Министерство сельского хозяйства РФ

ФГБОУ ВО «Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра безопасности жизнедеятельности и инженерной экологии

Титенок А.В.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

(*теория и практика***)**

учебно-методическое пособие

направление подготовки 20.04.01 Техносферная безопасность
Направленность (профиль) Безопасность жизнедеятельности
в чрезвычайных ситуациях.
Квалификация магистр

Брянская область, 2018

УДК 338.47(075.8)
ББК 34.4
Т 45

Титенок, А.В. Принятие решений (*теория и практика*): учебно-методическое пособие /А.В. Титенок. – Брянск: БГАУ, 2018. – 39 с.

В первом разделе даны общие сведения об инженерном проектировании. Второй раздел посвящен инженерному анализу, выполняемому с целью реализации инженерного проекта. Третий раздел раскрывает типовые методы принятия решений, характерные для конкретной ситуации.

Учебно-методическое пособие содержит конкретные практические примеры, соответствующие структуре тематики.

Пособие предназначено для самостоятельного изучения студентами направления подготовки 20.04.01 Техносферная безопасность. Направленность (профиль) Безопасность жизнедеятельности. Квалификация магистр.

***Рецензент*:** Белова Т.И., д.т.н., профессор кафедры БЖД и ИЭ ФГБОУ ВО Брянский ГАУ.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-технологического института, протокол № 9 от 19 апреля 2018 г.

1. Введение в инженерное проектирование

Перечень вопросов для самоподготовки:

1.1. Дайте критическую оценку описания и схемы процесса инженерного проектирования и анализа, изложенных на занятиях.

Не было ли что-нибудь опущено?

Нельзя ли это сделать лучше?

1.2. Дайте критическую оценку описания и краткого перечня качеств, необходимых инженеру-проектировщику, которые были перечислены на занятиях.

Не было ли что-нибудь опущено?

Нельзя ли это сделать лучше?

1.3. Какова природа противоречия между изобретательством и инженерным анализом?

Каково ваше мнение о высказанном на занятиях предложении относительно его разрешения?

Можете ли вы дать иные или дополнительные предложения?

1.4. Не видите ли вы какого-либо естественного противоречия между качествами, необходимыми инженерам для принятия решений, и качествами, необходимыми для изобретательства или инженерного анализа?

Обсудите этот вопрос в группе.

1.5. Каковы характерные особенности лиц, склонных к изобретательству?

Совпадают ли черты, перечисленные в этой главе, с вашими собственными наблюдениями?

1.6. Каковы этапы процесса изобретательства?

Вспомните случаи, когда вам удавалось получать хорошие новые идеи.

Согласны ли вы с делением на этапы, приведенным на занятиях?

1.7. Что означает «психологическая инерция»?

Как ее преодолеть?

Вспомните случаи, когда психологическая инерция мешала вам получить хорошие новые идеи.

Как вы смогли ее преодолеть?

1.8. Опишите метод «мозгового штурма».

Каковы его правила?

Почему так трудно его применять?

1.9. Каким образом восприимчивость влияет на изобретательность?

1.10. Рассмотрите с участием студенческой группы методом «мозгового штурма» проблему борьбы с загрязнением воздуха.

1.11. Рассмотрите с участием студенческой группы методом «мозгового штурма» разрешение проблемы дорожно-транспортных происшествий и несчастных случаев на автомобильном транспорте.

1.12.. Рассмотрите с участием студенческой группы задачу создания автоматической установки для изготовления кубиков льда.

1.13. Рассмотрите с участием студенческой группы задачу разработки метода измерения поверхностного натяжения и вязкости жидкостей.

1.14. Рассмотрите с участием студенческой группы проблему транспортировки людей с этажа на этаж в универсальном магазине.

1.15. Рассмотрите с участием студенческой группы проблему мытья окон на высоте.

1.16. Рассмотрите методом «мозгового штурма» с участием студенческой группы проблему подготовки магистров.

1.17. Рассмотрите методом «мозгового штурма» с участием студенческой группы проблему питания в глобальном масштабе.

1.18.. Рассмотрите с участием студенческой группы проблему посадки ракеты на Луну.

2. **Введение в инженерный анализ**

Перечень вопросов для самоподготовки:

2.1. Обсудите в группе целесообразность применения методов генерирования идей, для фирмы-изготовителя пластмассовых игрушек, которая нуждается в новых изделиях.

2.2. Фирма по производству пластмассовых игрушек имеет неиспользованные производственные мощности.

2.2.1. Проведите занятие с целью получения методом «мозгового штурма» идей, используемых для конструирования новых видов изделий.

2.2.2. Используйте другие методы получения таких идей.

2.3. Рассмотрите в группе влияние следующих факторов на ценность идей, используемых для создания пластмассовых игрушек:

а) тенденции и изменения в начальном школьном образовании;

б) крупные научные достижения;

в) крупные технические достижения.

2.4. Каким образом могли бы методы, рассмотренные на занятиях, привести к появлению идеи воздушно-водяной игрушечной ракеты?

К появлению идеи газогенератора?

2.5. Используйте методы, рассмотренные на занятиях, с целью получения новых идей для конструирования игрушечных ракет различных типов.

2.6. Рассмотрите каждое из решений, которые необходимо было принять, чтобы построить график и получить данные о влиянии поперечного сопла ракеты на высоту ее полета.

Какие решения принимались по каждому параметру?

2.7. Допустим, что решено сделать ракету, изображенную более крупной, с тем чтобы ее длина стала не 100, 200 мм. Выполните чертеж ракеты, предлагаемой вами в качестве исходной конструкции, и расставьте обозначения.

2.8. Рассмотрите инженерный анализ одноступенчатой ракеты с точки зрения методики инженерного анализа, изложенной на занятиях. Выделите различные этапы.

Не пропущены ли какие-либо этапы?

Можно ли применить более совершенную методику?

2.9. Проведите занятие, посвященное изобретательству (используя «мозговой штурм» или какой-либо другой метод), с целью изобретения двухступенчатой воздушно-водяной игрушечной ракеты. Каким образом эти ступени необходимо удерживать вместе и как их разделять?

2.10. Рассмотрите перечень принципов отделения второй ступени игрушечной ракеты от первой ее ступени. Если бы вам пришлось принимать решение, то какое (или какие) из них вы бы предложили инженерам вашей фирмы исследовать более детально? Почему?

2.11. Разработайте механизм, позволяющий сочленять и удерживать вместе две ступени двухступенчатой игрушечной ракеты, а также отделять вторую ступень от первой, исходя из того, что если первая ступень работает, то между ступенями имеет место большая разность давлений, и что из второй ступени в первую может перетечь небольшое количество воды, пропорциональное времени.

2.12. Спроектируйте насос для игрушечной ракеты..

2.13 Спроектируйте двухступенчатую воздушно-водяную игрушечную ракету и проведите необходимый анализ.

Составьте список решений, которые необходимо принять при разработке двухступенчатой ракеты.

3. Введение в теорию принятия решений

Принимать решения приходится практически во всех областях человеческой деятельности. С развитием цивилизации появилась необходимость выделить процесс принятия оптимальных решений в отдельную область науки (исследование операций), которая формализовала и систематизировала этот процесс. Исследование операций стало основным научным инструментом в процессе принятии оптимальных решений системным аналитиком – лицом, принимающим решение (ЛПР). Этапы работы ЛПР заключаются в следующем.

А. Формулирование противоречия

Б. Построение математической модели:

- определяются альтернативные переменные (набор переменных называют планом);
- определяются ограничения (набор переменных, удовлетворяюших всем ограничениям называют допустимым планом);
- определяется целевая функция – критерий, которому соответствуют альтернативные решения (оптимальные планы);

Этапами А и Б занимается дисциплина "математическое моделирование" – это составная часть исследования операций.

В. Решение математической модели

Этим занимается дисциплина "математическое программирование".

Исследования позволили обобщить и сгруппировать схожие типы моделей в определенные классы задач. Методы решения данных классов задач составляют отдельные разделы математического программирования, со временем они даже трансформировались в отдельные дисциплины. Вот их краткий обзор.

Линейное программирование. В этом классе задач и целевая функция и все ограничения являются линейными функциями. К таким задачам относятся: задача о плане производства; задача о диете и др.

Целочисленное программирование. В этих задачах целевая функция и все ограничения тоже являются линейными. Все переменные должны принимать только целочисленные значения. К таким задачам относятся: транспортная задача; задача о назначениях и др.

Динамическое программирование. Применяется, когда исходную задачу можно разбить на меньшие подзадачи и решать их пошагово. Например, это задача об управлении запасами и др.

Нелинейное программирование. Здесь либо целевая функция, либо ограничения являются нелинейными функциями.

Существуют также теории: графов, расписаний; сетевое планирование; системы массового обслуживания и др. Каждый раздел математического программирования – это отдельная сформировавшаяся дисциплина, требующая достаточно углубленного теоретического и, особенно, практического изучения.

Г. Принятие решений

На этой стадии ЛПР на основе предыдущих этапов должен принять оптимальное решение, что составляет предмет курса "Теория принятия решений".

Принятие решения – это задача управленческого типа. Возможны случаи:

а) ЛПР ***знает реакцию*** окружающей среды на выбор альтернативы (насколько полезная или вредная) – это задача ***принятия решения в условиях определенности***; такими задачами занимается математическое программирование;

б) ЛПР ***знает вероятность реакции*** окружающей среды на выбор альтернативы – это задача ***принятия решения в условиях риска***;

в) ЛПР ***ничего не знает о реакции*** окружающей среды на выбор альтернативы – это задача ***принятия решения в условиях неопределенности***.

При этом предполагается, что в перечисленных случаях окружающая среда реагирует на принятое ЛПР решение беспристрастно (как природа), не преследуя никаких своих целей.

Бывают ситуации, когда в качестве окружающей среды может выступать, например, конкурирующая фирма, военный противник, конкурент на выборах и т.п. Такая «окружающая среда» будет реагировать не беспристрастно, а в своих интересах. Это задача ***принятия решения в условиях противодействия***.

3.1. Принятие решения в условиях определенности методом анализа иерархий

Формулирование задачи.

Предприятию необходимо взять в аренду складские помещения для хранения своей продукции. Склад может быть расположен в одном из трех городов:

D, B, C. Администрации предприятия (Петрову, Иванову и Сидорову), необходимо дать ответ на вопрос: «В каком городе рациональнее расположить склад?». Альтернативно было выделено три критерия, оказывающих наибольшее влияние на доходность предприятия: спрос на продукцию (С), наличие конкурентов (К) и стоимость аренды складских помещений (Ар) в каждом из городов. Основываясь на выдвинутых критериях, будет отдано предпочтение городу. В каком городе выгоднее разместить склад, при условии, что мнения экспертов равнозначны?

Решение.

1. Строим матрицы парных сравнений критериев.

	Петров					Иванов					Сидоров			
		С	К	Ар			С	К	Ар			С	К	Ар
D=	С	1	5	4	D=	С	1	4	3	D=	С	1	2	5
	К	0,2	1	0,5		К	0,25	1	1		К	0,5	1	4
	Ар	0,25	2	1		Ар	0,33	1	1		Ар	0,2	0,25	1

2. Для определения относительных весов критериев «С», «К» и «Ар» нормализуем полученные матрицы сравнения и найдем средние значения элементов соответствующих строк нормализованной матрицы.

Петров					
		С	К	Ар	W_i
N_D =	С	1/1,45	5/8	4/5,5	0,681
	К	0,2/1,45	1/8	0,5/5,5	0,118
	Ар	0,25/1,45	2/8	1/5,5	0,201
Иванов					
		С	К	Ар	W_i
N_D =	С	0,632	0,667	0,6	0,633
	К	0,158	0,167	0,6	0,633
	Ар	0,211	0,167	0,2	),192
Сидоров					
		С	К	Ар	W_i
N_D =	С	0,588	0,615	0,5	0,568
	К	0,294	0,308	0,4	)334
	Ар	0,118	0,)77	0,1	0,098

3. Проверим уровень несогласованности полученных матриц парных сравнений.

Петров							
D×W=	1	5	4	×	0,681	=	2,0,76
	0,2	1	0,5		0,118		0,355
	0,25	2	1		0,201		0,607

Получаем:

$N_{MAX} = 2{,}076 + 0{,}355 + 0{,}607 = 3{,}038$;

следовательно, для $n = 3$ имем:

$CI = (3{,}08 - 3) / (3 - 1) = 0{,}019$;

$RI = 1{,}98\ (3 - 2) / 3 = 0{,}66$;

$CR = 0{,}019 / 0{,}66 = 0{,}029 < 0{,}1$, следовательно, у Петрова уровень несогласованности матрицы D приемлим.

Иванов							
D×W=	1	4	3	×	0,633	=	1,909
	0,25	1	1		0,175		0,525
	0,333	1	1		0,192		0,578

Получаем:

$n_{MAX} = 3{,}013$;

следовательно, для $n = 3$ имем:

$CI = 0{,}006$;

$RI = 0{,}66$;

$CR = 0{,}01 < 0{,}1$ – у Иванова уровень несогласованности матрицы D приемлим.

Сидоров							
D×W=	1	2	5	×	0,568	=	1,727
	0,5	1	4		0,334		1,011
	0,2	0,25	1		0,098		0,295

Получаем:

$n_{MAX} = 3{,}033$;

следовательно, для $n = 3$ имем:

$CI = 0{,}016$;

$RI = 0{,}66$;

CR = 0,025 < 0,1 – у Сидорова уровень несогласованности матрицы D приемлим.

В результате имеем весовые коэффициенты критериев для каждого эксперта, представленные таблицей 1.

Таблица 1.

	Петров	Иванов	Сидоров
С	0,681	0,633	0,568
К	0,118	0,175	0,334
Ар	0,201	0,192	0,098

Произведем аналогичные действия для получения весовых значений альтернативных решений (D, B, C). Построим матрицы парных сравнений альтернатив в соответствии с каждым критерием.

Петров														
D_C=		D	B	C	D_C=		D	B	C	D_C=		D	B	C
	D	1	1	2		D	1	2	3		D	1	2	0,5
	B	1	1	3		B	0,5	1	2		B	0,5	1	0,25
	C	0,5	0,333	1		C	0,333	0,5	1		C	2	4	1
Иванов														
D_C=		D	B	C	D_C=		D	B	C	D_C=		D	B	C
	D	1	4	3		D	1	3	4		D	1	3	4
	B	0,25	1	0,5		B	0,333	1	2		B	0,333	1	2
	C	0,333	2	1		C	0,25	0,5	1		C	0,25	4	1
Сидоров														
D_C=		D	B	C	D_C=		D	B	C	D_C=		D	B	C
	D	1	2	3		D	1	3	4		D	1	2	1
	B	0,5	1	5		B	0,333	1	2		B	0,5	1	0,5
	C	0,2	0,2	1		C	0,25	0	1		C	1	2	1

5. Находим соответствующие нормализованные матрицы и весовые коэффициенты альтернатив.

Петров					
N_{DC} =		D	B	C	W
	D	0,4	0,429	0,333	0,387
	B	0,4	0,429	0,5	0,443
	C	0,2	0,143	0,167	0,170
N_{DK} =		D	B	C	W
	D	0,545	0,571	0,5	0,539
	B	0,273	0,286	0,333	0,297
	C	0,182	0,143	0,167	0,164

		D	B	C	W
$N_{DAp} =$	D	0,286	0,286	0,286	0,286
	B	0,143	0,143	0,143	0,143
	C	0,571	0,571	0,571	0,571

Иванов					
		D	B	C	W
$N_{DC} =$	D	0,632	0,571	0,667	0,623
	B	0,158	0,143	0,111	0,137
	C	0,211	0,286	0,222	0,239
		D	B	C	W
$N_{DK} =$	D	0,632	0,667	0,571	0,623
	B	0,211	0,222	0,286	0,239
	C	0,158	0,111	0,143	0,137
		D	B	C	W
$N_{DAp} =$	D	0,571	0,6	0,5	0,571
	B	0,286	0,3	0,375	0,286
	C	0,143	0,1	0,125	0,143

Сидоров					
		D	B	C	W
$N_{DC} =$	D	0,588	0,625	0,455	0,556
	B	0,294	0,313	0,455	0,354
	C	0,118	0,063	0,091	0,090
		D	B	C	W
$N_{DK} =$	D	0,632	0,667	0,571	0,623
	B	0,211	0,222	0,286	0,239
	C	0,158	0,111	0,143	0,137
		D	B	C	W
$N_{DAp} =$	D	0,4	0,4	0,4	0,4
	B	0,2	0,2	0,2	0,2
	C	0,4	0,4	0,4	0,4

4. Проверим несогласованность матриц альтернатив.

Столбцы N_{DAp} у Петрова и Сидорова одинаковы. Это возможно лишь в случае, когда матрица сравнений является согласованной, т.е. ЛПР проявляет идеальную согласованность в определении матрицы сравнений. Оценим уровень несогласованности остальных матриц сравнений. Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Спрос».

Петров							
D×W=	1	1	2	×	0,387	=	1,170
	1	1	3		0,433		1,340
	0	0,333	1		0,170		0,511

Получаем:
n_{MAX} = 3,021;
следовательно, для n = 3 имем:
CI = 0,010; RI = 0,66;
CR = 0,016 < 0,1.

У Петрова уровень несогласованности матрицы D_C приемлим.

Иванов							
D×W=	1	4	3	×	0,623	=	1,891
	0,25	1	0,5		0,137		0,413
	0,333	2	1		0,239		0,722

Получаем:
n_{MAX} = 3,025;
следовательно, для n = 3 имем:
CI = 0,013; RI = 0,66;
CR = 0,019 < 0,1 – уровень несогласованности матрицы D_C приемлим.

У Иванова уровень несогласованности матрицы D_C приемлим.

Сидоров							
D×W=	1	2	5	×	0,090	=	1,715
	0,5	1	5		0,090		0,722
	0,2	0,2	1		0,090		0,413

Получаем:
n_{MAX} = 3,071;
следовательно, для n = 3 имем:
CI = 0,035; RI = 0,66;
CR = 0,054 < 0,1.

У Сидорова уровень несогласованности матрицы D_C приемлим.

4.. Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Конкуренция».

Петров							
D×W=	1	2	3	×	0,539	=	1,625
	0,5	1	2		0,297		0,894
	0,333	0,5	1		0,164		0,492

Получаем:
n_{MAX} = 3,011;
следовательно, для n = 3 имем:
CI = 0,006;
RI = 0,66;

CR = 0,008 < 0,1.

У Петрова уровень несогласованности матрицы D_K приемлим.

Иванов							
D×W=	1	3	4	×	0,623	=	1,688
	0,333	1	2		0,320		0,967
	0,25	0,5	1		0,123		0,369

Получаем:
n_{MAX} = 3,023;
следовательно, для n = 3 имем:
CI = 0,012; RI = 0,66;
CR = 0,018 < 0,1.

У Иванова уровень несогласованности матрицы D_K приемлим.

Сидоров							
D×W=	1	3	4	×	0,623	=	1,891
	0,333	1	2		0,239		0,722
	0,25	0,5	1		0,137		0,413

Получаем:
n_{MAX} = 3,025;
следовательно, для n = 3 имем:
CI = 0,013;
RI = 0,66;
CR = 0,019 < 0,1.

У Сидорова уровень несогласованности матрицы D_K приемлим.

5. Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Арендная плата».

Иванов							
D×W=	1	2	4	×	0,557	=	1,688
	0,5	1	3		0,320		0,967
	0,25	0,33	1		0,123		0,369

Получаем:
n_{MAX} = 3,023;
следовательно, для n = 3 имем:
CI = 0,012;
RI = 0,66;
CR = 0,018 < 0,1.

У Иванова уровень несогласованности матрицы D_{Ap} приемлим[1].

[1] Задание: найти уровень несогласованность D_{Ap} у Петрова и Сидорова.

В результате (таблица 2) имеем весовые коэффициенты альтернатив в соответствии с каждым критерием для каждого эксперта.

Таблица 2.

	Петров			Иванов			Сидоров		
	С	К	Ар	С	К	Ар	С	К	Ар
D	0,387	0,539	0,286	0,623	0,623	0,557	0,556	0,623	0,4
B	0,443	0,297	0,143	0,137	0,239	0,320	0,354	0,239	0,2
C	0,170	0,164	0,571	0,239	0,137	0,123	0,090	0,137	0,4

5. Комбинированный вес W для каждого города определяется по единой схеме, например, для города D[2]:

$$W_D = 1/3\,(0{,}681 \times 0{,}387 + 0{,}118 \times 0{,}539 + 0{,}201 \times 0{,}286) +$$
$$+ 1/3\,(0{,}633 \times 0{,}623 + 0{,}175 \times 0{,}623 + 0{,}192 \times 0{,}557) +$$
$$+ 1/3\,(0{,}568 \times 0{,}566 + 0{,}334 \times 0{,}623 + 0{,}098 \times 0{,}4) = 0{,}519.$$

3.2. Принятие решения в условиях неопределенности

3.2.1. Постановка задачи

1. Сформулировать задачу принятия решения в условиях неопределенности с 4 альтернативными действиями, которые зависят от 4 состояний природы.
2. На основе данных задачи выбрать оптимальную альтернативу.

3.2.2 Описание алгоритма решения задачи

Принятие решения в условиях неопределенности требует определения альтернативных действий, которым соответствуют расходы или доходы, зависящие от (случайных) состояний природы. Матрицу в задаче принятия решений с *m* возможными действиями и *n* состояниями природы можно представить следующим образом.

	S_1	S_2	…	S_n
a_1	$\nu(a_1, S_1)$	$\nu(a_1, S_2)$	…	$\nu(a_1, S_n)$
a_2	$\nu(a_2, S_1)$	$\nu(a_2, S_2)$	…	$\nu(a_2, S_n)$
..	…	…	…	…
a_m	$\nu(a_m, S_1)$	$\nu(a_m, S_2)$	…	$\nu(a_m, S_n)$

[2] Задание: найти комбинированные весовые коэффициенты для городов В и С и определить город, который является оптимальным для размещения склада; построить граф-дерево отражающее результаты выполненной экспертами работы.

Существует 4 критерия для анализа ситуации, связанной с принятием решений: Лапласа; минимаксный (максиминный); Сэвиджа; Гурвица. Эти критерии отличаются по степени консерватизма, который проявляет индивидуум, принимающий решение, перед лицом неопределенности.

Критерий Лапласа опирается на принцип недостаточного обоснования, который гласит, что поскольку распределение вероятностей состояния $P(s_j)$ неизвестно, то и нет причин считать их различными. Следовательно, используется оптимистическое предположение, что вероятности всех состояний природы

равны между собой, то есть $P(s_1) = P(s_2) = \ldots = P(s_n) = 1/n$.

Если при этом $\nu(a_i, S_j)$ представляет получаемую прибыль ЛПР, то наилучшим решением является то, которое обеспечивает суммарную максимальную прибыль. Если величина $\nu(a_i, S_j)$ представляет собой расходы ЛПР, то оператор «max» заменяется на «min».

Минимаксный (максиминный) критерий основан на консервативном осторожном поведении ЛПР, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших или, наоборот из наихудших альтернатив выбирает наилучшую.

Если величина $\nu(a_i, S_j)$ представляет получаемую прибыль, то в соответствии с максиминным критерием, в качестве оптимального выбирается решение, обеспечивающее «max» и наоборот. Если величина $\nu(a_i, S_j)$ представляет потери, используется минимаксный критерий.

Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм минимаксного (максиминного) критерия путем замены матрицы выигрышей матрицей потерь.

Критерий Гурвица охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Для описания склонности лица к оптимизму используется параметр оптимизма $0 < \alpha < 1$. Пусть величины $\nu(a_i, S_j)$ представляют доходы. Тогда решению, выбранному по критерию Гурвица, соответствует «max». Если $\alpha = 0$, критерий Гурвица становится консервативным, так как его применение эквивалентно применению обычного минимаксного критерия. $\alpha = 1$, критерий Гурвица становится слишком оптимистичным, т.к. рассчитывает на наилучшее из наилучших условий. Степень оптимизма (или пессимизма) можно конкретизировать путем выбора значения из абсолютной ограниченной шкалы от 0 до 1. При отсутствии склонности к оптимизму или пессимизму рекомендуется принимать значение, равное 0,5.

3.2.3. Пример

3.2.3.1. Формулирование задачи

В некотором городе N планируется построить туристическую базу. Организаторы посчитали, что количество туристов в зависимости от времени года может быть различно и составлять 150, 200, 300 или 350 человек.

Пусть переменные $a_1 \ldots a_4$ представляют собой возможные по количеству туристов размеры туристической базы, а переменные $s_1 \ldots s_4$ соответствуют различным уровням обслуживания туристов. Матрица затрат (в тыс. рублей) имеет вид:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	100	120	160	185
a_2	120	110	145	170
a_3	140	145	140	175
a_4	170	165	150	190

Определить оптимальный размер туристической базы, характеризующийся наименьшими затратами.

3.2.3.2. Решение.

Критерий Лапласа

При заданных вероятностях $P\{s_j\} = 1/4$, $j = 1, 2, 3, 4$, ожидамые значения затрат для различных возможных решений вычисляются следующим образом:

$M_1\{a_1\} = 1/4(100 + 120 + 160 + 185) = 141{,}25$

$M_2\{a_2\} = 1/4(120 + 110 + 145 + 170) = 136{,}25 \leftarrow$ оптимум

$M_3\{a_3\} = 1/4(140 + 145 + 140 + 175) = 15$

$M_4\{a_4\} = 1/4(170 + 165 + 150 + 190) = 168{,}75$

Так как исходная матрица представляет собой расходы, то оптимальное решение достигается при реализации альтернативы a_2, организаторы решают построить туристическую базу на 200 туристов.

Минимаксный критерий

Эту же задачу можно решить с помощью минимаксного критерия, так как в данном случае рассматривается матрица расходов

	s_1	s_2	s_3	s_4	$\max \nu (a_i, s_j)$
a_1	100	120	160	185	185
a_2	120	110	145	170	170$\leftarrow$минимакс
a_3	140	145	140	175	175
a_4	170	165	150	190	190

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_2 альтернативы, организаторы решают построить туристическую базу на 200 туристов.

Критерий Сэвиджа

Для случая исследования расходов согласно критерию Сэвиджа, составляется матрица сожалений:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	100	120	160	185
a_2	120	110	145	170
a_3	140	145	140	175
a_4	170	165	150	190
min ν (a_i, s_j)	100	110	140	170

Матрица сожалений в данном случае имеет следующий вид:

	s_1	s_2	s_3	s_4	*Максимум строк*	
a_1	0	10	20	15	20	← минимакс
a_2	20	0	5	0	20	← минимакс
a_3	40	35	0	5	40	
a_4	70	55	10	20	70	

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_1 или a_2 альтернатив, организаторы могут выбрать любую из этих двух альтернатив.

Критерий Гурвица

Для отражения своего мнения по рассматриваемому процессу принятия решения примем показатель оптимизма $\alpha = 0{,}25$ (высказывается точка зрения направленная к оптимизму). Оптимальное решение определяется из соотношения:

$$(\alpha \min \nu (a_i, s_j) + (1 - \alpha) \max \nu (a_i, s_j))$$

Получаем:

	s_1	s_2	s_3	s_4	min ν (a_i, s_j)	max ν (a_i, s_j)	(α min ν (a_i, s_j) + + (1 – α) max ν (a_i, s_j))
a_1	100	120	160	185	100	185	163,75
a_2	120	110	145	170	110	170	155
a_3	140	145	140	175	140	175	166,25
a_4	170	165	150	190	150	190	180

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_2 альтернативы, организаторы решают построить туристическую базу на 200 человек.

3.3. Принятие решения в условиях риска

3.3.1. Постановка задачи

- Сформулировать задачу принятия решения в риска с 3 альтернативами.
- На основе данных задачи выбрать оптимальную альтернативу.

3.3.2 Алгоритм решения задачи

Если решение принимается в условиях риска, то альтернативные решения обычно оцениваются на основе вероятностных распределений. По этой причине принимаемое решение основывается на использовании критерия ожидаемого значения, в соответствии с которым альтернативные решения сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат. Такой подход имеет свои недостатки, так как не достаточно полно характеризует исходные данные для принятия решения. В таких случаях используются модификации критерия ожидаемого значения. Одна из таких модификаций состоит в определении апостериорных вероятностей на основе эксперимента над исследуемой системой.

Распределения вероятностей, которые используются при формулировке критерия ожидаемого значения, получаются, как правило, из накопленной ранее информации. В некоторых случаях оказывается возможным модифицировать эти вероятности с помощью текущей и/или полученной ранее информации, которая обычно основывается на исследованиях, выборочных (или экспериментальных) данных. Получаемые при этом вероятности называют апостериорными (или Байесовскими), в отличии от априорных, полученных из исходной информации. Следующий пример демонстрирует применение апостериорных вероятностей Байеса для принятия решения в условиях риска.

3.3.3 Пример

Формулировка задачи:

На фондовой бирже можно вложить 300 тыс. рублей в три компании: «А», «В» и «С». Акции компаний:

«А» могут принести 65% прибыли в условиях повышения котировок, 20% в условиях постоянства котировок и 50% потерь в условиях понижения котировок.

«В» – 30% прибыли в условиях повышенных котировок, 20% в условиях постоянства котировок, 5% в условиях пониженных котировок.
«С» – 50% прибыли в условиях повышения котировок, 20% в условиях постоянных котировок, 30% потерь в условиях понижения котировок.

Аналитические публикации прогнозируют повышение котировок с вероятностью 45%, постоянство котировок – 25%, а понижение – 30%.

Предположим, что вы решили провести собственное расследование путем консультации с квалифицированным специалистом, который высказал общее мнение «за» или «против» инвестиций.

Так, при повышении котировок его мнение будет «за» с вероятностью 60%, при постоянстве – 25%, а при понижении – 30%.

В какую компанию следует вкладывать средства, для извлечения наибольшей прибыли?

Решение:

Введем следующие обозначения: v_1 – мнение «за», v_2 - мнение «против».

Количество событий j, относящихся к мнению специалиста равно 2.

m_1 – повышение котировок,

m_2 – постоянство котировок,

m_3 – понижение котировок.

Количество событий i, относящихся к состоянию котировок равно 3.

Мнение специалиста можно записать в виде вероятностных соотношений следующим образом:

$$P\{v_1 \mid m_1\} = 0{,}6$$
$$P\{v_2 \mid m_1\} = 0{,}4$$
$$P\{v_t \mid m_2\} = 0{,}25$$
$$P\{v_2 \mid m_2) = 0{,}75$$
$$P\{v_t \mid m_3\} = 0{,}3$$
$$P\{v_2 \mid m_3\} = 0{,}7$$

С помощью полученной дополнительной информации задачу выбора решения можно сформулировать следующим образом:

- если мнение специалиста «за», акции какой компании следует покупать?
- если мнение специалиста «против», акции какой компании следует покупать?

Рассмотренную задачу можно представить в виде дерева решений, представленного на рисунке 1.

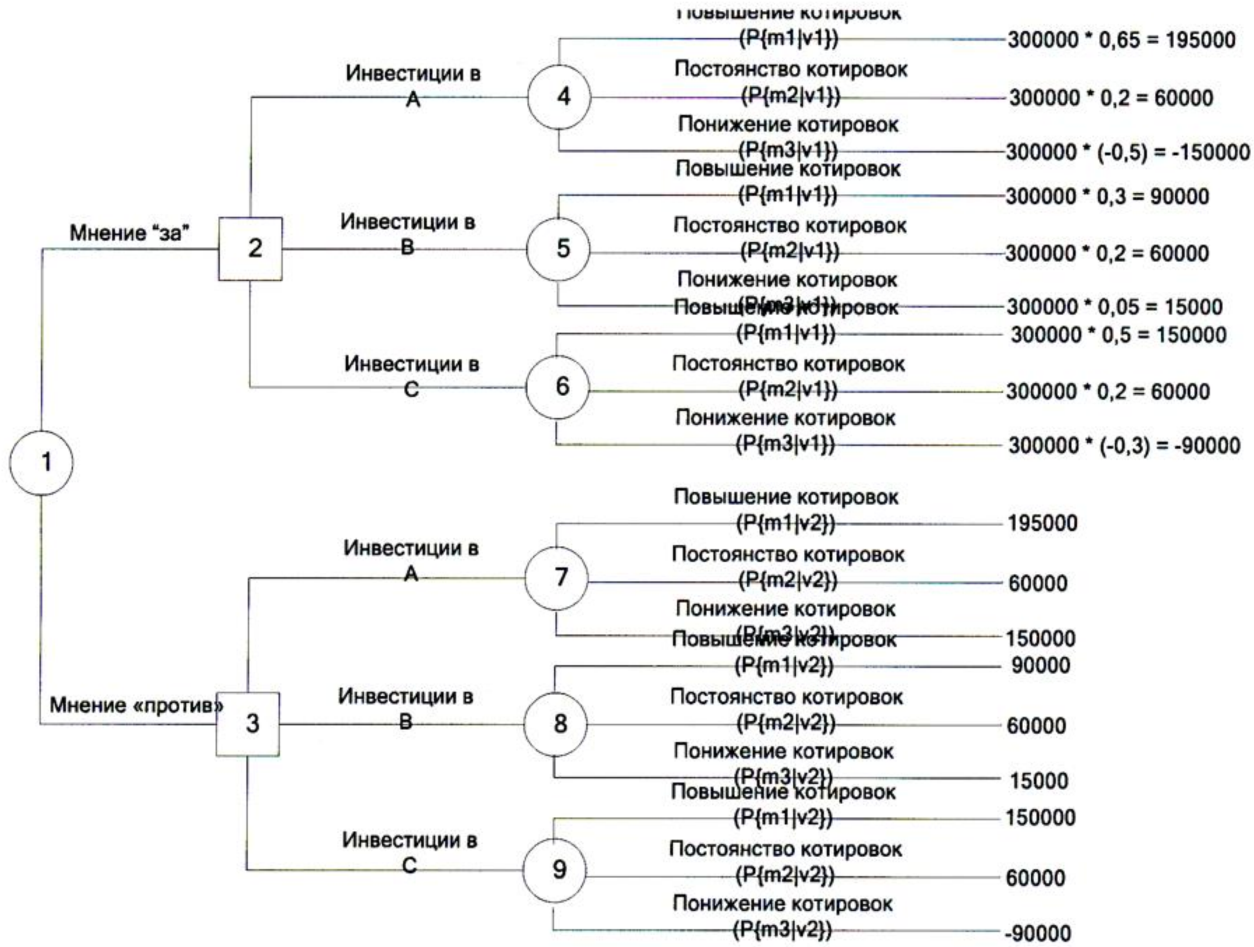

Рис. 1.

Узлу 1 здесь соответствует случайное событие, мнение специалиста, с соответствующими вероятностями «за» и «против». Узлы 2 и 3 представляют выбор между компаниями А, В и С при известном мнении эксперта «за» или «против» соответственно. Узлы 4…9 соответствуют случайным событиям, связанным с состоянием котировок.

Для оценки различных альтернатив, показанных на рисунке 1, необходимо вычислить апостериорные вероятности $P\{v_i \mid m_j\}$, указанные на соответствующих ветвях, выходящих из узлов 4…9. Эти апостериорные вероятности вычисляются с учетом дополнительной информации, содержащейся в рекомендациях эксперта, с помощью следующих четырех шагов.

Шаг № 1.

Условные вероятности $P\{v_i \mid m_j\}$ для данной задачи запишем следующим образом:

	V_1	V_2
m_1	0,6	0,4
m_2	0,25	0,75
m_3	0,3	0,7

Шаг № 2.
Вычисляем вероятности совместного появления событий *m* и v.

$$p\{m_i, v_j\} = p\{v_j, m_i\}\, p\{m_i\}$$ для всех I и j.

В результате получаем:

	V_1	$\mathbf{V_2}$
m_1	0,27	0,18
m_2	0,0625	0,1875
m_3	0,09	0,5775

Шаг № 3.
Вычисляем абсолютные вероятности появления события v.

$$p\{v_j\} = \Sigma\, p\{m_i, v_j\}$$ для всех j.

V_1	$\mathbf{V_2}$
0,4225	0,5775

Шаг № 4.
Определяем искомые апостериорные вероятности по формуле

$$p\{m_i, v_j\} = p\{m_i, v_j\} \;/\; p\{v_j\}$$

	V_1	$\mathbf{V_2}$
m_1	0,639	0,312
m_2	0,148	0,325
m_3	0,213	0,364

Эти вероятности отличаются от исходных априорных вероятностей.

Теперь можно оценить альтернативные решения, основанные на ожидаемых платежах для узлов 4…9.

Мнение "ЗА":

Доход от акций компании А

в узле 4 = 1950000,639 + 600000,148 –1500000,213 = 101538,5.

Доход от акций компании В

в узле 5 = 900000,639 + 600000,148 + 150000,213 = 69585,8.

Доход от акций компании С

в узле 6 = 1500000,639 + 600000,148 – 900000,213 = 85562,13.

Решение. Инвестировать в акции компании А.

Мнение "ПРОТИВ":

Доход от акций компании А

в узле 7 = 1950000,312 + 600000,325 – 1500000,364 = 25714,29.

Доход от акций компании В
в узле 8 = 900000,312 + 600000,325 + 150000,364 = 52987,01.
Доход от акций компании С
в узле 9 = 1500000, 312 + 60000 0, 325 – 900000, 364 = 33506,49.
Решение. Инвестировать в акции компании **В.**

3.4. Принятие решения в условиях противодействия

3.4.1 Матричные игры

Раздел "Теории принятия решений" в условиях противодействия называется ***теорией игр***. А так как в основном условия задач в "Теории принятия решений" задаются в виде матриц, то рассматриваемые конфликтные ситуации называются ***матричными играми***. В матричных играх состояниями В1, В2, …, Bn управляет не беспристрастная природа, а активный противник, преследующий сугубо свои цели. ЛПР, управляющий своими стратегиями **(*ходами*)** А1, А2, …, An,и его противник, управляющий стратегиями (ходами) В1, В2, …, Bn в данной ситуации называются ***игроками***.

Элементы матрицыа ij, заданной в условии, называются ***выигрышами (платежами)*** игрока А. А вся матрица называется ***матрицей платежей***.

Далее возможны два случая. Если в матричной игре задана одна платежная матрица, то естественно предположить, что выигрыши первого игрока будут являться ***проигрышами*** второго игрока. Такая ***антагонистическая***ситуация называется ***матричной игрой с нулевой суммой***.

Цель игры для первого игрока (ЛПР) – побольше выиграть, а для второго игрока – поменьше проиграть. Иными словами, цельюигры является определение ***оптимальной стратегии*** для каждого игрока – такой стратегии, при которой выигрыш первого игрока будет максимальным, а проигрыш второго игрока будет минимальным.

Однако, такая ситуация бывает не всегда. Зачастую в жизни ваш противник преследует сугубо свои цели, определенные своими выигрышами. В этом случае матричная игра задается двумя платежными матрицами. Или для краткости элементы одной платежной матрицы состоят из двух чисел: (aij, bij). Такая ситуация называется ***матричной игрой с ненулевой суммой***. И для первого и для второго игроков цель игры – побольше выиграть.

Очевидно, что рассмотренная матричная игра предполагает, что каждый игрок делает только по одному ходу. Естественно, что многие конфликтные ситуации предполагают по нескольку ходов каждого игрока. Такие игры рассматриваются пошагово и решаются методами динамического программирования. На каждом отдельном шаге такая игра рассматривается как игра с одним ходом.

Матричные игры для двух игроков с нулевой и ненулевой суммой достаточно хорошо изучены и для них разработана теория оптимального поведения игроков.

Однако в жизненной практике в конфликтных ситуациях зачастую участвуют более чем две стороны. Чем больше игроков – тем больше проблем. Такие игры менее изучены и здесь есть просторное поле для новых фундаментальных научных исследований. Несмотря на несколько легкомысленное звучание основных терминов, теория игр является строго научной дисциплиной с точными математическими выкладками.

Рассмотрим игру, в которой ЛПР противостоит "думающий" противник.

Возможны такие случаи:

1) Ходы игроками делаются одновременно.

2) Первым ходит игрок 2 – противник, но игрок 1 – ЛПР, не имеет информации о ходе противника.

3) Первым ходит игрок 2 – противник, но игрок 1 – ЛПР, знает о ходе противника.

4) Первым ходит игрок 1, но игрок 2 не имеет информации о ходе противника.

5) Первым ходит игрок 1, но игрок 2 знает о ходе противника.

Очевидно, что случаи 1), 2) и 4) идентичны – никто из игроков не знает о ходе противника ничего.

Рассмотрим случай 3). Так как ЛПР имеет полную информацию о ходе противника, то мы имеем ситуацию принятия решения в условиях полной определенности. Как уже отмечалось выше, такими задачами занимается математическое программирование.

Рассмотрим случай 5). Так как ЛПР ходит первым, то его противник наверняка выберет самую худшую для ЛПР стратегию. Поэтому в такой ситуации ЛПР *необходимо* принимать решение о своем ходе согласно принципу наибольшей осторожности, т.е. согласно принципу максимина. Это утверждение однозначно, легко математически доказывается и не должно подвергаться сомнению ни в каких жизненных ситуациях.

Итак, содержательны по своей сути только случаи 1), 2) и 4), которые сводятся к одному случаю. Это как мы видим, принятие решения в условиях неопределенности.

3.4.2. Матричные игры, разрешимые в чистых стратегиях

Рассмотрим парную конечную антагонистическую игру. Пусть игрок A располагает mличными стратегиями, которые обозначимA1, a2 ..., Am. Пусть у игрока B имеетсяnличных стратегий, обозначим их B1, B2, ,.., Bn. Говорят, что игра имеет размерность m x n . В результате выбора игроками любой пары стратегий Ai и Bj (i = 1,2 …, m; j = 1,2, …, n).

Однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш aij игрока A (положительный или отрицательный) и проигрыш (–aij) игрока B .Предположим, что значения aij известны для любой пары стратегий (Ai Bj).Значения этих выигрышей заданы в платежной матрице. Строки этой таблицы соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B .

С помощью принципа максимина найдем гарантированный наибольший выигрыш для игрока А:

$$\alpha = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\cdots,n} a_{ij}.$$

Найденное числоαназывается ***нижней ценой игры.***

Стратегия, соответствующая максимину, называется *максиминной стратегией* – она будет оптимальной стратегией игрока А.

Посмотрим на эту ситуацию с точки зрения второго игрока: ему необходимо уменьшить свои потери. В таком случае критерию максимина превратится в минимаксный и гарантированный наименьший проигрыш для игрокаВбудет таким:

$$\beta = \min_{j=1,\dots,n,} \max_{i=1,\dots m} a_{ij}$$

Найденное числовназывается ***верхней ценой игры***

Стратегия, соответствующая минимаксу, называется *минимаксной стратегией* – она будет оптимальной стратегией игрока В.

Причем, для нижней и верхней цены игры всегда справедливо неравенство:

$$\alpha \le \beta$$

Если нижняя и верхняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цены игры α = в = νназывается ***чистой ценой игры****,* или ***ценой игры****.* Элемент платежной матрицы, в котором достигается чистая цена игры, называется ***седловой точкой*** (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз – в другом). Найденные оптимальные стратегии игроков А и В в данном случае называются ***чистыми стратегиями****.*

Матричная игра с платежной матрицей, имеющей седловую точку, называется игрой, разрешимой в чистых стратегиях. При этом очевидно, что решение игры обладает устойчивостью, т.е. если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии. Оба игрока находятся в "положении равновесия", из которого не выгодно выходить каждому.

Рассмотрим числовой пример.

Пусть имеем игру с платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 15 & 7 \\ 4 & 1 & 11 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 9 & 10 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Проверим, имеет ли наша матричная игра седловую точку? Для этого используем принцип максимина.

Дополним исходную матрицу справа еще одним столбцом, а снизу – еще одной строкой. В них будем заносить значения минимальных элементов каждой строки и значения максимальных элементов каждого столбца соответственно:

Найдем нижнюю цену игры. Выигрыш игрока А:

$\alpha = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \min\limits_{j=1,\cdots,n} a_{ij}$ = 4 он достигается в третьей строке.

Найдем верхнюю цену игры. Выигрыш игрока В:

в = $\min\limits_{j=1,\ldots,n,} \max\limits_{i=1,\ldots m} a_{ij}$ = 4 он достигается во втором столбце.

Как видим, выигрыши игроков совпадают:α = в = ν = 4, значит у матрицы имеется седловая точка. А значит, у данной матричной игры имеется пара оптимальных чистых стратегий А3 В2 . Цена игры ν = 4.

Но такое бывает далеко не всегда.

3.4.3. Матричные игры, разрешимые в смешанных стратегиях

3.4.3.1. Постановка задачи

Если платежная матрица не имеет седловой точки, то $\alpha \neq \beta$, значит $\alpha < \beta$. Такая игра в чистых стратегиях не разрешима. Первый игрок в таком случае будет стремиться увеличить свой выигрыш, а второй – уменьшить свой проигрыш. Поиск такого решения приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более чистых стратегий с определенными вероятностями:

PA = (p1, p2, …, pm), где pi– это вероятности применения чистых стратегий игроком А;

QB = (q1, q2, …, qn),где qj– это вероятности применения чистых стратегий игроком В;

при этом $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Такие наборы вероятностей применения чистых стратегий игрокамиАиВназываются ***смешанными стратегиями***.

Заметим, что чистые стратегии – это частный случай смешанных стратегий. Например, чистая стратегия первого игрока – это смешанная стратегия, у которой все вероятности pi = 0 ,кроме соответствующего номераkчистой стратегии:pk = 1 .

Основная теорема теории игр (Теорема фон-Неймана): «любая конечная игра двух лиц с нулевой суммой разрешима в смешанных стратегиях».

Как же искать смешанные стратегии? Их можно найти точно – алгебраическим способом (в частности, с помощью симплекс-метода) или графическим способом (для игры размерности 2 x n или m x 2).

Для того чтобы точно найти решение матричной игры в смешанных стратегиях, нужно представить заданную матричную игру в виде задачи линейного программирования и решить её симплекс-методом. Рассмотрим матричную игру, не разрешимую в чистых стратегиях, в общем виде:

Заметим, что в матричной игре, разрешимой в чистых стратегиях, элементы платежной матрицы могут быть как положительными, так и отрицательными. Для симплекс-метода, которым будем решать игру, не разрешимую в чистых стратегиях, необходимо, чтобы элементы платежной матрицы были неотрицательными. Для этого, если в платежной матрице будут отрицательные элементы, нужно ко всем элементам платежной матрицы прибавить достаточно большое число c . При этом решение задачи не изменится, а цена игры увеличится на c.

PA = (p1, p2, …, pm) – это оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Её применение гарантирует первому игроку выигрыш не меньший,чем цена игрыν .Если при этом второй игрок выберет стратегиюB1, математически все вышесказанное будет иметь вид:

$$a11p1 + a21p2 + \ldots + am1pm \geq \nu$$

Таких неравенств будет столько, сколько есть возможных альтернатив у второго игрока, т.е. столбцов платежной матрицы – n штук:

$$a11p1 + a21p2 + \ldots + am1pm \geq \nu$$

$$a12p1 + a22p2 + \ldots + am2pm \geq \nu$$

$$a1np1 + a2np2 + \ldots + amnpm \geq \nu$$

Разделив все неравенства на ν,получим (в общем виде):

$$a1j\frac{p_1}{\upsilon} + a2j\frac{p_2}{\upsilon} + \ldots + amj\frac{p_m}{\upsilon} \geq 1$$

Обозначим: $\frac{p_i}{\upsilon}$ = xi, .С помощью таких новых переменных выше указанные неравенства запишутся в виде:

$$a11\ x1 + a21\ x2 + \ldots + am1\ xm \geq 1$$

$$a12\ x1 + a22\ x2 + \ldots + am2\ xm \geq 1$$

$$a1n\ x1 + a2n\ x2 + \ldots + amn\ xm \geq 1$$

Просуммируем новые переменные:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = x1 + x2 + \ldots + xm = \frac{p_1}{\upsilon} + \frac{p_2}{\upsilon} + \ldots + \frac{p_m}{\upsilon} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_m}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}$$

PA = (p1, p2, …, pm)– это оптимальная смешанная стратегия первого игрока. То есть нужно так подобрать (p1, p2, …, pm) ,чтобы ν была как можно большей. Или же, что то же самое, чтобы $\frac{1}{\upsilon}$ была как можно меньшей.

Таким образом, используя новые переменные и учитывая всё выше сказанное, исходную матричную игру можно представить в виде задачи линейного программирования:

найти вектор переменных X = {x1, x2, … , xm},такой что:

целевая функция $f = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min$

при множестве ограничений:

$$ATX \geq E$$

Где А – матрица коэффициентов (платежная матрица), заданная в условии;

Е – единичный вектор

Х – вектор неизвестных переменных, такой что $xi = \frac{p_i}{\nu}$;

ν – это цена игры: $\nu = \frac{1}{f} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}$;

pi – это коэффициенты вектора смешанной стратегии первого игрока.

3.4.3.2. Решение задачи симплекс-методом

Рассмотрим числовой пример.

Пусть имеем игру с платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим, имеет ли наша матричная игра седловую точку? Для этого используем принцип максимина.

Выигрыш игрока А: $\alpha = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \min\limits_{j=1,\cdots,n} a_{ij} = 2$, он достигается в первой строке.

Выигрыш игрока В: в $= \min\limits_{j=1,\ldots,n,} \max\limits_{i=1,\ldots m} a_{ij} = 3$, он достигается в четвертом столбце.

Как видим, выигрыши игроков не совпадают, значит у матрицы нет седловой точки. Значит, нужно искать смешанные стратегии.

В данном конкретном случае в множестве ограничений будет четыре неравенства (т.к. в условии задачи четыре столбца). Пересчитывать симплекс-таблицы с четырьмя строками не очень сильно хочется, поэтому удобнее решить *двойственную задачу* (для коэффициентов вектора смешанной стратегии второго игрока), в которой будет всего две строки (т.к. в условии задачи две строки):

найти вектор двойственных переменных Y = {y1, y2, … yn},такой что:

целевая функция $g = \sum\limits_{j=1}^{n} \acute{o}_j \rightarrow \max$

при множестве ограничений: $AY \leq E$

Для нашего примера задача линейного программирования будет такой:

найти вектор Y = {y1, y2, y3, y4},такой что:

целевая функция $g = \sum\limits_{j=1}^{3} \acute{o}_j \rightarrow \max$

при множестве ограничений:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 2\acute{o}_4 \leq 1 \\ 3y_1 + 7y_2 + y_3 + 3\acute{o}_4 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3, \acute{o}_4 \geq 0 \end{cases}$$

Далее нужно вспомнить методику применения симплекс-метода и использовать её для нашей задачи. Приведем методику применения симплекс-метода для нашей конкретной задачи.

1 этап – приведение задачи линейного программирования к каноническому виду. Неравенства во множестве ограничений нужно превратить в равенства с помощью добавления искусственных переменных. Для того чтобы неравенства превратить в равенства, надо в каждое неравенство добавить (или отнять – в зависимости от знака неравенства) искусственную переменную:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 2ó_4 + y_5 \qquad = 1 \\ 3y_1 + 7y_2 \ \ + y_3 + 3ó_4 \qquad + y_6 = 1 \\ y_1, y_2, y_3, ó_4 \geq 0 \end{cases}$$

Целевая функция при этом будет выглядеть так:

g = y1 + y2 + y3 + y4 + 0y5 + 0y6

2 этап – определение начального опорного плана.

В полученном случае начальный опорный план будут составлять искусственные переменные, входящие в ограничения с коэффициентами +1 : { y5 ; y6 }. Новых искусственных переменных для данной задачи вводить не требуется.

3 этап – заполнение исходной симплекс-таблицы.

Исходная симплекс-таблица для нашей двойственной задачи будет иметь вид: В столбец "текущий базис" ставим переменные, начального опорного плана :{ y5 ; y6 }. В столбец "ci" ставим их коэффициенты в целевой функции. В столбец "A0" ставим вектор ограниченийE : a10 = 1 ;a20 = 1 . В самую верхнюю строку таблицы ставим коэффициентысjпри соответствующих переменных в целевой функции: c1 = 1 ;c2 = 1 ;c3 = 1 ;c4 = 1 ; c5 = 0 ; c6 = 0 . В столбцы "A1", ..., "A6" ставим соответствующие коэффициенты матрицы ограничений A.

Вычисляем оценки по формулам

$$\Delta 0 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i0} \ ; .\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \ \square \ \chi\varphi$$

и ставим их в самую нижнюю строку симплекс-таблицы (строку оценок) :

$$\Delta 0 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i0} = 0 * 1 + 0 * 1 = 0 \Delta 1 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i1} \ \square \ \chi 1 = 0 * 4 + 0 * 3 \ \square \ 1 = \square \ 1$$

$$\Delta 2 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i2} \ \square \ \chi 2 = 0 * 3 + 0 * 7 \ \square \ 1 = \square \ 1 \Delta 3 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i3} \ \square \ \chi 3 = 0 * 8 + 0 * 1 \ \square \ 1 = \square \ 1$$

$$\Delta 4 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i4} \ \square \ \chi 4 = 0 * 2 + 0 * 3 \ \square \ 1 = \square \ 1 \Delta 5 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i5} \ \square \ \chi 5 = 0 * 1 + 0 * 0 \ \square \ 0 = 0$$

$$\Delta 6 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i6} \;\square\; \chi 6 = 0 * 0 + 0 * 1 \;\square\; 0 = 0$$

4 этап – пересчет симплекс-таблицы.

1. Если □j ≥ 0 для всех j = 1, 2, ... , n , то данный план (в столбце "текущий базис") – оптимален. В нашем случае это условие не выполняется, значит, текущий базис можно улучшить.

2. Если имеются □k < 0 ив столбце Ak все элементы aik ≤ 0 , то целевая функция не ограничена сверху на допустимом множестве и данная задача не имеет смысла. В нашем случае видим, что целевая функция сверху ограничена.

3. Если имеются □j < 0 ив столбцах Aj , соответствующих этим оценкам, существует хотя бы один элемент aik > 0, то возможен переход к новому лучшему плану, связанному с большим значением целевой функции. У нас так и есть.

4. Переменная xk, которую необходимо ввести в базис, для улучшения плана соответствует наименьшей отрицательной оценке □j. Столбец Ak, содержащий эту оценку называется *ведущим*. В нашем случае все оценки одинаковы. Поэтому в качестве ведущего столбца выберем любую оценку, например, третью:k = 3.

5. Ищем min{ ai0 / ai1 } = min{ 1/8 ; 1/1 } = 1/8– этот минимум достигается при i = 1. Значит, r = 1первая строка – *ведущая*. (на рисунке помечена стрелкой)

Ведущий элементark = a13 = 8(на рисунке выделен)

6. Заполняем новую симплекс-таблицу.

В столбец "текущий базис" вместо переменной y5 ставим переменную y3
.

В столбец "ci" ставим коэффициент переменной y3 в целевой функции.

Самая верхняя строка таблицы всегда остаётся неизменной.

Пересчитываем ведущую строку по формуле $a_{rj}^{l+1} = \dfrac{a_{rj}^{l}}{a_{rk}^{l}}$:

$$a_{10}^{l+1} = \frac{a_{10}^{l}}{a_{13}^{l}} = \frac{1}{8} \quad a_{11}^{l+1} = \frac{a_{11}^{l}}{a_{13}^{l}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad a_{12}^{l+1} = \frac{a_{12}^{l}}{a_{13}^{l}} = \frac{3}{8} \quad a_{13}^{l+1} = \frac{a_{13}^{l}}{a_{13}^{l}} = \frac{8}{8} = 1$$

$$a_{14}^{l+1} = \frac{a_{14}^{l}}{a_{13}^{l}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad a_{15}^{l+1} = \frac{a_{15}^{l}}{a_{13}^{l}} = \frac{1}{8} \quad a_{16}^{l+1} = \frac{a_{16}^{l}}{a_{13}^{l}} = \frac{0}{8} = 0$$

После этого пересчитываем остальные строки по формуле

$$a_{ij}^{l+1} = a_{ij}^{l} - \frac{a_{rj}^{l}}{a_{rk}^{l}} * a_{ik}^{l} :$$

вторая строка (i = 2)

Пересчитываем и заполняем строку оценок:

$$\Delta 0 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i0} = 1 * \frac{1}{8} + 0 * \frac{7}{8} = \frac{1}{8}\ \Delta 1 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i1}\ \square\ \chi 1 = 1 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{5}{2}\ \square\ 1 = \square\ \frac{1}{2}$$

$$\Delta 2 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i2}\ \square\ \chi 2 = 1 * \frac{3}{8} + 0 * \frac{53}{8}\ \square\ 1 = \square\ \frac{5}{8}\Delta 3 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i3}\ \square\ \chi 3 = 1 * 1 + 0 * 0\ \square\ 1 = 0$$

$$\Delta 4 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i4}\ \square\ \chi 4 = 1 * \frac{1}{4} + 0 * \frac{11}{4}\ \square\ 1 = \square\ \frac{3}{4}$$

$$\Delta 5 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i5}\ \square\ \chi 5 = 1 * \frac{1}{8} + 0 * \left(-\frac{1}{8}\right)\ \square\ 0 = \frac{1}{8}\Delta 6 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i6}\ \square\ \chi 6 = 1 * 0 + 0 * 1\ \square\ 0 = 0$$

После этого повторяем 4 этап до тех пор, пока не будет выполнен п.1 (все $\square j \geq 0$).

В нашем случае имеются$\square j < 0$и наименьшая среди них$\square 4$.Значит ведущим столбцом на данном шаге будетA4(пометим его стрелкой).

Ищемmin{ ai0 / ai4 } = $\min\{\frac{1}{8} : \frac{1}{4};\ \frac{7}{8} : \frac{11}{4}\}$ =$\min\{\frac{1}{2};\ \frac{7}{22}\} = \frac{7}{22}$ – этот минимум достигается при i = 2. Значит, r = 2вторая строка – ведущая (на рисунке помечена стрелкой).

Таким образом, в новый текущий базис вместо переменнойy6надо ввести переменнуюy4 .

Пересчитываем все элементы новой симплекс-таблицы.

Пересчитываем ведущую строку (вторую):

$$a_{20}^{l+1} = \frac{a_{20}^{l}}{a_{24}^{l}} = \frac{7}{8} : \frac{11}{4} = \frac{7}{8}\ \square\ \frac{4}{11} = \frac{7}{22}\ a_{21}^{l+1} = \frac{a_{21}^{l}}{a_{24}^{l}} = \frac{5}{2} : \frac{11}{4} = \frac{5}{2}\ \square\ \frac{4}{11} = \frac{10}{11}$$

$$a_{22}^{l+1} = \frac{a_{22}^{l}}{a_{24}^{l}} = \frac{53}{8} : \frac{11}{4} = \frac{53}{8}\ \square\ \frac{4}{11} = \frac{53}{22}\ a_{34}^{l+1} = \frac{a_{34}^{l}}{a_{24}^{l}} = 0 : \frac{11}{4} = 0$$

$$a_{24}^{l+1} = \frac{a_{24}^{l}}{a_{24}^{l}} = \frac{11}{4} : \frac{11}{4} = 1\, a_{25}^{l+1} = \frac{a_{25}^{l}}{a_{24}^{l}} = -\frac{1}{8} : \frac{11}{4} = -\frac{1}{22}\ a_{26}^{l+1} = \frac{a_{26}^{l}}{a_{24}^{l}} = 1 : \frac{11}{4} = \frac{4}{11}$$

Приведенные выше и ниже вычисления представлены в весьма подробном виде. Это сделано из тех соображений, что как опять таки показывает практика, даже не смотря на достаточно хорошее понимание и усвоение теоретического материала, ошибки зачастую возникают именно при выполнении элементарных арифметических операций. Не следует думать, что средняя школа осталась позади, и вы всё можете посчитать в уме. Поэтому всем студентам мы советуем не лениться и подробно расписывать все арифметические-действия (особенно с дробями).#

Пересчитываем оставшуюся строку (первую):

$$a_{10}^{l+1} = a_{10}^{l} - \frac{a_{20}^{l}}{a_{24}^{l}} * a_{14}^{l} = \frac{1}{8} - \frac{7}{22} \square \frac{1}{4} = \frac{22}{22*8} - \frac{14}{22*8} = \frac{8}{22*8} = \frac{1}{22}$$

$$a_{11}^{l+1} = a_{11}^{l} - \frac{a_{21}^{l}}{a_{24}^{l}} * a_{14}^{l} = \frac{1}{2} - \frac{10}{11} \square \frac{1}{4} = \frac{11}{11*2} - \frac{5}{11*2} = \frac{6}{11*2} = \frac{3}{11}$$

$$a_{12}^{l+1} = a_{12}^{l} - \frac{a_{22}^{l}}{a_{24}^{l}} * a_{14}^{l} = \frac{3}{8} - \frac{53}{22} \square \frac{1}{4} = \frac{22*3}{22*8} - \frac{106}{22*8} = -\frac{40}{22*8} = -\frac{5}{22}$$

$$a_{13}^{l+1} = a_{13}^{l} - \frac{a_{23}^{l}}{a_{24}^{l}} * a_{14}^{l} = 1 - 0 \square \frac{1}{4} = 1\, a_{14}^{l+1} = a_{14}^{l} - \frac{a_{24}^{l}}{a_{24}^{l}} * a_{14}^{l} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$a_{15}^{l+1} = a_{15}^{l} - \frac{a_{25}^{l}}{a_{24}^{l}} * a_{14}^{l} = \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{22}\right) \square \frac{1}{4} = \frac{22}{22*8} + \frac{2}{22*8} = \frac{24}{22*8} = \frac{3}{22}$$

$$a_{16}^{l+1} = a_{16}^{l} - \frac{a_{26}^{l}}{a_{24}^{l}} * a_{14}^{l} = 0 - \frac{4}{11} \square \frac{1}{4} = -\frac{1}{11}$$

Пересчитываем и заполняем строку оценок:

$$\Delta 0 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i0} = 1 * \frac{1}{22} + 1 * \frac{7}{22} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$$

$$\Delta 1 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i1} \square \chi 1 = 1 * \frac{3}{11} + 1 * \frac{10}{11} \square 1 = \frac{13}{11} \square \frac{11}{11} = \frac{2}{11}$$

$$\Delta 2 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i2} \square \chi 2 = 1 * \left(-\frac{5}{22}\right) + 1 * \frac{53}{22} \square 1 = \frac{48}{22} \square \frac{22}{22} = \frac{26}{22} = \frac{13}{11}$$

$$\Delta 3 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i3} \square \chi 3 = 1 * 1 + 1 * 0 \square 1 = 0$$

$$\Delta 4 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i4} \square \chi 4 = 1 * 0 + 1 * 1 \square 1 = 0$$

$$\Delta 5 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i5} \; \square \; \chi 5 = 1 * \frac{3}{22} + 1 * \left(-\frac{1}{22}\right) \; \square \; 0 = \frac{2}{22} = \frac{1}{11}$$

$$\Delta 6 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i6} - c6 = 1 \; \square \left(-\frac{1}{11}\right) + 1 \square \; \frac{4}{11} - 0 = \frac{3}{11}$$

Повторяем 4-й этап. При проверке п. 1 видим, что все□j ≥ 0 .Следовательно, данный план{y3, y4}(в столбце "текущий базис") – оптимален. Больше пересчитывать симплекс-таблицу не нужно.

Решение задачи линейного программирования полностью содержится в последней симплекс-таблице.

Значения переменных находятся в столбцеA0возле соответствующих переменных. В нашем случае, мы видим, чтоy3 = $\frac{1}{22}$,y4 = $\frac{7}{22}$.Переменныеy1иy2не входят в базис, поэтому их значения будут равны нулю. Таким образом, вектор переменных будет выглядеть так: Y = $\left(0, 0, \frac{1}{22}, \frac{7}{22}\right)$.

Значение целевой функции – это значение оценки□0 .В нашем случаеg = □0 = $\frac{4}{11}$.

Значения двойственных переменных находятся в строке оценок возле искусственных переменных. В нашем случае это□5и□6 ,то естьx1 = $\frac{1}{11}$,x2 = $\frac{3}{11}$.Таким образом, вектор двойственных переменных будет выглядеть так:X = $\left(\frac{1}{11}, \frac{3}{11}\right)$.

Итак, мы получили решение прямой задачи (которая у нас была двойственной):Y = $\left(0, 0, \frac{1}{22}, \frac{7}{22}\right)$

и двойственной задачи к данной (которая у нас была прямой):

X = $\left(\frac{1}{11}, \frac{3}{11}\right)$

Значения целевых функций при этом будут совпадать:f = g = $\frac{4}{11}$.

Найдем цену игры:ν = $\frac{1}{f} = \frac{11}{4}$

Далее найдем коэффициенты смешанной стратегии
для первого игрока по формуле pi = $x_i \cdot \nu$:

$$P = \left(\frac{1}{11} \cdot \frac{11}{4}, \quad \frac{3}{11} \cdot \frac{11}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right),$$

для второго игрока по формуле qi = $y_i \cdot \nu$:

$$Q = \left(0 \cdot \frac{11}{4},\quad 0 \cdot \frac{11}{4},\quad \frac{1}{22} \cdot \frac{11}{4},\quad \frac{7}{22} \cdot \frac{11}{4}\right) = \left(0, 0, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right).$$

Особо "продвинутые" студенты при нахождении решения задачи линейного программирования, чтобы не считать симплекс-метод вручную академическим способом, могут воспользоваться средствами MS Excel. Это гораздо быстрее и удобнее.#

Ответ: смешанная стратегия для первого игрока P = $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$,

смешанная стратегия для второго игрока Q = $\left(0, 0, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$,

цена игры $\nu = \frac{11}{4}$.

Вопросы для самостоятельной подготовки

1.Что такое исследование операций?
2.Что такое ЛПР?
3.Что такое математическая модель?
4.Что такое переменные?
5.Что такое альтернатива?
6.Что такое план?
7.Что такое ограничение?
8.Что такое допустимое множество?
9.Что такое допустимый план?
10.Что такое целевая функция?
11.Что такое оптимальный план?
12.Что такое математическое моделирование?
13.Что такое математическое программирование?
14.Что такое линейное программирование?
15.Что такое целочисленное программирование?
16.Что такое динамическое программирование?
17.Что такое нелинейное программирование?
18.Что такое задача принятия решения?
19.Что такое бинарные отношения?
20.Что такое ориентированный граф?
21.Что такое множество Парето?
22.Найти множество Парето.
23.Что такое принятие решения в условиях определенности?
24.Что такое принятие решения в условиях риска?
25.Какие условия использования критерия Байеса?
26.Решить задачу с помощью критерия Байеса.
27.Какие условия использования критерия Лапласа?
28.Решить задачу с помощью критерия Лапласа.
29.Какие условия использования критерия Гермейера?
30.Решить задачу с помощью критерия Гермейера.
31.Какие условия использования критерия Ходжа-Лемана?
32.Решить задачу с помощью критерия Ходжа-Лемана.
33.Что такое принятие решения в условиях неопределенности?
34.Какие условия использования принципа максимина?
35.Решить задачу с помощью принципа максимина.
36.Какие условия использования критерия азартного игрока?
37.Решить задачу с помощью критерия азартного игрока.
38.Какие условия использования критерия произведений?
39.Решить задачу с помощью критерия произведений.
40.Какие условия использования критерия Севиджа?
41.Решить задачу с помощью критерия Севиджа.
42.Какие условия использования критерия Гурвица?
43.Решить задачу с помощью критерия Гурвица.

44.Что такое принятие решения в условиях противодействия?
45.Что такое матричная игра?
46.Что такое платежи матричной игры?
47.Что такое матрица платежей?
48.Что такое матричная игра с нулевой суммой?
49.Что такое матричная игра с ненулевой суммой?
50.Что такое седловая точка?
51.Что такое чистая стратегия?
52.Что такое смешанная стратегия?
53.Найти седловую точку матрицы.
54.Решить матричную игру в чистых стратегиях.
55.Найти множество Парето для задачи двукритериального выбора.
56.Решить задачу многокритериального выбора методом линейнойаддитивной свертки.
57.Решить задачу многокритериального выбора методом мультипликативной свертки.
58.Решить задачу многокритериального выбора методом максиминной свертки.
59.Решить задачу про групповую экспертную оценку.
60.Решить задачу экспертной оценки объектов с учетом компетентности экспертов.

Контрольные вопросы по дисциплине

1. Исследование операций как наука о принятии оптимальных решений.
2. Построение математической модели.
3. Математическое программирование. (Общий обзор, основные понятия, классы задач.)
4. Принятие решения: постановка задачи, возможные случаи.
5. Принятие решений в условиях риска. Критерий Байеса.
6. Принятие решений в условиях риска. Критерий Лапласа.
7. Принятие решений в условиях риска. Критерий Гермейера.
8. Принятие решений в условиях риска. Критерий Ходжа-Лемана.
9. Принятие решений в условиях неопределенности. Принцип максимина.
10. Принятие решений в условиях неопределенности. Критерий азартного игрока.
11. Принятие решений в условиях неопределенности. Критерий произведений.
12. Принятие решений в условиях неопределенности. Критерий Севиджа.
13. Принятие решений в условиях неопределенности. Критерий Гурвица.
14. Принятие решений в условиях противодействия. Общие понятия.
15. Матричные игры.
16. Чистые стратегии, седловая точка, цена игры.
17. Смешанные стратегии.
18. Представление матричной игры в виде задачи линейного программирования.
19. Графический метод решения матричной игры.
20. Принятие решений в условиях нескольких критериев выбора (многокритериальный выбор).

21. Линейные свёртки.
22. Максиминная и лексикографическая свёртки.
23. Мультипликативные свёртки.
24. Описание выбора на языке бинарных отношений.
25. Множество Парето. Максимальный элемент.
26. Матрицы смежности и инцидентности.
27. Принятие корпоративных решений.
28. Компетентность экспертов.

Перечень вопросов для самоподготовки с элементами УИРС:

Как влияют технические факторы, учитываемые при принятии инженерных решений?
1. Геометрические факторы – габариты и форма.
2. Массу – общую и отдельных элементов.
3. Прочность – какое звено является слабым?
4. Динамика – колебания, частота собственных колебаний.
5. Первый закон термодинамики.
6. Второй закон термодинамики.
7. Электрические эффекты.
8. Магнитные эффекты.
9. Коррозия.
10. Усталость – тепловая или вызываемая напряжением.
11. Ползучесть.
12. Теплопередача – теплопроводностью, конвекцией, излучением.
13. Температурные эффекты.
14. Эффекты, связанные с потоком жидкости, – гидродинамическое сопротивление, трение, расход.
15. Количество движения.
16. Износ-смазка.
17. Энергия – источник, мощность.
18. Инерция.

Как влияют человеческие факторы, учитываемые при принятии решений?
19. Этика.
20. Мнения различных лиц о выбранной вами альтернативе.
Можете ли вы „подать" ее вашему начальнику, коллегам, подчиненным, клиентам, техническому персоналу и т. д.?
21. Сопротивление переменам, боязнь нового и привычка к старому (у начальника, коллег, подчиненных, клиентов и т. д.).
22.. Эстетические факторы.
23.. Престиж и общественное положение.
24.. Личные привязанности, вкусы и предубеждения. (Собственные, фирмы, общества, начальника, коллег, технического персонала и т. д.)
25.. Ваши отношения с женой, ваше самочувствие, болезнь ваших близких, болезнь сына вашего начальника и т. п..
26.. Сострадание, любовь, ненависть, страх и т. д.

Литература

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов. - М.: Высшая школа , 1986. - 319 с.
2. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учебник для втузов / Ред. Зарубин В.В., Крищенко А.П. - 2-е изд. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 435 с.
3. Евланов В.Г. Теория и практика принятия решений. – М.: Экономика, 1984. – 175 с.
4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
5. Колпаков В.М.Теория и практика принятия управленческих решений: Учеб. пособие для вузов. – К.: МАУП, 2000. – 254 с.
6. Костевич Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций: Учеб. пособие для вузов. - Мн.: Вышэйшая школа, 1982. - 230 с.
7.Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Александр Владимирович Титенок

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ
(*теория и практика***)**
учебно-методическое пособие

направление подготовки 20.04.01 Техносферная безопасность
Направленность (профиль) Безопасность жизнедеятельности
в чрезвычайных ситуациях.
Квалификация магистр

Редактор издательства И.П. Павлютина

Компьютерный набор А.В. Титенок

Подписано в печать 28. 06.2018 г. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,26. Изд. № 6138. Тираж 25 экз.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365, с. Кокино, Выгоничского р-на, Брянской обл., БГАУ,