ФГБОУ ВО «БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, физики и информатики

$$\int_a^b f(x)dx$$

Панкова Е.А.
Рыжик В.Н.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ И ФИЗИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

Методические указания
для самостоятельной работы по дисциплине
«Высшая математика»

Брянская область 2017

УДК 517 (07)
ББК 22.161
П 16

Панкова, Е.А.

Определенный интеграл и его приложения к геометрическим и физическим задачам. Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Высшая математика» / Е.А. Панкова, В.Н. Рыжик. – Брянск: Издательство Брянского ГАУ, 2017. – 36 с.

Рецензенты:
Комогорцев В.Ф., к.ф.-м.н., доцент кафедры математики, физики и информатики
Безик В.А., к.т.н., доцент, зав. кафедрой электроэнергетики и автоматики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования, протокол № 1 от 05.09. 2017 г.

Содержание

Предисловие	4
Раздел 1. Определенный интеграл и его вычисление	5
1.1 Понятие определенного интеграла	5
1.2 Основные свойства определенного интеграла	6
1.3 Вычисление определенного интеграла	7
1.3.1 Формула Ньютона-Лейбница	7
1.3.2 Замена переменной в определенном интеграле	7
1.3.3 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле	10
Раздел 2. Геометрические приложения определенного интеграла	12
2.1 Вычисление величины площади плоских фигур	12
2.2 Вычисление длины дуги кривой	16
2.3 Вычисление объема тела вращения	18
Раздел 3. Физические приложения определенного интеграла	21
3.1 Работа переменной силы	21
3.2 Путь, пройденный телом	22
3.3 Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой	22
3.4 Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры	24
Раздел 4. Несобственные интегралы	26
4.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования	26
4.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций	27
Раздел 5. Варианты заданий для самостоятельной работы по теме «Приложения определенного интеграла»	28
Литература	35

Предисловие

Методическое пособие предназначено для бакалавров 1 курса всех направлений подготовки аграрных вузов, а также может быть использовано студентами других направлений при подготовке к занятиям.

Данные методические разработки предназначены для того, чтобы помочь студенту выполнить самостоятельную работу, включающую в себя задания по геометрическим и физическим приложениям определенного интеграла. При выполнении работы студент должен вспомнить понятие определенного интеграла, его свойства, основные методы вычисления и основанные на них прикладные задачи.

Методическое пособие содержит пять разделов.

В справочном разделе 1 коротко сообщаются основные теоретические сведения. А именно: рассматриваются определение, основные свойства и способы вычисления определенного интеграла. В конце раздела студенту предлагаются несколько вопросов для самоконтроля.

В разделе 2 приведены формулы вычисления площадей фигур, длины дуги кривой и объемов тел вращения. В разработках даны образцы решения примеров и задач, близких по тематике к задачам расчетной работы, с подробными методическими указаниями. В конце раздела также предлагаются несколько вопросов для самоконтроля.

В разделе 3 рассмотрены основные случаи применения определенного интеграла при решении физических и инженерных задач.

В разделе 4 рассмотрены понятия несобственных интегралов с бесконечными пределами и несобственных интегралов от неограниченных функций, предложено решение некоторых типовых примеров.

Раздел 5 содержит варианты заданий самостоятельной работы (30 вариантов). Студент выполняет тот вариант, который соответствует его номеру в журнале. Самостоятельная работа выполняется студентом в отдельной тетради.

При необходимости студент может обратиться к преподавателю за консультацией. После проверки студент защищает свою работу преподавателю, чтобы показать, как им усвоены основные понятия раздела «Определенный интеграл».

Раздел 1. Определенный интеграл и его вычисление

1.1 Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b .$$

Обозначим это разбиение Т, а точки $x_0, x_1, ..., x_n$ назовем точками разбиения. В каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i\,(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$. Через Δx_i обозначим разность $x_i - x_{i-1}$, которая является длиной отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Образуем сумму:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,, \qquad (1)$$

которую назовем ***интегральной суммой*** для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, соответствующей данному разбиению Т.

Для данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ можно составить бесчисленное множество интегральных сумм, так как построение интегральной суммы состоит в произвольном делении заданного отрезка $[a; b]$ на элементарные отрезки и произвольном выборе точки $\xi_i\,(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ на каждом элементарном отрезке.

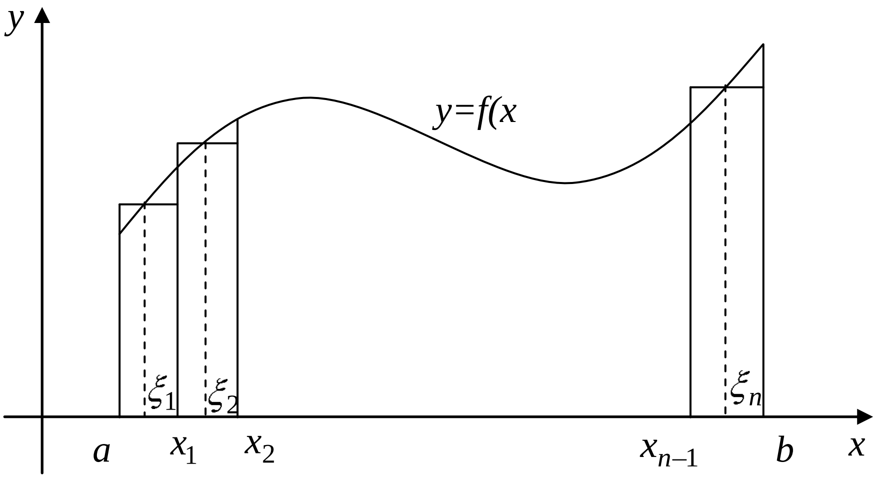

Рис.1.

Из рисунка 1 следует ***геометрический смысл суммы*** σ: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$, если $f(x) \ge 0$.

Обозначим λ длину наибольшего отрезка разбиения: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Определение.

Если существует конечный предел I интегральной суммы (1) при $\lambda \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (2)$$

или $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

В этом случае функция $y = f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a; b]$. Для интегрируемости достаточно, чтобы функция была непрерывна на отрезке $[a; b]$ или имела конечное число разрывов первого рода. Числа a и b называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами*** интегрирования, $f(x)$- ***подынтегральной*** функцией, x – ***переменной интегрирования***.

1.2 Основные свойства определенного интеграла

Определенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. Если пределы интегрирования равны между собой, то $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
2. Каковы бы ни были числа a, b, c, имеет место равенство: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Это равенство верно, если $a < c < b$ и

верно при любом с, если существуют любые два из фигурирующих в нем трех интегралов.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, где k – постоянная величина.
4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Замечание. Свойство 4 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

1.3 Вычисление определенного интеграла

1.3.1 Формула Ньютона – Лейбница

Вычисление определенных интегралов методом, основанным на определении интеграла как предела интегральной суммы, связано с большими трудностями. Для удобства вычисления определенных интегралов применяется формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где $F(x)$- первообразная для подынтегральной функции $f(x)$. Она находится при вычислении соответствующего неопределенного интеграла: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Формула Ньютона – Лейбница принадлежит к числу важнейших формул высшей математики. С ее помощью можно просто и точно вычислять значения определенных интегралов, а с их помощью находить значения различных величин, например, площади криволинейных фигур, длины дуг кривых и т. д.

Пример 1.

$$\int_0^2 (3x^2 - 1)\,dx = 3\int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - x\Big|_0^2 = 8 - 2 = 6.$$

Пример 2.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Пример 3.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-1}^1 = arctg1 - arctg(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

1.3.2 Замена переменной в определенном интеграле

Цель этого метода так же, как при нахождении неопределенных интегралов методом подстановки, состоит в том, чтобы преобразовать данное подынтегральное выражение так, чтобы соответствующий неопределенный интеграл принял вид табличного интеграла.

Метод замены переменной при вычислении определенного интеграла основан на следующей теореме.

Теорема.

Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a; b]$. Тогда, если:

1) функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha; \beta]$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$;
2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a; b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$,

то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

Формула (4) называется ***формулой замены переменной*** (или подстановки) в определенном интеграле.

Замечание.

Подстановку можно осуществить как в виде $x = \varphi(t)$, так и в виде $t = \varphi(x)$. Кроме того, из формулы (4) следует, что если подстановка выполняется в определенном интеграле, то нет необходимости переходить обратно к старой переменной, но при этом нужно вместо пределов изменения старой переменной *x* указать пределы изменения новой переменной *t*.

Пример 1.

$$\int_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{7-2x}} = \left|\begin{array}{l} t = 7-2x, \\ dt = (7-2x)'dx = -2dx, \\ dx = -\frac{1}{2}dt, \\ \alpha = 7-2(-1) = 9, \\ \beta = 7-2\cdot 3 = 1 \end{array}\right| = \int_9^1 \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_1^9 t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \textit{учтем, что}\ \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \\ = \sqrt{t} + C,\ \ \textit{и применим формулу} \\ \textit{Ньютона} - \textit{Лейбница} \end{array}\right| = \sqrt{t}\,\Big|_1^9 = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$$

Пример 2.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \\ dt = (\sin x)' dx = \cos x dx, \\ \alpha = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}, \\ \beta = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^3} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^{-3} dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}.$$

Пример 3.

Вычислим интеграл $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$.

Сделаем подстановку $x = 3\sin t$, тогда $dx = (3\sin t)' dt = 3\cos t dt$. Рассмотрим теперь выражение $\sqrt{9 - x^2}$:
$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2 t} = \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t$, поскольку на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $\cos t \geq 0$.

Определим новые пределы интегрирования: $0 = 3\sin t,\ \sin t = 0,\quad \alpha = 0;$ $3 = 3\sin t,\ \sin t = 1, \beta = \dfrac{\pi}{2}$. При изменении t от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ переменная $x = 3\sin t$ пробежит весь данный интервал интегрирования $[0; 3]$.

При выборе новых пределов интегрирования может возникнуть вопрос: почему взяты пределы $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ а не, скажем, $\alpha = \pi$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$? Ведь $\sin\pi$ тоже равен 0. Можно проверить, что и при этих пределах величина интеграла останется прежней, но его вычисление немного усложнится. Дело в том, что теперь $\sqrt{9 - x^2} = 3\sqrt{\cos^2 t} = -3\cos t$, поскольку $\cos t \leq 0$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$. Поэтому, чтобы избежать ненужных осложнений при вычислениях, всегда лучше брать наименьший возможный интервал изменения новой переменной интегрирования.

С учетом сказанного выше, получим:

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t dt = \left| \begin{array}{l} \textit{применим} \\ \textit{формулу} \\ 2\cos^2 x = 1+\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\ dt = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \frac{9}{2}t\ \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\ \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \frac{9}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{9\pi}{4}.$$

1.3.3 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Теорема.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{5}$$

Рассмотрим несколько примеров применения формулы интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 1.

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x,\ dv = x\,dx \\ du = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x},\ \ v=\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2}+C = \\ = \left|\textit{отбросим} C\right| = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{4}(4-1) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Пример 2.

$$\int_0^1 arctgx\,dx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx,\ dv = dx \\ du = (arctgx)'dx = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \int dx = x + C,\ отбросим C, \\ тогда\ \ v = x \end{array} \right| = x\,arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ dt = 2xdx, \quad xdx = \dfrac{1}{2}dt \\ \alpha = 1 + 0 = 1, \quad \beta = 1 + 1 = 2 \end{array} \right| = arctg1 - 0 - \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|t|\,\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\,.$$

Пример 3.

$$\int_1^2 (x^2+1)e^x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 1,\ dv = e^x dx \\ du = (x^2+1)'\,dx = 2xdx,\ \ v = \int e^x dx = e^x + C, \\ отбросим C, тогда\ v = e^x \end{array} \right| = (x^2+1)e^x\Big|_1^2 -$$

$$-\int_1^2 2xe^x dx = 5e^2 - 2e - 2\int_1^2 xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ dv = e^x dx \\ du = dx,\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = 5e^2 - 2e -$$

$$-2\left(xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) = 5e^2 - 2e - 2\left(2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 \right) = 5e^2 - 2e - 2(2e^2 - e - e^2 + e) =$$

$$= 3e^2 - 2e.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$?
2. Что называется определенным интегралом?
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Напишите формулу Ньютона – Лейбница.
5. В чем состоит способ подстановки в определенном интеграле? Найдя новые пределы интегрирования, следует ли переходить к первоначальной переменной интегрирования и данным пределам интегрирования?
6. Напишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.

Раздел 2. Геометрические приложения определенного интеграла

2.1 Вычисление величины площади плоских фигур

Определение.

Фигура, которая ограничена осью абсцисс, отрезками прямых $x = a,\ x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, где $x \in [a;\, b]$, называется криволинейной трапецией.

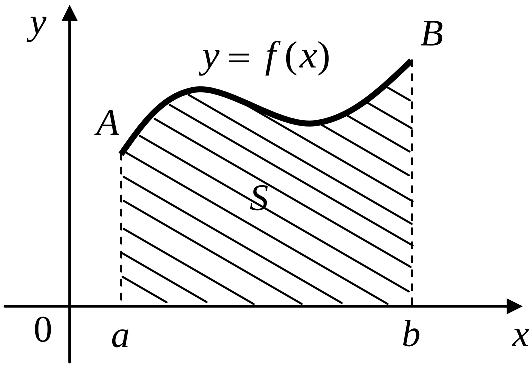

Рис. 2

Следует заметить, что отрезки прямых $x = a,\ x = b$ могут вырождаться в точки. В этом случае, фигура также будет являться криволинейной трапецией (рис.3 и 4).

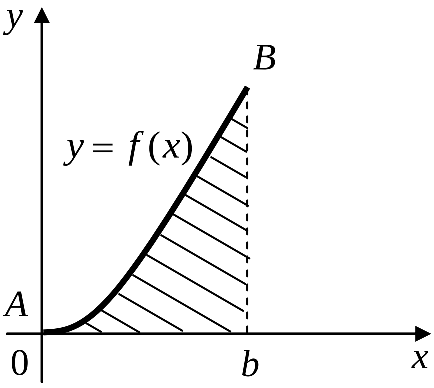

Рис. 3

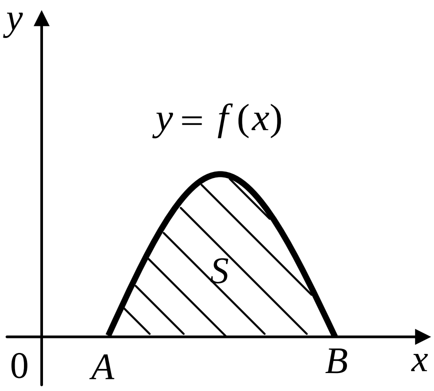

Рис. 4

Площадь *S* криволинейной трапеции *aABb* выражается формулой:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Пусть $f(x) \le 0$ для всех $x \in [a;\, b]$, тогда криволинейная трапеция *aABb* будет расположена ниже оси абсцисс. При этом справедлива формула:

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

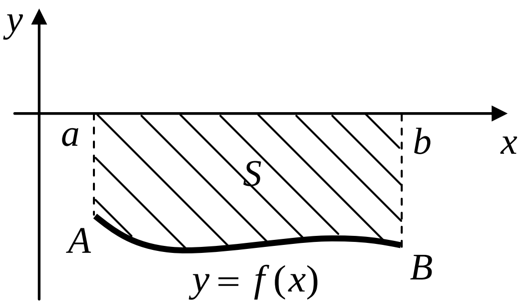

Рис. 5

Рассмотрим несколько примеров вычисления площади фигур.

Пример 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sqrt{x}$, осью абсцисс и прямой $x=4$.

Решение.

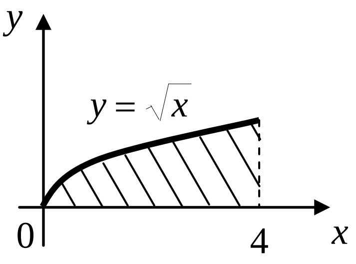

Рис.6

Так как $\sqrt{x}\geq 0$ для всех $x\geq 0$, то для вычисления площади воспользуемся формулой (1):

$$S=\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4=\frac{2}{3}(8-0)=\frac{16}{3}\ \text{(кв.ед.)}.$$

Пример 2.

Вычислить величину площади, ограниченной линиями $y=-x^2,\ x=2,\ y=0$.

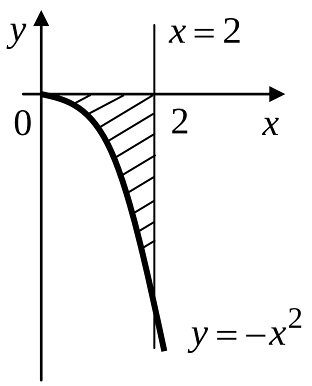

Рис. 7

Решение.

Так как подынтегральная функция $-x^2\leq 0$, то для вычисления площади фигуры следует воспользоваться формулой (2):

$$S=-\int_0^2(-x^2)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}\ \text{(кв.ед.)}$$

Пусть фигура ограничена сверху и снизу соответственно графиками функций $y=f(x)\geq 0$ и $y=g(x)\geq 0$, а сбоку – отрезками прямых $x=a,\ x=b$ (рис. 8.).

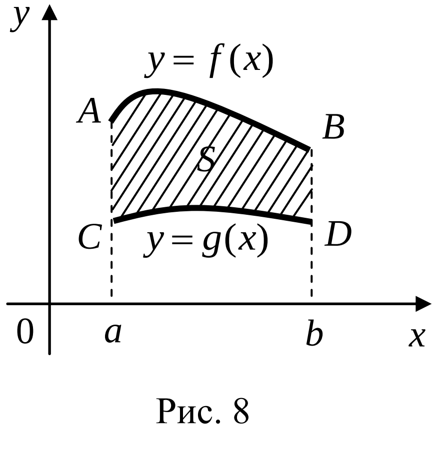

Рис. 8

Тогда площадь фигуры *ABDC* выражается формулой:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx. \qquad (3)$$

Эта формула будет справедлива и при любом другом расположении графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, если $f(x) \ge g(x)$ для всех $x \in [a;\, b]$.

Пример 3.

Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой $y = x^2 - 3x$ и прямой $y = x$.

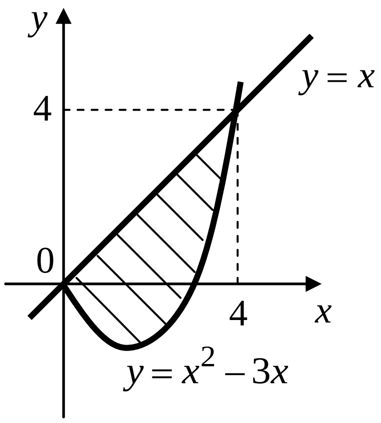

Рис. 9

Решение.

Найдем пределы интегрирования. Для этого определим абсциссы точек пересечения графиков функций:

$x^2 - 3x = x, \quad x^2 - 4x = 0, \quad x(x-4) = 0,$

$x_1 = 0,\ x_2 = 4$

Следовательно, $x = 0$ и $x = 4$- нижний и верхний пределы интегрирования соответственно.

По формуле (3) имеем:

$$S = \int_0^4 (x - (x^2 - 3x))\,dx = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = 4\int_0^4 x dx - \int_0^4 x^2 dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

Пусть функция $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \ \ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

причем $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Тогда, выполнив в формуле (1) замену переменной $x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt$, получим:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

Пример 4.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, где $0 \le t \le 2\pi$.

Решение.

Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно вычислить площадь S_1 фигуры, расположенной в I четверти, а затем умножить результат на 4.

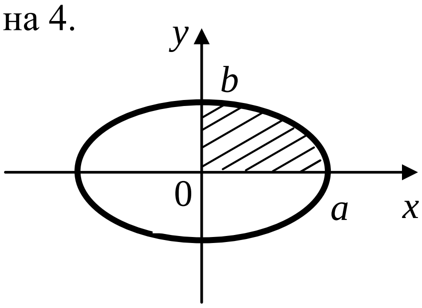

Рис. 10

Определим пределы интегрирования: $x_1 = 0,\ 0 = a\cos t,\ \cos t = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2}$;

$x_2 = a,\ a = a\cos t,\ \cos t = 1,\ \beta = 0$. При изменении t от $\frac{\pi}{2}$ до 0 переменная $x = a\sin t$ пробежит весь интервал интегрирования $[0; a]$ (см. пример 3, стр. 7).

По формуле (4) получим:

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(a\cos t)'\,dt = ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t(-\sin t)\,dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{\pi ab}{4},$$

тогда $S = 4S_1 = \pi ab$ (кв.ед.).

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функция $\rho(\varphi) \ge 0$ для всех $\varphi \in [\alpha; \beta]$ и непрерывна.

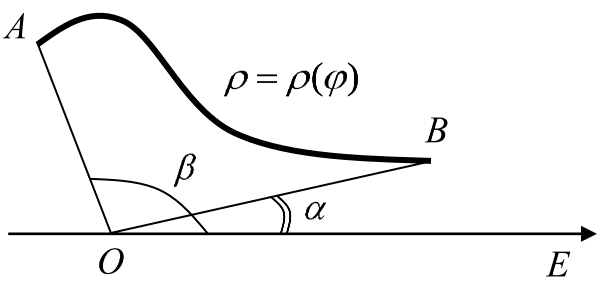

Рис. 12

Определение.

Плоская фигура, ограниченная кривой AB и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, называется ***криволинейным сектором.***

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (5)$$

Пример 5.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

Решение.

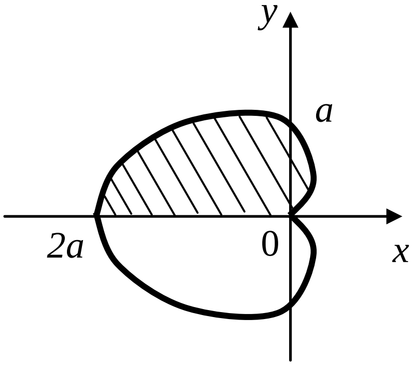

Рис. 13

Кардиоида изображена на рис. 13. Изменяя полярный угол φ от 0 до π, получим по формуле (5) половину искомой площади, а затем удвоим результат:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} d\varphi -$$

$$-a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} - a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi} d\varphi + \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2\pi}{2} - a^2(\sin\pi - \sin 0) + \frac{a^2}{4}\varphi\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{a^2\pi}{2} + \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2}{8}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{3a^2\pi}{4},$$

$$S = 2S_1 = 2\cdot\frac{3a^2\pi}{4} = \frac{3a^2\pi}{2} \quad \text{(кв.ед.)}.$$

2.2 Вычисление длины дуги кривой

Пусть плоская кривая *AB* задана уравнением $y = f(x),\ a \le x \le b$, где $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a; b]$, и существует $f'(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда длина дуги *L* кривой *AB* выражается формулой:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (1)$$

Пример 1.

Вычислить длину дуги верхней ветви полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$, если $0 \le x \le 5$.

Решение.

Из уравнения $y = x^{\frac{3}{2}}$ находим производную y': $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. По формуле (1) имеем:

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9}{4}x,\ dt = \frac{9}{4}dx, \\ dx = \frac{4}{9}dt, \alpha = 1,\ \beta = \frac{49}{4} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{t} \cdot \frac{4}{9}dt = \frac{4}{9}\int_1^{\frac{49}{4}} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_1^{\frac{49}{4}} =$$

$$= \frac{8}{27}\cdot\frac{335}{8} = \frac{335}{27} \text{ (ед.)}.$$

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где $\alpha \le t \le \beta$, причем $a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$. Тогда, заменяя в формуле (1) $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, получим формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (2)$$

Пример 2.

Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где $0 \le t \le 2\pi$.

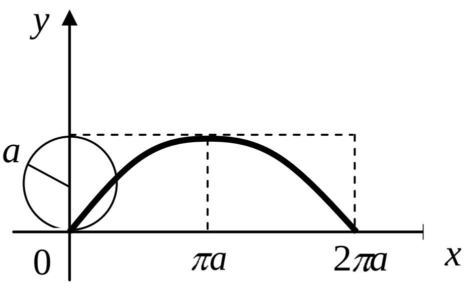

Рис. 14

Решение.

Когда точка описывает одну арку циклоиды, параметр t принимает значения от 0 до 2π.

Имеем: $\varphi'(t) = a(t - \sin t)' = a(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = a(1 - \cos t)' = a\sin t$.

По формуле (2) получим:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a \text{ (ед.)}.$$

Пусть кривая AB задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$. Так как $x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, то по формуле (2) получим:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi. \qquad (3)$$

Пример 3.

Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.

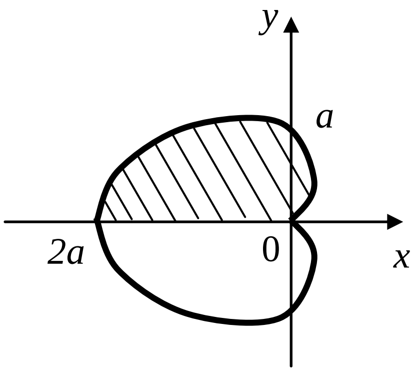

Рис. 15

Решение.

Изменяя полярный угол φ от 0 до π, получим по формуле (3) половину искомой длины. Из уравнения $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ найдем ρ': $\rho' = a(1 - \cos\varphi)' = a\sin\varphi$.

По формуле (3) получим:

$$\frac{1}{2}L = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2a \cdot \left.\left(-2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right|_0^{\pi} = 4a\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = 4a(0+1) = 4a,$$

откуда находим $L = 2 \cdot 4a = 8a$ (ед.).

2.3 Вычисление объема тела вращения

Если плоская фигура, ограниченная осью Ox, прямыми $x = a,\ x = b$ и графиком непрерывной функции $y = f(x)$, вращается ***вокруг оси Ox***, то объем полученного тела вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx. \qquad (1)$$

Если плоская фигура, ограниченная осью Oy, прямыми $y = c,\ y = d$ и графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$, вращается ***вокруг оси Oy***, то объем полученного тела находим по формуле

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (2)$$

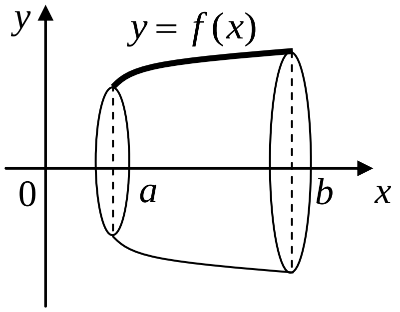

Рис. 16

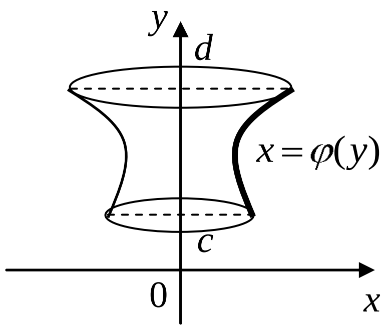

Рис. 17

Пример 1.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной гиперболой $xy = -4$, осью абсцисс и прямыми $x = 1,\ x = 6$.

Решение.

Построим указанные линии (см. рис. 18). По формуле (1) будем иметь:

$$V_{Ox} = \pi \int_1^6 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \int_1^6 x^{-2} dx = 16\pi \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_1^6 =$$

$$= -16\pi \left(\frac{1}{6} - 1 \right) = -16\pi \left(-\frac{5}{6} \right) = \frac{40\pi}{3} \text{ (куб.ед.).}$$

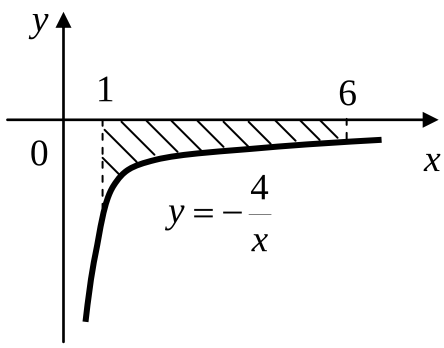

Рис. 18

Пример 2.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, заключенной между линиями, заданными уравнениями $y = x^2,\ 2x - y = 0$.

Решение.

Искомый объем определяется разностью $V_{Oy} = V_2 - V_1$, где V_1- объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* треугольника *OAB*; V_2- объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции *OCAB*.

Чтобы найти пределы интегрирования, определим координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ 2x - x^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ x(2 - x) = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array} \right. \end{cases}$$

откуда $y_1 = c = 0,\ y_2 = d = 4$.

По формуле (2) получим:

$$V_1 = \pi \int_0^4 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4}\int_0^4 y^2 dy = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{16\pi}{3} \text{ (куб.ед.)}$$

$$V_2 = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2\, dy = \pi \int_0^4 y\, dy = \pi \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_0^4 = 8\pi \text{ (куб.ед.)}$$

Тогда $V_{Oy} = 8\pi - \dfrac{16\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3}$ (куб.ед.)

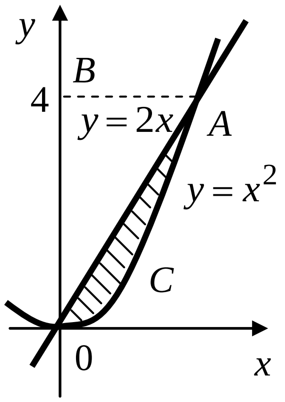

Рис. 19

Вопросы для самоконтроля

1. Какая фигура называется криволинейной трапецией?
2. Напишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.
3. Напишите формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрическими уравнениями.
4. Как вычислить площадь криволинейного сектора в полярных координатах?
5. Запишите формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых координатах, в полярных координатах и кривой, заданной параметрическими уравнениями.
6. Напишите формулы для вычисления объемов тела вращения.

Раздел 3. Физические приложения определенного интеграла

3.1 Работа переменной силы

Пусть материальная точка М перемещается вдоль оси Ох под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки М из положения $x = a$ в положение $x = b$ $(a < b)$, находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx. \quad (1)$$

Пример 1.

Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение.

По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. $F = kx$, где k - коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила F = 100 Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м; следовательно, $100 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$. Следовательно, $F = 10000x$. Искомая работа на основании формулы (1) равна

$$A = \int_0^{0{,}05} 10000x dx = 5000x^2 \Big|_0^{0{,}05} = 12{,}5 \text{ (Дж)}.$$

Пример 2.

Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать через край жидкость из вертикального цилиндрического резервуара высоты Н (м) и радиусом основания R (м).

Решение.

Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом p на высоту h, равна ph.

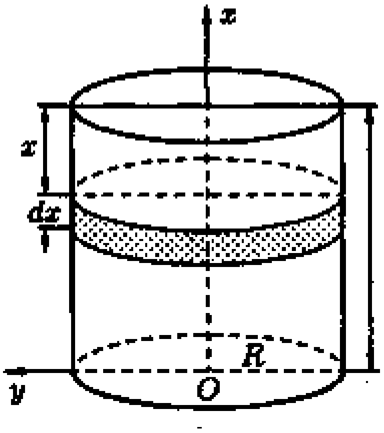

Рис. 20

Но различные слои жидкости в резервуаре находятся на различных глубинах и высота поднятия (до края резервуара) различных слоев не одинакова. Для решения поставленной задачи введем систему координат так, как указано на рисунке 20.

1) Работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя жидкости толщиной x $(0 < x < H)$, есть функция $A = A(x)$, где $0 \le x \le H$, $A(0) = 0$, $A(H) = A_0$.

2) Находим главную часть приращения ΔA при изменении x на величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A(x)$.

Ввиду малости dx считаем, что «элементарный» слой жидкости находится на одной глубине x (от края резервуара) (см. рис. 20). Тогда

$$dA = dp \cdot x,$$

где dp — вес этого слоя; он равен

$$dp = g\rho dV,$$

где g — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости, dV — объем «элементарного» слоя жидкости (на рисунке он выделен), $dV = \pi R^2 dx$.

Таким образом, $dp = g\rho\pi R^2 dx$ и $dA = g\rho\pi R^2 dx \cdot x$.

3) Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = 0$ до $x = H$, находим

$$A_0 = \int_0^H g\rho\pi R^2 x dx = \frac{1}{2} g\rho\pi R^2 H^2 \text{ (Дж).}$$

3.2 Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Найдем путь S, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2. Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т.е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что $dS = v(t)dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2, получаем

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \qquad (2)$$

Пример 3.

Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

Решение.

Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2)dt = 5t^2\Big|_0^4 + 2t\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \text{ (м).}$$

3.3 Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Пусть $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ — это уравнение материальной кривой АВ. Будем считать ее однородной с постоянной линейной плотностью γ (γ=const).

Статический момент M_x кривой АВ относительно оси Ox равен

$$M_x = \gamma\int_a^b y dl = \gamma\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (3)$$

Аналогично, статический момент M_y кривой АВ относительно оси Оу равен

$$M_y = \gamma\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (4)$$

Статические моменты M_x и M_y кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести (центра масс).

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx},\ y_c = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}. \qquad (5)$$

Пример 4.

Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первой координатной четверти (рис. 21).

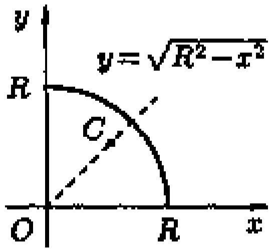

Рис. 21

Решение.

Очевидно, длина указанной дуги окружности $l = \frac{\pi R}{2}$. Найдем статический момент ее относительно оси Ох. Так как уравнение дуги $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$,то при $\gamma = const$ получим

$$I_x = \gamma\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx = \gamma\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = \gamma R\int_0^R dx =$$

$$= \gamma R x\Big|_0^R = \gamma R^2$$

Следовательно, $y_c = \frac{M_x}{\gamma l} = \frac{\gamma R^2}{\gamma\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi}$.

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то $x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$. Итак, центр тяжести имеет координаты $\left(\frac{2R}{\pi}; \frac{2R}{\pi}\right)$.

3.4 Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

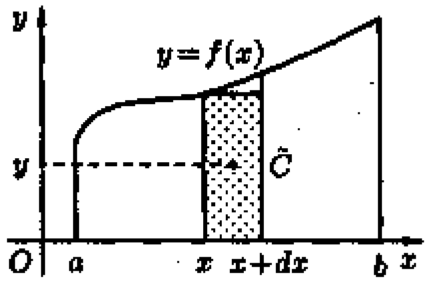

Рис. 22

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0,\ x = a,\ x = b$ (рис. 22). Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна ($\gamma = const$). Тогда масса «всей пластинки равна γS, т. е. $m = \gamma\int\limits_a^b f(x)dx$. А статические моменты пластинки относительно осей координат вычисляются по формулам:

$$M_x = \frac{1}{2}\gamma\int\limits_a^b y^2 dx, \quad M_y = \gamma\int\limits_a^b xydx. \tag{6}$$

По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c;\ y_c)$, что

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{M_y}{\gamma S}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{M_x}{\gamma S}.$$

Или

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b xydx}{\int\limits_a^b ydx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2 dx}{\int\limits_a^b ydx}. \tag{7}$$

Пусть плоская фигура задана неравенствами $f_1(x) \le y \le f_2(x),\ a \le x \le b$, где $f_1(x),\ f_2(x)$ - непрерывные на отрезке [a; b] функции. Массу m фигуры, статические моменты M_x и M_y, а также моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ох и Оу вычисляют по формулам:

$$m = \gamma\int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx, \tag{8}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\gamma\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \tag{9}$$

$$M_y = \gamma\int\limits_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx, \tag{10}$$

$$I_x = \frac{1}{3}\gamma\int\limits_a^b (f_2^3(x) - f_1^3(x))dx, \tag{11}$$

$$I_y = \gamma \int_a^b x^2 (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (12)$$

Пусть сектор задан в полярных координатах неравенствами $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $0 \le r \le r(\varphi)$, где $0 \le \varphi_2 - \varphi_1 \le 2\pi$, $r(\varphi)$ - непрерывная функция на отрезке $[\varphi_1;\ \varphi_2]$. Будем считать, что поверхностная плотность сектора постоянна ($\gamma = const$). Тогда

$$m = \frac{1}{2}\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi, \qquad (13)$$

$$M_x = \frac{1}{3}\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi, \qquad (14)$$

$$M_y = \frac{1}{3}\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\cos\varphi d\varphi, \qquad (15)$$

$$I_x = \frac{1}{4}\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^4(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi, \qquad (16)$$

$$I_y = \frac{1}{4}\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^4(\varphi)\cos^2\varphi d\varphi. \qquad (17)$$

Пример 5.

Найдем координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 \le R^2,\ y \ge 0$ $(\gamma = const)$ (рис. 23).

Решение.

Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси Оу), что $x_c = 0$. Площадь полукруга равна $\frac{1}{2}\pi R^2$. Находим M_x:

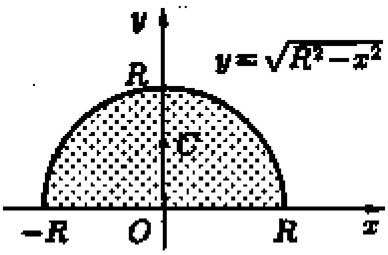

Рис. 23

$$M_x = \frac{1}{2}\gamma \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \frac{1}{2}\gamma\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\gamma\left(R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right) = \gamma \cdot \frac{2}{3}R^3$$

$y_c = \dfrac{M_x}{\gamma S} = \dfrac{2\gamma R^3}{3\gamma \dfrac{\pi R^2}{2}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{R}{\pi}$. Следовательно, центр тяжести имеет координаты $C\left(0;\ \dfrac{4R}{3\pi}\right)$.

Раздел 4. Несобственные интегралы

4.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;\ +\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a;\ b]$, т.е. существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ при любом $b > a$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Если существует конечный предел справа, то в этом случае говорят, что интеграл (1) существует или сходится. Если предел справа не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (1) не существует или расходится.

Аналогично вводится несобственный интеграл по промежутку $(-\infty;\ b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Несобственный интеграл бесконечными верхним и нижним пределами интегрирования функции $f(x)$ определяется следующим образом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (3)$$

Пример 1.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(arctg\, b - arctg0) = \lim_{b\to+\infty} arctg\, b = \frac{\pi}{2}$$

т.е. данный интеграл сходится.

Пример 2.

$\int\limits_0^{+\infty}\cos xdx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\cos xdx = \lim\limits_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$, но предел функции $\sin b$ при $b\to+\infty$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

Пример 3.

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, где α - некоторое число.

1) Если $\alpha\neq 1$, то для любого $b > 0$

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases}\dfrac{-1}{1-\alpha}, & \alpha > 1;\\ \infty, & \alpha < 1.\end{cases}$$

2) Если $\alpha=1$, то для любого $b>0$ $\quad \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=\infty$.

Таким образом, данный интеграл сходится при $\alpha>1$, и расходится при $\alpha\le 1$.

4.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;\ b)$. Точку $x=b$ называют особой, если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности этой точки, но ограничена на любом отрезке $[a;\ b-\varepsilon]\subset[a;\ b)$. Несобственным интегралом второго рода называется интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{4}$$

Аналогично, если $x=a$ - особая точка, то несобственный интеграл определяется так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{5}$$

Если функция неограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точки $c\in[a;\ b]$, то при условии существования обоих интегралов справа по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx. \tag{6}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx$.

$$\int\limits_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[6]{x}}+2\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Вычислим каждый из получившихся интегралов отдельно:

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[6]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{6}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\Big|_{\varepsilon}^1=\frac{6}{5}\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\sqrt[6]{\varepsilon^5})=\frac{6}{5};$$

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{\varepsilon}^1=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\sqrt[3]{\varepsilon^2})=\frac{3}{2};$$

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^1=2\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\sqrt{\varepsilon})=2.$$

Тогда $\int\limits_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx=\frac{6}{5}+2\cdot\frac{3}{2}+2=\frac{31}{5}$.

Раздел 5. Варианты заданий самостоятельной работы по теме «Приложения определенного интеграла»

Задание 1

Вычислить площадь, ограниченную заданными линиями. Выполнить чертеж.

1. $y=0{,}5x^2-x-1,\ y=3x+6-0{,}5x^2$
2. $y=2x^2,\ \ y=4-2x$
3. $y=(x-1)^2,\ \ y^2=x-1$
4. $y=x^2,\ y=3-x$
5. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x$
6. $y=6x-x^2,\ y=0$
7. $y=x^2-2x-5,\ y=1-x-x^2$
8. $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1$
9. $y=x^3,\ y=8,\ x=0$
10. $y^2=2x+4,\ x=0$
11. $y=2x-x^2+3,\ y=x^2-4x+3$
12. $y=x^2-3x-4,\ y=-x^2-x+8$
13. $xy=6,\ x=1,\ x=6,\ y=0$
14. $y=x^2-5x-3,\ y=-3x^2+2x-1$
15. $y=3x^2,\ y=8-5x$
16. $y=3x^2+1,\ y=3x+7$
17. $y=4-x^2,\ y=x^2+2$
18. $y=(x+1)^2,\ \ y^2=x+1$
19. $y^2=2x+1,\ \ x-y-1=0$
20. $xy=8,\ \ x+y-9=0$
21. $y=2\sin x,\ 0\le x\le\pi$
22. $y=x^2-6x-10,\ y=6x-x^2$
23. $\rho=5(1-\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$
24. $xy=9,\ x=3,\ x=9,\ y=0$
25. $\rho=5e^{\varphi},\ -\pi\le\varphi\le\pi$
26. $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$
27. $y^2=9x,\ y=x$
28. $y=e^x,\ y=-x^2,\ x=0,\ x=1$
29. $y=x^2-9,\ y=0$
30. $y=-0{,}5x^2+3x+2,$
$y=0{,}5x^2-x-3$

Задание 2

Вычислить длину дуги кривой.

1 $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x},\ 0\le x\le 12$

2 $y=1-\ln(\cos x),\ 0\le x\le \frac{\pi}{6}$

3 $\rho=1-\cos\varphi,\ \frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

4 $y=\ln(\sin x),\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

5 $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, 0\le x\le\frac{7}{9}$

6 $y=\ln x,\ \frac{3}{4}\le x\le 1$

7 $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},\ 0\le x\le\frac{1}{4}$

8 $y=\ln(\cos x),\ 0\le x\le\frac{\pi}{3}$

9 $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t),\ 0\le t\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$

10 $y=\frac{1}{2}x^2-1$, отсеченной осью Ox

11 $y=3+\ln(\sin x),\ \frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{2\pi}{3}$

12 $y=\ln(1-x^2),\ -0{,}5\le x\le 0{,}5$

13 $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$

14 $\rho=3\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

15 $y=2\sqrt{x},\ 0\le x\le 1$

16 $\begin{cases} x=8\cos t, \\ y=8\sin t,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$

17 $y=1+\ln(\sin x),\ \frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

18 $\rho=8(1-\cos\varphi),\ -\frac{2\pi}{3}\le\varphi\le 0$

19 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

20 $\begin{cases} x=4(2\cos t-\cos 2t), \\ y=4(2\sin t-\sin 2t),\ 0\le t\le\pi \end{cases}$

21 $\rho=10\sin\varphi,\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{5\pi}{6}$

22 $y=e^x+6,\ \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$

23 $y=\ln x+1,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$

24 $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}, 1\le x\le 2$

25 $\rho=4e^{\frac{4\varphi}{3}},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$

26 $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le\frac{3}{4}$

27 $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3},\ 0\le\varphi\le 3\pi$

28 $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t,\ 0\le t\le\pi \end{cases}$

29 $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t),\ 0\le t\le\pi \end{cases}$

30 $\rho=8e^{4\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$

Задание 3

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг координатных осей фигуры, ограниченной указанными линиями. Выполнить чертеж.

1	$y^2 = 8x,\ x = 2$ вокруг оси Ox	**16**	$y = x^2,\ y = 2$ вокруг оси Oy
2	$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ вокруг оси Oy	**17**	$y = x^2,\ y = 1,\ y = 4,\ x = 0$ вокруг оси Oy
3	$2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0$ вокруг оси Ox	**18**	$y = x^2,\ x = 2,\ y = 0$ вокруг оси Oy
4	$y = 1 - x^2,\ y = 0$ вокруг оси Ox	**19**	$y = 3 - x^2,\ y = x^2 + 1$ вокруг оси Oy
5	$y = 3\sin x,\ y = 0$ вокруг оси Ox	**20**	$y = x^2 + 1,\ y = 3x - 1$ вокруг оси Ox
6	$y^2 + x - 4 = 0,\ x = 0$ вокруг оси Oy	**21**	$xy = 9,\ x + y = 10$ вокруг оси Ox
7	$xy = 4,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$ вокруг оси Ox	**22**	$y = x^2 + 2,\ y = 2x + 2$ вокруг оси Ox
8	$y^2 = 4x,\ y = 0,\ x = 4$ вокруг оси Ox	**23**	$y = 9 - x^2,\ y = 0$ вокруг оси Oy
9	$y = x^2 - 2x + 1,\ x = 2,\ y = 0$ вокруг оси Oy	**24**	$y = 3\sin x,\ y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ вокруг оси Ox
10	$xy = 5,\ x = 5,\ y = 5$ вокруг оси Ox	**25**	$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ вокруг оси Ox
11	$y = 3\cos x,\ y = \cos x,\ x = 0,\ x \ge 0$ вокруг оси Ox	**26**	$y = x^3,\ x = 2,\ y = 0$ вокруг оси Ox
12	$y = 2x - x^2,\ y = 2 - x$ вокруг оси Ox	**27**	$y = x^2,\ x = 4,\ y = 0$ вокруг оси Ox
13	$y = \cos x,\ x = -\dfrac{\pi}{4},\ x = \dfrac{\pi}{2}$ вокруг оси Ox	**28**	$xy = 9,\ x = 0,\ x = 3,\ y = 9$ вокруг оси Oy
14	$y = x^2 + 1,\ y = x,\ x = 0,\ x = 1$ вокруг оси Oy	**29**	$y = \sin x,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2},\ y = 0$ вокруг оси Ox
15	$y = \ln x,\ y = 0,\ x = e$ вокруг оси Ox	**30**	$y = 10 - x^2,\ y = x^2 + 2,\ x = 0$ вокруг оси Oy

Задание 4

1. Найдите центр тяжести дуги циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

2. Найдите центр тяжести плоской фигуры, ограниченной прямой $y = \frac{2x}{\pi}$, синусоидой $y = \sin x$ и осью абсцисс $y = 0 \quad (x > 0)$.

3. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t^2 + 1$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за первые 5 с.

4. Найдите координата центра масс параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 4 - x^2, \quad y = 0$.

5. Вычислите работу, которую надо затратить на сжатие пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,01м нужна сила в 78 Н.

6. Определите давление воды на стенку шлюза, длина которой 20 м и высота 5 м, считая шлюз доверху заполненным водой.

7. Вычислите давление воды на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой равно a, нижнее $b \quad (a > b)$,высота h. Предполагается, что поверхность воды достигает верхнего края плотины. Вычислите давление для случая $a = 400$ м, $b = 200$ м, $h = 20$м.

8. Найдите центр масс фигуры, ограниченной кривой $y = 2\sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 1$.

9. Найдите статические моменты относительно осей Ox и Oy дуги параболы $y^2 = 2x \quad (y > 0)$, $0 \le x \le 2$.

10. Вычислите силу давления воды на вертикальную заслонку, закрывающую трубу, если труба, лежащая горизонтально, наполовину наполнена водой. Известно, что поперечным сечением трубы является круг диаметром 6 м.

11. Найдите центр масс фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$.

12. Найдите статический момент относительно оси Ox дуги косинусоиды $y = \cos x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

13. Найдите статический момент относительно оси Ox дуги цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right),\ 0\le x\le a$.

14. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=2t^3+1$ (м/с). Найдите путь пройденный телом за промежуток времени от $t=1$с до $t=3$с.

15. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила в 2Н сжимает пружину на 1 см?

16. Сила в 6 Н растягивает пружину на 2 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 6 см?

17. Определите давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 10 м и высотой 6м. Определите давление на нижнюю половину шлюза.

18. Вычислите силу давления воды на треугольную пластину с основанием a и высотой h, вертикально в нее погруженную (основание совпадает с уровнем воды).

19. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t=0$ до $t=5$с, если точка, двигалась прямолинейно со скоростью $v(t)=9{,}8t-0{,}003t^2$ (м/с).

20. Плотина имеет форму трапеции с верхним основанием 20 м, нижним 10 м, и высотой 6 м. Определите силу давления воды на плотину.

21. Найти момент инерции относительно осей Ox и Oy площади прямоугольника, ограниченного линиями $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$.

22. Найдите момент инерции относительно оси Oy площади, ограниченной линиями $x=2,\ y=x^2,\ y=0$.

23. Найти центр масс полукруга $x^2+y^2=a^2$, отсеченного осью Ox.

24. Определить силу давления воды на вертикальную треугольную площадку высотой h, основание которой a параллельно поверхности воды, а противоположная вершина находится на поверхности воды.

25. За какое время вода, наполняющая чашу формы полушара радиусом 40см, вытечет из отверстия на дне площадью 2 см^2?

26. Определить момент инерции относительно оси Ох площади четверти круга $x = a\cos t,\ y = a\sin t$.

27. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из ямы, имеющей форму конуса (с вершиной на дне), высота которого2м, а радиус основания 0,3м.

28. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы поднять груз массой m с поверхности земли на высоту h.

29. Определить силу давления воды на вертикальный полукруг, диаметр которого $2R$ расположен на поверхности воды.

30. Найти момент инерции относительно осей Ох и Оу площади треугольника, ограниченного линиями $x = 0,\ y = 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Задание 5

Вычислить несобственные интегралы.

1 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$

2 $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

3 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$

4 $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+9}$

5 $\int\limits_{0}^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$

6 $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)^4}$

7 $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8 $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

9 $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$

10 $\int\limits_{3}^{5} \frac{dx}{(x-3)^4}$

11 $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}$

12 $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{(x-3)^2}$

13 $\int\limits_{-4}^{1} \frac{dx}{(x+4)^3}$

14 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-9}}$

15 $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^5 x}$

16 $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$

17 $\int\limits_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

18 $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$

19 $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$

20 $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$

21 $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx$

22 $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

23 $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-4x} dx$

24 $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-3)^3}$

25 $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt[4]{(5-x)^3}}$

26 $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$

27 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2+1} dx$

28 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{2x^2+6}$

29 $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{4x} dx$

30 $\int\limits_{1}^{16} \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3-1}}$

Литература

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с.

2. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для вузов. / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – СПб: Лань, 2005. – 736 с.

3. Высшая математика для экономистов/Под ред. Н.Ш.Кремера.- 2008.-439с.

4. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: АСТ, 2001. – 656 с.

5. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 504 с.

6. Карасев А.И. и др. Курс высшей математики для экон. вузов (в 2-х частях). Ч. 1-2. М.: Высш. Школа, 1982.- 272 с.

7. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.

8. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ: Учеб. Для техникумов.- М.: Высш. Школа, 1990.- 416 с.:ил.

9. Шипачёв В.С. Высшая математика. учеб. Для вузов.- 4-е изд.-М.: Высш. Школа, 1998.- 497 с.

10. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике: Учеб. Пособие.- М.: Высш. школа, 1994.-192 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Панкова
Валентина Николаевна Рыжик

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ И ФИЗИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

Методические указания для самостоятельной работы
по дисциплине «Высшая математика»

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 24.10.2017 г.
Формат 60х84 1/16. Бумага печатная. Усл. печ. л. 2,09
Тираж 100 экз. Изд. № 5405

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365, Брянская обл., Выгоничский район, п. Кокино, БГАУ