую единичной трапецеидальной характеристике, получим, если в выражении (5.34) положим $P_i = 1$:

$$h_1(t) = \frac{2P_i}{\pi(1-\chi)} \left(Si\tau - \chi Si\chi\tau - \frac{\cos\chi\tau - \cos\tau}{\tau} \right). \quad (5.35)$$

Эта функция переменной τ и параметра χ носит название интегральной h -функции для единичной трапецеидальной характеристики.

Поскольку интегральная h -функция является функцией лишь двух переменных

$$h_1 = h_1(\tau, \chi),$$

то для нее легко составить таблицы. Такие таблицы вычислены и имеются в литературе по теории автоматического регулирования. Примером h -функций является табл. 5.1.

Таблица h -функций для различных значений параметра χ от нуля (треугольник) до единицы (прямоугольник) дает готовые координаты h_1 и t точек переходных характеристик для единичных трапеций. При этом $t = \tau$, так как $\omega_k = 1$.

В действительности трапецеидальные характеристики не являются единичными ($P_i \neq 1, \omega_k \neq 1$), но координаты t и h точек соответствующих переходных характеристик весьма просто выражаются через координаты h_1 и τ единичных трапеций:

$$t = \frac{\tau}{\omega_k}; \quad h = P_i h_1.$$

Следовательно, абсциссы t точек переходной характеристики для неединичной трапеции получаются делением табличных значений безразмерного времени на постоянное для данной трапеции значение ω_k , а ординаты h - умножением табличных значений h_1 -функций на постоянную величину P_i .

Таким образом при наличии таблиц h -функций расчет переходных характеристик для неединичных трапеций сводится к элементарным вычислительным операциям умножения и деления табличных значений на постоянные для данной трапеции числа.

Таблица 5.1

Таблица h -функций

$\chi \backslash \tau$	0,00	0,05	0,10	...	0,90	0,95	1,00
0,0	0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,5	0,158	0,165	0,176	...	0,297	0,304	0,314
1,0	0,310	0,325	0,340	...	0,575	0,590	0,602
1,5	0,449	0,469	0,494	...	0,813	0,832	0,844
...
25,5	0,975	1,006	1,007	...	0,989	0,978	0,977
26,0	0,975	1,006	1,006	...	0,984	0,978	0,983

5.9. Расчет и построение переходных характеристик систем методом профессора В.В. Солодовникова

Реально существующие системы автоматического регулирования имеют ЗЧХ, существенно отличающиеся от прямоугольной трапеции. Как уже отмечалось, из-за сложности математического описания реальных ЗЧХ непосредственное нахождение переходных характеристик систем путем вычисления интеграла в формуле (5.32) практически невозможно. Между тем, определение переходной характеристики для системы с ВЧХ в виде прямоугольной трапеции не требует затраты большого количества труда. Следовательно, если реальную ВЧХ системы представить состоящей из прямоугольных трапеций, то есть разбить на ряд прямоугольных трапеций, а затем известным способом определить переходный процесс для каждой прямоугольной трапеции, то результирующий (реальный) переходный процесс в замкнутой системе будет определен как сумма переходных процессов, определенных для каждой прямоугольной трапеции:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{i=n} h_i(t),$$

где $h(t)$ - переходная характеристика системы;

$h_i(t)$ - переходная характеристика для соответствующей прямоугольной трапеции.

Таким образом, применение метода трапецидальных характеристик (проф. В.В. Солодовникова) заключается в следующем:

1. Точную криволинейную вещественную частотную характеристику реальной системы заменяют близкой к ней ломаной линией (рис. 5.7, а).

2. Приближенную вещественную частотную характеристику (ломаную) представляют состоящей из прямоугольных трапеций (разбивают на прямоугольные трапеции).

Разбиение на прямоугольные трапеции осуществляется следующим образом: через точки излома ломаной линии (приближенной ВЧХ) проводятся параллельные оси абсцисс прямые.

Одной из таких прямых является сама ось абсцисс, на которой лежит точка G . Эти прямые в сочетании с наклонными участками ломаной и осью ординат образуют прямоугольные трапеции ($ADEN$, $OEFN$, $MCBA$).

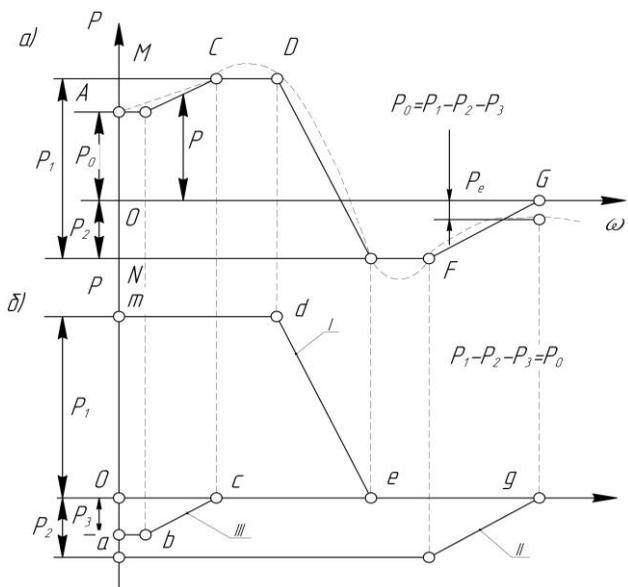


Рис. 5.7

Основания трапеции параллельны оси абсцисс, наклонные боковые стороны образуются наклонными участками ломаной (DE , FG , BC), а перпендикулярные основаниям боковые стороны (MN , ON , AM), определяющие высоты трапеции, лежат на оси ординат. Высотам трапеции следует приписывать знаки, чтобы их алгебраическая сумма равнялась начальной ординате P_0 вещественной частотной характеристики.

3. Выделенные указанным способом трапеции строят в той же системе координат (см. рис. 5.7, б), совместив их большие основания с осью абсцисс, а перпендикулярные основаниям боковые стороны - с осью ординат, с учетом знака высоты. Для каждой из построенных трапеций определяют все параметры:

$$P_i, \omega_d, \omega_k, \chi = \frac{\omega_d}{\omega_k}.$$

4. Для каждой из трапеций, имеющих вычисленные параметры, определяют переходный процесс. Для этого по вычисленным значениям параметров χ каждой трапеции входят в таблицу h -функций

и определяют переходные характеристики (h -функции) единичных трапеций, которые соответствуют данным (не единичным) трапециям по параметру χ . Затем производят пересчет реального времени и фактической ординаты переходных характеристик для каждой из неединичных трапеций.

Формулы для пересчета

$$h_i = P_i h_1; \quad t = \frac{\tau}{\omega_k},$$

где h_i - ордината переходной характеристики неединичной трапеции;

P_i - высота данной неединичной трапеции;

t - реальное время переходной характеристики для неединичной трапеции;

h_1 - ордината h -функции;

τ - безразмерное время h -функции.

5. По вычисленным координатам h_i строят переходные характеристики для каждой трапеции (с учетом знака трапеции).

6. Графически суммируя ординаты - переходных характеристик, соответствующих одним и тем же значениям t , получают результирующую переходную характеристику системы (см. рис. 5.8).

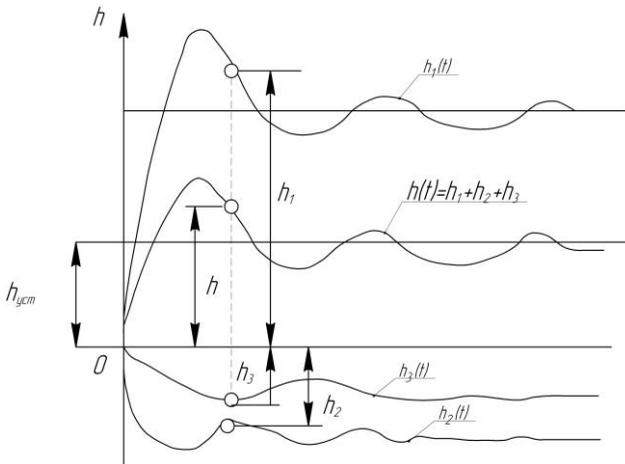


Рис. 5.8

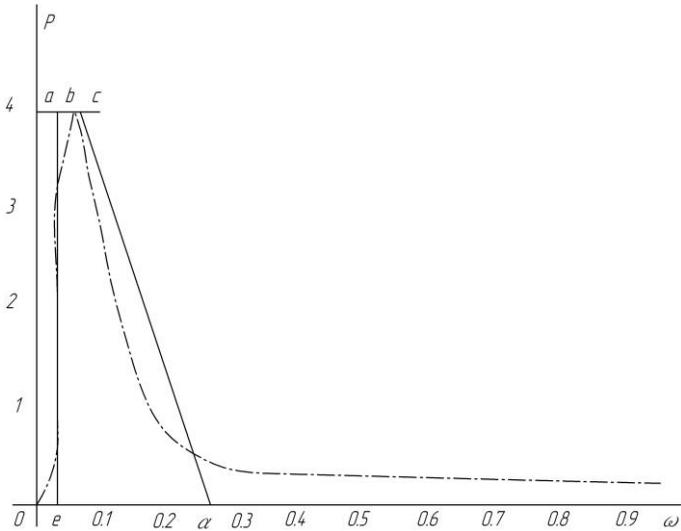


Рис. 5.9

Пример. Расчет переходной характеристики замкнутой системы. График вещественной частотной характеристики, построенной по данным табл. 5.2, приведен на рис. 5.9.

Таблица 5.2

ω	$P(\omega)$
0	0
0,01	0,0246
0,02	0,121
0,03	0,341
0,04	0,822
0,05	1,799
0,06	3,376
0,07	3,723
0,08	3,932
0,09	3,511
0,1	3,216
0,2	0,722
0,4	0,266
1,0	0,053
10,0	0,00078

Представим вещественную частотную характеристику в виде суммы трапецидальных характеристик (рис. 5.10). Параметры прямоугольных трапеций (трапецидальных характеристик):

а) трапеция $oacd$: $P_{i_1} = 3,9$; $\omega_{d_1} = 0,09$;

$$\omega_{k_1} = 0,27; \quad \chi_1 = \frac{0,09}{0,27} = 0,33;$$

б) трапеция $abeo$: $P_{i_2} = 3,9$; $\omega_{d_2} = 0,03$;

$$\omega_{k_2} = 0,06; \quad \chi_2 = \frac{0,03}{0,06} = 0,5.$$

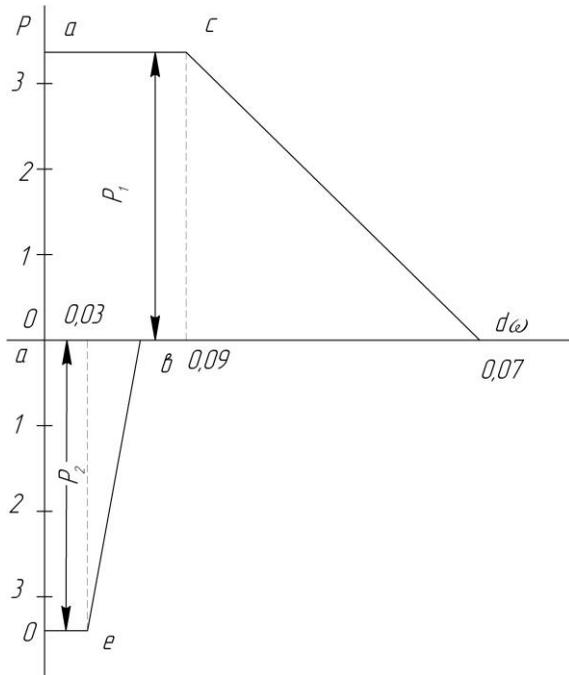


Рис. 5.10

Расчет переходных характеристик для указанных выше трапеций приведен в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Трапеция <i>oacd</i>				Трапеция <i>abeo</i>			
$\chi = 0,33$	$\omega_{k_1} = 0,27$	$P_i = 3,9$		$\chi = 0,5$	$\omega_{k_2} = 0,06$	$P_i = 3,9$	
τ	h_1^1	$t = \frac{\tau}{\omega_{k_1}}$	$h_{i_1} = P_i h_1^1$	τ	h_2^1	$t = \frac{\tau}{\omega_{k_2}}$	$h_{i_2} = P_i h_2^1$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,0	0	0	0	0,0	0	0	0
0,5	0,215	1,852	0,838	0,5	0,240	8,333	0,936
1,0	0,417	3,703	1,626	1,0	0,461	16,666	1,798
1,5	0,603	5,555	2,352	1,5	0,665	25,000	2,593
2,0	0,761	7,407	2,968	2,0	0,833	33,333	3,248
3,0	0,987	11,111	3,849	3,0	1,061	50,000	4,138
4,0	1,090	14,815	3,911	4,0	1,142	66,667	4,454
5,0	1,103	18,518	4,302	5	1,113	83,333	4,341
6,0	1,070	22,222	4,173	6	1,051	100,0	4,099
7,0	1,033	25,925	4,029	7	0,993	116,667	3,873
8,0	1,012	29,679	3,947	8	0,966	133,333	3,767
9,0	1,006	33,333	3,923	9	0,970	150,0	3,783
10	1,006	37,037	3,923	10	0,982	166,667	3,829
11	1,002	40,740	3,908	11	0,993	183,333	3,873
12	0,994	44,444	3,877	12	0,997	200,0	3,888
13	0,986	48,148	3,845	13	0,997	216,667	3,888
14	0,983	51,852	3,834	14	1,000	233,333	3,9
15	0,987	55,555	3,849	15	1,005	250,0	3,919
16	0,992	59,259	3,869	16	1,011	266,667	3,943
17	0,997	62,962	3,888	17	1,012	283,333	3,947
18	1,001	66,667	3,904	18	1,008	300,0	3,932
19	1,001	70,370	3,904	19	1,001	316,667	3,904
20	1,001	74,074	3,904	20	0,996	333,333	3,884
21	1,003	77,778	3,910	21	0,995	350,0	3,880
22	1,005	81,481	3,919	22	0,996	366,667	3,884
23	1,007	85,185	3,927	23	0,998	383,333	3,892
24	1,007	88,889	3,927	24	1,000	400,00	3,9
25	1,004	92,592	3,916	25	1,000	416,667	3,9
26	1,002	96,296	3,908	26,0	1,000	433,333	3,9

По данным таблицы строим графики переходных характеристик для каждой из трапеций и производим их графическое суммирование (с учетом знака трапеции).

В результате получаем переходный процесс замкнутой системы автоматического регулирования (рис. 5.11)

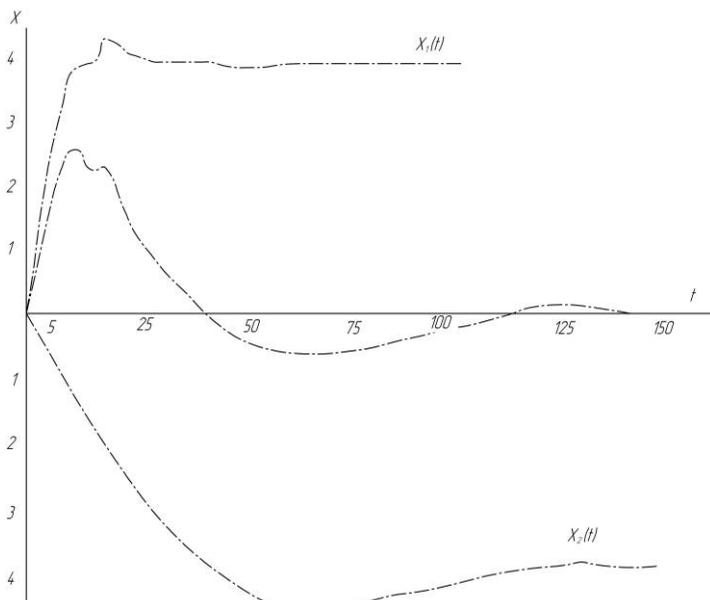


Рис. 5.11

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать показатели качества переходного процесса.
2. Как влияют параметры корней уравнения на длительность переходного процесса?
3. Как зависит длительность переходного процесса от наклона ЛАХ?
4. Изложить метод трапецеидальных характеристик при построении кривой переходного процесса.

Глава 6

КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Понятие о коррекции

Первой проблемой, которая решалась теорией автоматического регулирования, было обеспечение устойчивости автоматических систем. Позднее центральной задачей стало достижение необходимого качества регулирования. Систематизация и обобщение накопленных знаний привели к созданию методов научного проектирования систем с заданными показателями точности регулирования и быстродействия.

Проблема обеспечения требуемых свойств линейных автоматических систем весьма сложна. В ней могут быть выделены, прежде всего, следующие частные задачи: обеспечение устойчивости (стабилизация); повышение запаса устойчивости (демпфирование) повышение точности регулирования в установившихся режимах (уменьшение или устранение статической ошибки, воспроизведение задающего воздействия, уменьшение или устранение влияния постоянных возмущений); улучшение переходных процессов (увеличение быстродействия, максимальное уменьшение динамических ошибок и т.д.).

Иногда несколько задач могут быть решены совместно, в других случаях они оказываются противоречивыми. В зависимости от назначения системы и предъявляемых к ней требований одни задачи становятся основными, а другие отодвигаются на второй план.

Для обеспечения устойчивости и точности регулирования предусматривается дополнительная регулировка коэффициентов усиления и постоянных времени отдельных устройств системы.

Когда устойчивость и необходимое качество не могут быть достигнуты простым изменением параметров системы (коэффициентов усиления, постоянных времени отдельных звеньев), тогда эта задача решается введением в систему дополнительных устройств, называемых корректирующими.

Под коррекцией САУ понимается изменение их динамических свойств (характеристик) с целью обеспечения требуемого запаса устойчивости, повышения динамической точности и показателей качества переходного процесса.

6.2. Коррекция САУ изменением параметров системы

6.2.1. Уменьшение коэффициента усиления разомкнутой системы

Способы придания системам автоматического регулирования достаточного запаса устойчивости разнообразны. Однако в замкнутых

системах условия для достижения высокой точности в установившемся и переходном режимах имеет противоречивый характер.

Действительно, для уменьшения ошибки в установившемся режиме необходимо повысить коэффициент усиления системы в разомкнутом состоянии k_p . С увеличением же k_p уменьшается запас устойчивости системы, а следовательно, ухудшается переходный процесс. Возможно и такое, что система станет раньше неустойчивой, чем удастся получить требуемый коэффициент усиления k_p .

Пусть известна передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{k_p}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)},$$

где $k_p = 10$; $T_2 = 0,5$; $T_1 = 0,125$; $T_3 = 0,033$.

По данной передаточной функции построим логарифмическую амплитудную L_{p1} и логарифмическую фазовую φ_{p1} характеристики разомкнутой системы. Предварительно вычислим и нанесем на график частоты излома $\omega_{ин}$, ω_1 , ω_2 , ω_3 (рис. 6.1). Согласно логарифмическому критерию, исследуемая система будет неустойчивой, так как при частоте среза ω_c фазовый угол $\varphi_{p1} > 180^\circ$.

Чтобы система стала устойчивой, уменьшим коэффициент усиления разомкнутой системы. Предварительно зададимся, запасом по амплитуде $m = -10$ дБ. При уменьшении коэффициента усиления разомкнутой системы логарифмическая амплитудная характеристика переместится параллельно вниз и займет положение L_{p2} . Так как постоянные времени не изменялись, то фазовая частотная характеристика разомкнутой системы останется прежней φ_{p1} . Как следует из графика, чтобы обеспечить запас по амплитуде $m = -10$ дБ и запас по фазе $\gamma = -36^\circ$, пришлось уменьшить коэффициент усиления разомкнутой системы почти на 20 дБ, то есть в 10 раз.

Для изменения коэффициента усиления системы электронные и магнитные усилители имеют специальные настроечные потенциометры, которые, как правило, находятся в цепи обратной связи.

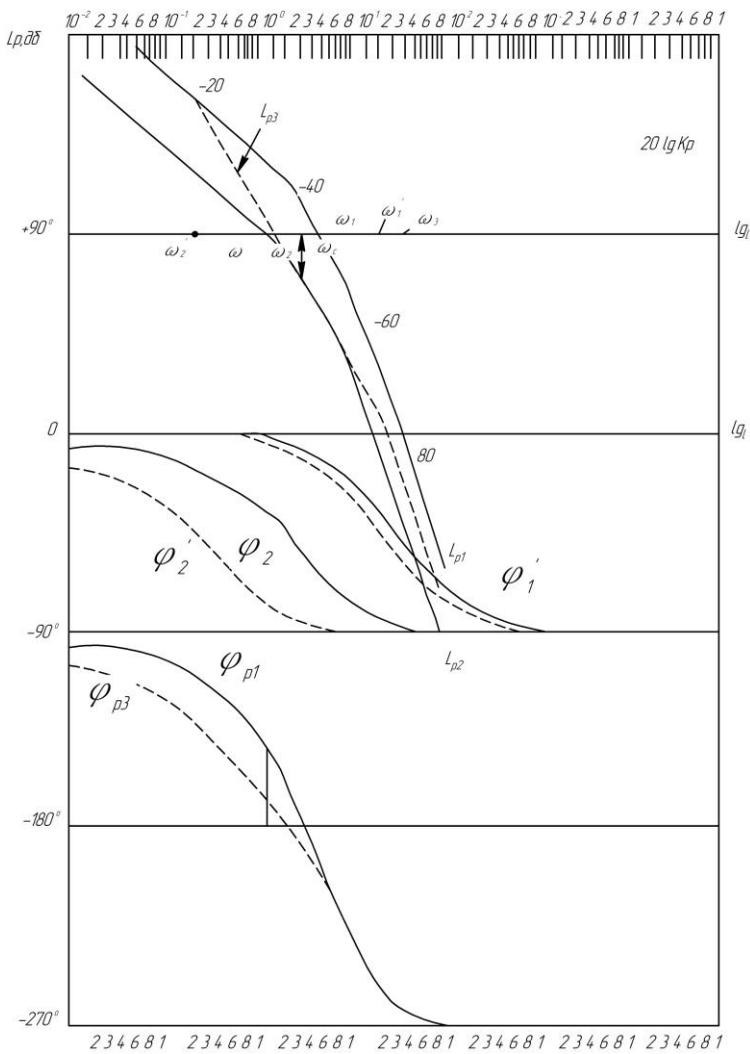


Рис. 6.1

6.2.2. Изменение постоянных времени звеньев

Уменьшение коэффициента усиления разомкнутой (замкнутой) системы не всегда бывает желательным. Это объясняется тем, что с изменением коэффициента усиления в системе изменяется и мощность сигнала, подаваемого на исполнительное устройство или регу-

лирующий орган. Может случиться так, что усиление, развиваемое исполнительным устройством, будет недостаточным для перемещения регулирующего органа.

Кроме того, сложные объекты имеют несколько автоматических регуляторов, которые, как правило, между собой взаимосвязаны сигналами (связное регулирование). При связном регулировании возникает необходимость согласовывать между собой постоянные времени регуляторов. Например, на практике периодически регулируют постоянную времени питательного клапана. Для этого на сервомоторе клапана имеется регулируемое перепускное устройство.

При коррекции систем управления изменением постоянных времени пользуются следующим правилом. Определяются типовые звенья, у которых частоты излома ЛАХ ближе всего находятся к частоте среза логарифмической амплитудной характеристики разомкнутой системы. В рассматриваемом примере (см. рис. 6.1) это типовые звенья с постоянными времени T_2 и T_1 . Тогда постоянную времени звена, имеющую большее значение, увеличивают, а постоянную времени, имеющую меньшее значение, уменьшают. Так как $T_2 > T_1$, то T_2 увеличим, а T_1 уменьшим.

Пусть новое значение $T'_2 = 5$, а $T'_1 = 0,0125$. Получим новые значения частот излома ω'_2 и ω'_1 . В соответствии с полученными значениями частот излома логарифмическая амплитудная характеристика примет вид L_{p3} , а фазовая частотная характеристика разомкнутой системы примет вид φ_{p3} . Тогда запас по фазе получим -10° , а запас по амплитуде будет -5 дБ то есть система станет устойчивой.

Если в рассматриваемом примере дополнительно увеличить постоянную времени интегрирующего звена, то характеристика L_{p3} переместится еще больше влево и запасы по фазе и амплитуде будут значительно больше. Эту работу рекомендуем проделать самостоятельно.

6.3. Коррекция систем автоматического регулирования изменением структуры схемы

В некоторых случаях получить необходимые показатели качества переходного процесса изменением постоянных времени и коэффициента усиления системы принципиально невозможно. Тогда гово-

рят, что система структурно неустойчива и необходимо в схему системы включать корректирующие устройства.

Оценим устойчивость замкнутой системы по передаточной Функции разомкнутой системы:

$$W_p(s) = \frac{10}{s^2(0,1s + 1)}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$D_3(s) = 0,1s^3 + s^2 + 0 \cdot s + 10.$$

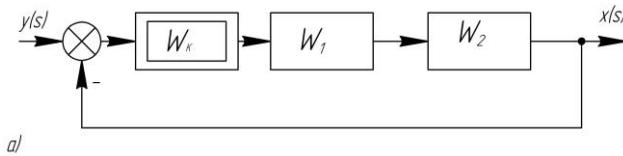
По критерию Гурвица (Вышнеградского), система неустойчива. Так как коэффициент при переменной s равен нулю, то система является структурно неустойчивой и любое изменение коэффициента усиления и постоянных времени не сделает систему устойчивой.

6.3.1. Методы коррекции

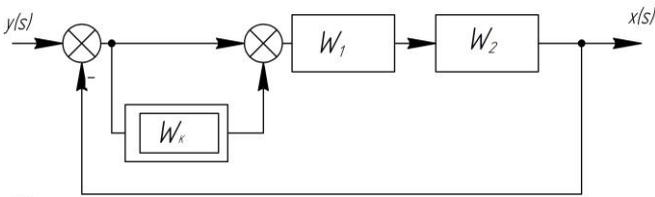
Выясним, в каком направлении корректирующие устройства должны изменять частотные характеристики, чтобы стабилизировать систему и повысить ее показатели качества.

В современных системах применяются корректирующие устройства, действия которых основаны на использовании специальных электрических или гидравлических сигналов, добавляемых к сигналу ошибки. В зависимости от характера этих сигналов и места включения корректирующих устройств различают следующие методы коррекции:

1. Коррекция по ошибке, то есть пропорциональная производным и интегралам по времени от ошибки $\Delta y(s)$ за счет введения в главную цепь системы пассивных или активных электрических контуров. В этом случае коррекция осуществляется при помощи дифференцирующих и интегрирующих устройств. На рис. 6.2, а показано последовательное, а на рис. 6.2, б - параллельное включение корректирующего устройства.



a/



б/

Рис. 6.2

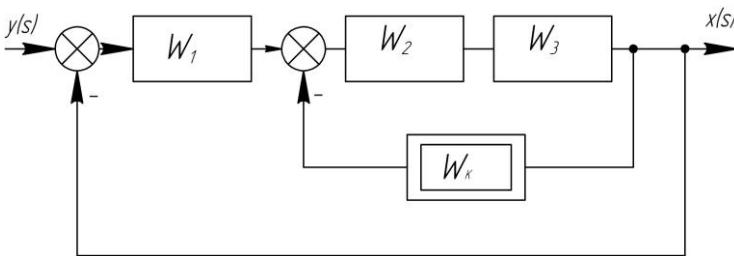


Рис. 6.3

2. Коррекция по выходной величине, то есть пропорциональная выходной величине или производной от выходной величины за счет обратных связей. Коррекция осуществляется при помощи безынерционных, инерционных и дифференцирующих усилителей (рис. 6.3).

3. Коррекция по входной величине, то есть пропорциональная производной от задающего воздействия. При таком включении корректирующего устройства получаем структурную схему комбинированной следящей системы, то есть сочетание разомкнутого и замкнутого принципов управления [7].

В комбинированной следящей системе воспроизведение задающего воздействия обеспечивается главным образом форсирующей цепью (рис. 6.4).

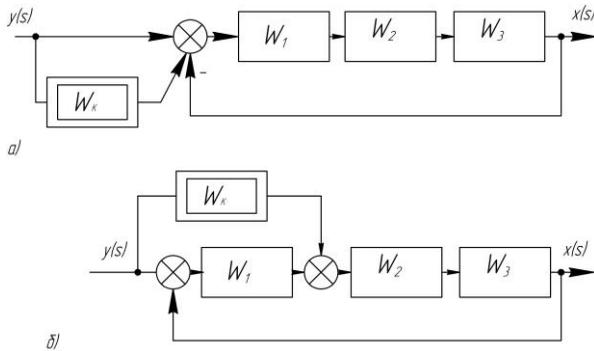


Рис. 6.4

4. Коррекция по одному из промежуточных сигналов. В данном случае корректирующее устройство является обратной связью, чаще всего отрицательной, которая охватывает один из элементов прямой цепи системы. Этим элементом обычно является исполнительный элемент или выходной каскад усилителя. Такое корректирующее устройство называется параллельным. Корректирующее устройство может включаться параллельно встречно (рис. 6.5, а), тогда передаточная функция контура имеет вид

$$W_{\text{эк}}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_k(s)}.$$

При параллельном согласном включении (см. рис. 6.5, б) передаточная функция контура будет иметь другой вид:

$$W_{\text{эк}}(s) = W_2(s) + W_k(s).$$

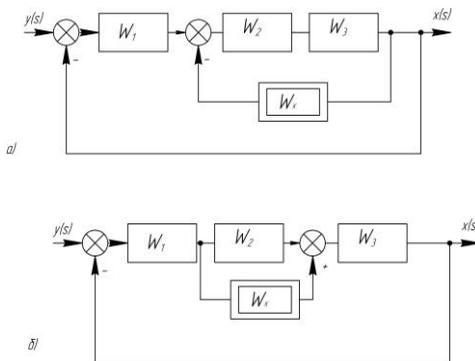


Рис. 6.5

6.3.2. Коррекция САР с помощью дифференцирующих устройств

С увеличением коэффициента усиления системы увеличивается ее частота среза Ω_c . Большим же значениям Ω_c будут соответствовать меньшие или даже отрицательные значения запаса устойчивости по фазе, то есть $\varphi_p > |-180^\circ|$. Причиной этого является вносимое инерционными звеньями системы запаздывание колебаний по фазе, которое растет с увеличением частоты.

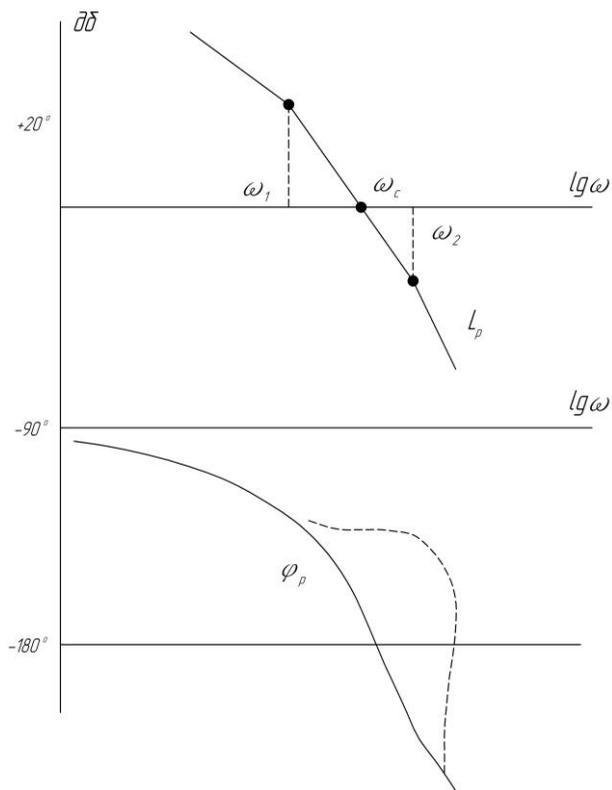


Рис. 6.6

Таким образом, ухудшение переходного процесса и потеря устойчивости при увеличении коэффициента усиления K системы связаны с наличием в ней запаздывания колебаний по фазе. Следова-

тельно, для того, чтобы при увеличении коэффициента усиления и система оставалась устойчивой и обеспечивала требуемый запас устойчивости по фазе γ и амплитуде m , необходимо частично компенсировать запаздывание в полосе частот, которая расположена около частоты среза Ω_c , соответствующей увеличенному коэффициенту усиления k_2 системы, и тем самым деформировать ЛФЧХ системы, приподняв ее вверх (пунктирная линия на рис. 6.6). Деформацию ЛФЧХ можно осуществить последовательным включением такого устройства, которое, в отличие от других элементов, вносило бы не запаздывание, а опережение по фазе синусоидальных колебаний в указанной выше полосе частот.

Однако можно ли синусоидальное колебание сместить по фазе в сторону опережения? Оказывается, можно.

6.3.3. Физический смысл введения производной в закон регулирования

Предположим, что сигнал рассогласования системы Δy (рис. 6.7) и производная от него $\Delta \dot{y}$ изменяются по кривым, показанным на рис. 6.8.

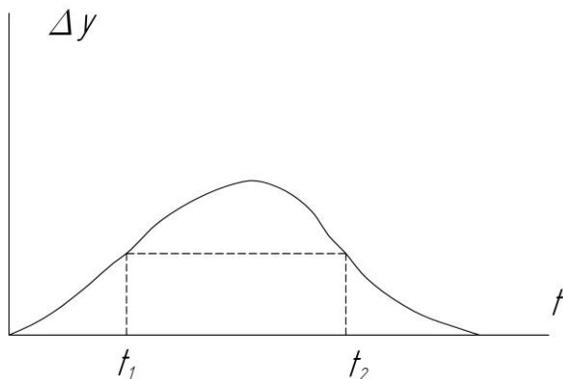


Рис. 6.7

Если система реагирует только на сигнал рассогласования Δy , то вследствие конечной величины чувствительности двигателя и запаздывания сигнала при прохождении его через инерционные эле-

менты системы исполнительное устройство начнет обрабатывать рассогласование не сразу, а через некоторое время после его появления, когда Δu возрастет до некоторой величины.

Если же на исполнительный двигатель системы будет поступать напряжение, пропорциональное не только сигналу рассогласования, но и его производной, то двигатель начнет обрабатывать ошибку значительно раньше и быстрее, поскольку производная при малом сигнале рассогласования (в момент его появления) имеет конечное значение.

Кроме того, если система реагирует только на сигнал рассогласования Δu , то вращающий момент исполнительного двигателя системы будет одинаков как в момент времени t_1 , где сигнал рассогласования растет, так и в момент t_2 , где он убывает. Между тем, было бы желательно, чтобы в момент времени t_1 двигатель развивал большее вращающее усилие для более эффективного противодействия нежелательному возрастанию ошибки, а в момент t_2 - меньшее вращающее усилие для предупреждения перерегулирования, то есть возможного перехода системы по инерции через равновесное состояние. Такое изменение вращающего момента двигателя также достигается введением производной в закон регулирования. В этом случае вращающий момент двигателя при $t = t_1$ увеличивается, поскольку воздействия от Δu и $\Delta \dot{u}$ совпадают по знаку, а при $t = t_2$ уменьшаются или даже изменяют свое направление, так как воздействия от Δu и $\Delta \dot{u}$ противоположны по знаку. В результате такого изменения вращающего момента двигателя понижается максимальное значение ошибки, уменьшается или даже устраняется перерегулирование и быстрее затухает переходный процесс системы.

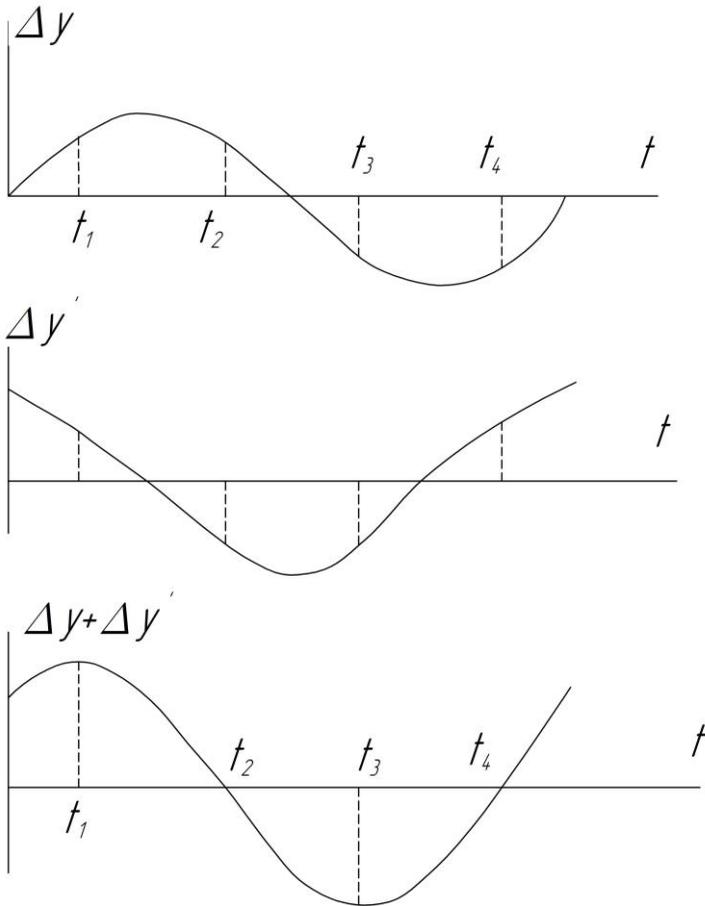


Рис. 6.8

Для реализации описанного метода нужно сложить напряжение сигнала рассогласования Δy с производной от него $\Delta \dot{y}$. Такое сложение осуществляют с помощью дифференцирующего фазопережающего устройства. Таким образом, одним из способов улучшения показателей качества системы является введение в закон регулирования производной от сигнала рассогласования (рис. 6.9).

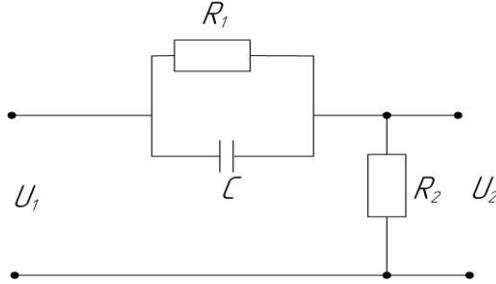


Рис. 6.9

Достоинство коррекции САУ с помощью последовательных дифференцирующих фазопережающих устройств (введением производных в алгоритм управления) состоит в том, что наряду с уменьшением ошибки системы в установившемся режиме имеется возможность уменьшить и время переходного процесса.

Недостатком этого метода является то, что фазопережающее устройство вносит значительное ослабление в области низких частот. Пусть передаточная функция дифференцирующего фазопережающего устройства (см. рис. 6.9) имеет вид:

$$W_k(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{T_2 s + 1};$$

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1; \quad T_2 < T_1;$$

$$T_1 = R_1 \cdot C; \quad T_2 = k \cdot T_1.$$

В интервале частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ фазопережающее устройство работает как дифференцирующее (рис. 6.10).

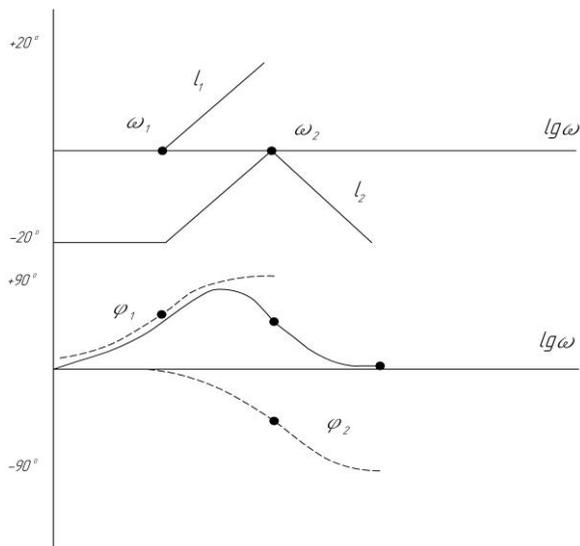


Рис. 6.10

При $\Omega < \Omega_1$ и $\Omega > \Omega_2$ устройство работает в режиме пропорционального звена.

6.3.4. *Коррекция САР с помощью интегрирующих устройств*

С точки зрения уменьшения влияния помех систему целесообразно корректировать с помощью не дифференцирующего, а интегрирующего устройства, которое позволяет увеличивать коэффициент усиления системы, не повышая частоты среза ЛАХ.

С помощью интегрирующего контура целесообразно осуществлять коррекцию также тех систем, от которых требуется большой коэффициент усиления (высокая динамическая точность).

Рассмотрим физический смысл введения интеграла в закон регулирования. Если на исполнительный двигатель следящей системы поступает напряжение, пропорциональное сигналу ошибки Δu , то при изменении задающего воздействия с постоянной скоростью, как известно, возникает скоростная ошибка $\Delta u_{уст}$. Если же напряжение ошибки предварительно подавать на интегрирующее устройство, а затем с его выхода на исполнительный двигатель, то скоростная ошибка

будет уменьшаться. Это можно объяснить тем, что напряжение на выходе интегратора $\int \Delta y dt$ будет увеличиваться до тех пор, пока не станет равным значению, при котором скорость изменения регулируемой величины не достигнет скорости изменения задающего воздействия (рис.6.11). Скоростная ошибка при этом будет равна нулю. Уменьшения скоростной ошибки до нуля можно достичь, включив в систему интегрирующее устройство, близкое к идеальному (дополнительный двигатель, угол поворота которого приближенно равен интегралу от входного напряжения). Здесь имеет место случай повышения порядка астатизма системы на единицу.

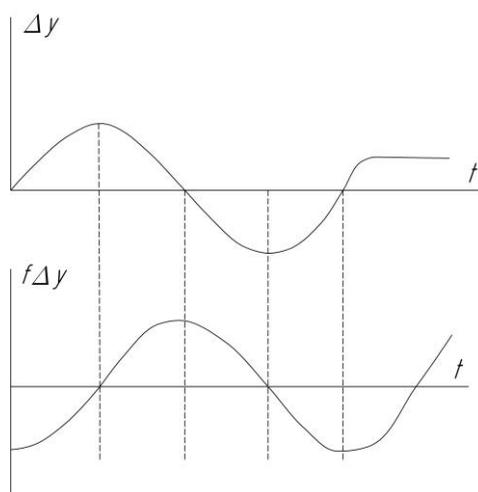


Рис. 6.11

Если же в систему включить пассивную интегрирующую цепь, выходное напряжение которой не может расти до бесконечности, то установившаяся ошибка полностью не устранится, но существенно уменьшится. Порядок астатизма при этом останется прежним. При этом интегрирующая цепь пропускает низкие частоты без ослабления, а высокие с определенным ослаблением, равным $20 \lg k$.

Благодаря этому интегрирующая цепь хорошо пропускает спектр полезного сигнала, расположенный в области низких частот и подавляет высокочастотные помехи. На основании данного свойства интегрирующая цепь используется, обычно для коррекции САР при наличии помех.

Рассмотрим передаточную функцию и частотные характеристики интегрирующего устройства (рис. 6.12):

$$W_k(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{T_1 s + 1},$$

где $k < 1$; $T_1 > T_2$; $T_2 = C \cdot R_2$; $T_1 = C(R_1 + R_2)$.

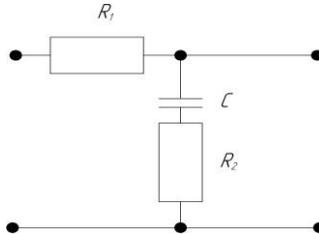


Рис. 6.12

В интервале частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ устройство, схема, которого представлена на рис.6.13, работает как интегрирующее.

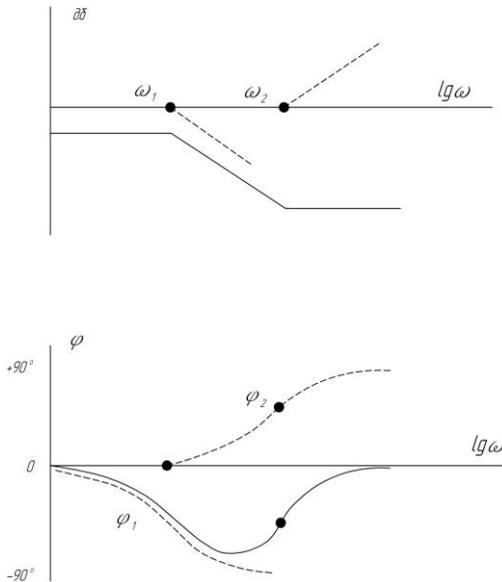


Рис. 6.13

6.4. Последовательное включение корректирующих устройств

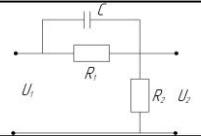
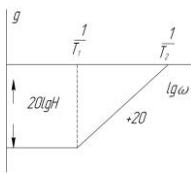
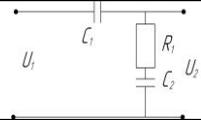
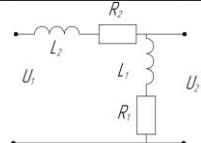
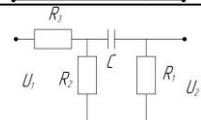
Корректирующее устройство включают в систему автоматического регулирования различно. Возможно прежде всего последовательное включение корректирующего устройства в прямую цепь системы. В этом случае оно называется последовательным корректирующим устройством. Его передаточную функцию будем обозначать $W_k(s)$ (рис. 6.2, а).

Последовательное корректирующее устройство включают непосредственно после сравнивающего устройства или же после предварительного усилителя. Второй вариант включения используют чаще. Ведь уровень сигнала рассогласования обычно весьма мал и корректирующее устройство снижает чаще всего уровень сигнала.

Применение последовательных корректирующих устройств наиболее удобно в системах, у которых сигнал управления представляет собой напряжение постоянного тока. В этих случаях корректирующее устройство выполняют обычно из пассивных четырехполюсников, обеспечивающих разнообразное преобразование сигнала табл. 6.1.

Таблица 6.1

Характеристики дифференцирующих корректирующих устройств постоянного тока

Схема	Параметры			Характеристики $W(s)$
	k	T_1	T_2	
	$\frac{1}{1 + \frac{R1}{R2}}$	RC	$\frac{T1}{1 + \frac{R1}{R2}}$	
	$\frac{1}{1 + \frac{C2}{C1}}$	$RC2$	$\frac{T1}{1 + \frac{C2}{C1}}$	
	$\frac{1}{1 + \frac{R2}{R1}}$	$\frac{L1}{R1}$	$k \left(1 + \frac{L2}{L1} \right) T1$	
	$\frac{R1 \cdot R2 \cdot C}{R1 + R3}$	$\frac{R1 \cdot R2 \cdot C}{R1 + R3}$	$\left(R1 + \frac{R2 \cdot R3}{R2 + R3} \right) C$	

Еще большие возможности дают активные электрические четырехполюсники постоянного тока, состоящие из входного сопротивления и усилителя постоянного тока с отрицательной обратной связью.

В системах, у которых сигналом управления является модулированное напряжение переменного тока, последовательные корректирующие устройства менее удобны по следующей причине. Такие четырехполюсники преобразуют сигнал, являющийся модулированным напряжением переменного тока. Выполняются они из активных сопротивлений и конденсаторов (табл. 6.2) и обеспечивают приближенное дифференцирование сигнала (огibaющей модулированного напряжения) в некотором диапазоне частот. При этом частота Ω изменения сигнала должна быть значительно (по крайней мере, на порядок) меньше несущей частоты Ω_H , то есть частоты переменного тока. Недостаток этих четырехполюсников еще и в том, что изменение несущей частоты Ω_H заметно влияет на их динамические свойства. Одним из способов улучшения показателей качества системы является введение в закон регулирования производной от сигнала рассогласования с помощью дифференцирующего фазопережающего устройства. Достоинство коррекции САР с помощью последовательных дифференцирующих фазопережающих устройств состоит в том, что одновременно с увеличением коэффициента усиления k удастся увеличить и частоту среза Ω_C ЛАХ системы, то есть наряду с уменьшением ошибки системы в установившемся режиме имеется возможность уменьшить и время переходного процесса.

Таблица 6.2

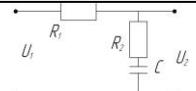
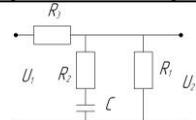
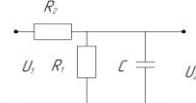
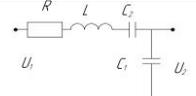
Характеристики корректирующих устройств постоянного тока

Схема	Параметры			$W(s)$
	k	T_1	T_2	
	1	$R1C1$	$R2C2$	$\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{T_1T_2s^2 + \left[T_1\left(1+\frac{R2}{R1}\right) + T_2\right]s + 1}$
	$\frac{1}{1 + \frac{R3}{R1 + R2}}$	$\frac{(R1R2)C1}{R1 + R2}$	$R3C3$	$\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{T_1T_2s^2 + \left[T_1 + \left(1 + \frac{R3}{R1}\right) + T_2\right]s + \frac{1}{k}}$
	1	$\frac{(R1R2)C1}{R1 + R2}$	$(R1 + R2)C2$	$\frac{T_1T_2s^2 + T_2s + 1}{T_1T_2s^2 + \left[T_1\left(1 + \frac{R2}{R1}\right) + T_2\right]s + 1}$

Коррекции САР с помощью последовательных дифференцирующих фазоопережающих устройств присущи и недостатки. Последовательные дифференцирующие фазоопережающие устройства вносят значительное ослабление в области низких частот, то есть в области существования частот спектра полезного сигнала. Это ослабление тем интенсивнее, чем большее опережение должно обеспечить фазоопережающее устройство. Для компенсации ослабления, вносимого фазоопережающей цепью, необходимо увеличить коэффициент усиления системы за счет других ее элементов. Существенное ослабление полезного сигнала, с одной стороны, и пропускание без изменения помехи, с другой стороны, приводит к увеличению флюктуационной ошибки системы. Поэтому с помощью дифференцирующего фазоопережающего устройства целесообразно осуществлять коррекцию только в случаях, когда на вход системы поступает управляющее воздействие без помехи. С точки зрения уменьшения влияния помех систему целесообразно корректировать с помощью не дифференцирующего, а интегрирующего устройства, которое позволяет увеличить коэффициент усиления системы, не повышая частоты среза ЛАХ. С помощью интегрирующего контура целесообразно осуществлять коррекцию также тех систем, от которых требуется большой коэффициент усиления (высокая динамическая точность) (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Характеристики интегрирующих устройств постоянного тока

Схема	Параметры			Характеристики $W(s)$
	k	T_1	T_2	
	1	$R2C$	$T_1 \left(1 + \frac{R1}{R2}\right)$	$\frac{k(1 + T_1 s)}{(1 + T_2 s)}$
	$\frac{1}{1 + \frac{R3}{R1}}$	$C1R2$	$\left[1 + \frac{R1R3}{R2R1 + R3}\right] T_1$	
	$\frac{1}{1 + \frac{R2}{R1}}$	$kR2C$	-	$\frac{k}{1 + T_1 s}$
	$\frac{1}{1 + \frac{C1}{C2}}$	$\frac{C1C2}{C1 + C2} R1$	$\frac{L1}{R1}$	$\frac{k}{T_1 T_2 s^2 + T_1 s + 1}$

Недостатком коррекции САР с помощью интегрирующего контура является то, что переходный процесс системы ухудшается, так как увеличивается запаздывание в системе.

Преимуществами последовательной коррекции являются:

- относительная простота включения элементов коррекции;
- расширение полосы пропускания частот при включении дифференцирующего элемента в цепь регулирования.

Недостатки последовательной коррекции:

- снижается величина основного сигнала в цепи регулирования, что требует его дополнительного усиления до нужного значения. Отсюда проистекает ограниченность корректируемой системы по мощности;

- увеличивается чувствительность системы к помехам, так как расширяется общая полоса пропускания частот;

- качество работы системы существенно зависит от стабильности характеристик параметров системы;

- при применении интегрирующих элементов приходится применять конденсаторы относительно большой емкости и габаритов;

- требуются большие входные сигналы постоянного тока;

- необходимо согласовывать сопротивления корректирующих элементов с входным и выходным сопротивлениями элементов системы, к которым подключены вход и выход корректирующего элемента.

6.5. Параллельное включение корректирующих устройств

Другое широко распространенное включение корректирующего устройства показано на рис. 6.5.

В данном случае корректирующим устройством является обратная связь, чаще всего отрицательная, которая охватывает один из элементов прямой цепи системы. Этим элементом обычно является исполнительный элемент или выходной каскад усилителя (усилителя мощности). Такое корректирующее устройство называют параллельным и его передаточную функцию обозначают $W_k(s)$.

Обычно в достаточно широком и существенном для качества системы диапазоне частот справедливо неравенство

$$W_2(s) \cdot W_k(s) \gg 1. \quad (6.1)$$

Тогда в этом диапазоне частот:

$$W_2(s) \approx 1 / W_k(s). \quad (6.2)$$

Таким образом, при удовлетворении неравенства (6.1) свойства участка цепи с параллельным корректирующим устройством определяются только лишь свойствами этого корректирующего устройства. Указанное обстоятельство является большим достоинством параллельного корректирующего устройства. При удовлетворении неравенства (6.1) свойства участка $W_2(s)$ прямой цепи, охваченного параллельным корректирующим устройством, и их изменения в процессе действия системы не влияют на ее свойства.

Несущественные нелинейности этого участка и изменения его параметров (коэффициентов передаточной функции $W_2(s)$) не сказываются на динамических свойствах системы. Это справедливо только при неизменных параметрах самого параллельного корректирующего устройства.

Достоинства данного корректирующего устройства также в том, что его вход подключен к выходу исполнительного элемента или усилителя мощности, то есть к выходу мощного элемента с высоким уровнем сигнала.

Преимущества параллельной коррекции:

- значительная эффективность коррекции, то есть дополнительная обратная связь позволяет существенно влиять на динамические показатели переходного процесса;
- возможность применения в системах любой мощности;
- исключение влияния звеньев, ухудшающих переходный процесс (нелинейность звеньев с большими постоянными времени и т.п.);
- малая подверженность влиянию помех.

Недостатки параллельной коррекции:

- более сложная (по сравнению с предыдущим случаем) схема включения;
- необходимость применения согласующих элементов;
- возможные перегрузки цепи, охваченные корректирующим контуром.

Применяют и третий вариант включения корректирующего устройства в систему - параллельно одному из участков ее прямой цепи (см. рис. 6.4, а, 6.5, б).

6.6. Инвариантность САР

Путем введения коррекции по внешнему воздействию при определенных условиях можно сводить величину установившейся ошибки к нулю при любой форме внешних воздействий. Это свойство называется инвариантностью системы по отношению к внешнему воздействию.

Внешние воздействия делятся на задающие (сигнал которых система должна воспроизводить) и возмущающие (действие которых нужно нейтрализовать). Рассмотрим структуры корректирующих устройств по указанным воздействиям.

6.6.1. Обеспечение инвариантности корректирующими устройствами по задающим воздействиям

На рис.6.14 представлена структурная схема корректирующего устройства по задающему воздействию. $W_k(s)$ - передаточная функция корректирующего устройства; $W_0(s)$ - передаточная функция заданных частей системы.

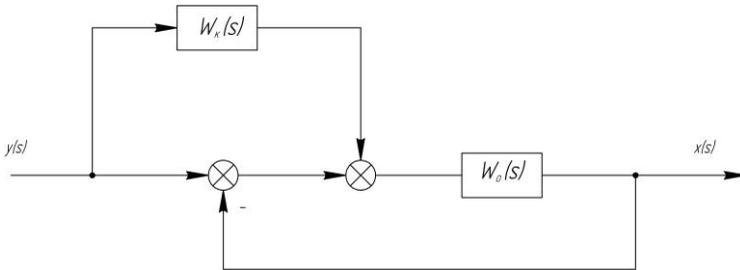


Рис. 6.14

Передаточную функцию замкнутой системы в этом случае можно записать так:

$$W_3(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} [1 + W_k(s)]$$

Ранее было показано, что для следящих систем передаточная функция ошибки определяется из выражения $W_\Sigma(s) = 1 - W_3(s)$. Применительно к рассматриваемой схеме можно записать

$$W_\Sigma(s) = 1 - \frac{W_0(s) + W_0(s)W_k(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{1 + W_0(s) - W_0(s) - W_0(s)W_k(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{1 - W_0(s)W_k(s)}{1 + W_0(s)}$$

Анализируя полученное выражение, можно сделать вывод о том, что установившаяся ошибка $W_\Sigma(s)$ будет равна нулю при любой

форме задающего воздействия, если $W_k(s) = \frac{1}{W_0(s)}$. Это и будет услови-

ем инвариантности системы по отношению к внешнему воздействию.

Следует отметить, что при практическом использовании приведенного метода часто подбирают приближенные равенства, то есть реализуют "неполную" инвариантность.

6.6.2. Обеспечение инвариантности корректирующими устройствами по возмущению

На рис. 6.15 представлена структурная схема системы стабилизации, где $f(s)$ - возмущающее воздействие, приложенное к системе. На рис.6.16 представлена эта же схема, но уже с корректирующим устройством, передаточная функция которого $W_k(s)$.

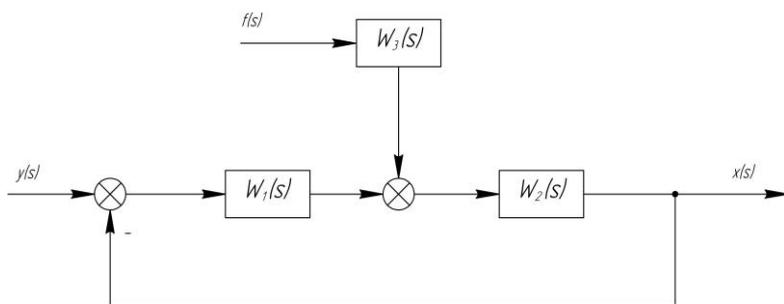


Рис. 6.15

Определим передаточную функцию по возмущению, для чего положим воздействие $y(s) = 0$, $W(s) = \frac{x(s)}{f(s)}$.

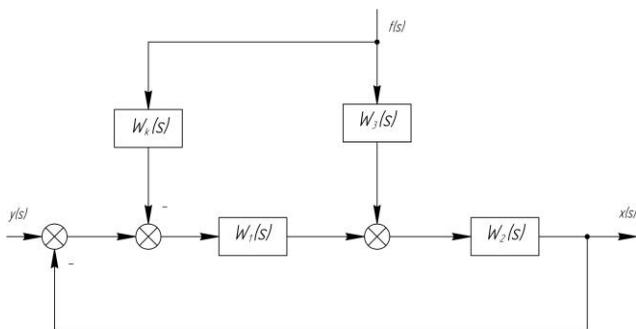


Рис.6.16

Структурная схема САУ в этом случае будет иметь вид, как показано на рис. 6.17.

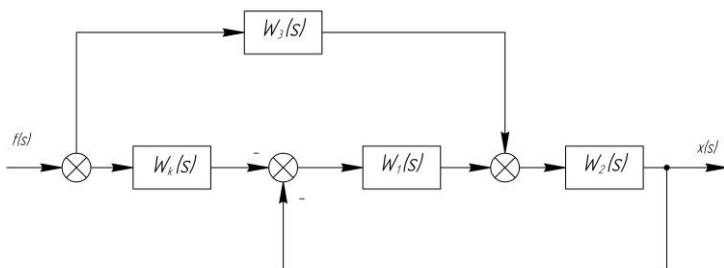


Рис. 6.17

Пользуясь известными правилами, перенесем линию воздействия сигнала (рис. 6.18).

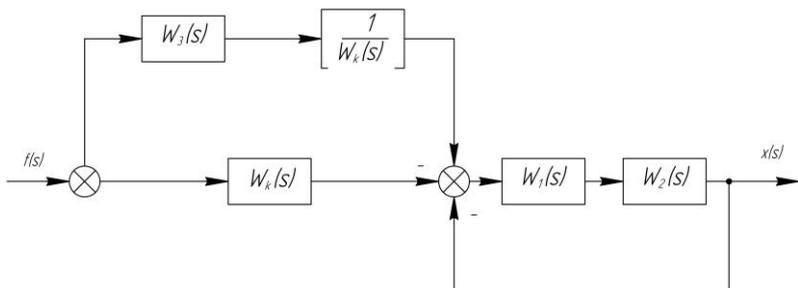


Рис. 6.18

Запишем передаточную функцию системы

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{x(s)}{f(s)} = \left[\frac{W_3(s)}{W_1(s)} - W_k(s) \right] \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \\ &= \frac{W_3(s) - W_1(s)W_k(s)}{W_1(s)} \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{W_2(s)[W_3(s) - W_1(s)W_k(s)]}{1 + W_1(s)W_2(s)}. \end{aligned}$$

Так как влияние внешнего воздействия надо уничтожить, то есть добиться, чтобы $f(t) = 0$, то условие полной инвариантности будет иметь вид

$$W_k(s) = \frac{W_3(s)}{W_1(s)}.$$

Основная трудность при реализации этого метода коррекции заключается в разработке методики измерения возмущающего воздействия $f(t)$, которое необходимо подавать на вход корректирующего устройства (например, порыв ветра, действующий на самолет, волнение моря, действующее на корпус корабля, и т.п.).

Достоинством такого метода коррекции является повышение точности САР без снижения качества переходных процессов. Это объясняется неизменностью характеристического уравнения замкнутой системы при введении коррекции.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под коррекцией САР?
2. Особенности коррекции САР изменением коэффициента усиления и постоянных времени типовых звеньев.
3. Особенности коррекции САР с помощью дифференцирующих устройств.
4. Особенности коррекции САР с помощью интегрирующих устройств.

Глава 7

СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

7.1. Постановка задачи синтеза

В практической работе при исследовании автоматических устройств приходится иметь дело с двумя задачами.

В одних случаях при заданной системе автоматического регулирования требуется найти показатели качества переходных процессов, в ней возникающих. Это задача анализа САР. Основным и практически наиболее важным приложением результатов, полученных теорией автоматического регулирования, является синтез автоматических систем.

Синтез системы - это выбор ее структуры и составных элементов, их физической природы, конструкции и параметров. При этом свойства системы должны удовлетворять некоторым заранее установленным требованиям. К САР предъявляются как общетехнические требования в отношении габаритов, веса, стоимости, надежности, так и требования специфические, а именно: требования к статическим и динамическим свойствам системы, к качеству регулирования. При синтезе системы регулируемый объект известен и его регулирующий орган чаще всего не может быть изменен. Применительно к заданной неизменяемой части САР требуется выбрать общую структурную схему и значения параметров дополнительной части системы.

Однако задача синтеза суживается еще больше, ограничивается лишь определением вида и параметров дополнительной (корректирующей или стабилизирующей) части схемы, которая в сочетании с основной частью системы обеспечивала бы требуемые динамические характеристики системы в целом.

Иначе говоря, чаще всего рассматривается не синтез систем в целом, а лишь синтез корректирующих устройств, входящих в их состав.

В настоящее время широкое применение при синтезе систем автоматики нашел метод логарифмических частотных характеристик. Этот метод обладает достаточной простотой и наглядностью. Идея метода основана на том, что устанавливается связь между переходным процессом и логарифмическими характеристиками (см. гл.5). Зная желаемый вид переходного процесса, можно построить соответствующую такому процессу желаемую ЛЧХ. Далее, зная вид желаемой логарифмической характеристики, к этому виду приближают исходную логарифмическую характеристику нескорректированной системы. Такое приближение исходной характеристики к желаемой также осуществляется достаточно просто.

7.2. Построение желаемой логарифмической частотной характеристики системы

Построение желаемой логарифмической характеристики основывается на знании требований, предъявляемых к системе и к переходному процессу, который должен воспроизводиться скорректированной системой.

Обычно такими требованиями являются:

- необходимая точность работы системы, определяемая нужным коэффициентом усиления системы и порядком астатизма;
- время переходного процесса;
- требуемый запас устойчивости по фазе (определяемый величиной перегулирования).

Желаемая логарифмическая характеристика может быть разделена на три части: низкочастотная, среднечастотная, высокочастотная (рис. 7.1).

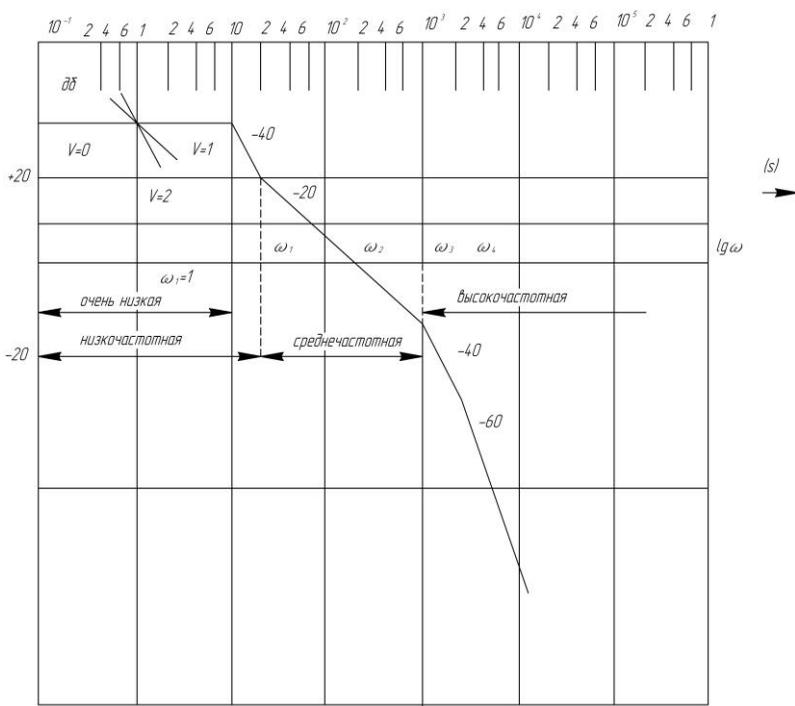


Рис.7.1

Низкочастотная часть амплитудной характеристики определяется требуемой точностью работы системы, а следовательно, коэффициентом усиления системы в разомкнутом состоянии и порядком ее астатизма. Интервал низкочастотной части характеристики лежит в пределах от начальных (очень низких) частот до частоты излома аппроксимированной характеристики. Наклон начального низкочастотного отрезка характеристики определяется порядком астатизма системы V , а в системах с единичной обратной связью соответствует количеству последовательного включения интегрирующих звеньев. Указанный начальный отрезок характеристики должен проходить через точку с ординатой, равной $+20 \lg k_p$, и абсциссой $\omega_2 = 1$, где k_p - требуемый коэффициент усиления системы.

В области низких частот наклон характеристики определяется количеством аperiodических звеньев и составляет 40 - 60 дБ/дек.

Среднечастотный участок амплитудной характеристики является наиболее существенной ее частью, так как его вид определяет в основном качество переходного процесса системы. Это обусловлено тем, что вид характеристики в этой области определяет запасы устойчивости по фазе и амплитуде. Рядом исследований установлено, что при частоте среза наклон логарифмической амплитудной характеристики должен быть -20 дБ/дек, а частота среза ω_C определяется требуемым временем переходного процесса и допустимый перерегулированием.

Частота среза ω_C и время переходного процесса $t_{пп}$ связаны между собой следующим соотношением:

$$\omega_C = \frac{k_0 \pi}{t_{пп}}; \quad t_{пп} = \frac{k_0 \pi}{\omega_C}.$$

Коэффициент k_0 выбирается в зависимости от допустимой величины перерегулирования. Так, при допустимом перерегулировании $\Delta h = 15 - 30\%$ выбирается $k_0 = 1,3 - 2,5$.

Выбор значения k_0 в зависимости от допустимого перерегулирования можно производить в соответствии с графиком, приведенным на рис. 7.2.

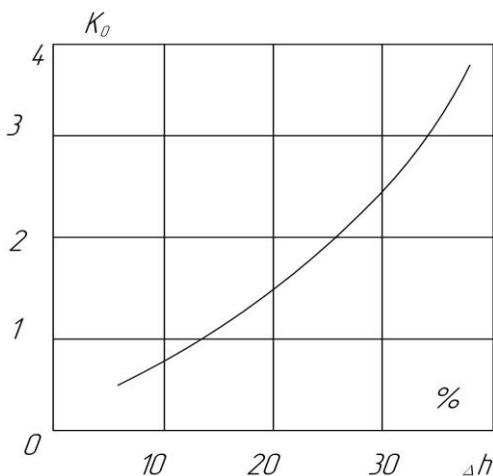


Рис. 7.2

Частоты сопряжения центрального отрезка среднечастотной части ЛАХ, пересекающего ось абсцисс при частоте среза ω_C , с предыдущим и последующим отрезками могут быть выбраны, исходя из следующих соотношений:

$$\omega_3 = (2 - 4)\omega_C, \quad \omega_2 = \omega_C / \omega_3.$$

По другому способу рекомендуется определять конечные точки упомянутого центрального отрезка так, чтобы при ординате ω_C запас по фазе был не менее 40° , что устанавливается по ЛФХ, а ордината m , определяющая запас по амплитуде в децибелах, выбиралась в зависимости от допустимого перерегулирования. Выбор величины m можно производить в соответствии с графиком, приведенным на рис. 7.3.

Наконец, величину центрального отрезка можно определять также по частотным интервалам. Желательно, чтобы интервалы $\omega_2 - \omega_C$ и $\omega_C - \omega_3$ были равны 0,5 - 0,9 дек. Здесь следует выбирать интервалы тем больше, чем более высокое качество требуется от переходного процесса.

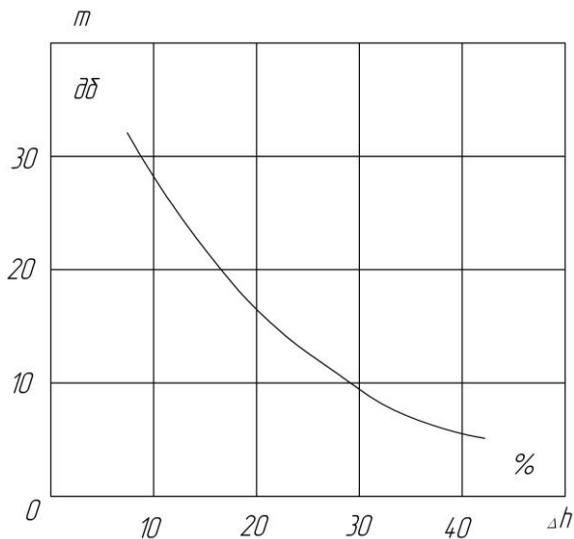


Рис. 7.3

Следует иметь в виду, что чем больше величины интервалов $\omega_2 - \omega_C$ и $\omega_C - \omega_3$, тем быстрее затухает переходный процесс. Поэтому окончательный выбор этих интервалов должен быть согласован с требованиями к переходному процессу.

Так как высокочастотная часть амплитудной логарифмической характеристики сравнительно мало влияет на вид переходного процесса, то для того, чтобы не усложнять корректирующее устройство, она выбирается по возможности аналогичной ЛАХ исходной (нескорректированной) системы. Обычно ее наклон составляет 40 - 60 дБ/дек.

7.3. Синтез последовательных корректирующих устройств

При включении корректирующего устройства в основную цепь системы последовательно с остальными элементами можно записать (рис. 7.4)

$$W_{\text{ск}}(s) = W_{\text{исх}}(s) \cdot W_{\text{к}}(s),$$

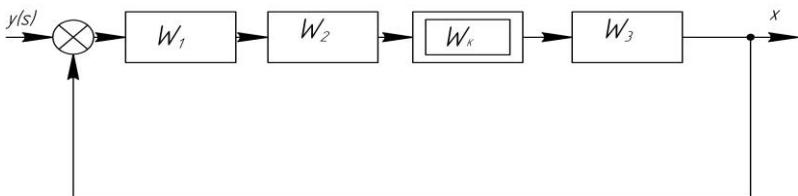


Рис. 7.4

где $W_{\text{ск}}(s)$ - передаточная функция скорректированной системы;
 $W_{\text{исх}}(s)$ - передаточная функция исходной системы;
 $W_{\text{к}}(s)$ - передаточная функция корректирующего устройства,
или в частотном виде

$$W_{\text{ск}}(j\omega) = W_{\text{исх}}(j\omega) \cdot W_{\text{к}}(j\omega).$$

Переходя от частотных к логарифмическим характеристикам, из выражения (7.1) имеем

$$L_{\text{ск}}(\omega) = L_{\text{исх}}(\omega) + L_{\text{к}}(\omega),$$

откуда

$$L_{\text{к}}(\omega) = L_{\text{ск}}(\omega) - L_{\text{исх}}(\omega).$$

Из приведенных соотношений вытекает следующий порядок выполнения расчетов при синтезе системы с последовательным включением корректирующего устройства:

1. Строят ЛАХ исходной системы (разомкнутой).
2. По заданным требованиям к качеству переходного процесса в проектируемой системе строят ЛАХ скорректированной системы.
3. По имеющимся ЛАХ строят соответствующие логарифмические фазовые частотные характеристики и определяют имеющийся запас по фазе и по амплитуде.
4. Вычитая ЛАХ исходной системы из ЛАХ скорректированной системы, получают ЛАХ корректирующего устройства $L_{\text{к}}(\omega)$, то есть

$$L_k(\omega) = L_{\text{ск}}(\omega) - L_{\text{исх}}(\omega).$$

5. По полученной ЛАХ корректирующего устройства подбирают наиболее простое по техническому исполнению корректирующее устройство.

Пример. Рассмотрим структурную схему САР, представленную на рис.7.5 и 7.6, где $k_1 = 2$; $k_2 = 7,9$; $k_3 = 10$; $T_1 = 0,005$; $T_2 = 0,4$.

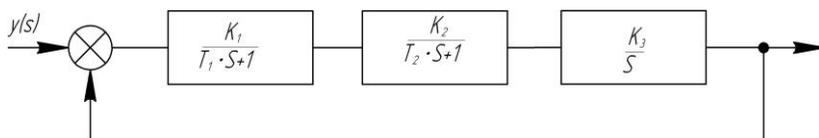


Рис. 7.5

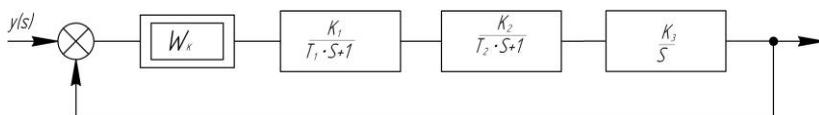


Рис. 7.6

Построение исходной ЛАХ $L_{\text{исх}}$ и фазовой частотной характеристики, приведенное на рис. 7.7, показывает, что исходная астатическая система первого порядка имеет время переходного процесса больше того, которое допустимо по поставленным условиям. (Частота среза ω_C и время переходного процесса связаны между собой соотношением

$$t_{\text{пп}} = \frac{k_0 \pi}{\omega_C}.$$

Помимо того, запас устойчивости по фазе много меньше требуемого. Будем считать, что коэффициент усиления системы удовлетворяет требованиям. Целесообразно применить последовательное включение корректирующего устройства (см. рис. 6.4, 6.5).

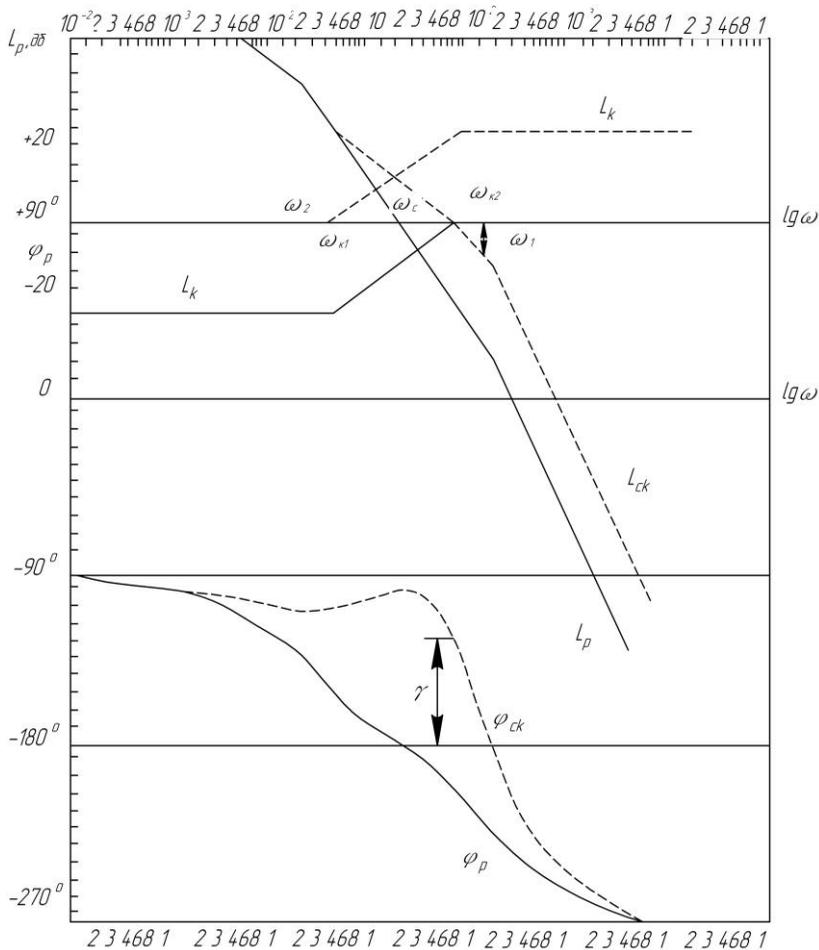


Рис. 7.7

Запишем передаточную функцию

$$W_{\text{исх}}(s) = W_p(s);$$

$$W_{\text{ск}}(s) = W_{\text{исх}}(s) \cdot W_{\text{к}}(s),$$

Переходя к логарифмическим характеристикам, запишем

$$L_{\text{ск}}(\omega) = L_{\text{исх}}(\omega) + L_{\text{к}}(\omega),$$

откуда

$$L_{\text{к}}(\omega) = L_{\text{ск}}(\omega) - L_{\text{исх}}(\omega).$$

Из приведенных соотношений вытекает порядок выполнения расчетов при синтезе системы с последовательным включением корректирующего устройства.

После построения $L_{\text{исх}}(\omega)$ по заданным требованиям к качеству переходного процесса в проектируемой системе строится ЛАХ желаемой (скорректированной) системы.

Желаемая ЛАХ, построенная вместе с соответствующей частотной фазовой характеристикой, с учетом требуемого времени переходного процесса имеет частоту среза $\omega_{\text{с-ск}}$, большую, чем у исходной ЛАХ, и имеет при этой частоте наклон характеристики -20 дБ/дек, в то время как исходная характеристика имеет наклон, равный -40 дБ/дек. Как следствие, уменьшается наклон у желаемой характеристики при частоте среза, а запас устойчивости по фазе увеличивается по сравнению с исходным. Считаем, что он является допустимым по техническим условиям.

Вычитая ЛАХ исходной системы из ЛАХ скорректированной системы, получаем ЛАХ корректирующего устройства $L_{\text{к}}(\omega)$, то есть

$$L_{\text{ск}}(\omega) - L_{\text{исх}}(\omega) = L_{\text{к}}(\omega).$$

После определения вида логарифмической амплитудной характеристики корректирующего устройства уточняем фазовую частотную характеристику скорректированной системы.

В рассматриваемом примере $W_{\text{к}}(s)$ содержит форсирующее звено $T_{\text{к1}}s + 1$ при частоте излома $\omega_{\text{к1}}$ и апериодическое звено

$\frac{1}{T_{\text{к2}}s + 1}$ при частоте излома $\omega_{\text{к2}}$. Под воздействием форсирующего

звена фазовая характеристика $\varphi_{\text{ск}}$ в диапазоне частот $2 < \omega < 20$ как бы приподнимается. За счет этого запас по фазе увеличивается и равен 54° .

По полученной ЛАХ корректирующего устройства (рис. 7.8),

пользуясь данными справочника [12] или табл.6.1, подбираем наиболее простое по техническому исполнению корректирующее устройство:

$$W(s) = \frac{k_k(T_{к1}s + 1)}{(T_{к2}s + 1)},$$

где $k_k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $T_{к1} = R_1 C$; $T_2 = k_k T_{к1}$.

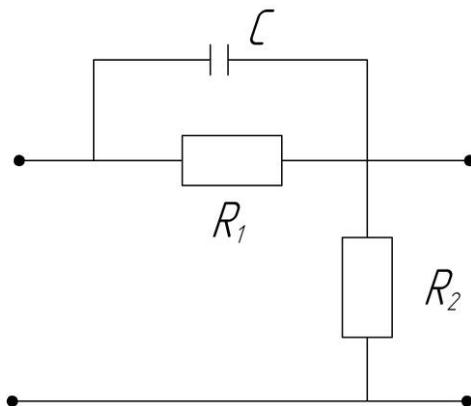


Рис. 7.8

Из рис. 7.7 определим $\omega_{к1} = 5$ и коэффициент k_k :

$$T_{\omega_1} = \frac{1}{\omega_{к1}} = 0,2 \text{ с};$$

$$-23 = 20 \lg k_k; \quad 20 \lg k_k = -1,25 = 2,75;$$

$$k_k = 0,05623 \quad T_{к2} = 0,056 \cdot 0,2 = 0,0112$$

Пусть $C = 10 \mu\text{кF}$, тогда

$$R_1 = \frac{0,2}{10 \cdot 10^{-6}} = 20000 = 20 \text{ кОм};$$

$$R_2 = \frac{k_k R_1}{1 - k_k} = \frac{0,056 \cdot 20000}{0,944} = 0,0593 \cdot 20000 = 1186 \text{ Ом} = 1,186 \text{ кОм}$$

Таким образом, $R_1 = 20 \text{ кОм}; R_2 = 1,186 \text{ кОм}; C = 10 \text{ мкФ}$.

Если ЛАХ выбранного корректирующего устройства будет несколько отличаться от расчетной, то необходимо построить окончательную ЛАХ скорректированной системы и по ней проверить получающиеся показатели переходного процесса.

7.4. Синтез параллельных корректирующих устройств

Рассмотрим включение корректирующего устройства в основную цепь параллельно-встречно, то есть в виде дополнительной корректирующей обратной связи рис. 7.9). Тогда можно записать

$$W_{\text{исх}}(s) = W_{\text{э1}}(s) \cdot W_{\text{э2}}(s); \quad W_{\text{э2}}(s) = W_3(s) \cdot W_4(s).$$

Для разомкнутой системы запишем

$$W_{\text{ск}}(s) = \frac{W_{\text{э1}}(s) \cdot W_{\text{э2}}(s)}{1 + W_{\text{э2}}(s) \cdot W_k(s)}.$$

В диапазоне частот, когда $W_{\text{э2}}(j\omega) \cdot W_k(j\omega) \ll 1$, уравнение (7.1) можно записать так:

$$W_{\text{ск}}(j\omega) \approx W_{\text{э1}}(j\omega) \cdot W_{\text{э2}}(j\omega) = W_{\text{исх}}(j\omega).$$

Из последнего уравнения следует, что в указанном выше диапазоне частот корректирующие устройства не влияют на частотную характеристику системы, так как в этом случае характеристики исходной и скорректированной систем практически совпадают друг с другом.

В диапазоне частот, когда $W_{\text{э2}}(j\omega) \cdot W_k(j\omega) \gg 1$, уравне-

ние (7.1) можно записать приближенно так:

$$W_{\text{СК}}(j\omega) \cong \frac{W_{\text{Э1}}(j\omega) \cdot W_{\text{Э2}}(j\omega)}{W_{\text{К}}(j\omega) \cdot W_{\text{Э2}}(j\omega)} = \frac{W_{\text{Исх}}(j\omega)}{W_{\text{К}}(j\omega) \cdot W_{\text{Э2}}(j\omega)}. \quad (7.2)$$

Из последнего равенства следует, что в указанном диапазоне частот влияние на частотную характеристику звеньев исходной системы, охваченных обратной связью, практически исключается. Отсюда следует, что охватывать обратной связью рекомендуется те звенья, которые существенно ухудшают переходный процесс.

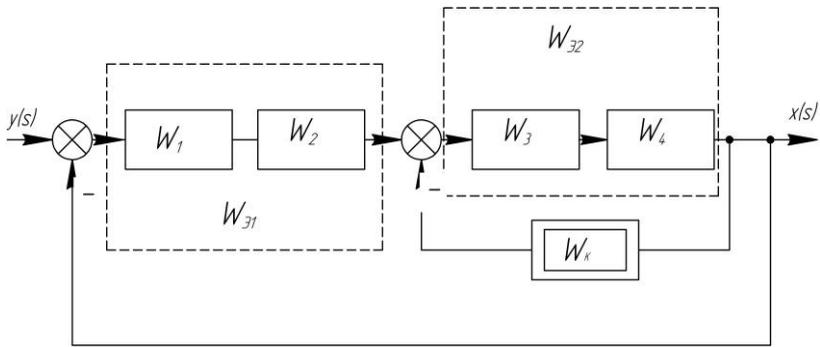


Рис. 7.9

Переходя от обыкновенных частотных характеристик к логарифмическим, исходя из соотношения (7.2), можно записать

$$L_{\text{Исх}}(\omega) - L_{\text{СК}}(\omega) = L_{\text{К}}(\omega) + L_{\text{Э2}}(\omega).$$

В последнем выражении известны желаемая и исходная логарифмические характеристики, поэтому из их разности легко получается суммарная характеристика $L_{\text{К}}(\omega) + L_{\text{Э2}}(\omega)$. Исходя из конкретных условий, определяют значение $L_{\text{Э2}}(\omega)$ и получают искомое значение $L_{\text{К}}(\omega)$, то есть логарифмическую характеристику корректирующего устройства. Наконец, по виду $L_{\text{К}}(\omega)$ находят соответствующий ей корректирующий элемент.

Из сказанного выше можно наметить следующий порядок вы-

полнения расчета при синтезе системы с параллельным включением корректирующего устройства:

1. Строят ЛАХ исходной проектируемой системы.
2. По техническим требованиям, предъявляемым к проектируемой системе и переходному процессу в ней, строят ЛАХ желаемой (скорректированной) системы.
3. По известным ЛАХ строят соответствующие им логарифмические фазовые частотные характеристики.
4. Вычитанием ЛАХ скорректированной системы из ЛАХ исходной системы получают суммарную ЛАХ корректирующего устройства и звеньев, охваченных этим корректирующим устройством, то есть находят $L_k(\omega) + L_{\Sigma 2}(\omega)$.
5. Руководствуясь конкретной схемой корректируемой системы, намечают место включения корректирующего устройства, после чего определяют $L_{\Sigma 2}(\omega)$.
6. Вычитая из суммарной ЛАХ, соответствующей двум характеристикам $L_k(\omega)$ и $L_{\Sigma 2}(\omega)$, ЛАХ $L_{\Sigma 2}(\omega)$, определяют характеристику корректирующего устройства.

Пример. Рассмотрим САР, представленную структурной схемой рис.7.10: $T_2 = 0,111$; $T_3 = 0,05$; $k_1 = 8,91$; $k_2 = 1,98$ $k_3 = 3,19$.

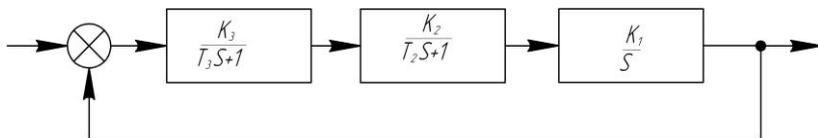


Рис. 7.10

После построения L_p и φ_p становится очевидным, что система неустойчива. Проведем коррекцию системы при помощи дополнительной корректирующей обратной связи.

Порядок выполнения расчета при синтезе системы с параллельным включением корректирующего устройства:

- строим ЛАХ и ЛФХ исходной проектируемой системы L_{p1} и φ_{p1} (рис. 7.11);

- по техническим требованиям, предъявленным к проектируемой системе и переходному процессу в ней, вначале строим ЛАХ, а затем по ней ЛФХ скорректированной системы $L_{ск}$ и $\varphi_{ск}$;

- вычитаем ЛАХ скорректированной системы из ЛАХ исходной системы, получаем суммарную ЛАХ корректирующего устройства и звеньев, охваченных этим корректирующим устройством, то есть находим $L_{\Sigma 2}(\omega) + L_k(\omega)$;

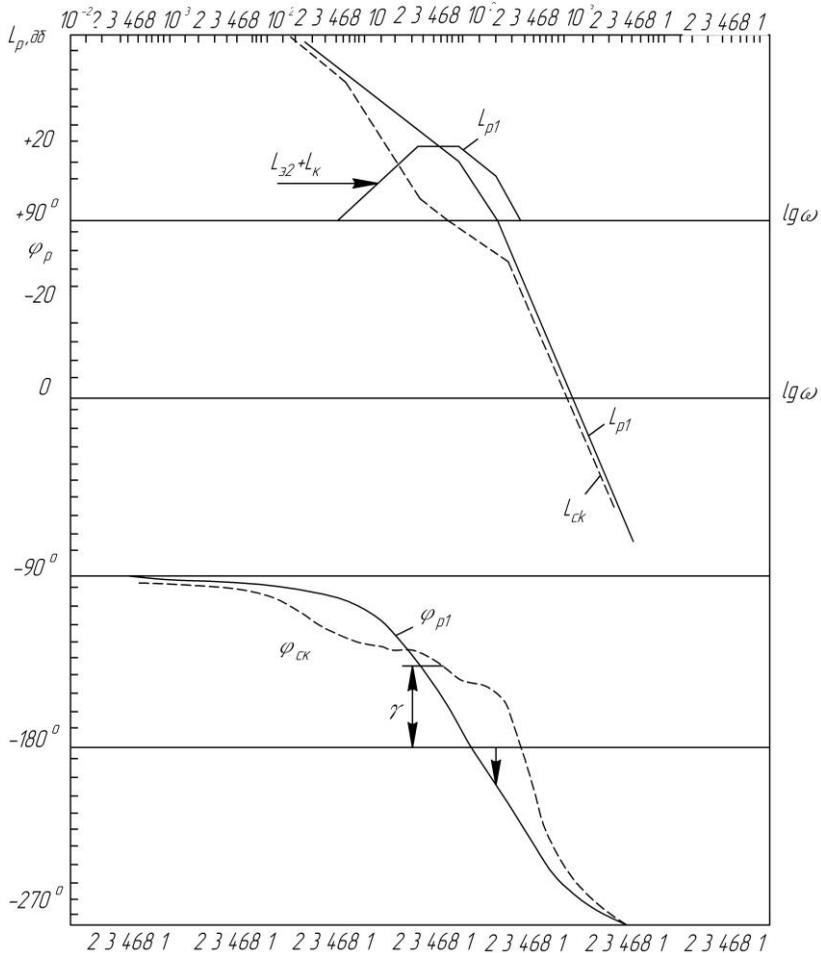


Рис. 7.11

- руководствуясь конкретной схемой корректирующей системы, намечаем место включения корректирующего устройства. В рассматриваемом случае охватываем дополнительной обратной связью два инерционных звена, так как их ЛАХ имеют наибольшую частоту излома (рис. 7.12). Определяем $L_{32}(\omega)$.

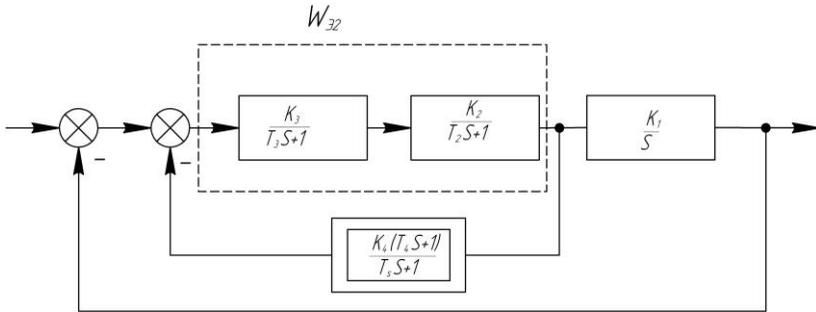


Рис. 7.12

В целях наглядности на рис. 7.13 приведена повторно суммарная характеристика $L_{32}(\omega) + L_k(\omega)$ и отдельно характеристика $L_{32}(\omega)$, которая получена, исходя из конкретной схемы системы и вида звеньев, охваченных обратной связью.

Вычитая из суммарной ЛАХ, соответствующей двум характеристикам $L_{32}(\omega)$ и $L_k(\omega)$, логарифмическую амплитудную характеристику охваченных звеньев $L_{32}(\omega)$, определяем ЛАХ корректирующего устройства, то есть

$$[L_{32}(\omega) + L_k(\omega)] - L_{32}(\omega) = L_k(\omega).$$

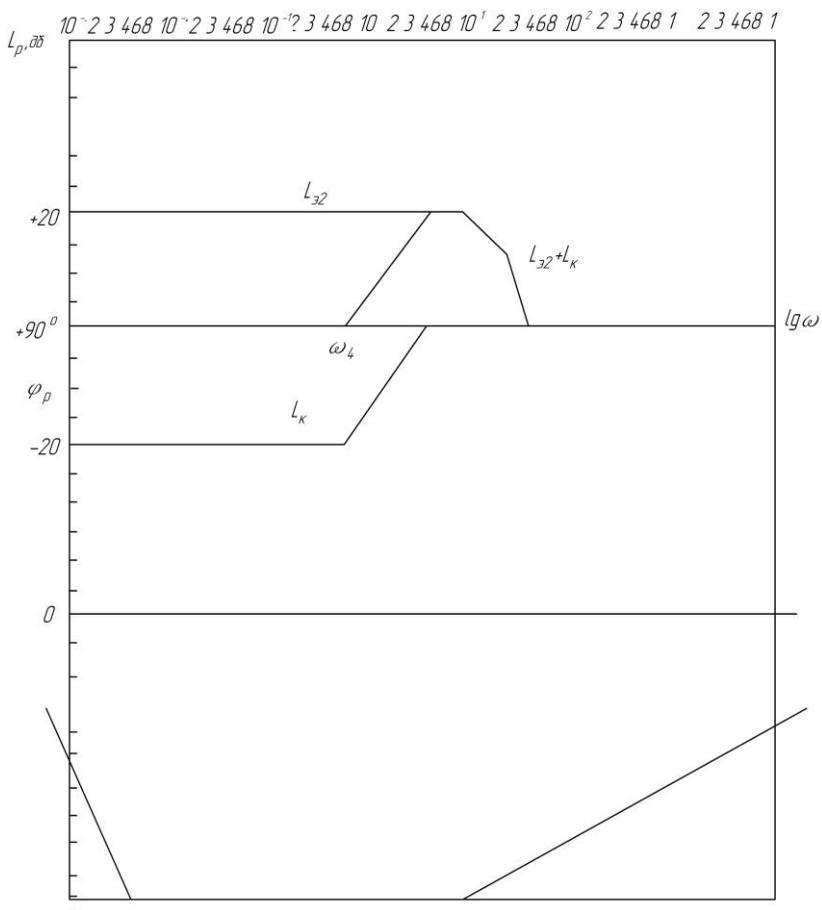


Рис. 7.13

По найденной ЛАХ корректирующего устройства находим наиболее простое его техническое исполнение (по справочнику) (см. рис.7.8):

$$W_k(s) = \frac{k_k(T_4s + 1)}{T_5s + 1}.$$

Из рис. 7.13 определим $\omega_4 = 0,5$ и k_k :

$$T_4 = \frac{1}{\omega_4} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с.}$$

$$-20 = 20 \lg k_k; \quad \lg k_k = -1; = 1,2; \quad k = 0,1.$$

Пусть $R_1 = 200 \text{ кОм}$, тогда

$$C = \frac{T_4}{R_1} = \frac{2}{200000} = 10 \text{ мкФ}; \quad k_k = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$
$$R_2 = \frac{k_k R_1}{1 - k_k} = 22,2 \text{ кОм}; \quad T_5 = k_k \cdot T_4 = 0,222.$$

Таким образом, $R_1 = 200 \text{ кОм}$; $R_2 = 37,6 \text{ кОм}$; $C = 10 \text{ мкФ}$. Как мы смогли увидеть, эффективность корректирующих устройств зависит от способа включения и типа этих устройств. Следует всегда учитывать, что при ошибочном инженерном решении по применению коррекции можно получить не тот эффект, который предполагался первоначально, и система регулирования вместо устойчивой станет неустойчивой.

Вопросы для самоконтроля

1. Особенность синтеза последовательных и параллельных корректирующих устройств.
2. Что понимается под синтезом САР?

Глава 8
ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

8.1. Элементы, нелинейность которых обусловлена
нелинейностью дифференциальных уравнений

8.1.1. Двигатель с вращающимся ротором (рис. 8.1)

Уравнение вращательного движения имеет вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c,$$

где J - момент инерции массы ротора относительно его оси вращения;

M_d - момент движущих сил, приложенных к ротору;

M_c - момент сил сопротивления, действующих на ротор.

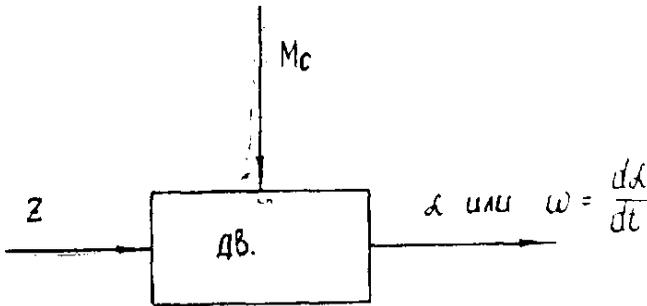


Рис. 8.1. Функциональная схема двигателя с вращающимся ротором

Величина момента движущих сил и характер его изменения определяется физическими принципами, на которых основано действие двигателя, и зависит от положения или состояния z устройства, управляющего потоками энергии, подаваемой в машину, а также от угловой скорости:

$$M_d = M_d(z, \omega). \quad (8.1)$$

Как правило, эта функция нелинейна и чаще всего задается графически в виде механической характеристики двигателя. Поскольку функция $M_{\text{д}}$ нелинейная функция от z и от ω , то и уравнение двигателя (8.1) также нелинейно.

8.1.2. Ядерный реактор

Характер переходного процесса в активной зоне реактора при учете шести групп запаздывающих нейтронов может быть описан системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \beta}{l} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i, \\ \frac{dc_i}{dt} &= \frac{\beta_i}{l} n(t) - \lambda_i c_i, \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

здесь $\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$ - суммарная доля шести групп запаздывающих нейтронов;

β_i - доля ядер излучателей запаздывающих нейтронов i -й группы;

λ_i - постоянная распада ядер излучателей запаздывающих нейтронов i -й группы;

c_i - концентрация ядер излучателей запаздывающих нейтронов i -й группы.

Так как в состав уравнений (8.2) входит произведение двух переменных $n(t)$ и $\rho(t)$, то оно нелинейно и обуславливает нелинейность ядерного реактора.

8.1.3. Гидравлическая

Рассмотрим уравнение гидравлической емкости как элемента корабельной автоматической системы (рис. 8.2).

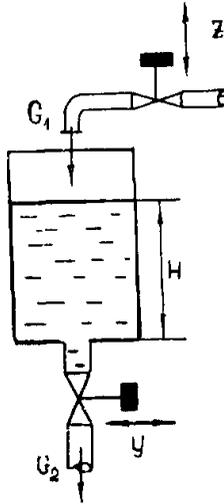


Рис. 8.2. Принципиальная схема гидравлической емкости

Уровень жидкости в резервуаре должен быть постоянным, и поддержание его в заданных пределах является целью регулирования.

Расходы жидкости G_1 и G_2 зависят от перемещений z и y соответствующих клапанов, кроме того, расход G_2 зависит от напора H .

Таким образом, можно записать:

$$G_1 = G_1(z);$$

$$G_2 = G_2(y, H).$$

Уравнение материального баланса емкости очевидно:

$$dG = (G_1 - G_2)dt.$$

Изменение количества жидкости в резервуаре можно представить как произведение площади поперечного сечения резервуара (S) на изменение высоты уровня:

$$dG = S \cdot dH.$$

Поэтому можно записать:

$$S \cdot dH = (G_1 - G_2)dt$$

или

$$S \frac{dH}{dt} = G_1(z) - G_2(y, H).$$

Если клапан подачи жидкости имеет такой профиль, что расход G_1 пропорционален z ,

$$G_1 = az,$$

а расход G_2 через сливной клапан пропорционален корню квадратному из напора H и при соответствующем профиле клапана перемещению y

$$G_2 = b \cdot y \sqrt{H},$$

то уравнение емкости можно записать в виде

$$S \frac{dH}{dt} = az - by \sqrt{H}, \quad (8.3)$$

где a , b - коэффициенты пропорциональности.

Полученное уравнение (8.3) является нелинейным, так как содержит в себе произведение двух переменных y и H . Следовательно, гидравлическая емкость представляет собой нелинейный элемент.

8.2. Элементы, нелинейности которых обусловлены нелинейностями статических характеристик

8.2.1. Золотниковый усилитель

Статические характеристики усилительных органов типа отсечного золотника имеют зону нечувствительности (горизонтальный участок характеристики в начале координат) в том случае, если поршни золотника выполнены с перекрытиями δ (рис. 8.3). Характеристика усилителя в этом случае может быть выражена соотношением

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{при } |\eta| < \varepsilon, \\ \frac{\eta - \varepsilon(\text{sign } \eta)}{1 - \varepsilon(\text{sign } \eta)} & \text{при } \varepsilon \leq |\eta| \leq 1, \\ 1(\text{sign } \eta) & \text{при } |\eta| > 1, \end{cases} \quad (8.4)$$

где через σ и η обозначены безразмерные переменные, определяемые соотношениями

$$\sigma = \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho_{\max}}, \quad \eta = \frac{s}{s_{\max}}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{s_{\max}},$$

символом **sign** обозначен знак переменной η (положительный или отрицательный).

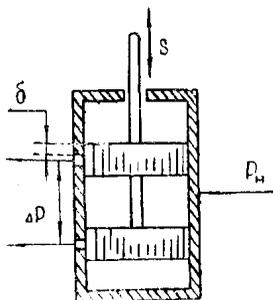


Рис. 8.3. Принципиальная схема золотникового усилителя

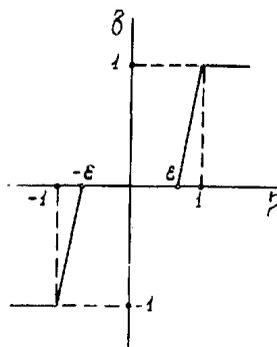


Рис. 8.4. Статическая характеристика золотникового усилителя

Нелинейная статическая характеристика, соответствующая уравнениям (8.4), представлена на рис. 8.4.

8.2.2. Люфт в механизме обратной связи

В корабельных САУ широкое применение находит жесткая обратная связь (ЖОС) по положению регулирующего органа 1 и связанного с ним штока сервомотора 2 (рис. 8.5). Конструктивно она выполняется в виде рычажной системы, связывающей шток сервомотора с измеритель-

ным органом 3 (с пружиной обратной связи) либо непосредственно с суммирующим рычагом (кинематическая обратная связь).

Наличие люфта $\pm \delta$ или зазоров в кинематических парах этой рычажной системы является наиболее типичной нелинейностью данного звена, оказывающей довольно вредное влияние на динамику корабельной САУ.

Обозначим перемещение штока сервомотора через m_s , рычага обратной связи - $m_{св}$, ширину зазора (люфта) - 2δ . Очевидно, что если расстояние между деталями меньше зазора:

$$|m_s - m_{св}| < 2\delta,$$

то при перемещении ведущей детали (штока сервомотора) ведомая деталь (рычаг) останется неподвижной $m_{св} = 0$. Если же зазор выбран в ту или другую сторону, то перемещение $m_{св}$ будет пропорционально m_s до тех пор, пока направление движения поршня сервомотора не изменится, то есть

$$m_{св} = \begin{cases} (m_s - \delta), & m_{св} > 0, \\ (m_s + \delta), & m_{св} < 0. \end{cases}$$

При каждом новом изменении направления движения поршня сервомотора появляется участок «застоя» в статической характеристике обратной связи (рис. 8.6).

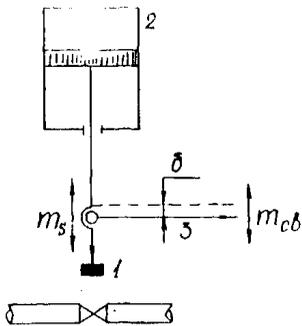


Рис. 8.5. Люфт в механизме жесткой обратной связи

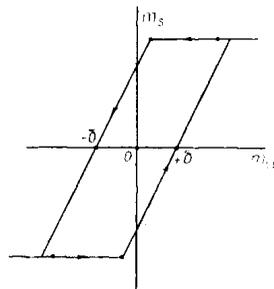


Рис. 8.6. Статическая характеристика типа «Люфт»

Статические характеристики некоторых других нелинейных элементов КСАУ рассмотрим позже, получая выражения для соответствующих им передаточных функций.

ГЛАВА 9
ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ МЕТОДОМ
ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Система автоматического регулирования называется нелинейной, если в ее состав входит хотя бы один или несколько нелинейных элементов, линеаризация которых невозможна или недопустима.

В соответствии с определением функциональная схема разомкнутой нелинейной системы автоматического регулирования (рис. 2.1) может быть представлена состоящей из нелинейной и линейной части.

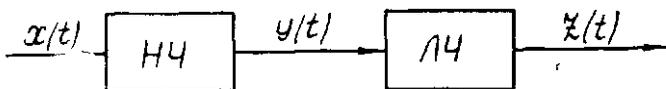


Рис. 9.1. Общий вид функциональной схемы нелинейной САР

Линейная часть включает в себя линеаризованные элементы системы (линейные или нелинейные, линеаризация которых допустима).

Нелинейная часть содержит в своем составе нелинейные элементы. В частном случае в состав нелинейной части может входить один нелинейный элемент — простейший или непростейший.

Под простейшим нелинейным элементом понимают элемент, у которого выходная величина нелинейным образом зависит только от входной величины

$$y = f(x).$$

Под непростейшим нелинейным элементом понимают элемент, у которого выходная величина нелинейно зависит как от входной величины, так и от ее производных

$$y = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}).$$

В дальнейшем будем рассматривать простейшие нелинейные элементы.

9.1. Особенности нелинейных систем

К нелинейным системам не применим принцип суперпозиции, то есть реакция нелинейной системы не равна сумме реакций на отдельные воздействия.

К нелинейным системам не применимо свойство коммутативности, т.е. в системе нельзя менять местами между собой нелинейные элементы, а также нелинейные и линейные элементы.

Для исследования нелинейных систем нельзя применять преобразования Лапласа, Фурье и полученные на их основе передаточные функции, так как эти Преобразования применимы только для линейных дифференциальных уравнений.

В нелинейных системах возможно возникновение устойчивых колебаний определенной амплитуды и частоты — автоколебаний.

Устойчивость нелинейных систем определяется не только структурой и параметрами системы (как в линейных системах), но зависит и от начальных отклонений относительно состояния равновесия.

Указанные особенности нелинейных систем автоматического регулирования, отсутствие общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений обусловило поиск и разработку приближенных специальных методов анализа и синтеза нелинейных САР. Эти методы расчета позволяют хотя бы грубо исследовать поведение целых классов нелинейных систем, определить требуемую структуру регулятора и область оптимальных значений его параметров. В этом плане нашел широкое применение метод гармонической линеаризации, основы которого были заложены в работах советских ученых Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Область его распространения ограничивается в основном на исследовании периодических режимов, однако анализ наличия и устойчивости этих периодических режимов часто позволяет дать достаточно обоснованные заключения о поведении систем в динамике при любых начальных условиях и различных внешних отклонениях.

9.2. Гармоническая линеаризация нелинейного элемента

Суть гармонической линеаризации заключается в приведении нелинейного элемента САР к некоторому, эквивалентному ему, линейному (при сохранении возможности анализа специфически нелинейных явлений). Возможность указанного преобразования нелинейного элемента к линейному базируется на явлении фильтрации высших гармоник нелинейных колебаний линейной частью системы (гипотеза фильтра).

Поясним гипотезу фильтра на примере функциональной схемы разомкнутой САР с одним простейшим нелинейным элементом, который имеет статическую характеристику, представленную на рис. 2.2. Если па вход нелинейного элемента подавать гармонические (например синусоидальные) колебания, то на

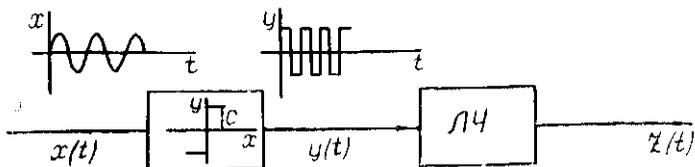


Рис. 9.2. Функциональная схема САР с нелинейным элементом типа 2-позиционного реле

выходе наблюдается также периодический, но уже не синусоидальный сигнал. В нашем случае это последовательность прямоугольных импульсов различной полярности. Выходной сигнал, как и любая периодическая функция, может быть разложен в ряд Фурье [8]:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad (9.1)$$

который в общем случае содержит бесконечное множество гармоник.

В выражении (9.1) через a_0 , a_k , b_k обозначены коэффициенты ряда Фурье; переменная k определяет количество гармоник разложения.

Представим зависимость $y(t)$ в виде суммы ряда синусоид (рис. 9.3). Такое преобразование производится следующим образом. Прямоугольная кривая имеет определенную частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где T - период периодической функции.

Если взять синусоидальную зависимость

$$y_1 = A_1 \sin \omega t,$$

то она (см. рис. 9.3, б) по сравнению с прямоугольной кривой, изображенной около нее пунктиром, будет иметь меньшие ординаты по углам и большие ординаты в середине. Чтобы исправить это, к синусоиде y_1 прибавим еще одну синусоиду с утроенной частотой

$$y_3 = A_3 \sin 3\omega t,$$

причем $A_3 < A_1$ (см. рис. 9.3, в).

Сумма двух синусоид ($y_1 + y_3$) уже ближе будет подходить к прямоугольной кривой, но все же уголки еще будут срезаны, а вместо прямой будут волны. Для исправления этого недостатка прибавим третью синусоиду в пять раз большей частоты, чем первая:

$$y_5 = A_5 \sin 5\omega t,$$

причем $A_5 < A_3$ (см. рис. 9.3, г). Сумма трех синусоид ($y_1 + y_3 + y_5$) еще лучше будет подходить к прямоугольной кривой.

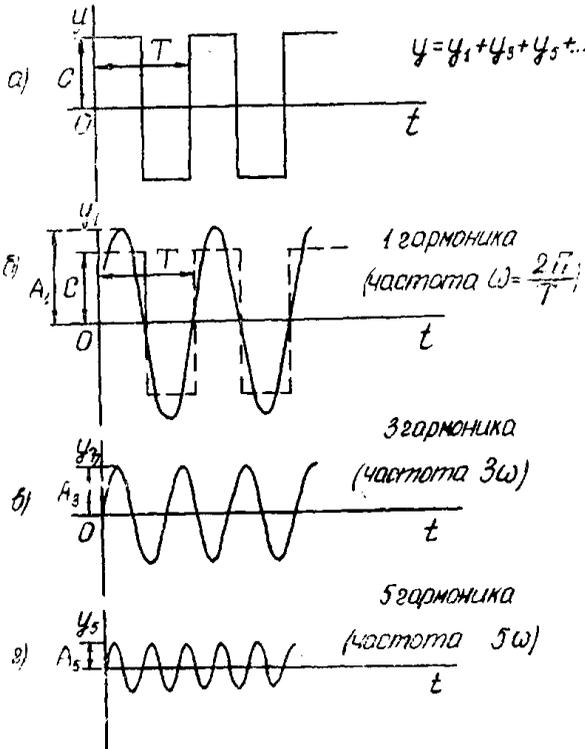


Рис. 9.3. Графическая интерпретация разложения периодической функции в ряд Фурье

Известно, что, если продолжить прибавление синусоид с увеличивающимися частотами $7\omega, 9\omega, \dots$ до бесконечности и брать для них все уменьшающиеся амплитуды $A_5 > A_7 > A_9 > \dots$ до нуля, то при соответствующем подборе указанных амплитуд можно осуществить точное равенство между прямоугольной кривой и суммой синусоид

$$y = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + \dots$$

Это и есть указанное выше разложение периодической функции в ряд Фурье, который в общем случае содержит еще и четные гармоники (y_2, y_4, \dots) .

При этом первая синусоида y_1 , имеющая ту же частоту ω , что и прямоугольная кривая, называется первой гармоникой, последующие синусоиды с более высокими частотами называются высшими гармониками разложения. Если частота высших гармоник больше частоты среза логарифмической амплитудной характеристики линейной части (что в большинстве случаев и бывает), то эти гармоники «подавляются» или фильтруются линейной частью. На выходе ее будет наблюдаться гармонический сигнал z , отличающийся по амплитуде и фазе от первой гармоники на выходе нелинейного элемента. Вследствие этого всеми гармониками на выходе нелинейного элемента с частотами, большими частоты периодического гармонического сигнала $(2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots)$, можно пренебречь и выходной сигнал $y(t)$ приближенно считать равным первой гармонике при разложении периодической функции в ряд Фурье [см. (9.1)]:

$$y(t) = g(A)\sin \omega t + b(A)\cos \omega t, \quad (9.2)$$

где $g(A) = a_1$ и $b(A) = b_1$ - коэффициенты Фурье первой гармоники, определяемые по формулам

$$\left. \begin{aligned} g(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t), \\ b(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Постоянную составляющую, определяемую коэффициентом a_0 , в выражении (9.1) примем равной нулю, что, впрочем, имеет место во многих практических случаях.

9.3. Передаточная функция нелинейного элемента

К дифференциальному уравнению линеаризованного указанным выше способом нелинейного элемента уже применимо прямое и обратное преобразование Лапласа. Можно показать [4], что для тригонометрических функций прямое преобразование Лапласа будет равно

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

С учетом (2.2) изображение первой гармоники на выходе нелинейного элемента определим следующим образом:

$$y(s) = g(A) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + b(A) \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \left(g(A) + b(A) \frac{s}{\omega} \right). \quad (9.4)$$

Аналогично получим изображение подаваемого на вход нелинейного элемента синусоидального сигнала

$$x(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

откуда

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{x(s)}{A}. \quad (9.5)$$

Произведя подстановку (2.5) в выражение (2.4), получим

$$y(s) = \frac{x(s)}{A} \left(g(A) + b(A) \frac{s}{\omega} \right) = x(s) \left(g'(A) + b'(A) \frac{s}{\omega} \right),$$

где

$$g'(A) = \frac{g(A)}{A} \quad \text{и} \quad b'(A) = \frac{b(A)}{A}.$$

По аналогии с линейными элементами получим передаточную функцию линеаризованного нелинейного элемента как отношение изображений выходного сигнала к входному при нулевых начальных условиях

$$W_{\text{нэ}}(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \left[g'(A) + b'(A) \frac{s}{\omega} \right]. \quad (9.6)$$

Следует заметить, что в таком виде выражение передаточной функции справедливо только для гармонически линеаризованных элементов.

Частотную функцию нелинейного элемента получим, заменив в (9.6) комплексный аргумент s на чисто мнимый аргумент $j\omega$:

$$W_{\text{нэ}}(j\omega) = \left[g'(A) + b'(A) \frac{j\omega}{\omega} \right] = g'(A) + jb'(A).$$

Таким образом, частотная функция простейших нелинейных элементов не зависит от частоты подаваемых на вход синусоидальных колебаний, а зависит только от их амплитуды, следовательно, ее целесообразно переобозначить через $W_{\text{нэ}}(A)$:

$$W_{\text{нэ}}(A) = g'(A) + jb'(A). \quad (9.7)$$

В случае непростейшего нелинейного элемента существует зависимость частотной функции не только от амплитуды, но и от частоты входного гармонического сигнала.

Модуль частотной функции

$$\text{mod} W_{\text{нэ}}(A) = |W_{\text{нэ}}(A)| = \sqrt{g'(A)^2 + b'(A)^2} = \frac{A_1}{A}$$

показывает, во сколько раз амплитуда первой гармоники на выходе нелинейного элемента (A_1) больше (или меньше) амплитуды входного синусоидального сигнала (A).

Аргумент частотной функции

$$\arg W_{нэ}(A) = \theta = \operatorname{arctg} \frac{b'(A)}{g'(A)}$$

определяет разность фаз между входным и выходным сигналами (рис. 9.4).

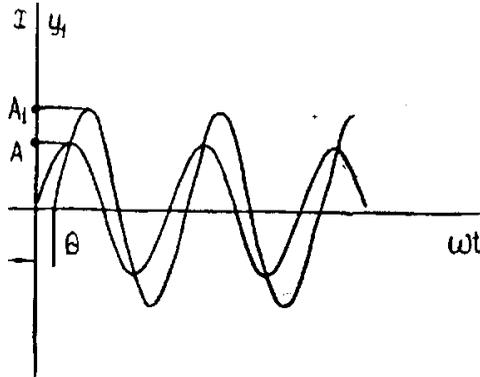


Рис. 9.4. Входной сигнал на входе и 1-я гармоника на выходе нелинейного элемента

Годограф вектора $W_{нэ}(A)$ на комплексной плоскости есть амплитудная характеристика нелинейного элемента, получаемая при изменении амплитуды синусоидального сигнала на входе от нуля до бесконечности.

9.4. Типовые нелинейности и их частотные функции

В линейной теории автоматического управления вводится понятие типовых звеньев на основании того, что разные по физической природе процессы и явления описываются одним видом дифференциальных уравнений.

«Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений» (Ленин В.И. Полн. собр. соч., 5-е изд., т. 18, с 306).

Нелинейные элементы автоматических систем управления, различные по своему принципу действия, могут иметь одинаковые по форме статические характеристики. В соответствии с этим в теории нелинейных автоматических систем введено понятие типовых нелинейных элементов, различаемых по виду статических характеристик. Последние могут быть как однозначными, так и неоднозначными. Ха-

рактические могут быть всегда приведены к нормированному безразмерному виду путем изменения масштаба входной (x) и выходной (y) величин. Типовые нелинейные звенья и их нормированные характеристики были введены Л.С. Гольдфарбом в 1947 году для приближенного анализа различных систем автоматического регулирования.

Однозначным нелинейным элементом называют элемент, статическая характеристика которого позволяет по величине входного сигнала однозначно определить величину выходного сигнала. Многозначным нелинейным элементом называется элемент с такой статической характеристикой, при которой связь между входными и выходными сигналами разная, в зависимости от характера изменения (увеличения или уменьшения) входного сигнала.

Рассмотрим методику определения частотной функции нелинейных элементов на примере реле с зоной нечувствительности и однозначной статической характеристикой, приведенной на рис. 9.5. Такие реле нашли широкое применение в корабельных системах автоматизации, например, в контуре регулирования средней температуры теплоносителя АЭУ.

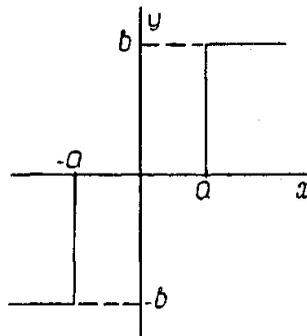


Рис. 9.5. Статическая характеристика реле с зоной нечувствительности

Статической характеристике рассматриваемого реле соответствует следующее математическое описание:

$$y = \begin{cases} -b & \text{при } x_{\text{вх}} \leq -a, \\ 0 & \text{при } |x_{\text{вх}}| \leq a, \\ b & \text{при } x_{\text{вх}} \geq a. \end{cases}$$

При изменении сигнала на входе нелинейного элемента в пределах зоны нечувствительности значение сигнала на выходе равно ну-

лю, во всех остальных случаях выходной сигнал равен

$$y = \pm b.$$

Для определения частотной функции нелинейного элемента будем подавать на его вход синусоидальные колебания с амплитудой, большей величины срабатывания реле:

$$x = A \sin \omega t, \quad A > |a|.$$

На выходе нелинейного элемента при этом будут наблюдаться импульсы различной полярности, представляющие собой периодическую динамическую характеристику нелинейного элемента (рис. 2.6). Последняя в свою очередь в пределах половины периода может быть описана математически следующим образом:

$$y = \varphi(A \sin \omega t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \omega t < \alpha, \quad \pi - \alpha < \omega t < \pi, \\ b & \text{при } \alpha < \omega t < \pi - \alpha. \end{cases}$$

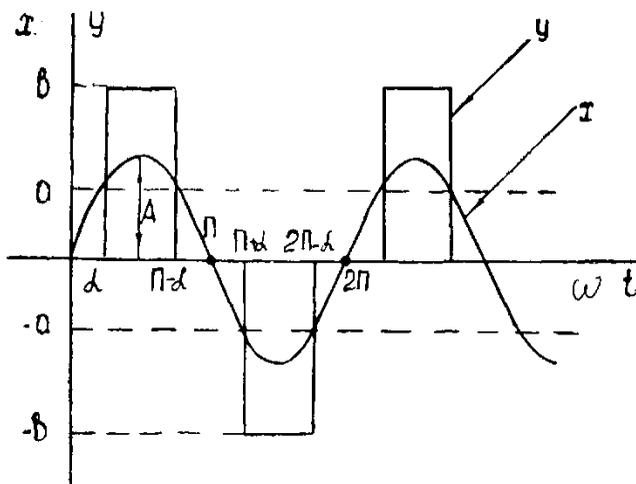


Рис. 9.6. Динамическая характеристика нелинейного элемента

Так как функция на выходе нелинейного элемента является периодической, то она разложима в ряд Фурье. Оставив в этом разложении (в соответствии с гипотезой фильтра) только первую гармонику, опреде-

лим по (2.3) коэффициенты гармонической линейризации для частотной функции релейного элемента с зоной нечувствительности

$$W_{\text{нз}}(A) = g'(A) + jb'(A);$$

$$\begin{aligned} g'(A) &= \frac{g(A)}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi-\alpha} b \sin \omega t d(\omega t) = \\ &= \frac{2b}{\pi A} (-\cos \omega t) \Big|_{\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{4b}{\pi A} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Для получения формулы вычисления $g'(A)$ через параметры статической характеристики произведем ряд преобразований:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \text{откуда} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (9.9)$$

С другой стороны:

$$x \Big|_{\omega t = \alpha} = A \sin \alpha = a, \quad \text{откуда} \quad \sin \alpha = \frac{a}{A}. \quad (9.10)$$

Подставив (9.10) в (9.9), получим

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}},$$

окончательно

$$g'(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}.$$

Аналогично можно показать, что второй коэффициент гармонической линейризации равен нулю

$$b'(A) = 0$$

так же, как и для всех остальных однозначных нелинейных элементов.

Таким образом, частотная функция релейного элемента с зоной нечувствительности определяется выражением

$$W_{\text{нз}}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}. \quad (9.11)$$

Амплитудная характеристика рассматриваемого элемента может быть построена на комплексной плоскости, если в выражении (9.11) задаваться значениями амплитуды от $A = 1$ до $A = \infty$. Характеристика совпадает с положительной вещественной полуосью. Общий вид ее показан на рис. 9.7.

Статические характеристики наиболее часто встречающихся на практике нелинейных элементов с формулами для определения коэффициентов гармонической линеаризации и соответствующими им амплитудными характеристиками приведены в приложении 1.

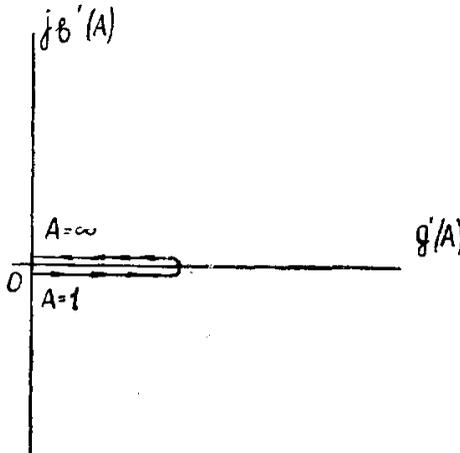


Рис. 9.7. Амплитудная характеристика нелинейного элемента

9.5. Использование метода гармонической линеаризации для исследования автоколебаний в нелинейных автоматических системах

В качестве одной из особенностей, присущей только нелинейным системам автоматического управления, ранее было упомянуто явление устойчивых автоколебаний. Так как наличие автоколебательных процессов в САУ делает ее неустойчивой, то понятна важность исследования этого вопроса. Иногда алгоритм функционирования системы автоматического управления специально предусматривает наличие ав-

токолебаний как необходимого условия работоспособности системы. И в этом случае еще на этапе проектирования САУ важно знать, будут ли параметры фактических автоколебаний совпадать с заданными, и если нет, то как велико это несовпадение.

Одним из наиболее эффективных методов решения поставленных выше вопросов является метод гармонического баланса, основанный на изложенной ранее гипотезе гармонической линеаризации нелинейного элемента. Рассмотрим применение метода гармонического баланса (в иностранной литературе он называется методом описывающих функций) для системы автоматического управления с одним простейшим нелинейным элементом. Структурная схема рассматриваемой системы может быть приведена к виду, представленному на рис. 9.8.

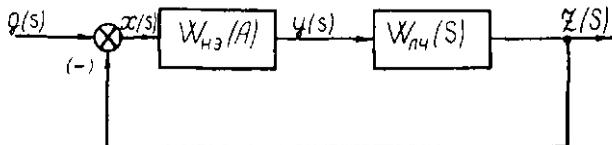


Рис. 9.8. Общий вид структурной схемы САУ с одним нелинейным элементом

Автоколебания в рассматриваемой системе автоматического управления возможны, если при условии равенства нулю задающего воздействия $[g(s) = 0]$ справедливо соотношение

$$x(s) = -z(s).$$

Анализ структурной схемы САУ показывает очевидность следующих уравнений:

$$\begin{aligned} y(s) &= W_{нз}(A)x(s); \\ z(s) &= W_{лч}(s)y(s). \end{aligned} \tag{9.12}$$

Преобразуя (9.12), получаем условие существования незатухающих автоколебаний

$$z(s) = W_{лч}(s)W_{нз}(A)x(s)$$

или

$$\begin{aligned}z(s) &= W_{\text{лч}}(s)W_{\text{нз}}(A)[-z(s)]; \\z(s) + W_{\text{лч}}(s)W_{\text{нз}}(A)z(s) &= 0; \\z(s)[1 + W_{\text{лч}}(s)W_{\text{нз}}(A)] &= 0.\end{aligned}$$

Так как выходной сигнал $z(s)$ не может быть равен нулю, то

$$1 + W_{\text{лч}}(s)W_{\text{нз}}(A) = 0. \quad (9.13)$$

Если полученное уравнение, называемое уравнением гармонического баланса, разрешимо относительно амплитуды A и частоты ω [после подстановки в (9.13) вместо аргумента s аргумента $j\omega$], то автоколебания в системе автоматического управления возможны. При этом полученные значения A и ω будут соответственно амплитудой и частотой этих автоколебаний.

Если уравнение (9.13) достаточно простое, то его иногда удается решить аналитически. Но, как правило, эти уравнения слишком сложны, и основным методом их решения является графоаналитический.

Для использования графоаналитического метода уравнение гармонического баланса записывают в виде

$$W_{\text{лч}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{нз}}(A)}. \quad (9.14)$$

Для решения последнего уравнения необходимо построить в одной комплексной плоскости амплитудно-фазовую характеристику линейной части и отрицательную обратную амплитудную характеристику нелинейного элемента. Если характеристики имеют точки пересечения (одну или несколько), то это означает, что автоколебания в системе возможны. При этом точки пересечения характеристик определяют значения амплитуды и частоты автоколебаний: первые — по амплитудной характеристике, вторые — по амплитудно-фазовой характеристике линейной части. Кроме того, метод гармонического баланса позволяет определить устойчивость автоколебательных процессов. Пусть, например, взаимное расположение характеристик соответствует рис. 9.9, то есть

Если амплитуда колебаний стала меньше, чем A_M (точка M_2), АФХ не охватывает эту точку, движение устойчиво, амплитуда будет убывать до нуля. Таким образом, автоколебания с амплитудой и частотой, соответствующими точке M , неустойчивы.

Аналогично можно показать устойчивость автоколебаний с параметрами, соответствующими второй точке пересечения характеристик, точке N .

Если характеристики $W_{\text{лч}}(j\omega)$ и $-\frac{1}{W_{\text{нз}}(A)}$ не пересекаются,

то тогда система либо устойчива, либо неустойчива при любых начальных отклонениях. Первый случай имеет место, когда АФХ линейной части не охватывает амплитудную характеристику нелинейного элемента, второй случай — когда такой охват имеется.

Установим, возможны ли автоколебания, и если возможны, то определим их параметры для нелинейной САУ, структурная схема которой представлена на рис. 9.10.

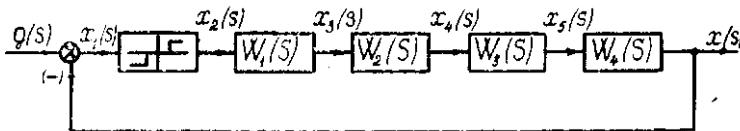


Рис. 9.10. Структурная схема корабельной нелинейной САУ

Передаточные функции элементов линейной части равны

$$W_1(s) = k_1 = 1, \quad W_2(s) = \frac{k_2}{T_1 s + 1} = \frac{2,5}{0,05s + 1},$$

$$W_3(s) = \frac{k_3}{s(T_2 s + 1)} = \frac{328}{s(0,03s + 1)}, \quad W_4(s) = k_4 = 0,001.$$

Статическая характеристика нелинейного элемента представлена на рис. 9.11.

Статической характеристике указанного типа соответствует передаточная функция нелинейного элемента (см. приложение 1).

$$W_{\text{нз}}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 + \frac{c^2}{A^2}}, \quad (9.15)$$

где $b = 110$, $c = 0,25$.

Коэффициент $k = 4$ отнесем к линейной части.

Результаты расчета обратной отрицательной характеристики нелинейного элемента по (9.15) сведем в табл. 9.1.

Таблица 9.1

A	0,25	0,25172	0,3	0,4	1	2	2,142	5
$W_{\text{нз}}(A)$	0	16,233	64,5	68,33	39,9	17,4	16,23	6,99
$-W_{\text{нз}}^{-1}(A)$	$-\infty$	$-6,16 \cdot 10^{-2}$	$-1,55 \cdot 10^{-2}$	$-1,4 \cdot 10^{-2}$	$-2,9 \cdot 10^{-2}$	$-5 \cdot 10^{-2}$	$-6,159 \cdot 10^{-2}$	$-1,4 \cdot 10^{-1}$

Передаточная функция линейной части равна

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{4k_1 k_2 k_3 k_4}{(T_1 s + 1)s(T_2 s + 1)} = \frac{3,28}{1,5 \cdot 10^{-3} s^3 + 0,8 s^2 + s}.$$

Выражение для построения АФХ линейной части получим, заменив в передаточной функции аргумент S на аргумент $j\omega$ и выделив после этого вещественную и мнимую части частотной функции

$$\begin{aligned} W_{\text{лч}}(j\omega) &= \frac{3,28}{-1,5 \cdot 10^{-3} j\omega^3 - 0,08\omega^2 + j\omega} = \frac{3,28}{-0,08\omega^2 + j(\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)} = \\ &= \frac{3,28[-0,08\omega^2 - j(\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)]}{(-0,08\omega^2)^2 + (\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)^2} = \frac{3,28 \cdot 0,08\omega^2}{(-0,08\omega^2)^2 + (\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)^2} - \\ &- j \frac{3,28(\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)}{(-0,08\omega^2)^2 + (\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)^2} = W_{\text{лч1}}(\omega) + jW_{\text{лч2}}(\omega). \end{aligned}$$

Участок АФХ, показывающий пересечение ее с обратной амплитудной отрицательной характеристикой нелинейного элемента, показан на рис. 9.12.

Для того чтобы найти точки пересечения двух характеристик, приравняем нулю мнимую часть частотной функции линейной части

(так как обратная амплитудная характеристика расположена вдоль отрицательной полуоси вещественных и в точках пересечения характеристик мнимая часть АФХ равна нулю):

$$W_{\text{лч2}}(\omega) = \frac{3,28(\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)}{(-0,08\omega^2)^2 + (\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)^2} = 0.$$

Из последнего равенства получим

$$(\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3) = 0. \quad (9.16)$$

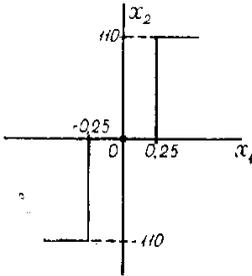


Рис. 9.11. Статическая характеристика нелинейного элемента

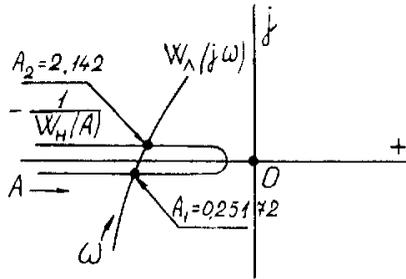


Рис. 9.12. Определение параметров автоколебаний в нелинейной САР

Решением уравнения (9.16) будут значения частоты

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = 25,8.$$

Соответствующее частоте $\omega = 25,8$ значение вещественной части АФХ найдем из выражения

$$W_{\text{лч1}}(\omega) \Big|_{\omega=25,8} = \frac{-3,28 \cdot 0,08\omega^2}{(-0,08\omega^2)^2 + (\omega - 1,5 \cdot 10^{-3} \omega^3)^2} = -6,159 \cdot 10^{-2}.$$

Амплитуду возможных периодических движений определим из условия

$$W_{\text{лч1}}(\omega) = -\frac{1}{W_{\text{вз}}(A)} \quad \text{или} \quad 6,159 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{\frac{b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}}}. \quad (9.17)$$

Значение амплитуды автоколебательного движения определим, решая уравнение (9.17). При этом получается две амплитуды

$$A_1 = 0,25172 \quad \text{и} \quad A_2 = 2,142.$$

Таким образом, в исследуемой системе возможны автоколебания с частотой $\omega = 25,8$ рад/с и амплитудами $A_1 = 0,25172$ и $A_2 = 2,142$. Произведя анализ устойчивости этих автоколебательных движений, можно сделать вывод, что колебания с амплитудой $A = 0,25172$ являются неустойчивыми и, наоборот, колебания с амплитудой $A = 2,142$ будут иметь устойчивый характер.

Глава 10

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ

Состояние динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением n -го порядка, в каждый момент времени может быть определено значением какой-либо координаты x и $n-1$ ее производных.

Пространство, координатами которого являются $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}$, называется фазовым. На рис. 10.1, 10.2 представлены фазовые пространства для систем второго и третьего порядков.

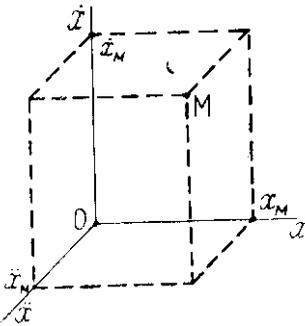


Рис. 10.1. Изображающая точка фазового пространства

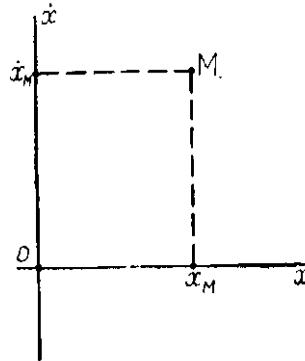


Рис. 10.2. Фазовая плоскость

Каждая точка фазового пространства определяет некоторое состояние изображающей точки (точка M на рис. 10.1).

При движении системы меняются значения координат $x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}$, следовательно, и положение точки M на фазовой плоскости. Траектория изображающей точки при движении системы, построенная для определенных начальных условий, называется фазовой траекторией.

Совокупность фазовых траекторий для всех возможных начальных условий называется фазовым портретом.

Метод фазовых портретов является наглядным геометрическим методом исследования систем автоматического управления, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка (линей-

ными и нелинейными). Фазовым пространством для данных систем является фазовая плоскость (см. рис.10.2).

Данный метод особенно удобен для исследования свободных движений, где отсутствуют внешние воздействия, а начальное состояние не совпадает с состоянием равновесия. Рассмотрим способы построения фазовых траекторий для линейных систем второго порядка, затем отметим особенности фазовых траекторий для нелинейных систем.

10.1. Фазовые портреты линейных систем второго порядка

Дифференциальное уравнение, описывающее свободное движение линейной системы второго порядка, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0. \quad (10.1)$$

Корни характеристического уравнения

$$s^2 + a_1 s + a_2 = 0,$$

соответствующего данному исходному (3.1), определяются по известной формуле

$$s_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

и в зависимости от коэффициентов a_1 и a_2 принимают различные значения.

Рассмотрим несколько случаев.

10.1.1. Коэффициенты $a_1 = 0$, $a_2 > 0$

Этому случаю соответствуют чисто мнимые корни характеристического уравнения. Система автоматического управления находится на границе устойчивости.

Решение уравнения движения системы соответствует гармоническим колебаниям и может быть записано в виде

Тогда

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a \sin \omega t. \\ y(t) &= \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) система имела положительное начальное отклонение x_0 (рис. 10.3, а) и положительную начальную скорость y_0 . Начальными условиями (координатами x_0 и y_0) задается исходная точка M_a на фазовой плоскости (рис. 10.3, б).

В процессе движения системы на участке AB переменная x продолжает увеличиваться, а скорость ее изменения y уменьшается, становясь равной нулю в точке B . Изображающая точка на фазовой плоскости движется по кривой $M_a M_b$.

Затем участку BC процесса $x(t)$ будет соответствовать движение изображающей точки M на фазовой плоскости (x, y) по некоторой кривой $M_B M_C$, причем точка M_C отвечает точке C процесса $x(t)$, в которой $x = 0$, а скорость y имеет максимальное отрицательное значение. Аналогично легко убедиться в том, что участкам CD и DE процесса $x(t)$ соответствует движение изображающей точки M на фазовой плоскости по кривой $M_C M_D M_E$.

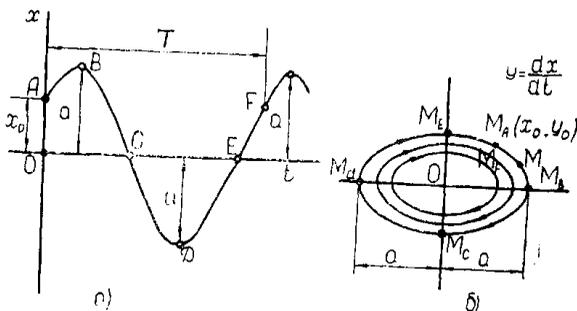


Рис. 10.3. Построение фазового портрета консервативного звена:
а — переходная характеристика;
б — фазовый портрет с особой точкой типа «центр»

Наконец, спустя время, равное периоду колебаний T (см. рис. 10.3, а), в точке F система будет иметь те же самые значения отклонения x и скорости y , что и в начальной точке процесса A (если, как мы условились вначале, процесс будет действительно периодический). Это значит, что изображение M_F точки F процесса $x(t)$ совпадает на фазовой плоскости (см. рис. 10.3, б) с изображением M_a начальной точки A процесса.

В дальнейшем ходе процесса кривая $x(t)$ после точки F будет точным повторением того, что было в первом периоде колебаний. Следовательно, и изображающая точка M на фазовой плоскости после точки M_F пойдет по такому же замкнутому контуру, который получился в первом периоде колебаний. Направление движения изображающей точки M по фазовой траектории принято обозначать стрелками.

Следовательно, любой периодический колебательный процесс с постоянными амплитудой и частотой всегда изображается на фазовой плоскости в виде некоторого замкнутого контура — замкнутой фазовой траектории. Каждому периоду колебаний соответствует прохождение изображающей точкой всего контура. В случае синусоидальных колебаний формулы (10.2) дают на фазовой плоскости эллипс с полуосями a (по оси x) и $a\omega$ (по оси y). Если же колебания не синусоидальны, то замкнутый контур на фазовой плоскости будет отличаться от эллипса.

Геометрические размеры эллипса зависят от начальных отклонений и параметров системы. Если рассмотреть все возможные начальные отклонения, то вся фазовая плоскость будет заполнена совокупностью эллипсов, причем эллипсам с большими размерами будут соответствовать колебания с большими амплитудами.

Точки на фазовой плоскости, где $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, называются

особыми. Им соответствует состояние равновесия в реальной САУ.

В рассматриваемом случае особая точка носит название «центр».

10.1.2. Коэффициенты $a_1^2 < 4a_2$; $a_1 > 0$, $a_2 > 0$

В этом случае корни характеристического уравнения — комплексные с отрицательными вещественными частями. Линейная динамическая система будет устойчивой, а переходный процесс будет соответствовать затухающим колебаниям (рис. 10.4, а). Решение уравнения (10.1) запишем в виде

$$x(t) = c_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + c_2), \quad (10.3)$$

где $\alpha = \frac{a_1}{2}$, $\omega = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$.

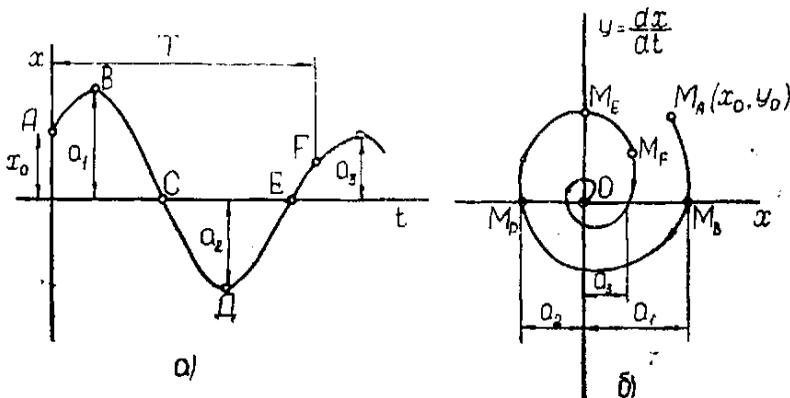


Рис. 10.4. Построение фазового портрета устойчивого колебательного звена:

а - переходная характеристика; б - фазовый портрет с особой точкой типа «устойчивый фокус»

Пусть имеют место те же самые начальные условия процесса (x_0, y_0) , а значит, и то же самое начальное положение изображающей точки M_a на фазовой плоскости (см. рис. 10.4, б).

Начальная часть процесса ABC аналогична таковой в прежнем случае (п. 10.1.1). Дальнейшие размахи колебаний происходят, с меньшими амплитудами $a_2, a_3 \dots$. Вследствие этого и соответству-

ющие участки фазовой траектории M_C , M_D , M_E и т. д. оказываются ближе и началу координат фазовой плоскости. Поэтому спустя время T (см. рис. 10.4, а), в точке F , когда наступит та же фаза колебаний, которая была в начальной точке A процесса $x(t)$, отклонение x окажется меньше начального x_0 и изображающая точка M_F не совпадет с начальной M_A , а будет располагаться ближе к началу координат (см. рис. 10.4, б). Следовательно, затухающий колебательный процесс изображается на фазовой плоскости в виде сходящейся спиралевидной фазовой траектории.

Рассматривая другие начальные условия, отличные от x_0 и y_0 , получаем фазовую плоскость, заполненную фазовыми траекториями аналогичной формы. Особая точка подобного фазового портрета называется «устойчивым фокусом».

10.1.3. Коэффициенты $a_1^2 < 4a_2$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$

Корни характеристического уравнения в этом случае будут комплексными с положительными вещественными частями.

Линейная динамическая система в этом случае будет неустойчивой, а переходный процесс будет соответствовать расходящемуся колебательному (рис. 10.5, а).

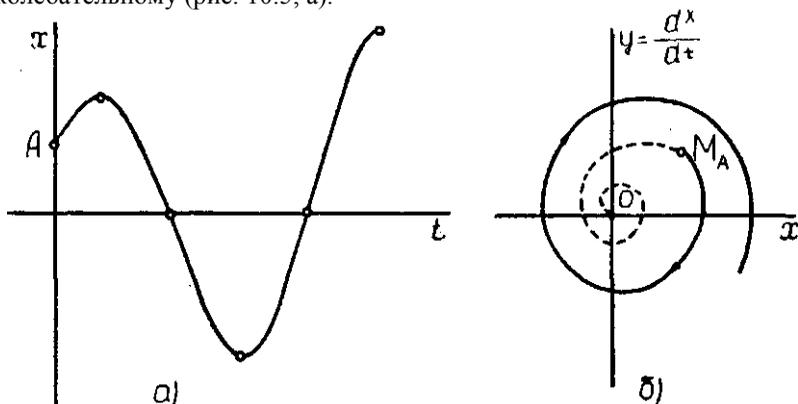


Рис. 10.5. Построение фазового портрета неустойчивого колебательного звена: а — переходная характеристика; б — фазовый портрет с особой точкой типа «неустойчивый фокус»

Решение дифференциального уравнения (10.1) запишется в виде

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \sin(\omega t + c_2), \quad (10.4)$$

где $\alpha = \left| \frac{a_1}{2} \right|$, $\omega = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$.

Аналогично п. 10.1.2 можно показать, что фазовый портрет в этом случае изображается в виде расходящихся спиралевидных фазовых траекторий (рис. 10.5, б). Особая точка носит название «неустойчивого фокуса».

10.1.4. Коэффициенты $a_1^2 > 4a_2^2$, $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$

Затухающие к нулю аperiodические процессы различных шести видов, указанных на рис. 10.6, а, как легко проверить, изображаются различными фазовыми траекториями, вливающимися в начало координат фазовой плоскости (рис. 10.6, б).

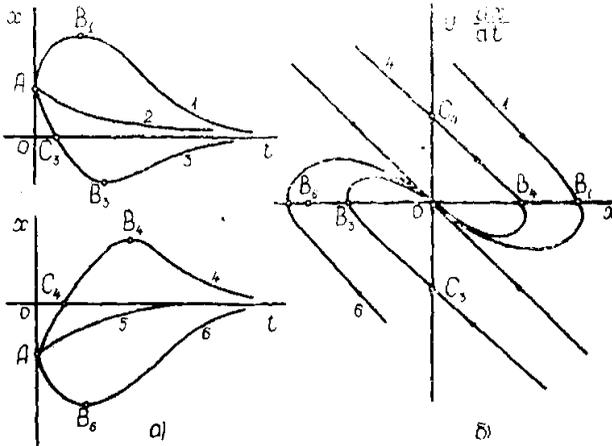


Рис. 10.6. Переходные характеристики (а) и фазовые портреты с особой точкой «устойчивый узел» (б) устойчивых аperiodических звеньев

Особая точка в этом случае носит название «устойчивый узел». Коэффициенты характеристического уравнения соотносятся между собой следующим образом:

$$a_1^2 > 4a_2^2, a_1 > 0 \text{ и } a_2 > 0,$$

что соответствует отрицательным вещественным корням. Решение дифференциального уравнения представляет собой сумму двух экспонент

$$x(t) = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t}. \quad (10.5)$$

10.1.5. Коэффициенты характеристического уравнения

$$a_1^2 > 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$$

Этим коэффициентам соответствуют положительные вещественные корни уравнения. Решение уравнения (3.1) то же, что и в случае 3.1.4, но оба члена решения вследствие положительности корней будут возрастающими функциями времени

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (10.6)$$

Расходящимся аperiodическим процессам (рис. 10.7, а) соответствует на фазовой плоскости картина фазовых траекторий, уходящих от начала координат фазовой плоскости (рис. 10.7, б).

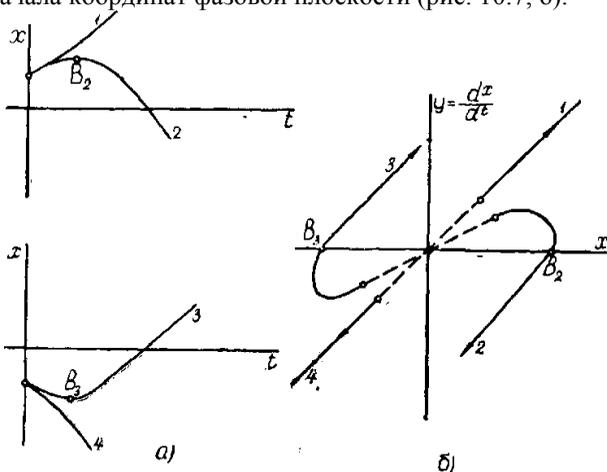


Рис. 10.7. Переходные характеристики (а) и фазовые портреты с особой точкой «неустойчивый узел» (б) неустойчивых аperiodических звеньев

Особая точка в данном случае называется «неустойчивый узел».

Чтобы полностью характеризовать переходные процессы в системах регулирования, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, достаточно двух координат x и y . При повышении порядка увеличивается и число необходимых координат (оно равно порядку уравнения). Поэтому там понадобилось бы изображать фазовые траектории в трехмерном и с большим числом измерений пространствах.

10.2. Особенности фазовых портретов нелинейных систем автоматического управления

Анализ фазовых портретов линейных (линеаризованных) систем автоматического управления показывает, что им присущи два вида движений — сходящийся переходный процесс (устойчивые САУ) и расходящийся переходный процесс (неустойчивые САУ). В редких случаях при параметрах, точно соответствующих границе устойчивости, в системе возможны незатухающие колебания, амплитуда которых зависит от начальных условий (см. п. 10.1.1).

Движение в реальных (нелинейных) САУ значительно разнообразнее. Здесь часто возникают незатухающие колебания, обладающие определенной устойчивостью (после снятия возмущающего воздействия восстанавливаются во времени). Могут возникать и неустойчивые автоколебания, срывающиеся при незначительном изменении амплитуды или частоты.

Форма и частота автоколебательных процессов может быть изменена в зависимости от параметров системы. Кроме того, в реальных САУ, в отличие от линейных моделей, характер движений часто зависит от величины начальных отклонений. В зависимости от этого могут возникать несколько видов автоколебательных процессов.

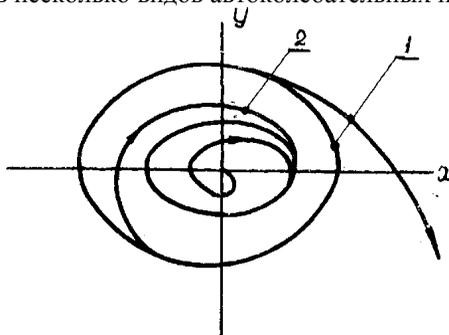


Рис. 10.8. Устойчивый (1) и неустойчивый (2) предельные циклы

На фазовой плоскости колебаниям нелинейных САУ соответствуют замкнутые фазовые траектории, которые называются предельными циклами (рис. 10.8). Неустойчивым автоколебаниям соответствует неустойчивый предельный цикл (см. кривую 1 на рис. 10.8), и наоборот, устойчивым автоколебаниям соответствует устойчивый предельный цикл (см. кривую 2 на рис. 10.8). Предельные циклы присущи только нелинейным системам так же, как и сепаратриссы — особые линии, разделяющие фазовый портрет на области с различными фазовыми траекториями. На рис. 10.9 изображен фазовый портрет некоторой нелинейной системы, где жирными линиями выделены сепаратриссы 1.

Так же, как и для линейных САУ, основными методами построения фазовых траекторий нелинейных систем являются графические и графоаналитические. Последнее время для этих целей все чаще используются вычислительные машины. Наиболее распространен для построения фазовых портретов нелинейных систем метод изоклин, сущность которого рассмотрим ниже.

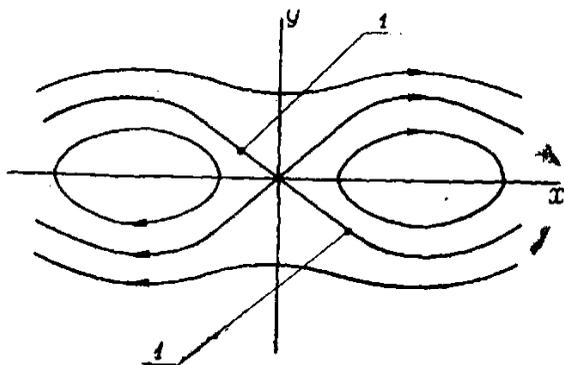


Рис. 10.9. Сепаратриссы (1) нелинейных САУ

10.3. Метод изоклин

Сущность метода заключается в построении таких линий (изоклин), проходя через которые все фазовые траектории имеют один и тот же угол наклона касательной.

Рассмотрим построение фазовых траекторий с помощью метода изоклин на примере автоматической системы, дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (10.7)$$

После подстановки $\dot{y} = x$ получим

$$\dot{y} + x\omega^2 = 0.$$

Поделим это равенство на $y = \dot{x}$:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + \omega^2 \frac{x}{y} = 0.$$

Так как

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dydt}{dxdt} = \frac{dy}{dx},$$

то получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}. \quad (10.8)$$

Левая часть последнего уравнения представляет собою $tg\alpha$ (тангенс угла наклона касательных к фазовым траекториям на фазовой плоскости). Изоклину, соответствующую $\frac{dy}{dx} = tg\alpha = m$, можно найти по уравнению

$$-\omega^2 \frac{x}{y} = m$$

или

$$y = -\frac{\omega^2}{m} x.$$

Задаваясь различными значениями α (или $tg\alpha = m$), получаем в данном случае изоклины, представляющие собой серию прямых, проходящих через начало координат (рис. 10.10).

Точность построения тем выше, чем большее число изоклин построено. Для некоторых задач изоклины являются прямыми, как в рассмотренном примере, или легко вычисляемыми кривыми и могут быть быстро построены. В других случаях сами изоклины — сложные кривые и требуют вычисления большого числа точек, вследствие чего метод изоклин оказывается очень громоздким.

10.4. Построение графика переходного процесса с помощью фазовых траектории

Фазовые траектории позволяют построить графики переходных процессов, вызванных ненулевыми начальными условиями, и определить некоторые показатели качества систем автоматического управления второго порядка.

Графическое построение переходных процессов, вызванных ненулевыми начальными условиями, основано на следующих соображениях.

Фазовая траектория представляет собой графическую зависимость

$$y = \frac{dx}{dt} = f(x). \quad (10.9)$$

Определить время, соответствующее каждой точке фазовой траектории, можно приближенно по формуле

$$t_i = \frac{\Delta x_i}{y_{icp}} = \frac{\Delta x_i}{\dot{x}_{icp}},$$

получающейся из (10.9).

Таким образом, последовательность действий при графическом построении переходного процесса по фазовой траектории будет следующей. Часть фазовой плоскости, в пределах которой располагается исследуемый участок фазовой траектории, разбивается вертикальными линиями на полосы шириной Δx (рис. 10.11). В пределах каждой полосы, начиная от исходной точки A , определяемой начальными условиями, находят x_{icp} , а затем откладывают моменты времени t_1 , $t_1 + t_2$, $t_1 + t_2 + t_3$, и т. д. (рис. 10.12) и в этих точках вос-

становливают ординаты x_1, x_2, x_3 и т. д. Указанным способом можно построить всю кривую $x(t)$ от $t = 0$ до $t \rightarrow \infty$ или же какую-либо часть ее.

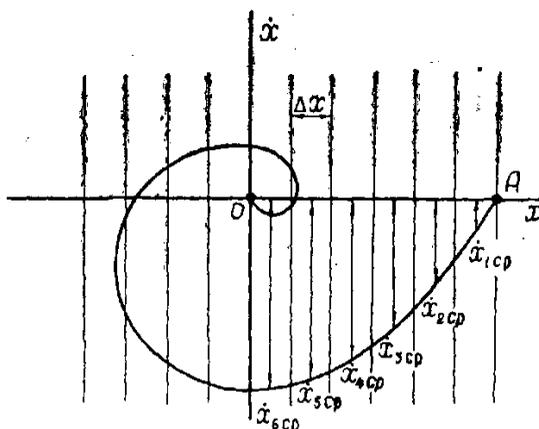


Рис. 10.11. Параметры фазовой траектории, необходимые для построения переходного процесса

Наряду с полным решением задачи по определению графика переходного процесса $x(t)$ можно определить только время переходного процесса. Один из способов основан на описанных выше соотношениях и состоит в том, что, вычислив значения времени t_i по участкам, затем их складывают и получают общее время движения от x_H до x_K .

Другой способ основан на использовании формулы

$$y = \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

из которой следует, что

$$t = \int_{x_H}^{x_K} \frac{1}{y} dx.$$

Для того, чтобы ею воспользоваться, нужно построить график

$\frac{1}{y} = f(x)$ и затем найти площадь под этой кривой в пределах по X от

X_H до X_K . Фазовые траектории позволяют легко находить максимальные отклонения в переходном процессе как для координаты, так и для ее производной. Эти отклонения непосредственно снимаются с графиков.

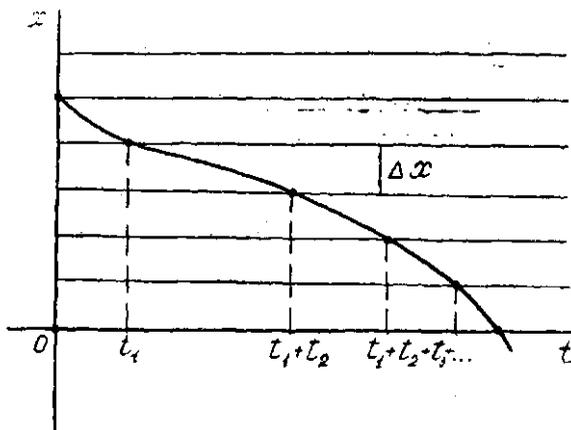


Рис. 10.12. Переходный процесс нелинейный САУ

ГЛАВА 11 УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как было отмечено выше, понятие устойчивости для нелинейных систем автоматического управления гораздо шире и объемнее, чем понятие устойчивости для линейных (линеаризованных) систем. Последние исследуют на устойчивость «в малом» при небольших отклонениях параметров системы Δx и Δy от рабочей точки статической характеристики (рис. 4.1). При этом нелинейный участок статической характеристики AB рассматривается, как линейный (A_1, B_1). Отклонения параметров от заданного значения x_C, y_C вызываются действием на объект регулирования возмущающих воздействий без учета начальных условий. Результаты исследования устойчивости линеаризованной САР справедливы только для рассматриваемой рабочей точки C .

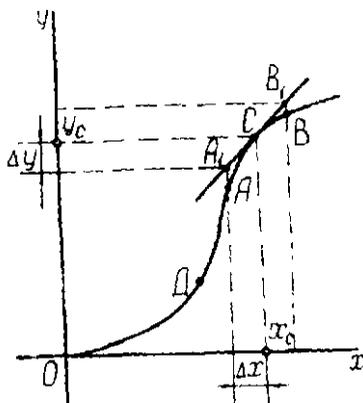


Рис. 11.1. Линеаризация статической характеристики
в пределах рабочей точки

Для точки D , как и для всех остальных точек, лежащих за пределами участка AB статической характеристики, эти выводы об устойчивости могут оказаться неверными. В этом случае необходимо производить повторные расчеты, что является довольно длительным и трудоемким процессом, в то же время не достаточно точным. Кроме

того, система исследуется при нулевых начальных условиях, что довольно редко встречается на практике.

11.1. Суждение об устойчивости САР по фазовым портретам

Методы нелинейной теории автоматического регулирования позволяют избежать перечисленных выше недостатков. Например, рассмотренный метод фазовых траекторий учитывает начальные условия САР и их влияние на устойчивость. Кроме того, предельные циклы фазовых портретов нелинейных систем предоставляют возможность довольно просто определить области допустимых начальных отклонений параметров САР и начальные условия, не выводящие систему за границу устойчивости.

Пусть, например, область L (рис. 11.2) — область начальных отклонений, которые могут иметь место в САР в соответствии с условиями ее технической эксплуатации. В случае, если эта область располагается внутри предельного цикла исследуемой системы (см. рис. 11.2, а), то может быть сделан вывод об ее устойчивости в большом. Если область L выходит за границу предельного цикла, делается вывод об устойчивости системы в малом, неустойчивости в большом. В случае, если система автоматического регулирования устойчива при любых начальных отклонениях считают, что она устойчива в целом. Это имеет место, если в фазовом портрете системы отсутствуют предельные циклы и он состоит только из сходящихся к началу координат фазовых траекторий (см. рис. 11.4, б).

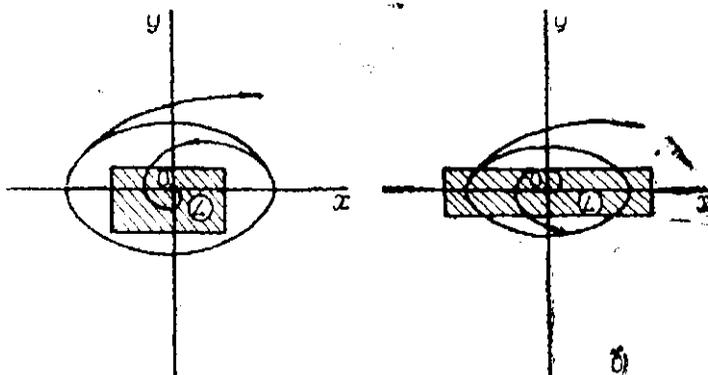


Рис. 11.2. Области начальных отклонений:
а - для САР устойчивых в большом; б - для САР устойчивых в малом

11.2. Абсолютная устойчивость нелинейных систем

Теория линейных систем рассматривает системы с узким, точно очерченным классом характеристик - прямолинейные.

В ранних работах попытки разработки теории нелинейных систем также ориентировались на изучение узких классов нелинейностей, описываемых уравнениями определенных видов, например, квадратичных или кубических парабол и т. п. Выводы, полученные из таких исследований, не имели общей силы и не распространялись на другие нелинейности.

Для получения более общих результатов исследователям пришлось перейти к глобальным исходным позициям — рассмотреть более широкие классы нелинейностей, а также расширить и само понятие устойчивости.

Основополагающими для новой теории абсолютной устойчивости были работы А. И. Лурье и В. Н. Постникова, где рассматривался класс характеристик, целиком расположенный в I и III квадрантах плоскости статических характеристик. Задача об устойчивости в большом таких систем решалась с помощью функции Ляпунова в виде «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности»:

$$V(x) = L_2(x) + \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma. \quad (11.1)$$

Сегодня эта форма считается классической. С начала 60-х годов в развитии теории абсолютной устойчивости наступил радикальный перелом. Начиная с 1959 г., в ряде работ румынского ученого В. М. Попова был разработан частотный критерий абсолютной устойчивости, который стимулировал быстрое развитие теории по двум направлениям. Первое, прикладное, направление использовало наглядность и удобство частотных представлений для практического исследования устойчивости и для разработки ряда методов исследования качества регулирования в нелинейных системах. Второе, теоретическое, направление, в развитии которого существенную роль сыграли работы В. А. Якубовича, привело к следующим основным результатам:

- 1) выполнение критерия В. М. Попова равносильно существованию у исследуемой системы функции Ляпунова вида (11.1);
- 2) доказана «частотная теорема», обобщающая ряд многих результатов и приведшая к созданию новых эффективных критериев устойчивости;

3) расширен класс нелинейностей, для которых можно получить условия абсолютной устойчивости.

В настоящее время интенсивно развиваются работы, распространяющие методы Ляпунова и теорию абсолютной устойчивости на сложные системы большой размерности.

Методы теории абсолютной устойчивости основаны на выделении классов нелинейных характеристик, лежащих в пределах некоторого угла, образованного прямыми M_1 и M_2 (рис. 11.3), и доказательстве того, что системы с данными характеристиками являются абсолютно устойчивыми.

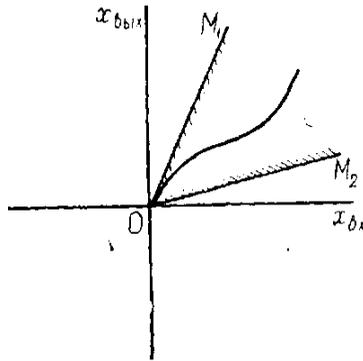


Рис. 11.3. Область абсолютной, устойчивости САР определенного класса

Термин «абсолютная устойчивость» установился в литературе не сразу. Впервые он введен в первоначальных работах А.И. Лурье и В. Н. Постникова, но в последующих публикациях А.И. Лурье предпочитал пользоваться более осторожным термином «устойчивость в большом». Во второй половине 50-х годов в работах А.М. Летова и В.М. Попова снова появляется термин «абсолютная устойчивость». Сейчас он общепринят в мировой литературе.

Под абсолютной устойчивостью понимается асимптотическая устойчивость в целом для систем, принадлежащих к заданному классу нелинейностей.

Среди упомянутых в определении абсолютной устойчивости классов нелинейностей следует отметить следующие:

1. Класс нелинейных элементов, статические характеристики которых лежат в пределах угла, образованного прямыми $M_1 M_2$ на рис. 4.3. Обозначим этот класс $K(M_1 M_2)$.

2. Класс нелинейных элементов, статические характеристики которых располагаются в пределах угла, образованного положительной полуосью абсцисс и прямой M - класс $K(0, M)$.

3. Класс нелинейных элементов, статические характеристики которых могут располагаться в пределах первого и третьего квадрантов, - класс $K(0, \infty)$.

Для систем с нелинейными элементами второго класса в 1959 году В.М. Поповым был предложен весьма простой и наглядный частотный критерий абсолютной устойчивости систем автоматического управления, распространенный в последующем на другие классы нелинейностей.

Критерий абсолютной устойчивости формулируется следующим образом: если замкнутая система (рис. 4.4) состоит из устойчивой линейной части с передаточной функцией $W_{\text{л}}(s)$, все полюса которой расположены в левой полуплоскости и однозначной нелинейности $z(l)$, лежащей в пределах угла

$$0 \leq [z(l)/l] \leq M (\text{сектор } [0, M]),$$

то достаточным условием устойчивости является выполнение неравенства

$$\text{Re}[(1 + jq\omega)W_{\text{л}}(j\omega)] + \frac{1}{M} = \delta > 0, \quad (11.2)$$

где q - произвольное вещественное число. При этом имеется в виду, что $M < \infty$, а предел $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W_{\text{л}}(j\omega) = 0$.

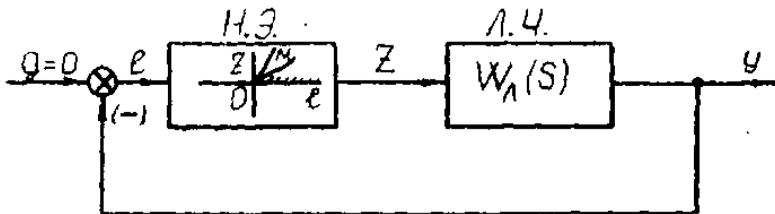


Рис. 11.4. Структурная схема нелинейной САУ с устойчивой линейной частью и нелинейным элементом 2-го класса

Критерию абсолютной устойчивости можно дать удобную для практики геометрическую интерпретацию. Подставив в (4.2) выражения

$$W_{\text{л}}(j\omega) = P_{\text{л}}(\omega) + jQ_{\text{л}}(\omega),$$

получим

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega)P_{\text{л}}(\omega) + jQ_{\text{л}}(\omega)] + \frac{1}{M} = \delta > 0;$$

$$\operatorname{Re}[P_{\text{л}}(\omega) + jQ_{\text{л}}(\omega) + jq\omega P_{\text{л}}(\omega) - q\omega Q_{\text{л}}(\omega)] + \frac{1}{M} = \delta > 0;$$

$$\operatorname{Re}[P_{\text{л}}(\omega) - q\omega Q_{\text{л}}(\omega) + j(Q_{\text{л}}(\omega) + q\omega P_{\text{л}}(\omega))] + \frac{1}{M} = \delta > 0;$$

$$P_{\text{л}}(\omega) - q\omega Q_{\text{л}}(\omega) + \frac{1}{M} = \delta > 0. \quad (11.3)$$

Введем понятие преобразованной частотной функции

$$W_{\text{лп}}(\omega) = P_{\text{л}}(\omega) + jQ_{\text{л}}(\omega).$$

Если построить годограф $W_{\text{лп}}(\omega)$ и на этой же плоскости провести прямую, описываемую уравнением

$$P_{\text{л}}(\omega) = -\frac{1}{M} + q\omega Q_{\text{л}}(\omega),$$

то условием выполнения неравенства (11.3) будет расположение годографа $W_{\text{лп}}(\omega)$ справа от этой прямой (рис. 11.5).

Таким образом, для критерия абсолютной устойчивости можно дать следующую формулировку: система абсолютно устойчива, если при устойчивой линейной части через точку $-\left(-\frac{1}{M}, j0\right)$ можно

провести прямую так, чтобы годограф $W_{\text{лп}}(\omega)$ лежал справа от нее.

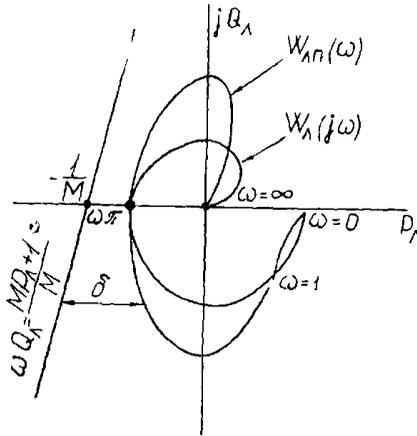


Рис. 11.5. Геометрическая интерпретация критерия абсолютной устойчивости

Прямую, удовлетворяющую этому условию, называют прямой Попова. Условие (4.3) должно выполняться для $0 < \omega < \infty$ хотя бы при одном значении q , лежащем в диапазоне $-\infty < q < \infty$. При решении задачи об абсолютной устойчивости конкретной системы с заданным значением M и известной функцией $W_{\text{Д}}(j\omega)$ необходим перебор двух координат ω и q и проверка выполнения неравенства (4.3) во всем диапазоне возможных значений ω и q .

Рассматриваемая геометрическая интерпретация неравенства (11.3) не изменяет этого положения. Построение годографа $W_{\text{ЛП}}(\omega)$ и проведение прямых с наклоном q через точку $-1/M$ по-прежнему предусматривает перебор координат ω и q .

Геометрическая интерпретация критерия абсолютной устойчивости на другие классы нелинейностей приведена в приложении 2.

Отметим некоторые особые свойства характеристики $W_{\text{ЛП}}(\omega)$, отличающие ее от $W_{\text{Д}}(j\omega)$.

Характеристика $W_{\text{ЛП}}(\omega)$ имеет мнимую часть, которая является четной функцией ω , поскольку $Q_{\text{Д}}(\omega)$ - нечетная функция частоты, поэтому годограф $W_{\text{ЛП}}(\omega)$ уже не будет симметричным отно-

сительно вещественной оси при частотах разных знаков. Если $W(s)$ имеет один нулевой полюс, т. е.

$$W_{\text{л}}(s) = \frac{k(s)}{sD_1(s)}, \quad (11.4)$$

то

$$W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{k(j\omega)}{(j\omega)D_1(j\omega)} = \frac{1}{\omega} \text{Jm} \frac{k(j\omega)}{D_1(j\omega)} - j \frac{1}{\omega} \text{Re} \frac{k(j\omega)}{D_1(j\omega)}, \quad (11.5)$$

откуда

$$P_{\text{л}}(\omega) = \frac{1}{\omega} \text{Jm} \frac{k(j\omega)}{D_1(j\omega)} \quad (11.6)$$

и

$$Q_{\text{л}}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \text{Re} \frac{k(j\omega)}{D_1(j\omega)}. \quad (11.7)$$

Выражения для мнимой и действительной составляющих $k(j\omega)$, $Q_1(j\omega)$ могут быть получены путем стандартной процедуры умножения $D_1(j\omega)$ на сопряженную комплексную величину. При этом получаются дробно-рациональные функции ω , у которых одинаковые знаменатели содержат четные степени ω (включая обязательный свободный член, так как $W_{\text{л}}(s)$ имеет лишь один нулевой полюс); числитель у $\text{Jm} \frac{k(j\omega)}{D_1(j\omega)}$ содержит нечетные степени ω , а у $\text{Re} \frac{k(j\omega)}{D_1(j\omega)}$ четные степени ω (включая обязательный свободный

член). Поэтому множитель $\frac{1}{\omega}$, стоящий в (11.5) и (11.7), сократится

у $P_{\text{л}}(s)$ и останется у $Q_{\text{л}}(\omega)$, так что годограф $W_{\text{л}}(j\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ будет неограниченно удаляться от начала координат вниз. Годограф же $W_{\text{лп}}(\omega)$ будет начинаться при $\omega = 0$ из конечной

точки комплексной плоскости, поскольку

$$\text{Im}W_{\text{лп}}(\omega) = \omega Q_{\text{л}}(\omega) = -\text{Re} \frac{k(j\omega)}{D_1(j\omega)}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что, если $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W_{\text{л}}(j\omega) = 0$, то $W_{\text{лп}}(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ стремится также к нулю либо к конечному пределу.

Так как характеристики $W_{\text{л}}(j\omega)$ и $W_{\text{лп}}(\omega)$ имеют одинаковые вещественные части, они пересекают действительную ось в одних и тех же точках.

Более подробные сведения об абсолютной устойчивости можно получить в [9], [11], [14].

11.3. Сравнение методов анализа устойчивости нелинейных систем

Из рассмотренных методов анализа устойчивости нелинейных систем только метод фазового пространства дает возможность получить точно необходимые и достаточные условия устойчивости. Приближенно с точностью реализации модели, соответствующей заданной системе уравнений, необходимые и достаточные условия устойчивости могут быть получены с помощью математического моделирования. Достаточные, но необходимые условия устойчивости, гарантирующие устойчивость системы в заданной области, дает частотный критерий устойчивости.

Метод гармонической линеаризации в зависимости от степени выполнения гипотезы фильтра дает приближенное значение области устойчивости, однако он не гарантирует устойчивость в этой области, так как полученная с помощью метода гармонической линеаризации область может выходить за пределы границы устойчивости. В этой же области иногда возможно возникновение автоколебательных процессов.

Вопросы для самопроверки

1. Примеры нелинейных элементов САР.
2. Особенности гармонической линеаризации нелинейных САР?
3. Особенности фазовых портретов при исследовании нелинейных САР?
4. Сформулировать методы оценки устойчивости нелинейных САР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1975.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. -М.: Энергия.-4.1, 1965; ч.П, 1966; ч. Ш, 1970.
3. Теория автоматического регулирования/Под ред. В.В. Солодовникова.-Т.1,2,-М.: Машиностроение, 1967.
4. Вольский С.Г., Калужский Г.С., Грунтович Н.В. Теория линейных систем автоматического регулирования. Учебное пособие. ВМФ, 1991.
4. Вольский С.Г., Калужский Г.С., Грунтович Н.В. Теория линейных систем автоматического регулирования. Учебное пособие. ВМФ, 1991.
5. Суевалов Л.Ф. Теория корабельных автоматических систем управления.-Ленинград, 1978.
6. Голубничий Н.М. и др. Беседы по автоматике, - Киев: Техника, 1971.
7. Зайцев Г.Ф. и др. Основы автоматического управления и регулирования.-Киев: Техника, 1975.
8. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.-М.: Наука, 1978.
9. Вольский С.Г., Грунтович Н.В., Ремезов Д.И. Принципы построения систем управления автоматизированных атомных энергетических установок.-ВМФ, 1987.
- ТО. Иващенко П.П. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем.-М.: Машгиз, 1962.
11. Гитис Э.И., Данилевич Г.А., Самойленко В.И. Техническая кибернетика.-М.: Советское радио, Т963.
12. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления/ Под общ.ред. Е.А. Санковского.-М.: Высшая школа, Т973.
13. Суевалов Л.Ф. Справочник по расчетам судовых автоматических систем.- 2-е изд., перераб. и доп.-Л.: Судостроение, 1989.
14. Архангельский Е.А. и др. Проектирование и эксплуатация комплексных автоматических систем управления корабельными техническими средствами. - Л.: ВитА, 1976.
15. Справочник по теории автоматического управления/Под ред. А.А. Красовского.- М.: Наука, гл.ред.физ.-мат.лит.,1987.

Учебное издание

ГРУНТОВИЧ Надежда Владимировна
ГРУНТОВИЧ Николай Васильевич

Теория автоматических систем управления

часть II

ISBN 978-5-88517-231-8



Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 03.04.2015 г. Формат 60x84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 10,46. Тираж 550 экз. Изд. № 2953.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ