

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматике, физики и математики

Ракул Е.А.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие
для бакалавров

Брянская область 2022

УДК 51 (07)
ББК 22.1
Р 19

Ракул, Е. А. Операционное исчисление: учебное пособие для бакалавров / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2022. – 86 с.

Учебное пособие предназначено для бакалавров очной и заочной формы обучения направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств.

Рецензенты:

Панов М.В., к.т.н., доцент кафедры автоматизации, физики и математики.

Рекомендовано к изданию решением учебно-методической комиссии института энергетики и природопользования Брянского ГАУ, протокол № 3 от 28.10.2022 года.

© Брянский ГАУ, 2022

© Ракул Е.А., 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Комплексные числа	8
1.1 Понятие комплексного числа	8
1.2 Тригонометрическая и показательная форма записи комплексных чисел	9
1.3 Арифметические действия с комплексными числами	11
2 Функции комплексной переменной	19
2.1 Области и их границы на комплексной плоскости	19
2.2 Понятие функции комплексной переменной	21
2.3 Основные элементарные функции в комплексной плоскости	23
2.4 Предел и непрерывность функции комплексной переменной	26
2.5 Дифференцирование функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Аналитические и гармонические сопряженные функции	28
2.6 Интегрирование функции комплексной переменной	31
3 Преобразование Лапласа	34
3.1 Оригинал и изображение	34
3.2 Единичная функция Хэвисайда. Импульсная функция Дирака	37
3.3 Основные свойства преобразования Лапласа	41
3.4 Основные правила операционного исчисления	47
3.5 Восстановление оригинала по изображению. Метод неопределённых коэффициентов	54
4 Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений и их систем	59
4.1 Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	59
4.2 Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	62
4.3 Применение формулы Дюамеля при решении дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями	65
4.4 Применение операционного исчисления к исследованию процессов в электрических цепях	68
5 Преобразование Фурье	72
5.1 Понятие преобразования Фурье	72
5.2 Связь между преобразованиями Лапласа и Фурье. Свойства преобразования Фурье	75
5.3 Синус и косинус преобразования	77
5.4 Примеры нахождения спектральных характеристик непериодических сигналов	79
Литература	85

ВВЕДЕНИЕ

Операционное (символическое) исчисление применяется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и интегральных уравнений типа свёртки, к которым приводятся задачи по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники.

О значении операционного исчисления английский математик Э.Т. Уиттекер писал: «...мы должны считать операционное исчисление наряду с открытием Пуанкаре автоморфных функций и открытием Риччи тензорного исчисления тремя наиболее важными успехами математики за последнюю четверть девятнадцатого века».

Начало развития операционного исчисления было уже в работах Лейбница (1646-1716), Л. Эйлера (1707-1783), Лагранжа (1736-1813), Лапласа (1749-1827), Фурье (1768-1830), Коши (1789-1857).

Английский инженер-электрик Оливер Хевисайд, применяя операционное исчисление к решению дифференциальных уравнений, получил ряд важных результатов по сложным проблемам теории электромагнитных колебаний в проводах. О. Хевисайд положил начало систематическому приложению символического исчисления к решению физико-технических задач, поэтому создание символического исчисления обычно и связывают с его именем.

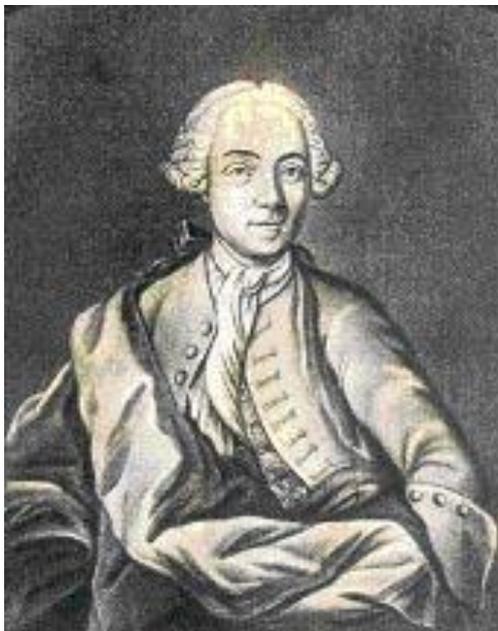


Оливер Хевисайд (1850 – 1925)

Однако первоначальная разработка символического метода была выполнена задолго до появления работ О. Хевисайда в трудах эльзасского математика

Ф. Арбогаста, французских математиков М. Франсэ и Лобатто, английских математиков Д.Ф. Грегори, П. Буля, Р. Кармайкла и других. Начинателем разработки символического исчисления в России является профессор Киевского университета Михаил Егорович Ващенко-Захарченко (1825-1912), который в книге «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» дает подробное изложение о символах и их свойствах, рассматривает приложение символического исчисления к решению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Широко применяемое в трудах О. Хевисайда операционное исчисление не получило математического обоснования и встретило отрицательное отношение со стороны математиков. Почти никто из них не относился серьезно к этому методу решения линейных дифференциальных уравнений. Строгое обоснование и развитие операционное исчисление получило на основе интегральных преобразований в работах Дж. Карсона, Бромвича, Леви и других.



Леонард Эйлер (1707-1783)



Пьер Симон Лаплас (1749–1827)

Преобразование Лапласа $F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ преобразовывает определенный класс **функций-оригиналов** $f(t)$ действительного переменного t в

функции-изображения $F(p)$ комплексного переменного p . Преобразование

$F(p) = \int_a^b e^{-pt} f(t) dt$ впервые (1737) было введено Л. Эйлером. Лапласом были

выяснены (1782) свойства этого преобразования, а также введены бесконечные пределы интегрирования, что сделало возможным применение преобразования Эйлера – Лапласа в приложениях.

Американский инженер Дж. Карсон показал (1926) связь между операционным исчислением и интегральным преобразованием Лапласа, установил соотношение между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ в виде интегрального уравнения

$F(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ относительно неизвестной функции

$f(t)$.

Обратную зависимость между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ получил английский математик Томас Джон Бромвич (1875 – 1930) в виде контурного интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp \quad (*)$$

в комплексной области $p = s + i\sigma$, где интегрирование ведется по любой прямой, параллельной мнимой оси плоскости и расположенной вправо от всех особых точек функции $\frac{F(p)}{p}$. Следует отметить, что Дж. Бромвич – один из не-

многих математиков того времени, который заинтересовался операционным исчислением и обнаружил, что методы Хевисайда могут быть строго обоснованы с помощью теории функций комплексной переменной. Он написал Хевисайду о том, что решение уравнений методом операционного исчисления сводится к вычислению контурных интегралов в комплексной плоскости и между ними завязалась оживленная переписка. По существу, Бромвич обосновал операционное исчисление с помощью преобразования Лапласа, он разработал метод, который был строгим с математической точки зрения и давал те же резуль-

таты, что и операционное исчисление в том виде, в каком оно было разработано Хевисайдом. Но, получив обоснование операционных методов Хевисайда, Бромвич за последующие несколько лет пришел к заключению, что на практике более удобно прямо использовать именно методы Хевисайда в их первоначальном виде, а не метод контурных интегралов.



Интеграл (*) был получен (1859) задолго до Бромвича немецким математиком Б.Риманом в работе «О числе простых чисел, не превышающих данной величины», как следствие одного преобразования, и строго доказан (1902) финским математиком Робертом Меллином, поэтому обычно называется интегралом Римана – Меллина.

Французский математик П.Леви показал, что решение интегрального уравнения Карсона представляется контурным интегралом Бромвича и наоборот.

Георг Фридрих Бернхард Риман

(1826 – 1866)

1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1 Понятие комплексного числа

Комплексные числа возникли при решении алгебраических уравнений. Математики не могли согласиться с тем, что уравнение $z^2 - 1 = 0$ имеет решение, а уравнение $z^2 + 1 = 0$ – нет. Поскольку среди действительных чисел нет ни одного, квадрат которого бы равнялся -1 , то договорились, что таким свойством будет обладать символ j , т.е. $j^2 = -1$. Поэтому уравнение $z^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $z = j$ и $z = -j$, как и обычное квадратное уравнение. Так появились сначала в математической среде, а потом и в технических науках комплексные числа. В настоящее время раздел комплексного анализа – современная ветвь математики, широко развитая, которая находит применение во многих инженерных дисциплинах.

Определение. *Комплексным числом называется число вида*

$$z = a + jb, \quad (1.1)$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа z ; $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа z ; $a, b \in R$; j – мнимая единица.

Множество всех комплексных чисел обозначается C . Формула (1.1) называется также **алгебраической формой** записи комплексного числа. Примеры комплексных чисел: $2 + 3j$, $-5j$, $-1 - j$.

Если $b = 0$, комплексное число превращается в действительное: $z = b$. Поэтому множество действительных чисел является подмножеством комплексных чисел: $R \subset C$. Комплексное число, у которого $b \neq 0$, $a = 0$, называется **чисто мнимым**. Комплексный нуль – это $0 + 0j$, но пишут и просто 0 .

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + jb_1$ и $z_2 = a_2 + jb_2$ считаются **равными**, если равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Неравенства для комплексных чисел смысла не имеют.

Если действительные части двух комплексных чисел одинаковы, а мнимые части отличаются только знаком, то такие числа называются **комплексно-сопряженными**. Обозначают число, комплексно-сопряженное к числу (1.1), следующим образом: $\bar{z} = a - jb$.

1.2 Тригонометрическая и показательная форма записи комплексных чисел

Так как комплексное число имеет две компоненты, действительную и мнимую части, его можно трактовать и как точку координатной плоскости и как двумерный вектор. Обе возможности используются в математике. Комплексной плоскостью называют декартову плоскость, на которой изображают комплексные числа. На оси Ox откладывают действительную часть числа и потому эту ось называют также **действительной**, а на оси Oy откладывают мнимую часть комплексного числа, поэтому ось Oy – **мнимая**. Чтобы отличать комплексную плоскость от обычной декартовой, ее обозначают символом

\textcircled{z} : Рисунок 1.1 демонстрирует изображение комплексного числа на комплексной плоскости, как в виде точки, так и в виде радиус-вектора этой точки.

Если на комплексной плоскости ввести полярную систему координат, то комплексное число можно связать также с полярным радиусом ρ и полярным углом φ . Из рисунка 1.1 видно, что действительная часть комплексного числа равна $\rho \cos \varphi$, а его мнимая часть совпадает с $\rho \sin \varphi$. Поэтому вообще комплексное число можно также записать в виде

$$z = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi). \quad (1.2)$$

Формула (1.2) называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа. Величина $\rho = |z|$ называется его **модулем**, а $\varphi = \text{Arg } z$ – его **аргументом**.

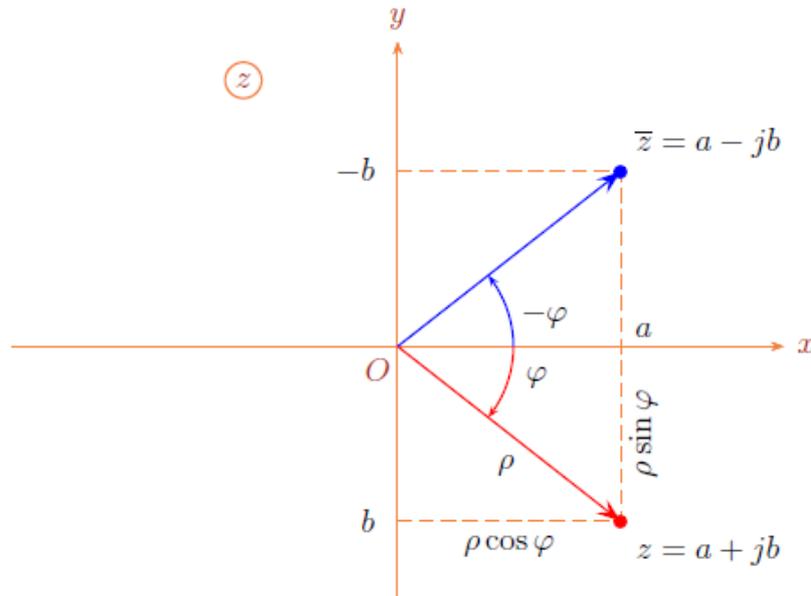


Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Очевидно, аргумент определен лишь с точностью до постоянного слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому равенство двух комплексных чисел в тригонометрической форме можно сформулировать так: два комплексных числа равны, если они имеют одинаковые модули, а их аргументы отличаются на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Одно из значений $\text{Arg } z$, которое принадлежит интервалу длины 2π , называют **главным значением** и обозначают $\arg z$. Отметим, что аргумент числа 0 не определен. Мы будем брать главное значение из интервала $(-\pi; \pi]$, поэтому

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Таким образом, перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа к алгебраической форме можно с помощью формул

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi.$$

Обратный переход может быть осуществлен по формулам:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \text{не определен; } a = 0, b = 0; \\ \frac{\pi}{2}; a = 0, b > 0; \\ -\frac{\pi}{2}; a = 0, b < 0; \\ \arctg \frac{b}{a}; a > 0; \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}; a < 0, b \geq 0; \\ \pi - \arctg \frac{b}{a}; a < 0, b < 0. \end{cases}$$

Если обозначить $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$, то получим показательную форму записи комплексного числа z в виде

$$z = \rho e^{j\varphi}.$$

Пример 1.1

Число $z = -1 + j$ задано в алгебраической форме. Найти его тригонометрическую и показательную формы.

Решение.

Найдем модуль заданного комплексного числа $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ и главное значение аргумента $\arg z = \varphi = \pi + \arctg \frac{1}{-1} = \pi - \arctg 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} \right), \text{ а показательная форма записи } - z = \sqrt{2} e^{j\frac{3\pi}{4}}.$$

1.3 Арифметические действия с комплексными числами

Для двух комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$$

рассмотрим четыре арифметических действия.

1. Сложение

Чтобы найти сумму двух комплексных чисел, надо отдельно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

Заметим, что сумма комплексно-сопряженных чисел является действительным числом:

$$z + \bar{z} = (a + jb) + (a - jb) = 2a.$$

Пример 1.2

Найти сумму двух комплексных чисел $z_1 = 3 - 5j$ и $z_2 = -2 + 7j$.

Решение

$$z_1 + z_2 = (3 - 5j) + (-2 + 7j) = (3 - 2) + j(-5 + 7) = 1 + 2j.$$

2. Вычитание

Вычитание комплексных чисел определяют как действие, обратное сложению. Поэтому действительная и мнимая части разности $z_1 - z_2$ равны, соответственно, разности действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2 .

Сложение и вычитание комплексных чисел можно выполнять и в геометрической форме, учитывая их представление в виде векторов. Начала векторов совмещают с началом координат. Сумму находят по правилу параллелограмма (рис. 1.2) как одну из его диагоналей, выходящую из начала координат, а разность – как другую диагональ, перенесенную параллельным переносом к началу координат.

Аналитически вычитание двух комплексных чисел проводят следующим образом:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2).$$

Пример 1.3.

Найти разность двух комплексных чисел $z_1 = 3 - 5j$ и $z_2 = -2 + 7j$.

Решение

$$z_1 - z_2 = (3 - 5j) - (-2 + 7j) = (3 - (-2)) + j(-5 - 7) = 5 - 12j.$$

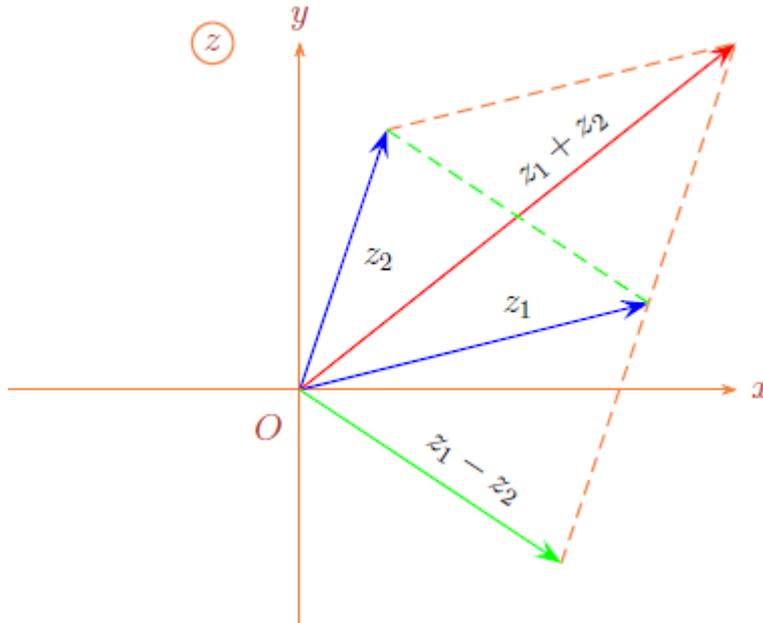


Рис. 1.2. Сложение и вычитание векторов

3. Умножение

Комплексные числа умножают по правилу умножения многочленов, принимая во внимание, что $j^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2b_1b_2 = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пример 1.4

Найти произведение двух комплексных чисел $z_1 = 3 - 5j$ и $z_2 = -2 + 7j$.

Решение

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5j)(-2 + 7j) = -6 + 21j + 10j - 35j^2 = 29 + 31j.$$

Важное значение имеет результат умножения комплексно-сопряженных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 - abj + abj - j^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Очевидно, он оказывается действительным числом, которое равно квадрату модуля этих чисел. Это свойство комплексно-сопряженных чисел используется в операции деления комплексных чисел (см. далее).

Формулу (1.3) можно представить в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= [\rho_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)] \cdot [\rho_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)] = \\
&= \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + j \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + j \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + j^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\
&= \rho_1 \rho_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\
&= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Следовательно, в этом случае правило умножения звучит так: *чтобы перемножить два комплексных числа в тригонометрической форме, надо умножить их модули, а аргументы сложить.*

Пример 1.5

Найти произведение двух комплексных чисел $z_1 = 1 + j$ и $z_2 = \sqrt{3} - j$.

Решение

Запишем комплексные числа в тригонометрической форме:

$$1) \quad \rho_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{тогда}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$2) \quad \rho_2 = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}, \quad \text{тогда}$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Таким образом,

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + j \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

Поскольку $j = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}$, то умножение любого комплексного числа

$z = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ на мнимую единицу приводит к повороту вектора z на

угол $\frac{\pi}{2}$ на комплексной плоскости:

$$z \cdot j = \rho \left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Этот факт используется при расчете векторных диаграмм тока и напряжения в электрических цепях.

4. Деление

Чтобы разделить комплексное число z_1 на число $z_2 \neq 0$ в алгебраической форме, надо числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ умножить на число \bar{z}_2 , комплексно сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Пример 1.6

Найти частное от деления двух комплексных чисел $z_1 = 2 - 3j$ и $z_2 = 3 + 5j$.

Решение

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3j}{3 + 5j} = \frac{(2 - 3j)(3 - 5j)}{(3 + 5j)(3 - 5j)} = \frac{6 - 10j - 9j + 15j^2}{9 - 25j^2} = \frac{-9 - 19j}{34} = -\frac{9}{34} - \frac{19}{34}j.$$

Деление в тригонометрической форме выполняется так: модули комплексных чисел делятся, а их аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

5. Возведение в натуральную степень

Из правила умножения комплексных чисел в тригонометрической форме следует так называемая **формула Муавра**, предназначенная для возведения комплексного числа в натуральную степень:

$$z^n = [\rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi).$$

Эту формулу удобно использовать, когда n достаточно велико.

Пример 1.7

Найти комплексное число $z = (1 - j)^{20}$.

Решение

Запишем число $1 - j$ в тригонометрической форме:

$$\rho = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{тогда}$$

$$1 - j = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right). \text{ Применим формулу Муавра:}$$

$$\begin{aligned} z = (1 - j)^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left(\cos \left(-\frac{20\pi}{4} \right) + j \sin \left(-\frac{20\pi}{4} \right) \right) = 1024 (\cos(-5\pi) + j \sin(-5\pi)) = \\ &= 1024 (\cos(4\pi + \pi) - j \sin(4\pi + \pi)) = 1024 (\cos \pi - j \sin \pi) = -1024. \end{aligned}$$

6. Извлечение корня

Определение. Корнем n -ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w , которое удовлетворяет уравнению $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$.

Если $z = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$, $w = r(\cos \psi + j \sin \psi)$, то такое уравнение можно переписать в виде

$$r^n (\cos n\psi + j \sin n\psi) = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Отсюда

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

или

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Различные корни получаются лишь при $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Таким образом, если $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n значений, которые могут быть найдены по формуле:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Геометрически числа w_k изображаются вершинами правильного n -угольника, вписанного в круг радиуса ρ с центром в начале координат (рис. 1.3).

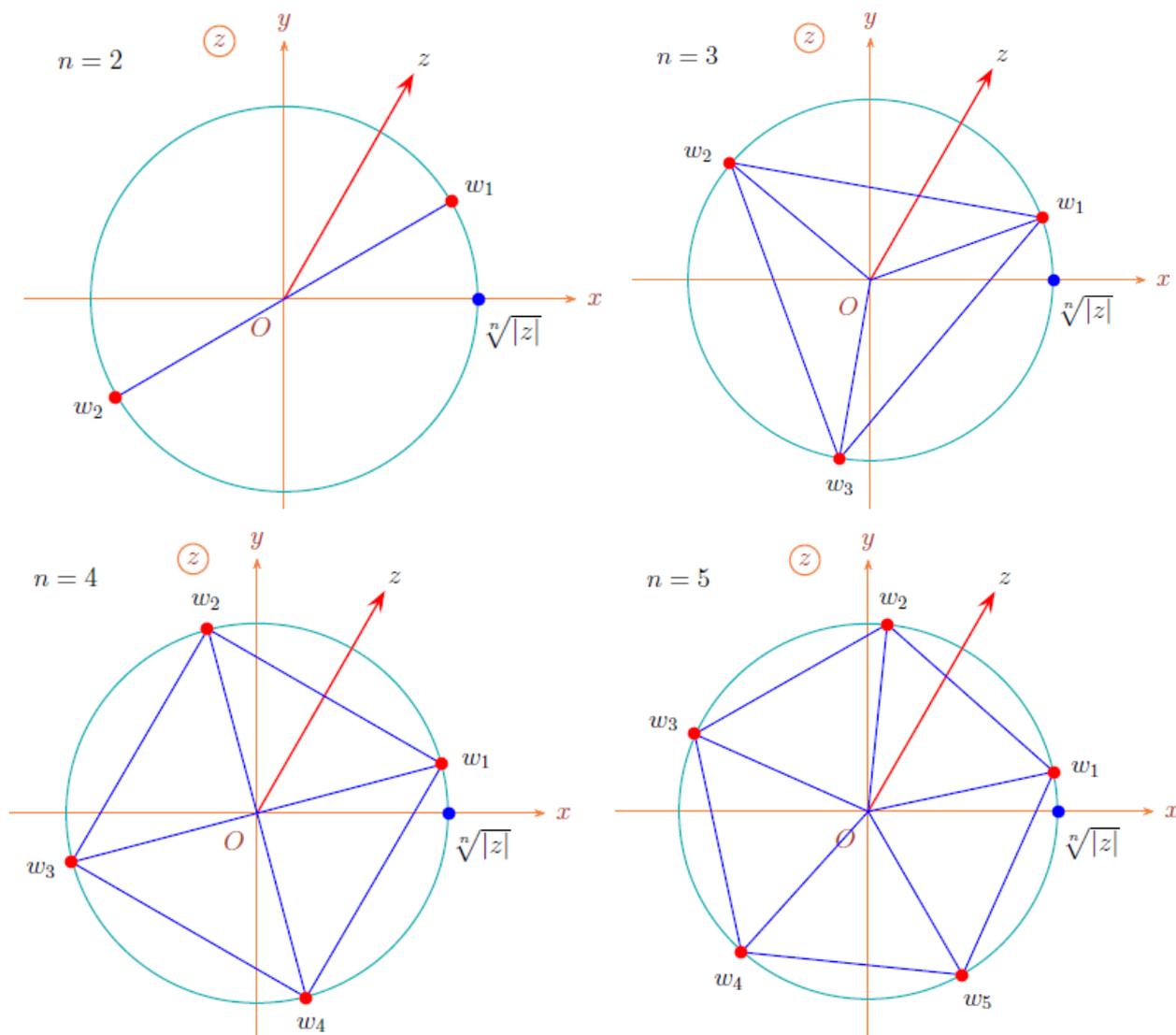


Рис. 1.3. Геометрическая интерпретация корней n -ой степени из комплексного числа

Пример 1.8

Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$.

Решение

Используем представление числа $z = -1$ в тригонометрической форме:

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \varphi = \arg z = \arctg \frac{0}{-1} = \pi, \quad \text{значит, } -1 = \cos \pi + j \sin \pi. \quad \text{Имеем}$$

$$w_k = \sqrt[n]{\cos \pi + j \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + j \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \text{ следовательно,}$$

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad w_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + j \sin \frac{7\pi}{4} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На рисунке 1.4 изображен четырехугольник, вершинами которого являются числа w_1, w_2, w_3, w_4 .

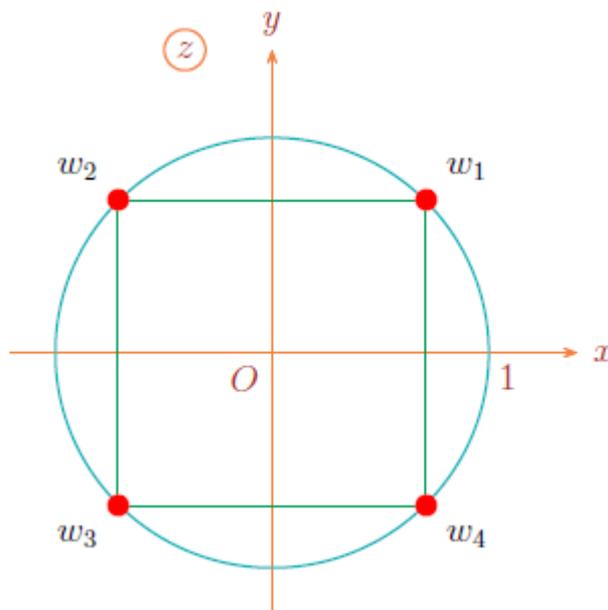


Рис. 1.4. Корни $\sqrt[4]{-1}$

2 ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1 Области и их границы на комплексной плоскости

Определение. Областью D комплексной плоскости (z) называется связанное открытое множество точек этой плоскости.

Определение. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной линией, все точки которой принадлежат этому множеству.

Определение. Множество называется *открытым*, если оно состоит из одних внутренних точек.

Определение. Точка z называется *внутренней точкой* области, если существует окрестность точки, принадлежащая этой области.

Определение. Если в любой окрестности данной точки z есть точки, принадлежащие и не принадлежащие области, то точка z – *граничная точка* области. Множество всех граничных точек образует *границу* области Γ .

Определение. Область с присоединенной к ней границей называется *замкнутой областью* и обозначается \bar{D} .

Положительным направлением обхода границы области считается такое направление, при котором область остается слева.

Определение. Линия, не имеющая самопересечений, называется *простой линией*. Линия, у которой конец совпадает с началом, называется *замкнутой*.

Определение. Область \bar{D} , ограниченная замкнутой, не самопересекающейся линией, называется *односвязной*. Область \bar{D} , ограниченная двумя замкнутыми, не пересекающимися и не самопересекающимися линиями, называется *двусвязной*. Внутренние границы могут вырождаться в точку или дугу непрерывной линии.

ПРИМЕРЫ ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЕЙ

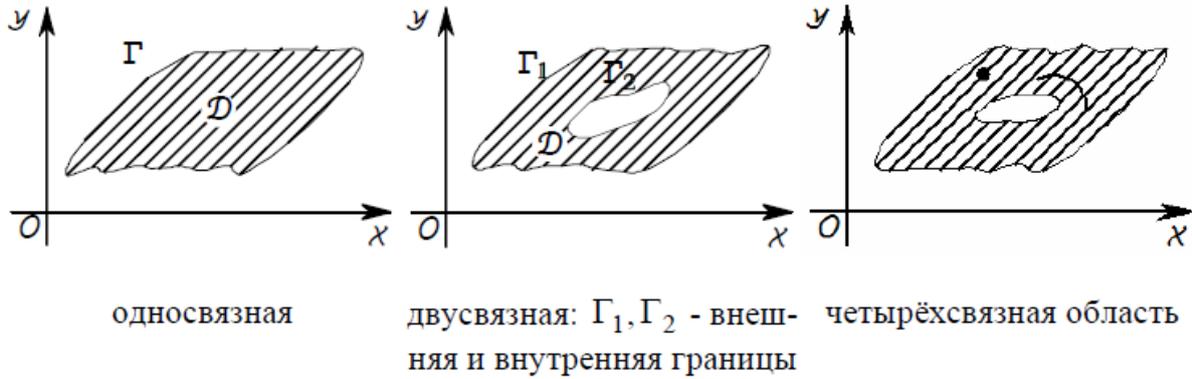


Рис. 2.1 Примеры замкнутых областей

В теории функции комплексной переменной бесконечность считают комплексным числом ($z = \infty$). Геометрически ему соответствует так называемая бесконечно удаленная точка на комплексной плоскости. Комплексная плоскость с бесконечно удаленной точкой называется *расширенной* плоскостью, а без бесконечно удаленной точки – *открытой* плоскостью.

Линия на комплексной плоскости может быть задана параметрически

$$z(t) = x(t) + iy(t), \text{ или, заменив } x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \text{ в виде } F(z, \bar{z}) = 0.$$

Пример 2.1. Построить область на комплексной плоскости $0 \leq \operatorname{Re}(2iz) < 1$.

Решение

Запишем выражение $\operatorname{Re}(2iz)$ в прямоугольных координатах:

$$\operatorname{Re}(2iz) = \operatorname{Re}(2i(x + iy)) = \operatorname{Re}(2ix - 2y) = -2y.$$

Тогда неравенство имеет вид: $0 \leq -2y < 1$ или $-\frac{1}{2} < y \leq 0$.

Область изображена на рисунке 2.2 и представляет собой полосу между прямыми $y = -\frac{1}{2}$ и $y = 0$.

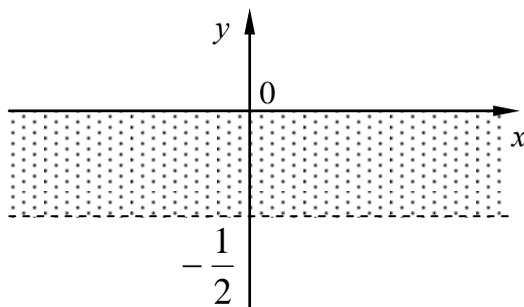


Рис. 2.2

Пример 2.2. Построить область на комплексной плоскости

$$\begin{cases} 1 \leq |z + 2| \leq 2, \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 2) \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение

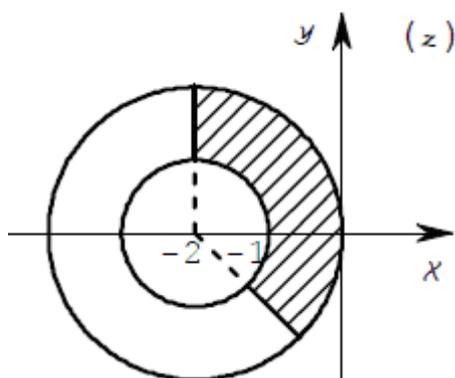


Рис. 2.3

Переходя к прямоугольным координатам, из первого неравенства системы получаем $1 \leq (x + 2)^2 + y^2 \leq 2$. Это кольцо с центром $z = -2$. Второе неравенство «вырезает» часть этого кольца в диапазоне от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$. Искомая область изображена на рисунке 2.3.

2.2 Понятие функции комплексной переменной

Пусть даны две расширенные плоскости комплексных чисел (z) и (w) .

Определение. Если каждому комплексному числу z , принадлежащему области D комплексной плоскости (z) , поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w , принадлежащих некоторой области G комплексной плоскости (w) , то говорят, что в области D определена *комплексная функция* $w = f(z)$, однозначная или многозначная соответственно.

Множество D называется областью определения функции $f(z)$, а множество G – областью значений этой функции. В этом случае говорят, что функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек комплексной плоскости (z) на соответствующие точки комплексной плоскости (w) (Рис. 2.4).

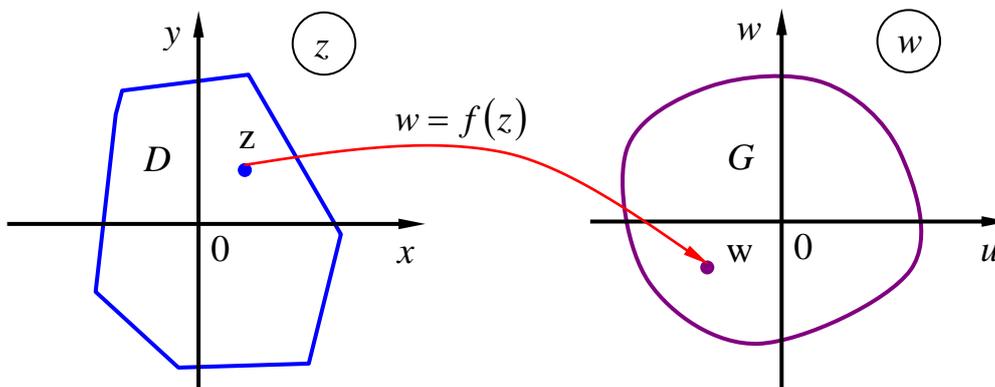


Рис. 2.4

Если $w = u + iv$ есть функция от $z = x + iy$, то каждая из переменных u и v является функцией x и y . Тогда функция $w = f(z)$ может быть представлена с помощью двух действительных функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ действительных переменных x и y : $w = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} w$, $v(x, y) = \operatorname{Im} w$.

Если в плоскости (z) кривая задана уравнением $F(x, y) = 0$, то функция $w = f(z) = u + iv$ отобразит кривую в некоторый образ $\Phi(u, v) = 0$ на плоскости (w). Чтобы найти $\Phi(u, v)$, надо исключить x и y из системы уравнений:

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Пример 2.3. Найти $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ для функции $w = z^2 - iz$.

Решение

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$w = (x + iy)^2 - i(x + iy) = x^2 + 2xyi + i^2y^2 - ix - i^2y = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy - x).$$

Таким образом, $\operatorname{Re} w = u(x, y) = x^2 - y^2 + y$, $\operatorname{Im} w = v(x, y) = 2xy - x$.

Пример 2.4. Найти отображение точки $z_0 = -i$ плоскости (z) на плоскость (w), если $w = z^2$.

Решение

$z_0 = -i$, тогда $x_0 = 0, y_0 = -1$. Функция $w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$,

$w|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=-1}} = 0^2 - (-1)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (-1)i = -1$. Таким образом, точка $z_0 = -i$ отобража-

ется в точку $w_0 = -1$.

2.3 Основные элементарные функции в комплексной плоскости

1. Комплексный многочлен $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ и дробно-рациональная функция $w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$, $m, n \in N$.

Частными случаями этих функций являются:

а) линейная функция $az + b$, $a, b \in C$, $a \neq 0$;

б) дробно-линейная функция $\frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in C$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$;

в) функция Жуковского $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;

г) степенная функция z^n , $n \in N$.

2. Показательная функция $w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, $z_1, z_2 \in C$;

б) $e^{z+2\pi ki} = e^z$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3. Тригонометрические функции $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Тригонометрические функции tgz и $ctgz$ определяются формулами:

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

4. Логарифмическая функция $Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i \arg z + 2\pi ki$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эта функция является многозначной. Главным значением называется то значение, которое получается при $k = 0$, и обозначается $\ln z$, то есть:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Справедливы следующие равенства:

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln z_1 + Ln z_2, \quad Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Ln z_1 - Ln z_2,$$

$$Ln z^n = n Ln z, \quad Ln \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} Ln z.$$

5. Общая степенная функция $z^a = e^{a Ln z}$, $a \in C$. Эта функция многозначна, её главное значение равно $e^{a \ln z}$. Если $a = \frac{1}{n}$, $n \in N$, то получаем многозначную функцию – корень n -ой степени из комплексного числа:

$$\frac{1}{z^n} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k))} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2\pi k}{n}}.$$

6. Общая показательная функция $a^z = e^{z Ln a}$, $a \in C$. Главное значение функции равно $e^{z \ln a}$.

7. Обратные тригонометрические функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции следующими формулами:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Arctgz} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad z \neq -i, \quad \operatorname{Arcctgz} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}, \quad z \neq i.$$

Пример 2.5. Вычислить $\sin i$.

Решение

Воспользуемся формулой $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ при $z = i$, получим:

$$\sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i} = i \frac{e - e^{-1}}{2} = i \operatorname{sh} 1.$$

Пример 2.6. Вычислить $\operatorname{Ln}(3 - 2i)$.

Решение

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(3 - 2i) &= \ln|3 - 2i| + i \arg(3 - 2i) + 2\pi k i = \ln \sqrt{3^2 + (-2)^2} + i \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{3} \right) + 2\pi k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln 13 + i \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{3} \right) + 2\pi k \right), \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ln}(3 - 2i) = \frac{1}{2} \ln 13 - i \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

Пример 2.7. Вычислить $w = (1 - i\sqrt{3})^{3i}$.

Решение

$$\begin{aligned} w &= (1 - i\sqrt{3})^{3i} = e^{3i \operatorname{Ln}(1 - i\sqrt{3})} = e^{3i \left(\ln \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} + i(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + 2\pi k) \right)} = \\ &= e^{3i \left(\ln 2 + i \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) \right)} = e^{\pi - 6\pi k} e^{3i \ln 2} = e^{\pi(1-6k)} (\cos(3 \ln 2) + i \sin(3 \ln 2)), \end{aligned}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2.4 Предел и непрерывность функции комплексной переменной

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$.

Определение. Комплексное число a называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N , начиная с которого все члены последовательности $\{z_n\}$ удовлетворяют неравенству: $|z_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел a , называется сходящейся к числу a , и записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + i \cdot y_n$, $n = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Последовательность $\{z_n = x_n + i \cdot y_n\}$ сходится к числу $a = \alpha + i\beta$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$.

Определение. Если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует натуральное число N такое, что все члены z_n последовательности с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|z_n| > M$, то говорят, что последовательность $\{z_n\}$ *сходится к бесконечно удаленной точке*, и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

Определение. *Окрестностью точки* z_0 на комплексной плоскости называется всякая область, содержащая эту точку; δ – *окрестностью точки* z_0 называется множество всех точек z , лежащих внутри круга радиуса δ с

центром в точке z_0 , т.е. множество всех точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности Ω точки z_0 , кроме, быть может, самой точки z_0 .

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(z)$ в точке z_0 , если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \neq z_0$, сходящейся к точке z_0 , соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится к одному и тому же комплексному числу A , т.е. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$.

Существование предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, где

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

равносильно существованию двух пределов $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y)$, причем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) + i \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y).$$

Пределы функций комплексной переменной обладают следующими **свойствами**. Пусть существуют пределы $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$. Тогда

$$1) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B;$$

$$2) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B;$$

$$3) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

Определение. Функция $f(z)$, заданная в области D , называется *непрерывной в точке* $z_0 \in D$, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Для непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0) .

Определение. Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в области D , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Для непрерывных функций комплексной переменной z справедливы все свойства непрерывных функций действительной переменной x .

Пример 2.8. Вычислить пределы

$$1) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 4iz - 3}{z - i} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(z - 3i)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z - 3i) = -2i;$$

$$2) \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin iz}{chz + ishz} = \frac{\sin i \frac{\pi}{4}}{ch \frac{\pi}{4} + ish \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \infty;$$

$$3) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{chiz} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{\cos(-z)} = 1.$$

2.5 Дифференцирование функции комплексной переменной.

Условия Коши-Римана. Аналитические и гармонические сопряженные функции

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D комплексной переменной z . Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D . Обозначим $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$, который называется *производной функции* $w = f(z)$ в точке z и обозначается

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (2.1)$$

Если $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$. То в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.2)$$

которые называются *условиями Коши-Римана*.

Обратно, если в некоторой точке (x, y) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных x и y , и удовлетворяют соотношениям (2.2), то функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является дифференцируемой в точке $z = x + iy$ как функция комплексной переменной z .

Определение. Функция $w = f(z)$ называется *аналитической в данной точке* $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z , так и в некоторой её окрестности. Функция $w = f(z)$ называется *аналитической в области* D , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Для любой аналитической функции $w = f(z)$ имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Пример 2.9. Показать, что функция $w = f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

Решение

Имеем $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, так что $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ как функции действительных переменных x и y дифференцируемы в любой точке (x, y) (они имеют непрерывные частные производные любого порядка) и при этом удовлетворяют условиям (2.2).

Следовательно, функция $w = f(z)$ всюду аналитическая. Согласно формуле (2.3) получаем

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i \cdot (e^x \sin y)'_x = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Пример 2.10. Проверить, является ли функция $w = \bar{z} = x - iy$ аналитической?

Решение

Здесь $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ - всюду дифференцируемые функции переменных x и y . Далее

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Так что $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, т.е. первое из условий Коши-Римана не выполняется ни в одной точке комплексной плоскости. Значит, функция $w = \bar{z} = x - iy$ нигде не дифференцируемая, а, следовательно, и не аналитическая.

Определение. Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической в области* D , если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D , то её действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими функциями в этой области.

Однако, если $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ - любые две гармонические функции, то функция $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ вовсе не обязана быть аналитической функцией: для аналитичности $f_1(z)$ нужно, чтобы функции u_1 и v_1 дополнительно удовлетворяли условиям Коши-Римана.

Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям (2.2), называют *сопряженной парой гармонических функций* (порядок функций в паре существенен).

2.6 Интегрирование функций комплексной переменной

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D , а C – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в области D .

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ – действительные функции переменных x и y .

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексной переменной z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов, а именно,

$$\int_C f(z)dz = \left(\int_C udx - vdy \right) + i \cdot \left(\int_C vdx + udy \right). \quad (2.4)$$

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D , то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае $\int_L f(z)dz = 0$, где

L – любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области D .

Если кривая C задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и начальная и конечные точки дуги C соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} z(t) \cdot z'(t)dt, \quad (2.5)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , содержащей точки z_0 и z_1 , то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z) \Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \quad (2.6)$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D .

Если функции $u(z)$ и $v(z)$ - аналитические в односвязной области D , а z_0 и z_1 - произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_{z_0}^{z_1} u dv = u \cdot v \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} v du. \quad (2.7)$$

Пусть аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно-однозначный контур C_1 в контур C . Тогда

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(\varphi(w)) \varphi'(w) dw. \quad (2.8)$$

Пример 2.11. Вычислить интеграл $\int_C (1+i-2\bar{z}) dz$, по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$: 1) по прямой; 2) по параболе $y = x^2$; 3) по ломаной $z_1 z_3 z_2$, где $z_3 = 1$.

Решение

Пусть $z = x + yi$, тогда $\bar{z} = x - yi$. Перепишем подынтегральную функцию в виде:

$$1+i-2\bar{z} = 1+i-2(x-yi) = (1-2x) + (1+2y)i.$$

Здесь $u = 1-2x$, $v = 1+2y$. Применяя формулу (2.4), получим:

$$\int_C (1+i-2\bar{z}) dz = \int_C (1-2x) dx - (1+2y) dy + i \cdot \int_C (1+2y) dx + (1-2x) dy.$$

1) Уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$, имеет вид $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, значит, $dy = dx$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_C (1+i-2\bar{z}) dz &= \int_0^1 ((1-2x) - (1+2x)) dx + i \cdot \int_0^1 ((1+2x) + (1-2x)) dx = \\ &= -4 \int_0^1 x dx + 2i \cdot \int_0^1 dx = -4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 2i \cdot x \Big|_0^1 = -2 + 2i = 2(i-1). \end{aligned}$$

2) Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2x dx$ ($0 \leq x \leq 1$). Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_C (1+i-2\bar{z})dz &= \int_0^1 (1-2x - (1+2x^2)2x)dx + i \cdot \int_0^1 (1+2x^2 + (1-2x)2x)dx = \\
&= \int_0^1 (1-4x-4x^3)dx + i \cdot \int_0^1 (1+2x-2x^2)dx = (x-2x^2-x^4)\Big|_0^1 + i \cdot \left(1+x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \\
&= -2 + \frac{4}{3}i.
\end{aligned}$$

3) На отрезке z_1z_3 : $y=0$, $dy=0$, $0 \leq x \leq 1$. На отрезке z_2z_3 : $x=1$, $dx=0$, $0 \leq y \leq 1$. Используя свойство линейности криволинейных интегралов, получим:

$$\begin{aligned}
\int_C (1+i-2\bar{z})dz &= \int_{z_1z_3} (1+i-2\bar{z})dz + \int_{z_3z_2} (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 (1-2x)dx + i \cdot \int_0^1 dx - \\
&- \int_0^1 (1+2y)dy + i \cdot \int_0^1 (1-2 \cdot 1)dy = (x-x^2)\Big|_0^1 + i \cdot x\Big|_0^1 - (y+y^2)\Big|_0^1 - i \cdot y\Big|_0^1 = -2.
\end{aligned}$$

Пример 2.12. Вычислить интеграл $\int_C (z^2 + z\bar{z})dz$, где C – дуга окружности

$$|z|=1, 0 \leq \arg z \leq \pi.$$

Решение

Пусть $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi}$. Применяя формулу (2.8), получим:

$$\begin{aligned}
\int_C (z^2 + z \cdot \bar{z})dz &= \int_0^\pi \left((e^{i\varphi})^2 + e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} \right) i e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^\pi (e^{2i\varphi} + 1) i e^{i\varphi} d\varphi = \\
&= i \int_0^\pi (e^{3i\varphi} + e^{i\varphi}) d\varphi = i \left(\frac{1}{3i} e^{3i\varphi} + \frac{1}{i} e^{i\varphi} \right) \Big|_0^\pi = \left(\frac{1}{3} e^{3i\varphi} + e^{i\varphi} \right) \Big|_0^\pi = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

3 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

3.1 Оригинал и изображение

Основными первоначальными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

Пусть $f(t)$ – действительная функция действительного переменного t (под t понимают время или координату).

Определение. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

б) $f(t)$ – однозначная непрерывная или кусочно-непрерывная при $t \geq 0$, то есть она непрерывна или имеет точки разрыва первого рода, причём на каждом конечном промежутке оси t таких точек лишь конечное число;

в) существуют такие числа $M > 0$ и $\alpha > 0$, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| < Me^{\alpha t} \quad (3.1)$$

Число $\alpha_0 \geq 0$, для которого неравенство (3.1) выполняется при любом $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и не выполняется при $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$ (α_0 – точная нижняя граница чисел α), называется **показателем роста** функции $f(t)$.

Функции-оригиналы $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ являются или ограниченными, или стремящимися к бесконечности, но не быстрее, чем показательная функция $e^{\alpha_0 t}$. Такие функции называются функциями порядка показательной функции.

Функция $f(t)$ может быть и комплексной функцией действительного переменного, то есть иметь вид $f(t) = f_1(t) + jf_2(t)$. В этом случае $f(t)$ считается оригиналом, если действительные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами.

Совокупность всех оригиналов называется **пространством оригиналов**.

Условия а) – в) определения выполняются для большинства функций, описывающих физические процессы.

Пример 3.1

Проверить являются ли следующие функции оригиналами:

$$f_1(t) = \begin{cases} 2e^{5t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 3^{4t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $f_1(t)$ является оригиналом, так как все три условия выполняются: $M = 2, \alpha = 5, |2e^{5t}| < Me^{\alpha t}$.

Функция $f_2(t)$ не является оригиналом, так как в точке $t = 2$ имеет разрыв второго рода (не выполняется условие б).

Функция $f_3(t)$ не является оригиналом, так как растёт быстрее показательной функции (не выполняется условие в), поскольку $3^{4t} > Me^{\alpha t}$ для любых M, α и $t > 0$).

Определение. Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \alpha + j\beta, \alpha = \operatorname{Re} p, \beta = \operatorname{Im} p$, определяемая интегралом Лапласа

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \quad \left(\int_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \right) \quad (3.2)$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют **преобразованием Лапласа**. Область существования функции $F(p)$ определяется областью сходимости **интеграла Лапласа**, стоящего в правой части равенства.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(t) \rightarrow F(p)$ или $F(p) \rightarrow f(t)$ (принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения – соответствующими большими буквами). Соот-

ветствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывают и другими символами:

$$F(p) = L[f(t)], \quad f(t) = L^{-1}[F(p)],$$

$$F(p) \mid \subset f(t),$$

$$F(p) \rightarrow f(t),$$

$$F(p) \circ - \bullet f(t).$$

Совокупность всех изображений $F(p)$ называется **пространством изображений**.

Оригинал по изображению находится с помощью **обратного преобразования Лапласа** по формуле обращения

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (3.3)$$

где путь интегрирования – любая прямая $\alpha = \operatorname{Re} p$, параллельная мнимой оси и лежащая правее прямой $\alpha_0 = \operatorname{Re} p$.

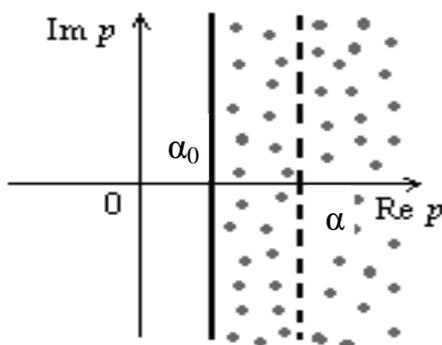


Рис. 3.1. Путь интегрирования

Теорема 3.1 (существование изображения)

Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ существует (определённо) в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \alpha > \alpha_0$, где α_0 – показатель роста функции $f(t)$, причём функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости ($\alpha > \alpha_0$).

Теорема 3.2 (необходимый признак существования изображения)

Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ с показателем роста α_0 , то $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Теорема 3.3 (о единственности оригинала)

Если функция $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны.

3.2 Единичная функция Хэвисайда. Импульсная функция Дирака

Для компактной записи оригиналов используется единичная ступенчатая функция $\eta(t - \tau)$:

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau, \end{cases}$$

где τ - точка приложения. Так как во многих практических задачах аргумент t имеет смысл текущего времени, то τ также называется моментом приложения единичной ступенчатой функции. В системах автоматического регулирования и управления функция $\eta(t - \tau)$ рассматривается как типовой входной сигнал.

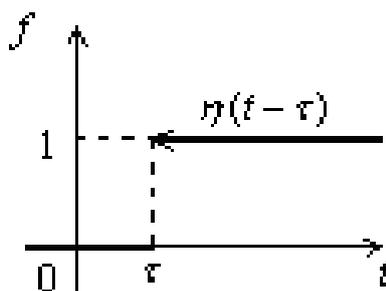


Рис. 3.2 . График единичной функции $\eta(t - \tau)$

При $\tau = 0$ функция $\eta(t)$ называется **функцией Хэвисайда**:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям б) и в) в определении оригинала, но не удовлетворяет условию а), то функция $f(t) \cdot \eta(t)$ будет оригиналом, так как

$$f(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Далее под заданной с помощью аналитической формулы функцией $f(t)$ будем понимать произведение этой функции на функцию Хэвисайда, а множитель $\eta(t)$ опускать.

Пример 3.2

Найти изображение единичной функции Хэвисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

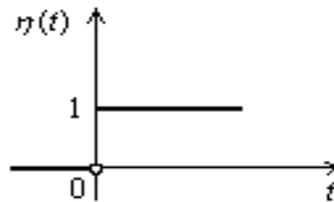


Рис. 3.3. График функции Хэвисайда

По формуле (3.2) при $\alpha = \operatorname{Re} p > 0$ ($\alpha_0 = 0$) находим:

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{p}.$$

или в символической записи,

$$\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p} \quad (3.4)$$

В квантовой механике при исследовании кратковременно действующих сил, носящих характер мгновенных импульсов, используется дельта-функция $\delta(t)$, введенная П. Дираком. Рассмотрим функцию $\delta_\tau(t)$ вида:

$$\delta_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\tau}, & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & t \geq \tau, \end{cases}$$

тогда дельта-функция Дирака есть предел функции $\delta_{\tau}(t)$ при $\tau \rightarrow 0$, т.е.

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_{\tau}(t).$$

Таким образом, дельта-функция Дирака $\delta(t)$ описывает бесконечно большую силу при $t = 0$ и равную нулю при остальных значениях t :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Пример 3.3

Найти изображение функции $f(t) = e^{at}$, где a - любое число.

Решение. Данная функция является оригиналом. По формуле (3.2) имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)b}}{p-a} \right) = \frac{1}{p-a}, \end{aligned}$$

если $\operatorname{Re}(p-a) > 0$. Таким образом,

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a}, (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a). \quad (3.5)$$

Таблица оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	13	$t^{n-1}e^{\alpha t}$	$\frac{(n-1)!}{(p-\alpha)^n}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	14	$\cos^2 \beta t$	$\frac{p^2 + 2\beta^2}{p(p^2 + 4\beta^2)}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	15	$\sin^2 \beta t$	$\frac{2\beta^2}{p(p^2 + 4\beta^2)}$
4	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	16	$\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$	$\frac{1}{p(p-\alpha)}$
5	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	17	$1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}$	$\frac{1}{p(1+\alpha p)}$
6	$ch\beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$	18	\sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$
7	$sh\beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$	19	$\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p-\alpha}}$
8	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$	20	$-\ln t - C$	$\frac{\ln p}{p}$
9	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$	21	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{p}}(\ln 4p + C)$
10	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$	22	$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t}$	$\ln \left \frac{p-\alpha}{p-\beta} \right $
11	$e^{\alpha t} ch\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 - \beta^2}$	23	$\frac{\sin \alpha t}{t}$	$arctg \frac{\alpha}{p}$
12	$e^{\alpha t} sh\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 - \beta^2}$	24	$\frac{sh \alpha t}{t}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{p+\alpha}{p-\alpha} \right $

3.3 Основные свойства преобразования Лапласа

Находить изображения «простых» функций можно по определению, вычисляя несобственный интеграл от произведения заданной функции-оригинала на экспоненту e^{-pt} . Чаще всего такой интеграл берут по частям или используют метод замены переменных. Изображения более сложных функций удобнее находить при помощи свойств преобразования Лапласа, которые существенно облегчают эту задачу.

1. Свойство однородности

Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и a – комплексное число, то $af(t) \rightarrow aF(p)$.

Доказательство.

По определению изображения и свойству интеграла имеем

$$af(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} af(t) dt = a \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = aF(p).$$

Итак,

$$af(t) \rightarrow aF(p) \quad (3.6)$$

2. Свойство сложения

Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, то $f(t) + \varphi(t) \rightarrow F(p) + \Phi(p)$.

Доказательство.

Имеем

$$f(t) + \varphi(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} [f(t) + \varphi(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt = F(p) + \Phi(p).$$

Следовательно,

$$f(t) + \varphi(t) \rightarrow F(p) + \Phi(p). \quad (3.7)$$

3. Свойство линейности

Если $f_1(t) \rightarrow F_1(p), f_2(t) \rightarrow F_2(p), \dots, f_n(t) \rightarrow F_n(p)$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – комплексные числа, то

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n \rightarrow \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_n F_n.$$

Или,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \quad (3.8)$$

Доказательство линейности следует из первых двух свойств.

Пример 3.4

Найти изображение функции $\sin t$.

Решение. Пользуясь свойством линейности, формулой (3.5), находим

$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \rightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j} - \frac{1}{p+j} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{p+j - p+j}{(p-j)(p+j)} = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j}{p^2 - (j)^2} = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

То есть,

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (3.9)$$

Пример 3.5

Найти изображение функции $\cos t$.

Решение. Аналогично, находим

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j} + \frac{1}{p+j} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+j + p-j}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1},$$

таким образом

$$\cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1}. \quad (3.10)$$

4. Подобие

Теорема 3.4. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и b – комплексное число, то

$$f(bt) \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right) \quad (3.11)$$

Пример 3.6

Пользуясь теоремой подобия найти изображение функций $\sin bt$ и $\cos bt$.

Решение. По теореме 3.4 и из формул (3.9) и (3.10) имеем:

$$\sin bt \rightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1}{b \cdot \frac{p^2 + b^2}{b^2}} = \frac{b}{p^2 + b^2}, \quad (3.12)$$

$$\cos bt \rightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{\frac{p}{b}}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1 \cdot p}{b^2 \cdot \frac{p^2 + b^2}{b^2}} = \frac{p}{p^2 + b^2}. \quad (3.13)$$

5. Запаздывание

Теорема 3.5. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \quad (3.14)$$

То есть, запаздывание оригинала на положительную величину t_0 приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на e^{-Pt_0} .

Графики функций $f(t)$ и $f(t - t_0)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t - t_0)$ сдвинут на t_0 единиц вправо. Следовательно, функции $f(t)$ и $f(t - t_0)$ описывают один и тот же процесс, но процесс, описываемый функцией $f(t - t_0)$, начинается с опозданием на время t_0 .

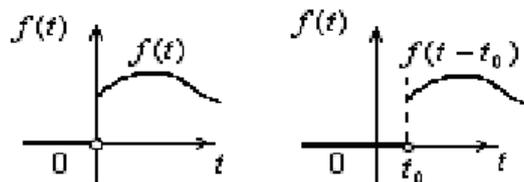


Рис 3.4. Графики функций $f(t)$ и $f(t - t_0)$

Теорема запаздывания является удобным способом для нахождения изображений кусочно-непрерывных функций.

Применяя теоремы подобия и запаздывания, можно найти изображение для оригинала вида $f(bt - t_0)$, где $t_0 > 0$ и b - комплексное число. Пусть $f(t) \rightarrow F(p)$, тогда по теореме подобия $f(bt) \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right)$. По теореме запаздывания находим:

$$f(bt - t_0) = f\left[b\left(t - \frac{t_0}{b}\right)\right] \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right) e^{-\frac{t_0}{b} p}.$$

Следовательно,

$$f(bt - t_0) \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right) e^{-\frac{t_0}{b} p}. \quad (3.15)$$

Функция

$$\eta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

называется **обобщённой единичной функцией**, из (3.4) и (3.14) находим её изображение

$$\eta(t - t_0) \rightarrow \frac{e^{-pt_0}}{p}. \quad (3.16)$$

Пример 3.7

Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$$

Решение. Данная функция описывает единичный импульс, который можно рассматривать как разность двух оригиналов: единичной функции $\eta(t)$ и обобщённой единичной функции $\eta(t - 3)$ (рис. 3.5).

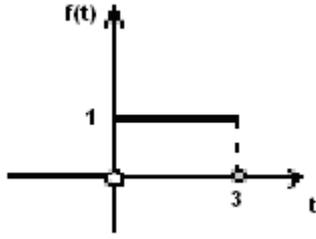


Рис. 3.5. График функции $f(t)$

Поэтому, используя свойство линейности, формулы (3.4) и (3.16) получим

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-3) \rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot e^{-3p} = \frac{1 - e^{-3p}}{p} = F(p).$$

6. Опережение

Теорема 3.6. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t+t_0) \rightarrow e^{t_0 p} \left[F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right]. \quad (3.17)$$

Теорема опережения применяется при решении разностных уравнений, в которые входят значения $f(t), f(t+t_0), f(t+2t_0), \dots, f(t+nt_0)$.

7. Изображение периодического оригинала

Теорема 3.7. Если оригинал $f(t)$ – периодическая функция с периодом, равным T , то его изображение будет

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt. \quad (3.18)$$

Пример 3.8

Пользуясь теоремой 3.7, найти изображение функции

$$f(t) = f(t+2) = \begin{cases} 1, & 2n < t < 2n+1, \\ 0, & 2n+1 < t < 2n+2, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

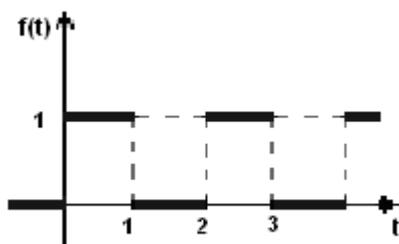


Рис. 3.6. График функции $f(t)$

Решение. Период функции $T = 2$, поэтому

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-2p}} \int_0^2 e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \int_0^1 e^{-pt} dt = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \cdot \left(\frac{e^{-pt}}{-p} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left(\frac{e^{-p}}{-p} + \frac{1}{p} \right) = \frac{(1 - e^{-p})}{p \cdot (1 - e^{-2p})} = \frac{1}{p(1 + e^{-p})},
 \end{aligned}$$

или

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{p(1 + e^{-p})}.$$

8. Смещение (затухание)

Теорема 3.8. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, a – комплексное число, то

$$e^{at} \cdot f(t) \rightarrow F(p - a). \quad (3.19)$$

То есть, умножение оригинала на функцию e^{at} влечёт за собой смещение переменной p .

Доказательство

В силу формулы (3.2) имеем

$$e^{at} \cdot f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{at} \cdot f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a), \text{ при } \operatorname{Re}(p - a) > \alpha_0.$$

Пользуясь этим свойством можно выписать соответствия между оригиналами и их изображениями из примера 3.5:

$$e^{at} \cdot \cos bt \rightarrow \frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}, \quad (3.20)$$

$$e^{at} \cdot \sin bt \rightarrow \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}. \quad (3.21)$$

Теорема смещения применяется при рассмотрении физических явлений, связанных с затухающими колебаниями.

Пример 3.9.

Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+11}$.

Решение. Преобразуем данную дробь: выделим в знаменателе дроби полный квадрат и по свойству линейности и из формул (3.20) и (3.21), получим

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2p-5}{p^2-6p+11} = \frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+2} = \frac{2(p-3)}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} \rightarrow 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \sin \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(t) = 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \sin \sqrt{2}t.$$

3.4 Основные правила операционного исчисления

3.4.1 Дифференцирование оригинала

Теорема 3.9. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\rightarrow pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\rightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(t) &\rightarrow p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Иначе, дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на p .

Свойство дифференцирования оригинала вместе со свойством линейности широко используется при решении линейных дифференциальных уравнений.

Пример 3.10.

Найти изображение выражения $x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2$, если $x(0) = 3, x'(0) = 0, x''(0) = -2$.

Решение. Пусть $x(t) \rightarrow X(p) = X$, тогда, согласно теореме 3.9, имеем

$$\begin{aligned} x'(t) &\rightarrow p \cdot X - 3, \\ x''(t) &\rightarrow p^2 \cdot X - p \cdot 3 - 0, \\ x'''(t) &\rightarrow p^3 \cdot X - p^2 \cdot 3 - p \cdot 0 + 2, \\ 2 &= 2 \cdot 1 \rightarrow \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2 \rightarrow \\ &\rightarrow p^3 \cdot X - 3p^2 + 2 - 2(p^2 \cdot X - 3p) - 3(p \cdot X - 3) + 2X + \frac{2}{p} = \\ &= p^3 X - 2p^2 X - 3pX + 2X + 6p + \frac{2}{p} - 3p^2 + 11 = \\ &= (p^3 - 2p^2 - 3p + 2)X + 6p + \frac{2}{p} - 3p^2 + 11. \end{aligned}$$

3.4.2 Дифференцирование изображения

Теорема 3.10. Если $F(p) \rightarrow f(t), \operatorname{Re} p > \alpha_0$, то

$$\begin{aligned} F'(p) &\rightarrow -t f(t); \\ F''(p) &\rightarrow (-1)^2 t^2 f(t); \\ &\dots\dots\dots \\ F^{(n)}(p) &\rightarrow (-1)^n t^n f(t), \operatorname{Re} p > s_1 > s_0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Дифференцированию изображения $F(p)$ соответствует в пространстве оригиналов действие умножения на $-t$ функции $f(t)$.

Пример 3.11

Найти изображение функции $f(t) = t \cos 3t$.

Решение. Из формулы (3.13), имеем $f(t) = \cos 3t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 9} = F(p)$.

Из того, что $F'(p) \rightarrow -t f(t)$

$$-t \cos 3t \rightarrow \left(\frac{p}{p^2 + 9} \right)' = \frac{p^2 + 9 - 2p^2}{(p^2 + 9)^2} = \frac{-p^2 + 9}{(p^2 + 9)^2} = -\frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}.$$

Следовательно,

$$t \cos 3t \rightarrow \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}.$$

3.4.3 Интегрирование оригинала

Теорема 3.11. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > \alpha_0. \quad (3.24)$$

То есть интегрированию оригинала от 0 до t соответствует деление его изображения на p .

Пример 3.12

Найти изображение интеграла $\int_0^t \cos \tau d\tau = \sin t$.

Решение. По формуле (3.10) $f(t) = \cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} = F(p)$. Тогда по тео-

реме 3.11 имеем $\sin t \rightarrow \frac{p}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2 + 1}$.

3.4.4 Интегрирование изображения

Теорема 3.12. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ и интеграл $\int_p^\infty F(p) dp$ схо-

дится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha_1 > \alpha_0$, то

$$\int_p^\infty F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}, \quad \operatorname{Re} p > \alpha_1 > \alpha_0. \quad (3.25)$$

То есть интегрированию изображения от p до ∞ соответствует деление его оригинала на t .

Пример 3.13

Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Функция $\frac{\sin t}{t}$ является оригиналом, так как $\left| \frac{\sin t}{t} \right| < 1$ (условие

в) и точка $t = 0$ является точкой разрыва первого рода (условие б). Так как

$f(t) = \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1} = F(p)$, то по теореме интегрирования изображения, имеем

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^\infty \frac{1}{p^2 + 1} dp = \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} p \Big|_p^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

3.4.5 Умножение изображений. Свёртка функций

Определение. *Свёрткой* $\varphi(t) * f(t)$ непрерывных функций $\varphi(t)$ и $f(t)$ действительного переменного $0 \leq t < \infty$ называется интеграл

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.26)$$

Свёртка есть действие, которое паре функций из некоторого множества ставит в соответствие определённую функцию из этого множества. Действие получения свёртки называется свёртыванием функций.

Свойства свёртки функций:

1. коммутативность $\varphi * f = f * \varphi$;
2. ассоциативность $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$;
3. дистрибутивность относительно сложения $\varphi * (f + \psi) = \varphi * f + \varphi * \psi$;
4. абсолютная величина свёртки $|\varphi * f| \leq |\varphi| * |f|$;
5. если $\varphi(t)$ и $f(t)$ непрерывные функции в области $0 \leq t < \infty$, то и их свёртка $\varphi * f$ является тоже непрерывной функцией в этой области;
6. если $\varphi(t)$ и $f(t)$ непрерывные при $t \geq 0$ и их свёртка $\varphi * f = 0$ для всех $t \geq 0$, то, по крайней мере, одна из этих функций в области $0 \leq t < \infty$ всюду равна нулю (теорема Титчмарша).

Пример 3.14

Найти свёртку функций $\varphi(t) = t$ и $f(t) = e^t$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\varphi * f &= t * e^t = \int_0^t (t - \tau) \cdot e^\tau d\tau = \int_0^t (te^\tau - \tau e^\tau) d\tau = \int_0^t te^\tau d\tau - \int_0^t \tau e^\tau d\tau = \\ &= t \int_0^t e^\tau d\tau - \int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau = te^t - t - (te^t - e^t - 1) = te^t - t - te^t + e^t + 1 = e^t - t - 1.\end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau$ считаем по частям

$$\int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau = \left| \begin{array}{l} u = \tau \quad dv = e^\tau d\tau \\ du = d\tau \quad v = e^\tau \end{array} \right| = \tau \cdot e^\tau \Big|_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau = \tau \cdot e^\tau - e^\tau \Big|_0^t = te^t - e^t - 1$$

Итак,

$$\varphi * f = t * e^t = e^t - t - 1.$$

Теорема 3.13 (Э. Бореля). Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ и $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_1$, то

$$f * \varphi \rightarrow F(p) \cdot \Phi(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0, \alpha_0 > \alpha_1.$$

Иначе, свертыванию в пространстве оригиналов соответствует умножение функций в пространстве изображений.

Пример 3.15

Пользуясь теоремой Бореля, найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2}$$

Решение. Представим изображение в виде произведения:

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{1}{p^2 + 4} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} = F_1(p) \cdot F_2(p)$$

Из формул (3.12) и (3.13) получаем

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2 + 4} \rightarrow \sin 2t = f_1(t)$$

$$F_2(p) = \frac{p}{p^2 + 4} \rightarrow \cos 2t = f_2(t)$$

Тогда по теореме 3.13 получаем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{1}{p^2 + 4} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} \rightarrow f_1 * f_2 = \int_0^t \sin 2\tau \cos 2(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(4\tau - 2t) + \sin 2t) d\tau = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(4\tau - 2t)}{4} + \tau \cdot \sin 2t \right) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2t}{4} + t \sin 2t + \frac{\cos(-2t)}{4} \right) = \frac{t}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

Таким образом, заданная функция имеет оригинал

$$\frac{p}{(p^2 + 4)^2} \rightarrow \frac{t}{2} \sin 2t.$$

3.4.6 Интеграл Дюамеля

Теорема 3.14. Если $f * \varphi = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \rightarrow F(p) \Phi(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau + f(t)\varphi(0) \rightarrow pF(p)\Phi(p), \text{ или}$$

$$\int_0^t \varphi(\tau)f'_t(t-\tau)d\tau \rightarrow pF(p)\Phi(p) \quad (3.27)$$

Пример 3.16

Пользуясь интегралом Дюамеля, найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

Решение. Представим изображение в виде произведения:

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = p \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p),$$

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \quad \text{при } a = 1 \quad f_1(t) = \cos t$$

$$F_2(p) = \frac{p}{p^2 + 4} \quad \text{при } a = 2 \quad f_2(t) = \cos 2t$$

Тогда по теореме 3.14 получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \cos 0 \cdot \cos 2t + \int_0^t \cos' \tau \cdot \cos 2(t-\tau)d\tau = \\ &= \cos 2t - \int_0^t \sin \tau \cdot \cos 2(t-\tau)d\tau = \cos 2t - \frac{1}{2} \int_0^t [\sin(3\tau - 2t) + \sin(2t - \tau)]d\tau = \\ &= \cos 2t + \frac{1}{6} \cos(3\tau - 2t) \Big|_0^t - \frac{1}{2} \cos(2t - \tau) \Big|_0^t = \frac{4}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t. \end{aligned}$$

Итак,

$$f(t) = \frac{4}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t.$$

3.5 Восстановление оригинала по изображению. Метод неопределённых коэффициентов

Рассмотрим задачу, обратную той, которую решает преобразование Лапласа. Изучим способы, с помощью которых можно по известному изображению $F(p)$, $p = \alpha + j\beta$, найти его оригинал $f(t)$. В общем виде задачу решает **формула Меллина**, которая имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad \alpha > \alpha_0.$$

Однако, применение этой формулы совсем не просто и поэтому прибегают к ней по большей части в крайних случаях. В то же время имеются методы обращения преобразования Лапласа большей практической применимости.

Если оригинал представляет собой правильную рациональную дробь, то следует разложить её на простейшие дроби и для каждой из полученных дробей найти оригинал, пользуясь свойствами преобразования Лапласа и таблицей изображений.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены с комплексными коэффициентами, причём $Q(x)$ - ненулевой многочлен. Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Теорема 3.15. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь, $P(x)$ и

$Q(x)$ - многочлены с действительными коэффициентами. Если

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1x + g_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + g_s)^{\beta_s}, \quad (3.28)$$

где a_i - попарно различные действительные корни многочлена $Q(x)$ кратности α_i , $i = 1, 2, \dots, r$,

$$x^2 + p_jx + g_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j),$$

z_j, \bar{z}_j - попарно различные при разных j существенно комплексные корни многочлена $Q(x)$ кратности $\beta_j, j = 1, 2, \dots, s$, то существуют действительные числа $A_i^{(\alpha)}, i = 1, 2, \dots, r, \alpha = 1, 2, \dots, \alpha_i, M_j^{(\beta)}$ и $N_j, j = 1, 2, \dots, s, \beta = 1, 2, \dots, \beta_j$ такие, что

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots \\ & + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r} + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + g_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2 + p_1x + g_1)^{\beta_1-1}} + \dots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x + N_1^{(\beta_1)}}{x^2 + p_1x + g_1} + \dots \\ & + \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2 + p_sx + g_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2 + p_sx + g_s)^{\beta_s-1}} + \dots + \frac{M_s^{(\beta_s)}x + N_s^{(\beta_s)}}{x^2 + p_sx + g_s}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Таким образом, данная теорема утверждает, что всякая ненулевая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму элементарных рациональных дробей.

При выполнении разложения вида (3.29) для конкретно заданной дроби обычно оказывается удобным **метод неопределенных коэффициентов**.

Найдем оригиналы для всех типов простейших дробей.

1. Первый тип.

$$\frac{A}{p-a} \rightarrow Ae^{at}.$$

2. Второй тип.

$$\frac{A}{(p-a)^k} \rightarrow A \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{at}.$$

3. Третий тип. Требуется найти оригинал для простейшей дроби вида

$$\frac{Ap + B}{p^2 + ap + q}, \quad a^2 - 4q < 0.$$

Для этого преобразуем дробь:

$$\frac{Ap + B}{p^2 + ap + q} = \frac{Ap + B}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + q - \frac{a^2}{4}} = \frac{Ap + B}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{Ap + B}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} =$$

$$= \frac{A\left(p + \frac{a}{2}\right) + \left(B - \frac{Aa}{2}\right)}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = A \cdot \frac{p + \frac{a}{2}}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{B - \frac{Aa}{2}}{b} \cdot \frac{b}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{Ap + B}{p^2 + ap + q} \rightarrow Ae^{-\frac{at}{2}} \cos bt + \frac{2B - Aa}{2b} e^{-\frac{at}{2}} \sin bt = \left(A \cos bt + \frac{2B - Aa}{2b} \right) e^{-\frac{at}{2}}.$$

4. Четвертый тип.

$$\frac{Ap + B}{(p^2 + ap + q)^k}, \quad a^2 - 4q < 0$$

Пример 3.17

Разложить дробь $\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)}$ на элементарные дроби.

Решение. Согласно (3.29), искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = \frac{A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1)}{(x^2 - 1)(x - 2)}$$

и, отбросив его, получим

$$x = A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1).$$

Здесь имеет место случай, когда все корни знаменателя действительны. Подставив последовательно в обе части получившегося равенства корни $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, находим.

$$\begin{cases} 1 = -2A, \\ -1 = 6B, \\ 2 = 3C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = -\frac{1}{6}, \\ C = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = -\frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{6(x + 1)} + \frac{2}{3(x - 2)}.$$

Пример 3.18

Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)}$.

Решение. Представим $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 13} = \frac{Ap^2 + 4Ap + 13A + Bp^2 + Cp}{p(p^2 + 4p + 13)},$$

где A, B, C - неопределённые коэффициенты. Отсюда следует равенство

$$3p^2 + 3p - 13 = Ap^2 + 4Ap + 13A + Bp^2 + Cp = (A + B)p^2 + (4A + C)p + 13A$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p , получаем систему уравнений для нахождения неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ 4A + C = 3, \\ 13A = -13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 3 - A, \\ C = 3 - 4A. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 4, \\ C = 7. \end{cases}$$

Таким образом, $F(p)$ имеет вид

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 13} = -\frac{1}{p} + \frac{4p + 7}{p^2 + 4p + 13} = \\ &= -\frac{1}{p} + \frac{4(p + 2) - 1}{(p + 2)^2 + 9} = -\frac{1}{p} + \frac{4(p + 2)}{(p + 2)^2 + 3^2} - \frac{1}{(p + 2)^2 + 3^2} = -\frac{1}{p} + \\ &+ 4 \cdot \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 3^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(p + 2)^2 + 3^2} = -F_1(p) + 4F_2(p) - \frac{1}{3}F_3(p) \end{aligned}$$

Находим оригиналы

$$F_1(p) = \frac{1}{p}, \quad \rightarrow \quad f_1(t) = 1,$$

$$F_2(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2}, \quad \rightarrow \quad f_2(t) = e^{-2t} \cdot \cos 3t,$$

$$F_3(p) = \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2}, \quad \rightarrow \quad f_3(t) = e^{-2t} \cdot \sin 3t.$$

Следовательно,

$$f(t) = -f_1(t) + 4f_2(t) - \frac{1}{3}f_3(t) = -1 + 4e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t.$$

Восстанавливая оригинал для $X(p)$, получим искомое решение $x(t)$.

Для решения дифференциальных уравнений удобно пользоваться следующим алгоритмом решения задачи Коши (4.1) - (4.2):

- I. Применить преобразование Лапласа: от известных и неизвестных функций перейти к их изображениям, записать уравнение в изображениях, соответствующее решаемой задаче Коши.
- II. Решить полученное уравнение: найти изображение искомого решения.
- III. Применить обратное преобразование Лапласа: найти оригинал для полученного изображения.

Пример 4.1

Решить задачу Коши $x' + x = \eta(t)$, $x(0) = \frac{1}{2}$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом.

I. Перейдём от оригиналов к изображениям:

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - \frac{1}{2},$$

$$\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$pX(p) - \frac{1}{2} + X(p) = \frac{1}{p}.$$

II. Решим уравнение для изображений

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2},$$

$$X(p)(p+1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2},$$

$$X(p) = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{2}}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} = X_1(p) + \frac{1}{2} X_2(p).$$

III. Найдём оригинал для функции $X(p)$.

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \rightarrow 1 - e^{-t} = x_1(t)$$

$$X_2(p) = \frac{1}{p+1} \rightarrow e^{-t} = x_2(t)$$

Следовательно, решением задачи Коши является функция:

$$x(t) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) = 1 - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Пример 4.2

Решить задачу Коши $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.

Решение

I. Перейдём от оригиналов к изображениям

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \rightarrow p^2X(p) - p - x'(0) = p^2X(p) - p - 3,$$

$$e^{3t} \rightarrow \frac{1}{p-3}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$p^2X(p) - p - 3 - 3pX(p) + 3 + 2X(p) = \frac{2}{p-3}.$$

II. Решим уравнение для изображений

$$p^2X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3} + p.$$

$$X(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p-3} + p$$

$$X(p) = \frac{2}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} + \frac{p}{p^2 - 3p + 2} = \frac{2 + p^2 - 3p}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} = \frac{1}{p-3}$$

III. Найдём оригинал для функции $X(p)$:

$$X(p) = \frac{1}{p-3} \rightarrow e^{3t} = x(t).$$

Таким образом, применение операционного метода позволяет вместо дифференциальных уравнений решать алгебраические уравнения. При этом начальные условия при записи уравнений в изображениях учитываются автоматически, и нет необходимости решать систему для нахождения произвольных постоянных, как это делается при применении классического метода.

Следует заметить, что операционное исчисление позволяет найти не только частное, но и *общее решение* уравнения

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = f(t).$$

Для этого достаточно положить $x^{(k)}(0) = C_k, k = 0, \dots, n-1$.

4.2 Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Схема решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами аналогична:

- I. Применить преобразование Лапласа: от известных и неизвестных функций перейти к их изображениям, записать систему в изображениях.
- II. Решить полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно $X(p)$ и $Y(p)$.
- III. Применить обратное преобразование Лапласа: найти оригиналы $x(t)$ и $y(t)$ для полученных изображений.

Пример 4.3

Найти частное решение системы
$$\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}. \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = y'(0) = 0, x'(0) = 1$.

Решение

I. Имеем

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x'(t) \rightarrow pX - x(0) = pX,$$

$$x''(t) \rightarrow p^2X - x'(0) = p^2X - 1,$$

$$e^t \rightarrow \frac{1}{p-1},$$

$$y(t) \rightarrow Y(p),$$

$$y'(t) \rightarrow pY - y(0) = pY,$$

$$y''(t) \rightarrow p^2Y - y'(0) = p^2Y,$$

$$e^{-t} \rightarrow \frac{1}{p+1}.$$

II. Запишем систему операторных уравнений

$$\begin{cases} p^2X - 1 + pX + p^2Y - Y = \frac{1}{p-1}, \\ pX + 2X - pY + Y = \frac{1}{p+1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p^2 + p)X + (p^2 - 1)Y = \frac{p}{p-1}, \\ (p+2)X + (1-p)Y = \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений относительно X и Y . Решим систему по формулам Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} p^2 + p & p^2 - 1 \\ p + 2 & 1 - p \end{vmatrix} = p(p+1)(1-p) - (p+2)(p^2-1) = \\ &= p(1+p)(1-p) + (p+2)(1-p)(1+p) = (1+p)(1-p)(p+p+2) = \\ &= 2(1+p)(1-p)(p+1) = 2(1+p)^2(1-p), \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{p}{p-1} & p^2 - 1 \\ \frac{1}{p+1} & 1 - p \end{vmatrix} = 1 - 2p, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} p^2 + p & \frac{p}{p-1} \\ p + 2 & \frac{1}{p+1} \end{vmatrix} = \frac{3p}{1-p}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1-2p}{2(p+1)^2(1-p)} = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8p-4}{2(p-1)(p+1)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(6p-6) + 2p+1+1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(p^2 + 2p+1) + 6(p-1) - p^2 + 1}{2(p-1)(p+1)^2} = \\ &= \frac{(p+1)^2 + 6(p-1) - (p^2-1)}{8(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p+1}, \end{aligned}$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3p}{2(p+1)^2(1-p)^2} = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

III. Перейдём от изображений к оригиналам.

Из равенств $e^t \rightarrow \frac{1}{p+1}$ и $sh t \rightarrow \frac{1}{p^2-1}$ по теореме дифференцирования изображения находим

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)' = -\frac{1}{(p+1)^2} \rightarrow -te^{-t}$$

и

$$\left(\frac{1}{p^2-1}\right)' = -\frac{2p}{(p^2-1)^2} \rightarrow -t sh t,$$

или

$$\frac{1}{(p+1)^2} \rightarrow te^{-t} \text{ и } \frac{2p}{(p^2-1)^2} \rightarrow t sh t.$$

Следовательно, решение системы будет

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} sh t + \frac{3}{4} te^{-t} \\ y(t) = \frac{3}{4} t sh t \end{cases}.$$

Для того, чтобы найти *общее решение* системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax(t) + f(t),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор неизвестных, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица ко-

эффициентов, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ – заданная вектор-функция, необходимо принять $x_i(0) = C_i, i = 1, \dots, n$.

4.3 Применение формулы Дюамеля при решении дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями

Формула Дюамеля применяется в случае, когда возникает трудность при нахождении изображения правой части уравнения или при необходимости многократного решения задачи для различных правых частей исходного уравнения.

Рассмотрим задачу Коши

$$L[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (4.4)$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (4.5)$$

где $x = x(t), t \geq 0$.

Пусть $x(t) \rightarrow X(p), f(t) \rightarrow F(p)$, тогда

$$x^{(n)}(t) \rightarrow p^n X - p^{n-1} x(0) - p^{n-2} x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0) = p^n X. \quad (4.6)$$

Переходя в уравнении (4.4) к изображению, получаем, с учетом (35), операторное уравнение

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot X(p) = F(p),$$

или

$$L(p) \cdot X(p) = F(p). \quad (4.7)$$

Наряду с задачей Коши (4.4)-(4.5) рассмотрим вспомогательную задачу

$$L[x_1] = x_1^{(n)} + a_1 x_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x_1' + a_n x_1 = 1, \quad (4.8)$$

Для уравнения (4.8) операторное уравнение будет вида

$$L(p) \cdot X_1(p) = \frac{1}{p}, \quad (4.9)$$

где $x_1(t) \rightarrow X_1(p)$. Выразим из (4.9) характеристический многочлен $L(p)$ и подставим полученное выражение в уравнение (4.8):

$$\frac{1}{pX_1(p)} \cdot X(p) = F(p),$$

или

$$pF(p)X_1(p) = X(p). \quad (4.10)$$

Используя теорему 3.11 находим оригинал $x(t)$:

$$x(t) = f(0) \cdot x_1(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot x_1(t - \tau) d\tau, \quad (4.11)$$

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau, \quad (4.12)$$

$$x(t) = f(0) \cdot x_1(t) + \int_0^t f'(t - \tau) \cdot x_1(\tau) d\tau, \quad (4.13)$$

$$x(t) = \int_0^t x_1'(t - \tau) \cdot f(\tau) d\tau. \quad (4.14)$$

Решение исходного уравнения (4.1) - (4.2) можно получить по любой из формул (4.11)-(4.14).

Пример 4.4. Решить задачу Коши $x''(t) - x(t) = \frac{1}{1 + e^t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение. 1) Решим вспомогательную задачу: $x_1''(t) - x_1(t) = 1$, $x_1(0) = x_1'(0) = 0$.

Операторное уравнение

$$p^2 X_1(p) - X_1(p) = \frac{1}{p},$$

из которого получаем изображение вспомогательной функции

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)}.$$

Так как $\frac{1}{p^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = sh t$, то по теореме 3.8 об интегрировании оригинала, находим оригинал вспомогательной функции

$$X_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 - 1} \rightarrow \int_0^t sh \tau d\tau = ch \tau \Big|_0^t = ch t - 1 = x_1(t).$$

2) Для нахождения оригинала искомой функции воспользуемся формулой (4.12), имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} sh(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{t-\tau} - e^{-t+\tau}}{2(1+e^\tau)} d\tau = \\ &= \frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau} d\tau - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t \frac{e^\tau}{1+e^\tau} d\tau = \left| \begin{array}{l} U = 1 + e^\tau, \quad e^\tau = U - 1, \\ dU = e^\tau d\tau, \quad e^{-\tau} = \frac{1}{U - 1}, \\ d\tau = \frac{dU}{e^\tau} = \frac{dU}{U - 1} \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^t}{2} \int_2^{1+e^t} \frac{dU}{(U-1)^2 U} - \frac{e^{-t}}{2} \int_2^{1+e^t} \frac{dU}{U} = \\ &= \left| \frac{1}{(U-1)^2 U} = \frac{A}{U-1} + \frac{B}{(U-1)^2} + \frac{C}{U} = -\frac{1}{U-1} + \frac{1}{(U-1)^2} + \frac{1}{U} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^t}{2} \int_2^{1+e^t} \left(-\frac{1}{U-1} + \frac{1}{(U-1)^2} + \frac{1}{U} \right) dU - \frac{e^{-t}}{2} \int_2^{1+e^t} \frac{dU}{U} = \\
&= \frac{e^t}{2} \left(-\ln|U-1| - \frac{1}{U-1} + \ln|U| \right) \Big|_2^{1+e^t} - \frac{e^{-t}}{2} \ln|U| \Big|_2^{1+e^t} = \\
&= \frac{e^t}{2} \left(-\ln e^t + \ln(1+e^t) - \frac{1}{e^t} + \ln 1 - \ln 2 + 1 \right) - \frac{e^{-t}}{2} (\ln(1+e^t) - \ln 2) = \\
&= \ln(1+e^t) \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} - \ln 2 \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2} (-t - e^{-t} + 1)
\end{aligned}$$

Таким образом, решением задачи Коши является функция

$$x(t) = \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1+e^t}{2} + \frac{e^t - te^t - 1}{2}.$$

4.4 Применение операционного исчисления к исследованию процессов в электрических цепях

Операционный метод широко используется при расчетах процессов, протекающих в электрических цепях. Рассмотрим электрическую цепь, на отдельных участках которой преимущественно сосредоточены магнитное поле, электрическое поле и активное сопротивление. Пусть $i(t)$ и $u(t)$ - ток и напряжение в цепи. На основании закона Ома падения напряжений на основных элементах цепи могут быть записаны следующим образом:

– для активного сопротивления R

$$u_R(t) = R \cdot i(t);$$

– для индуктивности L

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt};$$

– для ёмкости C :

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u_C(0),$$

где $u_C(0)$ – начальное напряжение на ёмкости, обусловленное электрическим зарядом ёмкости в момент времени $t = 0$. При исследовании таких процессов встречаются два вида задач: задачи с нулевыми и ненулевыми начальными условиями.

4.4.1 Задачи с нулевыми начальными условиями

Электрическая цепь до момента времени $t = 0$ находится в состоянии покоя, то есть до момента замыкания контакта K и подключения переменного напряжения $u(t)$ токи в цепи и заряды всех конденсаторов во всех ветвях цепи равны нулю (Рис. 4.1).

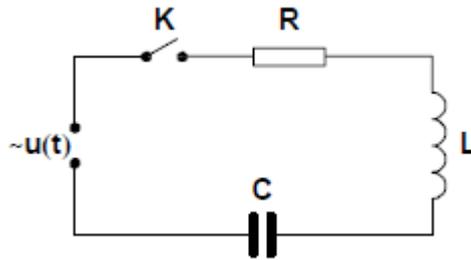


Рис. 4.1 Электрическая цепь

Пусть в момент времени $t = 0$ подключается переменное напряжение $u(t)$, под действием которого по цепи потечет ток $i(t)$. В соответствии с законом Кирхгофа для мгновенных значений тока составим интегрально-дифференциальное уравнение вида

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t). \quad (4.15)$$

Пусть заданы изображения $i(t) \rightarrow I(p)$, $u(t) \rightarrow U(p)$. Так как закон Кирхгофа справедлив и для операторных значений тока и напряжения, интегрально-дифференциальное уравнение (4.15) запишем в изображениях с нулевыми начальными условиями $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$:

$$RI(p) + LpI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) = U(p), \quad (4.16)$$

откуда находим

$$I(p) = \frac{U(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (4.17)$$

Для решения задачи необходимо для изображения тока $I(p)$ найти ток-оригинал $i_0(t)$. Решение будет зависеть от знака дискриминанта квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе правой части операторного уравнения (4.17).

Рассмотрим частный случай, когда к цепи подключается постоянное напряжение $u(t) = E$. Тогда учитывая изображение $u(t) = E \rightarrow \frac{E}{p}$, операторное

уравнение (4.17) перепишется в виде

$$I(p) = \frac{E}{Lp^2 + Rp + C} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}. \quad (4.18)$$

Пусть $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$, или $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то есть корни знаменателя комплексные.

Введем обозначение $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ и по таблице оригиналов и изображений

находим оригинал операторного тока $i_0(t) = \frac{E}{L\omega} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$.

Пусть $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$, тогда $i_0(t) = \frac{E}{L} \cdot te^{-\frac{R}{2L}t}$.

Наконец, если $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$, тогда

$$i_0(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \cdot t.$$

Отметим, что в случае, когда $\frac{1}{LC} \leq \frac{R^2}{4L^2}$, ток $i_0(t)$ не будет содержать периодического множителя.

4.4.2 Задача с ненулевыми начальными условиями

В электрической цепи, находящейся под переменным напряжением $u(t)$, происходит какое-либо переключение, то есть начальные значения токов в ветвях, соединяющих индуктивность и напряжение на конденсаторе при $t=0$, ненулевые. Рассмотрим цепь (Рис. 4.2), в которой в момент времени $t=0$ общее сопротивление изменяется из-за шунтирования сопротивления R_1 замыкающим контактом К.

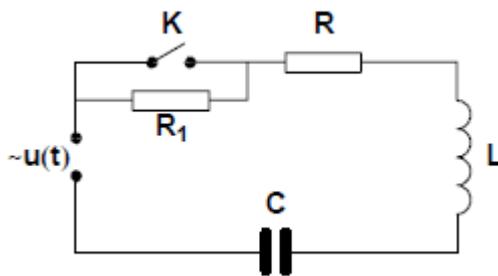


Рис. 4.2 Электрическая цепь

Если заданы изображения, то соответствующее уравнение Кирхгофа в операторной форме будет иметь вид

$$RI(p) + LpI(p) - Li(0) + \frac{1}{Cp} I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = U(p). \quad (4.19)$$

Разрешив уравнение (4.19) относительно $I(p)$, получим выражение закона Ома в операторной форме для задач с ненулевыми начальными условиями:

$$I(p) = \frac{U(p) - \frac{u_C(0)}{p} + Li(0)}{R + pL + \frac{1}{Cp}}. \quad (4.20)$$

Остается найти оригинал $i(t)$, соответствующий изображению (4.20).

Глава 5 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

5.1 Понятие преобразования Фурье

Пусть $f(x)$ - непериодическая функция, определенная на R и удовлетворяющая условиям Дирихле на любом конечном промежутке¹. Кроме того, будем предполагать, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится. На промежутке $[-l; l]$ ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x), \quad (5.1)$$

где $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n t dt$, $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \omega_n t dt$.

Подставляя выражения для a_n и b_n в ряд Фурье, получим

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) (\cos \omega_n t \cos \omega_n x + \sin \omega_n t \sin \omega_n x) dt.$$

Обозначим разность частот $\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}$ через $\Delta\omega$. Тогда ряд Фурье

запишется в виде

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-l}^l f(t) (\cos \omega_n t \cos \omega_n x + \sin \omega_n t \sin \omega_n x) dt. \quad (5.2)$$

Устремим $l \rightarrow \infty$ и обозначим предел выражения (4.2) через $J(x)$, в результате получим

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos \omega t \cos \omega x + \sin \omega t \sin \omega x] dt,$$

¹ Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке $[a; b]$, если она: 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$ или имеет конечное число точек разрыва 1 рода; 2) в каждом интервале непрерывности $f(x)$ монотонна, либо имеет на этом интервале конечное число точек экстремума.

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x \right] d\omega \text{ или}$$

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega. \quad (5.3)$$

Интеграл (5.3) называется **интегралом Фурье**. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном промежутке;
- 2) определена и абсолютно интегрируема на всей числовой оси.

Тогда функция $f(x)$ представима своим интегралом Фурье, т.е. ее интеграл Фурье $J(x)$ сходится в каждой точке x и справедливо равенство

$$J(x) = \begin{cases} f(x), & x - \text{точка непрерывности } f(x); \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x - \text{точка разрыва функции } f(x). \end{cases}$$

Чаще всего используется комплексная форма интеграла (4.3). По формулам Эйлера имеем

$$\begin{aligned} A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x &= A(\omega) \frac{e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}}{2} + B(\omega) \frac{e^{j\omega x} - e^{-j\omega x}}{2j} = \\ &= \frac{A(\omega) - jB(\omega)}{2} e^{j\omega x} + \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{2} e^{-j\omega x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (C(\omega) e^{j\omega x} + C(-\omega) e^{-j\omega x}) \end{aligned}$$

Затем запишем получившийся интеграл в виде суммы двух интегралов и во втором сделаем замену $t = -\omega$. Получим

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} C(t) e^{jtx} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 C(t) e^{jtx} dt \end{aligned}$$

Переходя к промежутку интегрирования $(-\infty; +\infty)$ интеграл Фурье $J(x)$ запишется в виде

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega, \quad (5.4)$$

где

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx. \quad (5.5)$$

Определение. Функция (5.4) называется **преобразованием Фурье** (Фурье-образом) функции $f(x)$. При этом используется обозначение $F[f(x)] = C(\omega)$, где F - оператор Фурье.

Формула (5.5) позволяет делать обратный переход:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega, \text{ т.е. по спектральной функции } C(\omega) \text{ можно восста-}$$

новить исходную функцию $f(x)$.

Величина $|C(\omega)|$ называется **амплитудным спектром**, а величина $\arg C(\omega)$ - **фазовым спектром**.

Формулы (5.4) и (5.5) являются формулами симметричной формы преобразования Фурье и называются **формулами Хинчина-Винера**. Симметричность возникает за счет формирования коэффициентов $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в обеих формулах

(5.4) и (5.5). Если в формуле (5.3) коэффициент $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ не выносить перед интегралом, а оставить его внутри $A(\omega)$ и $B(\omega)$, для преобразования Фурье получим

вид $C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$, а для обратного преобразования

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega. \text{ С другой стороны, в формуле (5.3) можно вынести за}$$

знак интеграла коэффициент $\frac{1}{\pi}$. Тогда обратное и прямое преобразования

Фурье будут иметь вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega, \quad (5.4^*)$$

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx. \quad (5.5^*)$$

Замечание. Периодическая функция, определенная на интервале $(-l; l)$ и периодически продолженная, имеет дискретный спектр (ряд Фурье); непериодическая функция, определенная на всей числовой прямой, имеет непрерывный спектр. Физически это означает, что исследуемый процесс нельзя построить из гармонических колебаний только с определенными изолированными частотами $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, для описания процесса нужны гармонические колебания всех частот.

5.2 Связь между преобразованием Лапласа и Фурье. Свойства преобразования Фурье

Рассмотрим функцию $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f(t), & t \geq 0. \end{cases}$ Тогда, согласно формуле (5.5*),

имеем $C(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$. Если в интеграле Лапласа $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$

положить $p = j\omega$, т.е. считать комплексную переменную p чисто мнимой, то правые части выражений в точности будут совпадать. Кроме того, совпадают первые два условия существования изображений по Лапласу и по Фурье:

- 1) $f(t)$ и $f'(t)$ или всюду непрерывны, или имеют на любом конечном промежутке лишь конечное число точек разрыва первого рода;
- 2) $f(t) = 0$ для всех точек $t < 0$;
- 3) третье условие для преобразования Лапласа $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$, а для преобразования Фурье – абсолютная интегрируемость функции $f(t)$ на всей числовой оси.

Очевидно, что третье условие для преобразования Фурье сильнее. По этой причине ряд функций, имеющих изображения по Лапласу, не имеют образов Фурье.

Для обратного перехода преобразования Лапласа имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad \text{Положив } s=0, p=j\omega, dp=jd\omega, \quad \text{получим}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \text{что совпадает с формулой (5.4*)}. \quad \text{Различие в подын-}$$

тегральной функции $F(i\omega)$ (вместо $F(\omega)$) объясняется тем, что для точного соответствия обозначений преобразование Фурье следовало бы писать в виде $F(i\omega)$, считая в интеграле Лапласа p чисто мнимой величиной. Часто так и делают.

Таким образом, если оригинал $f(t)$ при преобразовании Лапласа дополнительно удовлетворяет условию существования преобразования Фурье (теорема 5.1) – абсолютной интегрируемости функции $f(t)$, то для него существует и преобразование Фурье, и все свойства преобразования Фурье получаются из свойств преобразования Лапласа.

Свойства преобразования Фурье

Если $f(t) \xrightarrow{F} F(\omega)$, $g(t) \xrightarrow{F} G(\omega)$, то справедливы следующие свойства:

$$1. af(t) + bg(t) \xrightarrow{F} aF(\omega) + bG(\omega), \quad a, b \in R$$

$$2. f(\alpha t) \xrightarrow{F} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha \neq 0$$

$$3. f(t+c) \xrightarrow{F} e^{-ic\omega} F(\omega)$$

$$4. e^{ict} f(t) \xrightarrow{F} F(\omega+c)$$

$$5. (it)^n f(t) \xrightarrow{F} F^{(n)}(\omega)$$

$$6. f^{(n)}(t) \xrightarrow{F} (-i\omega)^n F(\omega)$$

$$7. f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \xrightarrow{F} F(\omega)G(\omega)$$

$$8. f(t) \cdot g(t) \xrightarrow{F} F(\omega) * G(\omega)$$

5.3 Синус и косинус преобразования

Поскольку интеграл (5.4) получен как предельный переход суммы Фурье, то для преобразований Фурье будут справедливы свойства ряда Фурье для четных и нечетных функций. Это удобно, когда изучаемый процесс ограничен полупрямой $(0; +\infty)$. Тогда рассматривают пару следующих преобразований:

– косинус преобразование

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (5.6)$$

и обратно:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (5.7)$$

– синус преобразование

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad (5.8)$$

и обратно:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (5.9)$$

Пример 5.1.

Дана функция $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Запишем преобразование Лапласа для данной функции: $L[f(t)] = \frac{1}{p + \alpha}$. Заменяя $p = i\omega$, получим соответствующее преобразование Фурье:

$F[f(t)] = \frac{1}{j\omega + \alpha}$. То же самое можно получить по определению преобразования Фурье:

$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-\alpha t} dt = \frac{e^{-(j\omega + \alpha)t}}{-(j\omega + \alpha)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega + \alpha}$. При этом амплитудный спектр равен $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$, фазовый спектр $\psi(\omega) = -\arg F(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\alpha}$.

тудный спектр равен $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$, фазовый спектр $\psi(\omega) = -\arg F(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\alpha}$.

$\psi(\omega) = -\arg F(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\alpha}$.

Пример 5.2.

Задан импульс, длящийся время τ : $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$

Записывая функцию $f(t)$ в виде разности единичных функций, найдем ее преобразование по Лапласу:

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t - \tau), \quad L[f(t)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}).$$

Преобразование Фурье данной функции будет иметь вид:

$$F[f(t)] = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = \frac{2e^{-j\omega\tau}}{\omega} \cdot \frac{e^{\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{2j} = \frac{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \cdot e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}.$$

Такая форма записи позволяет легко записать амплитудный и фазовый спектры:

$$|F(\omega)| = 2 \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \right| \quad \text{и} \quad \psi(\omega) = \frac{\omega\tau}{2}.$$

5.4 Примеры нахождения спектральных характеристик непериодических сигналов

Рассмотрим важные для практики примеры нахождения спектральной плотности и спектральных характеристик непериодических сигналов.

Пример 5.3 Единичная функция $\eta(t)$ изображается графиком, как показано на рисунке 4.1.

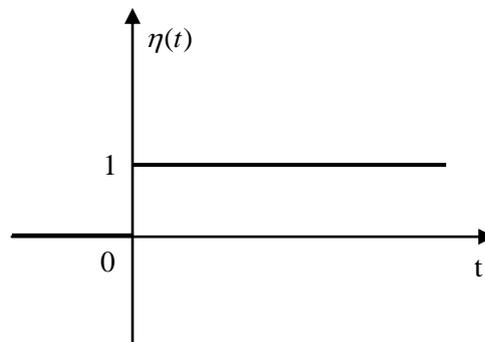


Рис. 5.1. Единичная функция

Единичная функция $\eta(t)$ определяется следующим образом:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Если попытаться вычислить спектральную плотность единичной функции $\eta(t)$ «напрямую», возникает затруднение, связанное с тем, что эта функция не является абсолютно интегрируемой.

В этом случае умножают заданную функцию на затухающую экспоненту $e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Вычислив спектральную плотность функции $\eta(t)e^{-\alpha t}$, искомую спектральную плотность находят предельным переходом при $\alpha \rightarrow 0$.

$$F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-1}{(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{j\omega}.$$

Пример 5.4 Прямоугольный импульс

Сигнал, определяемый выражением:
$$S(t) = \begin{cases} h, & |t| \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2}, \end{cases}$$

находит широкое распространение как в технике, так и в теории сигналов и цепей. Прямоугольный импульс высотой h , длительностью τ изображен на рисунке 5.2.

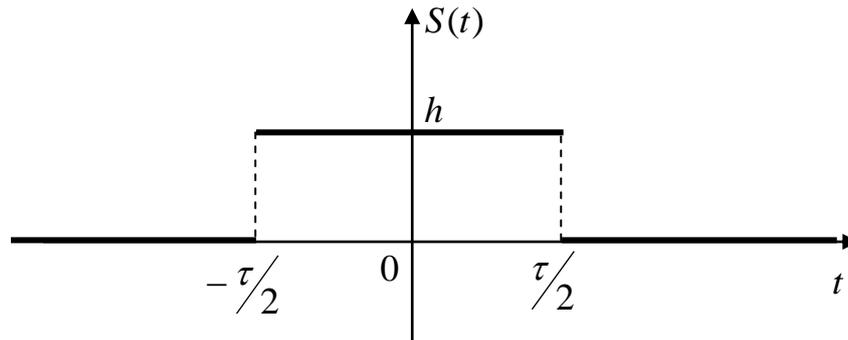
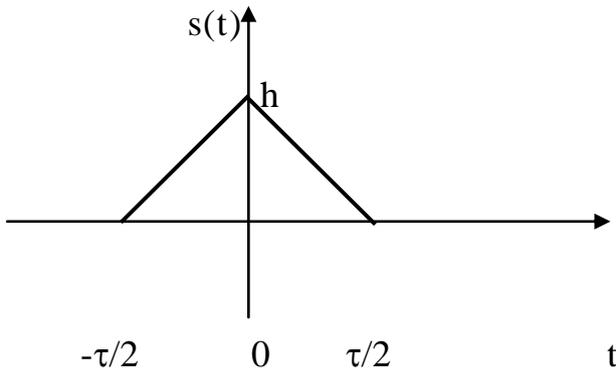


Рис. 5.2. Прямоугольный импульс высотой h

Применяя формулу (5.5), находим спектральную плотность этого импульса.

$$F(\omega) = h \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega\tau} dt = -\frac{h}{j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right) = \frac{2h}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = h\tau \left[\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right].$$

Пример 5.5. Треугольный импульс



$$S(t) = \begin{cases} h \left(1 + \frac{t}{\tau/2} \right), & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0, \\ h \left(1 - \frac{t}{\tau/2} \right), & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & t > \frac{\tau}{2}, t < -\frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Рис. 5.3. Треугольный импульс $S(t)$

График функции представлен на рисунке 5.3.

Решение. Вычисляем спектральную плотность $F(\omega)$.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^0 h \left(1 + \frac{t}{\tau/2} \right) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\tau/2} h \left(1 - \frac{t}{\tau/2} \right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= h \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\tau/2}^0 + \frac{2h}{\tau} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2} (-j\omega t - 1) \Big|_{-\tau/2}^0 + h \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_0^{\tau/2} - \\ &\quad - \frac{2h}{\tau} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2} (-j\omega t - 1) \Big|_0^{\tau/2} = \dots = \frac{h\tau}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\omega\tau/4} \right)^2. \end{aligned}$$

График спектральной плотности изображен на рисунке 5.4.

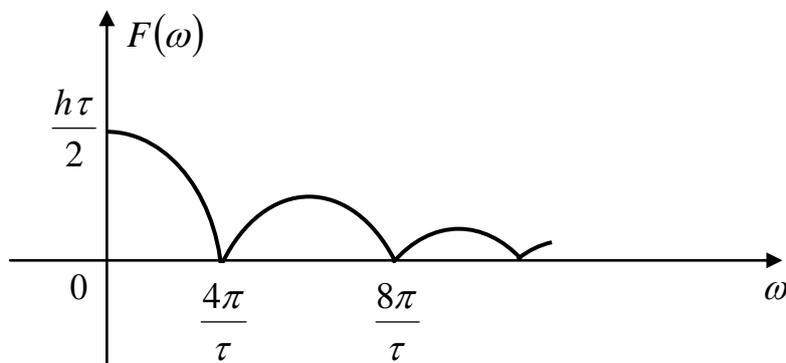


Рис. 5.4. График спектральной плотности $F(\omega)$

Пример 5.6. Колоколообразный импульс

Колоколообразный импульс задается функцией $S(t) = A \cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$, $-\infty < t < \infty$. Этот импульс совпадает по форме с графиком нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей и называется также **гауссовским импульсом**. Колоколообразный импульс и его спектральная плотность изображены на рисунке 5.5.

Будем находить спектральную плотность данного импульса. По формуле (5.5) имеем

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

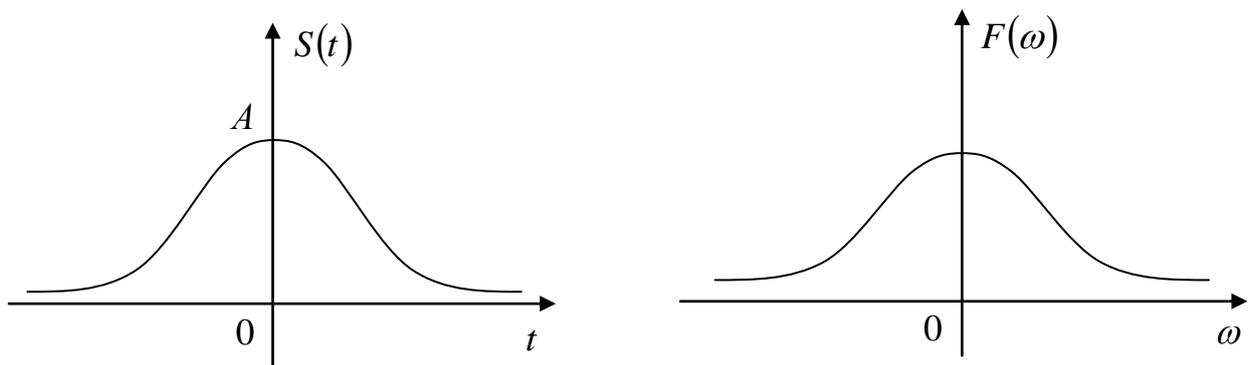


Рис. 5.5. Колоколообразный импульс и его спектральная плотность

Для вычисления интеграла удобно в подынтегральной функции дополнить показатель степени до квадрата суммы

$$-\left(\frac{t^2}{2a^2} + j\omega t\right) = -\left[\left(\frac{t^2}{2a^2} + j\omega t + d^2\right) - d^2\right] = -\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}a} + d\right)^2 - d^2\right],$$

где величина d определяется из условия

$$j \omega t = 2 \frac{t}{\sqrt{2} a} \cdot d, \text{ то есть } d = \frac{j \omega a}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, выражение для $F(\omega)$ приводится к виду

$$F(\omega) = A e^{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2} a} + d\right)^2} dt.$$

Перейдем к новой переменной $x = \frac{t}{\sqrt{2} a} + d$, получим

$$F(\omega) = A e^{d^2} \sqrt{2} a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

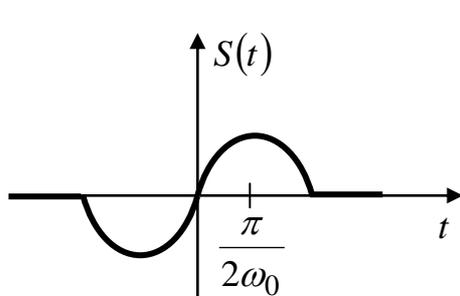
Так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, то окончательно

$$F(\omega) = A \sqrt{2\pi} a e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}} = B e^{-\frac{\omega^2}{2b^2}}, \text{ где } b = \frac{1}{a}, \quad B = \sqrt{2\pi} a A.$$

Полученный результат имеет важное значение для теории сигналов. Оказывается, что гауссовский импульс и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: для получения одной из них по заданной другой достаточно совершить замену t на ω и наоборот.

Пример 5.7. Волновой цуг

Так называют функцию, определяемую равенством:



$$S(t) = \begin{cases} h \cdot \sin \omega_0 t, & |t| < \frac{\pi}{\omega_0}, \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{\omega_0}. \end{cases}$$

Рис. 5.6. Волновой цуг

График функции представлен на рисунке 5.6. Рассматриваемый сигнал играет в теории связи большую роль. Определим его спектральную плотность.

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= h \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = h \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2 + \omega_0^2} [-j\omega \cdot \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t] \Big|_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} = \\
 &= \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2} \left\{ e^{-\frac{j\omega\pi}{\omega_0}} \cdot \omega_0 - e^{\frac{j\omega\pi}{\omega_0}} \cdot \omega_0 \right\} = \frac{-2h\omega_0 j}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0} = \frac{2h\omega_0 j}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0}.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудкевич Е.А. Функции комплексного переменного и операционное исчисление (методы решения задач): учеб. пособие. Тула: Изд-во Тульского гос. ун-та, 2004. - Режим доступа: <http://window.edu.ru/resource/380/53380>.
2. Пантелеев А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2001. 128 с.
3. Чудесенко В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики. М.: Высшая школа, 1999.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для вузов. СПб.: Лань, 2005. 736 с.
5. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: АСТ, 2001. 656 с.
6. Зарипов Р.Н., Чугунова Г.П. Специальные разделы математики. Теория функций комплексного переменного. Основы операционного исчисления: учеб. пособие. Казань: Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2008. 115 с.
7. Бритвина Л.Е. Основы операционного исчисления: учеб.-метод. пособие. Новгород: Изд-во НовГУ им. Ярослава Мудрого, 2008 . 61 с.
8. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. Краткий курс: учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1972. 280 с.: ил.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 01.11.2022 г. Формат 60x84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 4,99. Тираж 25 экз. Изд. № 7397.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ