МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра Математики, физики и информатики

**Рыжик В.Н.**

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## ЧАСТЬ I

Учебно-методическое пособие
для всех направлений инженерно-технологических специальностей
Квалификация (степень) выпускника: **Бакалавр**

Брянская область
2017

УДК 517(07)
ББК 22.1
Р 93

Рыжик, В.Н. **Учебно-методическое пособие «Высшая математика. Часть I»:** Учебно-методическое пособие/ В.Н. Рыжик. - Брянск: Издательство Брянского ГАУ, 2017. - 240 с.

Учебное пособие составлено с учетом требований ФГОС ВПО по всем направлениям ИТИ АГРОИНЖЕНЕРИЯ; ТЕХНОЛОГИЯ ПРОДУКЦИИ И ОРГАНИЗАЦИЯ ОБЩЕСТВЕННОГО ПИТАНИЯ; НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ. (КВАЛИФИКАЦИЯ (СТЕПЕНЬ) "БАКАЛАВР"). Данное пособие направлено на формирование компетенций соответствующих направлений.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией факультета Энергетики и природопользования, протокол №3 от 23.11. 2016 г.

**Рецензент:** доцент кафедры математики, физики и информатики, кандидат технических наук Панкова Е.А.

## Введение

Данное методическое пособие содержит курс лекций по аналитической геометрии, элементам векторной алгебры и математическому анализу. Упражнения для самостоятельной работы. В нем рассмотрены типовые примеры, необходимые для выполнения упражнений по данной теме, а также варианты самих упражнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

## Роль математики в современном мире. Основные этапы развития математики

Целью изучения математики является повышение общего кругозора, культуры мышления, формирование научного мировоззрения.

Математика - наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Академик Колмогоров А.Н. выделяет четыре периода развития математики:

- ✓ зарождение математики,
- ✓ элементарная математика,
- ✓ математика переменных величин,
- ✓ современная математика.

Начало периода элементарной математики относят к VI-V веку до нашей эры. К этому времени был накоплен достаточно большой фактический материал. Понимание математики, как самостоятельной науки возникло впервые в Древней Греции. В течение этого периода математические исследования имеют дело лишь с достаточно ограниченным запасом основных понятий, возникших для удовлетворения самых простых запросов хозяйственной жизни. Развивается арифметика - наука о числе.

В период развития элементарной математики появляется теория чисел, выросшая постепенно из арифметики. Создается алгебра, как буквенное исчисление. Обобщается труд большого числа математиков, занимающихся решением геометрических задач в стройную и строгую систему элементарной геометрии геометрию Евклида, изложенную в его замечательной книге Начала (300 лет до н. э.).

В XVII веке запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование геометрических фигур. С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создание дифференциального и интегрального исчисления начинается период математики переменных величин. Великим открытиям XVII века является введенная Ньютоном и Лейбницем понятие бесконечно малой величины, создание основ анализа бесконечно малых (математического анализа). На первый план выдвигается понятие функции. Функция становится основным предметом изучения. Изучение функции приводит к основным понятиям математического анализа: пределу, производной, дифференциалу, интегралу.

## Тема: «Множества, числа фигуры и образы. Отношения и отображения. Конечные и бесконечные множества. Основные структуры на множествах»

**Величиной** называется все что может быть измерено и выражено числом. **Множеством** называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п. Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент **x** принадлежит множеству **X**, то записывают **x ϵ X** (**ϵ** — принадлежит). Если множество A является частью множества B, то записывают **A □ B** (□ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

**Например, перечислением заданы следующие множества:**

- $A=\{1,2,3,5,7\}$ — множество чисел
- $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ — множество некоторых элементов $x_1,x_2,...,x_n$
- $N=\{1,2,...,n\}$ — множество натуральных чисел
- $Z=\{0,\pm1,\pm2,...,\pm n\}$ — множество целых чисел

Множество $(-\infty;+\infty)$ называется **числовой прямой**, а любое число — точкой этой прямой. Пусть a — произвольная точка числовой прямой иδ — положительное число. Интервал (a-δ; a+δ) называется **δ-окрестностью точки a**.

Множество X ограничено сверху (снизу), если существует такое число c, что для любого x ϵ X выполняется неравенство x≤c (x≥c). Число c в этом случае называется **верхней(нижней) гранью** множества X. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется **ограниченным**. Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней множества называется **точной верхней (нижней) гранью** этого множества.

### Основные числовые множества

N-{1,2,3,...,n} Множество всех **натуральных чисел**

Z-{0, ±1, ±2, ±3,...} Множество **целых чисел.** Множество целых чисел включает в себя множество натуральных.

Q-Множество **рациональных чисел**. Кроме целых чисел имеются ещё и дроби. Дробь — это выражение вида $p/q$, где **p** — целое число, **q** — натуральное. Десятичные дроби также можно записать в виде $p/q$. Например: 0,25 = 25/100 = 1/4. Целые числа также можно записать в виде $p/q$. Например, в виде дроби со знаменателем "один": 2 = 2/1.

Таким образом любое рациональное число можно записать десятичной дробью — конечно или бесконечной периодической.

R-Множество всех **вещественных чисел**.

Иррациональные числа — это бесконечные непериодические дроби. К ним относятся:

- число $\pi$ — отношение длины окружности к её диаметру;
- число $e$ — названное в честь Эйлера и др.;

Вместе два множества (рациональных и иррациональных чисел) — образуют множество действительных (или вещественных

ных) чисел.

Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется **пустым множеством** и записывается **Ø**.

### Элементы логической символики

"следует", "выполняется"

равносильность утверждения

"такой, что"

Запись $\forall x\colon |x|<2 \rightarrow x^2 < 4$ означает: для каждого x такого, что $|x|<2$, выполняется неравенство $x^2 < 4$.

### Квантор

При записи математических выражений часто используются кванторы.

**Квантором** называется логический символ, который характеризует следующие за ним элементы в количественном отношении.

- □- **квантор общности**, используется вместо слов "для всех", "для любого".
- □- **квантор существования**, используется вместо слов "существует", "имеется". Используется также сочетание символов □!, которое читается как существует единственный.

## Операции над множествами

Два **множества А и В равны** (А=В), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если А={1,2,3,4}, В={3,1,4,2} то А=В.

**Объединением (суммой)** множеств А и В называется множество A $\cup$ B, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то A $\cup$ B = {1,2,3,4,5,6}.

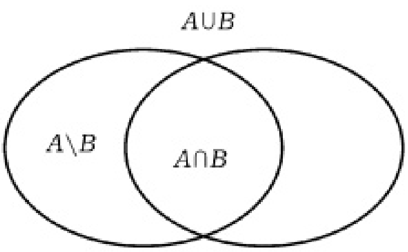
**Пересечением (произведением)** множеств A и B называется множество A $\cap$ B, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B. Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то A $\cap$ B = {2,4}.

**Разностью** множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}.

**Симметричной разностью** множеств A и B называется множество A $\Delta$ B, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть A $\Delta$ B = (AB) $\cup$ (BA).

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то A $\Delta$ B = {1,2} $\cup$ {5,6} = {1,2,5,6}




## Свойства множеств

### **Свойства перестановочности**

A $\cup$ B = B $\cup$ A

A $\cap$ B = B $\cap$ A

### Сочетательное свойство

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

При графическом изображении множеств удобно использовать диаграммы Венна, на которых универсальное множество обычно представляют в виде прямоугольника, а остальные множества в виде овалов, заключенных внутри этого прямоугольника

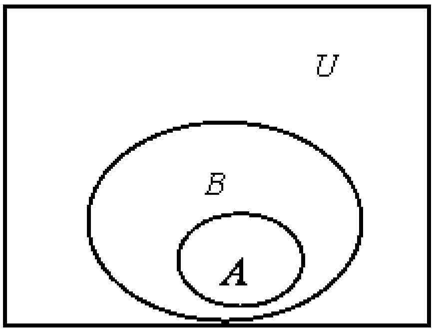



Рис. 1.1

Определение 1.5. Объединением множеств А и В (обозначение А □ В) называется множество элементов х таких, что х принадлежит хотя бы одному из двух множеств А или В (рис 1.2).

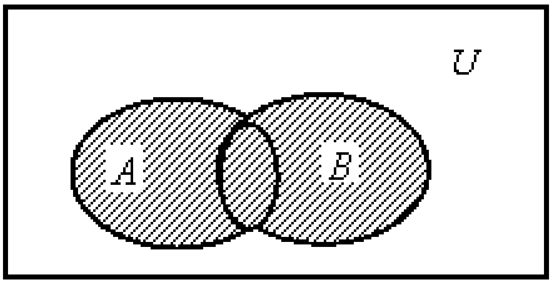



Рис. 1.2

Определение 1.6. Пересечением множеств А и В (обозначение А □ В) называется множество, состоящее из элементов х, которые принадлежат и множеству А и множеству В (рис. 1.3):

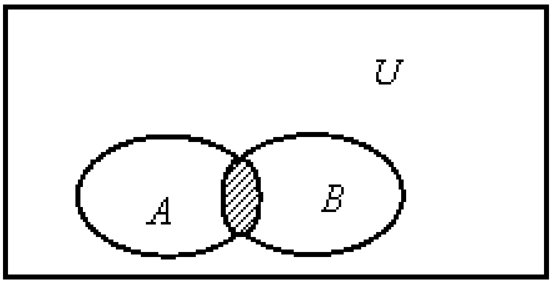



Рис. 1.3

Определение 1.7. Разностью А\В множеств А и В называется множество всех тех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В (рис. 1.4):

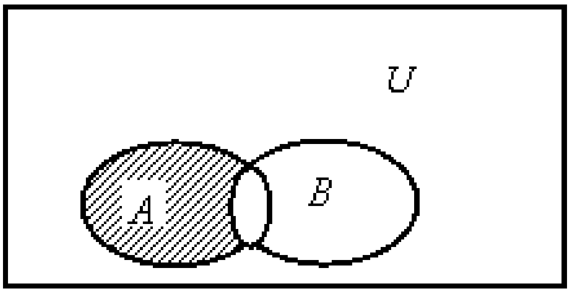



Рис. 1.4

Определение 1.8. Симметрической разностью А/\В множеств А и В называется множество (рис. 1.5).

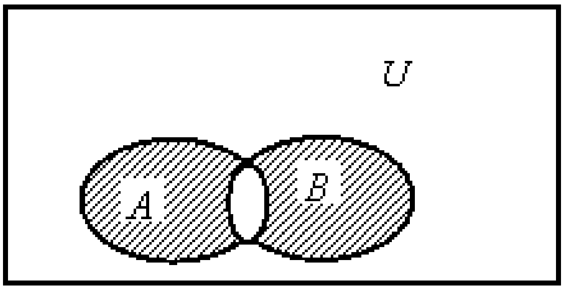



Рис. 1.5

Определение 1.9. Абсолютным дополнением множества называется множество всех элементов, не принадлежащих А, т.е.

множество U\A, где U – универсальное множество (рис. 1.6).

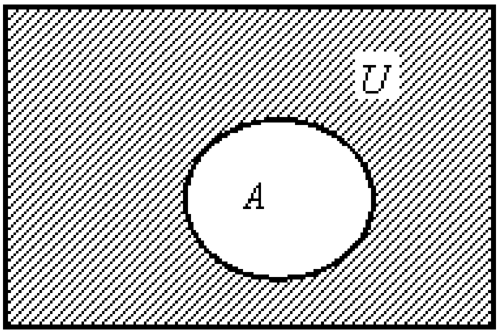



Рис. 1.6

Основные алгебраические структуры полугруппа, группа, кольцо, тело, поле.

В зависимости от того определен ли на множестве только один закон композиции аддитивный или мультипликативный (или оба), а также от того какими свойствами эти законы обладают, множества имеют одно из специальных названий полугруппа, группа, кольцо, тело, поле. Все эти множества относят к основным алгебраическим структурам.

Пример множество действительных чисел образует поле, множество целых чисел абелеву группу относительно сложения и т.д.

## Тема: «Матрицы. Действия над ними. Определители»

### *Матрицы и действия над ними*

**Ма́трица** — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов матрицы задают размер матрицы. В настоящее время говорят исключительно о матрицах прямоугольной формы, так как они являются наиболее удобными и общими.

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов — количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.

**Матрицей** называется прямоугольная таблица $n = m$ чисел, состоящая из ***m*** одинаковой длины строк или ***n*** одинаковой длины столбцов.

*aij*- элемент **матрицы**, который находится в ***i***-ой строке и ***j***-м столбце.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Квадратная матрица**

Если у матрицы количество строк $m$ совпадает с количеством столбцов $n$, то такая матрица называется квадратной, а число $m = n$ называется *размером* квадратной матрицы или её порядком.

**Вектор-строка и вектор-столбец**

Матрицы размера $m \times 1$ и $1 \times n$ являются элементами пространств $\mathcal{K}^m$ и $\mathcal{K}^n$ соответственно:

- матрица размера $m \times 1$ называется **вектор-столбцом** и имеет специальное обозначение:

$$\operatorname{colon}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m)^T;$$

- матрица размера $1 \times n$ называется **вектор-строкой** и имеет специальное обозначение:

$$\operatorname{row}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n);$$

**Транспонированная матрица**

**С каждой матрицей** $A = (a_{ij})$ **размера** $m \times n$ **связана матрица** $B = (b_{ji})$ **размера** $n \times m$ **вида**

$$b_{ji} = a_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Такая матрица называется **транспонированной матрицей** для $A$ и обозначается так $A^T$.

Транспонированную матрицу можно получить, поменяв строки и столбцы матрицы местами.

**Диагональная матрица**]

Диагональная матрица — квадратная матрица, все элементы которой кроме диагональных — нулевые $(i \neq j : a_{ij} = 0)$, иногда записывается как:

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

**Единичная матрица**]

Единичная матрица — матрица, при умножении на которую любая матрица (или вектор) остается неизменной, является диагональной матрицей с единичными (всеми) диагональными элементами:

$$\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1).$$

Для ее обозначения чаще всего используется обозначение $I$ или $E$.

Для обозначения ее элементов также используется символ Кронекера $\delta_{ij}$, определяемый как:

$$\delta_{ii} = 1$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

**Нулевая матрица —** матрицы, все элементы которой нули (при сложении ее с любой матрицей та остается неизменной, а при умножении на любую получается нулевая матрица).

**Для матрицы определены следующие алгебраические операции**:

- сложение матриц, имеющих один и тот же размер;
- умножение матриц подходящего размера (матрицу, имеющую $n$ столбцов, можно умножить справа на матрицу, имеющую $n$ строк);
- в том числе умножение на матрицу вектора (по обычному правилу матричного умножения; вектор является в этом смысле частным случаем матрицы);
- умножение матрицы на элемент основного кольца или поля (то есть скаляр).

**Умножение матрицы на число**]

*Умножение матрицы* $A$ *на число* $\lambda \in \mathcal{K}$ заключается в построении матрицы $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

**Свойства умножения матриц на число:**

- 1. 1 · *A* = *A*;
- 2. *(λβ)A = λ(βA)*
- 3. *(λ+β)A = λA + βA*
- 4. *λ(A+B) = λA + λB*

**Сложение матриц**]

Складывать можно только матрицы одинакового размера.

*Сложение матриц* $A + B$ есть операция нахождения матрицы $C$, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц $A$ и $B$, то есть каждый элемент матрицы $C$ равен

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**Свойства сложения матриц:**

- 1.коммутативность: *A+B = B+A*;
- 2.ассоциативность: *(A+B)+C =A+(B+C)*;
- 3.сложение с нулевой матрицей: *A + Θ = A*;
- 4.существование противоположной матрицы: *A + (-A) = Θ*.

**Умножение матриц**

*Умножение матриц* (обозначение: $AB$, реже со знаком умножения $A \times B$) — есть операция вычисления матрицы $C$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Количество столбцов в матрице $A$ должно совпадать с количеством строк в матрице $B$, иными словами, матрица $A$обязана быть **согласованной** с матрицей $B$. Если матрица $A$ имеет размерность $m \times n$, $B$ — $n \times k$, то размерность их произведения $AB = C$ есть $m \times k$.

**Свойства умножения матриц:**

- 1. ассоциативность $(AB)C = A(BC)$;
- 2. некоммутативность (в общем случае): $AB \neq BA$;
- 3. произведение коммутативно в случае умножения с единичной матрицей: $AI = IA$;
- 4. дистрибутивность: $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$;
- 5. ассоциативность и коммутативность относительно умножения на число: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

**Рассмотрим некоторые примеры:**

**Пример 1.** Сложение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Пример2.**Умножение матриц

Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти матрицы C = A·B и D = B·A.

*Решение.* Прежде всего заметим, что произведение A·B существует, так как число столбцов A равно числу строк B.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в общем случае A·B ≠B·A, т.е. произведение матриц антикоммутативно.

Найдем $B \cdot A$ (умножение возможно).

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+2\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot1 \\ 2\cdot2+1\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+1\cdot1 \\ 2\cdot2+2\cdot3 & 2\cdot1+2\cdot1 & 2\cdot0+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Пример 3**. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти 3A$^2$ – 2A.

*Решение.*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$3A^2 = \begin{pmatrix} 18 & -27 & 21 \\ -9 & 21 & 12 \\ -3 & 12 & 24 \end{pmatrix}; \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$3A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 16 & -23 & 15 \\ -13 & 29 & 10 \\ -9 & 22 & 20 \end{pmatrix}.$$

Отметим следующий любопытный факт.

Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь места, то есть произведение ненулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.

### *Определители и их свойства*

Определители играют важную роль в решении систем линейных уравнений. В общем-то определители и были придуманы для этой цели. Поэтому понять логику записи определителей легко по следующей схеме. Возьмём знакомую вам со школьной скамьи систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

В определителе последовательно записываются коэффициенты при неизвестных: в первой строке - из первого уравнения, во второй строке - из второго уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Например, если дана система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 3x - 2y = 60 \end{cases},$$

то из коэффициентов при неизвестных формируется следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Часто говорят также "определитель матрицы" Определитель может быть только у квадратной матрицы.

Определитель первого порядка – это сам элемент $a_{11}$ т.е.

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Определитель второго порядка есть число, получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{2}$$

где $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$

- произведение элементов, стоящих соответственно на главной и на побочной диагоналях.

**Вычислим определитель второго порядка**

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \bullet 1 - 4 \bullet (-2) = 11;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \bullet 4 - 2 \bullet 2 = 0.$$

Определитель третьего порядка – это число, получаемое так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (3)$$

Запомнить эту формулу трудно. Однако существует простое правило, называемое правилом треугольников, которое позволяет легко воспроизвести выражение (3). Обозначая элементы определителя точками, соединим отрезками прямой те из них, которые дают произведения элементов определителя (рис. 1).

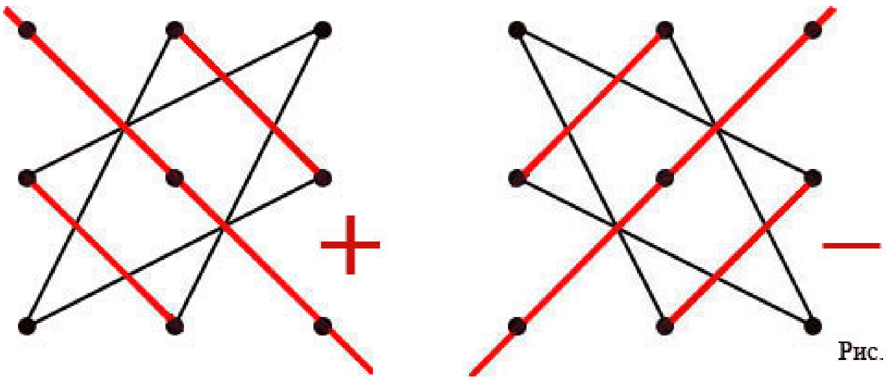



Рис. 1

**Вычислить определитель третьего порядка:**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

**Решение**. Пользуясь правилом треугольников, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \bullet 2 \bullet 4 + 1 \bullet 3 \bullet 2 + (-2) \bullet (-1) \bullet 3 - (-2) \bullet 2 \bullet 2 - 1 \bullet (-1) \bullet 4 - 0 \bullet 3 \bullet 3 = 24.$$

Вычисление определителей четвертого и последующих порядков можно свести к вычислению определителей второго и третьего порядков. Это можно сделать с помощью свойств определителей. К рассмотрению их мы и переходим.

***Свойства определителя* n*-го порядка***

Свойство 1. При замене строк столбцами (транспонировании) значение определителя не изменится

Свойство 2. Если хотя бы один ряд (строка или столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю. Доказательство очевидно.

Свойство 3. Если в определителе поменять местами два соседних параллельных ряда (строки или столбцы), то определитель поменяет знак на противоположный.

Свойство 4. Если в определителе имеются два одинаковых параллельных ряда, то определитель равен нулю:

Свойство 5. Если в определителе два параллельных ряда пропорциональны, то определитель равен нулю:

Свойство 6. Если все элементы определителя, стоящие в одном ряду, умножить на одно и то же число, то значение определителя изменится в это число раз:

Следствие. Общий множитель, содержащийся во всех элементах одного ряда, можно вынести за знак определителя

Свойство 7. Если в определителе все элементы одного ряда представлены в виде суммы двух слагаемых, то он равен сумме двух определителей:

Свойство 8. Если к элементам какого-либо ряда прибавить произведение соответствующих элементов параллельного ряда на постоянный множитель, то значение определителя не изменится:

Свойство 9. Если к элементам *i*-го ряда прибавить линейную комбинацию соответствующих элементов нескольких параллельных рядов, то значение определителя не изменится:

***Миноры и алгебраические дополнения.***

Определение. Если в определителе *n*-го порядка выбрать произвольно *p* строк и *p* столбцов ($p < n$), то элементы, находящиеся на пересечении этих строк и столбцов, образуют матрицу порядка $p^2$.

Определитель этой матрицы называется *минором* исходного определителя. Например, рассмотрим определитель $\Delta$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Из строк и столбцов с чётными номерами построим матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

называется *минором* определителя $\Delta$. Получили минор второго порядка. Ясно, что из $\Delta$ можно построить различные миноры первого, второго и третьего порядка.

Если взять элемент $a_{32}$ и вычеркнуть в определителе $\Delta$ строку и столбец, на пересечении которых он стоит, то получим минор, называемый минором элемента $a_{32}$, который обозначим через $M_{32}$:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Если минор $M_{32}$ умножить на $(-1)^{3+2}$ , где 3 + 2 – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент $a_{32}$ то полученное произведение называется *алгебраическим дополнением* элемента $a_{32}$ и обозначается $A_{32}$, т.е.

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \bullet M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Вообще, минор элемента $a_{ik}$ будем обозначать $M_{ik}$, а алгебраическое дополнение $A_{ik}$ , причём

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \bullet M_{ik}. \tag{4}$$

Для примера вычислим алгебраические дополнения элементов $a_{12}$ и $a_{33}$ определителя третьего порядка $\Delta$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

По формуле (4) получим

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\bullet\begin{vmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\bullet\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4.$$

Для вычисления определителя $n$-го порядка полезно знать следующую теорему: определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}\bullet A_{i1}+a_{i2}\bullet A_{i2}+\dots+a_{in}\bullet A_{in}.$$

$(i = 1, 2, ..., n)$

### Рассмотрим решение нескольких примеров:

### Пример

$$\begin{vmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 4\\ 6 & 1 & 3\end{vmatrix}=3\bullet(-1)^{1+2}\bullet\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-3\bullet(9-24)=45,$$

здесь разложение проведено по элементам первой строки.

### Теорема Лапласа

Обобщая понятие алгебраического дополнения.

Определение 1. *Дополнительным минором* $M`_p$ будем называть определитель $(n – p)$-порядка, полученный вычёркиванием $p$ соответствующих строк и столбцов.

Определение 2. *Алгебраическим дополнением* $A_p$ минора $M_p$ будем называть произведение дополнительного минора на $(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_p+k_1+k_2+\ldots+k_p}$, т.е.

$$A_p = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_p+k_1+k_2+\ldots+k_p} \bullet M_p^{`}, \qquad (5)$$

где

$$(i_1 + i_2 + \ldots i_p + k_1 + k_2 + \ldots + k_p)$$

сумма номеров строк и столбцов минора $M_p$.

Для примера рассмотрим определитель четвёртого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Выберем

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

тогда дополнительным минором будет

$$M_2^{`} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix};$$

далее запишем по формуле (5):

$$A_2 = (-1)^{1+2+1+3} \bullet M_2^{`} = -\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

**Тема: «Системы линейных уравнений и методы их решения»**

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит переменные только в первой степени и не содержит произведений переменных.

Например, уравнение

$$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2$$

линейное, а уравнения

$$2x_1x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 6$$

и

$$x_1^2 + 3x_2^3 + x_3 - x_4 = 8$$

не являются линейными.

В общем виде система $m$ линейных уравнений с $n$ переменными записывается так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \quad (1)$$

Числа $a_{ij} (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$

называются *коэффициентами при переменных*, а $b_i (i = 1,2,...,m)$ *свободными членами*.

Совокупность чисел $(k_1; k_2; ...; k_n)$ называется *решением системы* (1) линейных уравнений, если при подстановке их вместо переменных во все уравнения они обращаются в верные равенства.

Изучение систем линейных уравнений начинается в средней школе. В школьном курсе рассматриваются в основном системы двух линейных уравнений с двумя переменными и два способа их решения - **способ подстановки** и **способ сложения**. Эти способы являются основой изучаемого в курсе высшей математике [метода Гаусса](). Чтобы последовательно двигаться от простому к ещё более простому (сложному), повторим эти два школьных способа.

**Пример 1.** Решить систему линейных уравнений способом подстановки:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 3x + 8y = 1. \end{cases}$$

Решение. При решении способом подстановки сначала из какого-нибудь уравнения выражают одну переменную через другую. Полученное выражение подставляют в другое уравнение, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной. Затем находят соответствующее значение второй переменной.

Выразим из первого уравнения

$$2x + 3y = -4$$

данной системы *y* через *x* (можно и наоборот) и получим:

$$y = \frac{-4-2x}{3} = -\frac{4+2x}{3}.$$

Подставив во второе уравнение данной системы вместо *y* выражение $-\frac{4+2x}{3}$, получим систему

$$\begin{cases} 2x+3=-4, \\ 3x-8\bullet\frac{4+2x}{3}=1. \end{cases}$$

Данная и полученная системы равносильны. В последней системе второе уравнение содержит только одну переменную. Решим это уравнение:

$$3x-8\bullet\frac{4+2x}{3}=1,$$

$$9x-32-16x=3,$$
$$x=-5.$$

Соответствующее значение *y* найдём, подставив вместо *x* число -5 в выражение $y=-\frac{4+2x}{3}$, откуда $y=2$.

Пара (-5; 2) является решением системы линейных уравнений.

**Пример 2.** Решить систему линейных уравнений способом сложения:

$$\begin{cases} 2x+11y=15, \\ 10x-11y=9 \end{cases}$$

Решение. При решении систем линейных уравнений способом сложения мы переходим от данной системы к другой, равносильной ей системе, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.

В уравнениях данной в этом примере системы коэффициенты при *y* - противоположные числа. Сложив почленно левые и правые части уравнений, получим уравнение с одной переменной:

$$2x+11y+(10x-11y)=15-9, \text{ или } 12x=24, \ x=2.$$

Заменим одно из уравнений исходной системы, например, первое, уравнением $x=2$. Получим систему

$$\begin{cases} x=2, \\ 10x-11=9 \end{cases}$$

Решим полученную систему. Подставив значение $x=2$ в уравнение $10x-11y=9$, получим уравнение с одной переменной *y*:

$$20-11y=9, \quad y=1.$$

Пара (2; 1) является решением полученной системы линейных уравнений. Она является также решением исходной системы, так как эти две системы линейных уравнений равносильны.

**Пример 3.** Почленное сложение уравнений системы

$$\begin{cases} 4x-7y=-12, \\ 6x+3y=-18 \end{cases}$$

не приводит к исключению одной из переменных. Но если умножить все члены первого уравнения на -3, а второго уравнения на 2, то коэффициенты при *x* в полученных уравнениях будут противоположными числами:

$$\begin{cases} -12x+21y=36, \\ 12x+6y=-36. \end{cases}$$

Почленное сложение уравнений полученной в результате преобразований системы приводит к уравнению с одной переменной: $27y=0$. Из этого уравнения находим, что $y=0$. Получили

$$\begin{cases} y=0, \\ 4x-7y=-12. \end{cases}$$

Решением полученной системы, а, следовательно, и исходной системы линейных уравнений является пара чисел (-3; 0).

Решив задачи из первых трёх примеров, мы научились производить элементарные преобразования, необходимые для решениях систем линейных уравнений в курсе высшей математики.

Значительно ускоряет процесс решения систем линейных уравнений использование определителей.

**Формулы Крамера**

**Определение**. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается $\Delta$ (дельта).

$$\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$$

Получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 .$$

Найти значения $x_1$ и $x_2$ возможно только при условии, если $\Delta \neq 0$.

Этот вывод следует из следующей теоремы.

**Теорема 1** (Крамера). *Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно един-*

*ственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.*

**Пример 4.** Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases}. \qquad (2)$$

Согласно *теореме* 1 имеем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 \bullet 4 - 2 \bullet (-3)}{3 \bullet 4 - 1 \bullet 2} = \frac{4+6}{12-2} = \frac{10}{10} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3 \bullet (-3) - 1 \bullet 1}{3 \bullet 4 - 2 \bullet 1} = \frac{-9-1}{12-2} = \frac{-10}{10} = -1.$$

Итак, решение системы (2):

$$x_1 = 1, x_2 = -1.$$

**Три случая при решении систем линейных уравнений**

Как явствует из *теоремы* 1, при решении системы уравнений могут встретиться три случая:

**Первый случай: система линейных уравнений имеет единственное решение** (система совместна и определённа).

Условия:

$$\Delta \neq 0,$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

**Второй случай: система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений**

(система совместна и неопределённа)

Условия:

$$\Delta = 0,$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}.$$

т.е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны.

**Третий случай: система линейных уравнений решений не имеет**

(система несовместна)

Условия:

$$\Delta = 0,$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

Итак, система $m$ линейных уравнений с $n$ переменными называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется *определённой*, а более одного – *неопределённой*.

### Решение системы линейных уравнений методом Крамера

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

На основании теоремы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \ldots\ldots\ldots\ldots,$$ где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$

определитель системы. Остальные определители получим, заменяя столбец с коэффициентами соответствующей переменной (неизвестного) свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

**Пример 5.** Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 12 + 1 - 16 + 9 = 14 \neq 0.$$

Следовательно, система является определённой. Для нахождения её решения вычисляем определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1,$$

$$x_2 = \frac{0}{14} = 0,$$

$$x_3 = \frac{-14}{14} = -1$$

Итак, (1; 0; -1) – единственное решение системы.

Если определитель системы линейных уравнений равен нулю, то применять формулы Крамера нельзя. Такая система является либо несовместной, либо неопределённой (какой именно, можно установить с помощью метода Гаусса).

## Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Повторяя школьные способы решения систем линейных уравнений, мы производили в системе преобразования, называемые элементарными. Цель этих преобразований - получить такую систему линейных уравнений, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную, например: $x_4 = 25$. Подставляя значение переменной из этого уравнения в другие, находим значения остальных переменных.

Элементарные преобразования системы линейных уравнений - это следующие операции:

- умножение какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля;

- прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число;

- перемена местами двух уравнений системы.

Метод Гаусса состоит в том, что при помощи элементарных преобразований систему линейных уравнений приводят к такому виду, чтобы её матрица из коэффициентов оказалась треугольной. Итак, метод Гаусса.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если все решения одной являются решениями другой, и наоборот.

**Теорема 2.** *Если обе части некоторого уравнения системы* $n$ *линейных уравнений с* $n$ *переменными умножить на произвольное число* $\lambda$ *и отнять от соответствующих частей другого уравнения, то получится новая система, эквивалентная первоначальной, т.е. они или обе несовместны или обе совместны и имеют одни и те же решения.*

**Следствие.** *Если конечное число раз от произвольных уравнений системы отнимать любые другие её уравнения, умноженные на постоянные величины, то получится система, эквивалентная первоначальной.*

Дана система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $n = n$. Решая системы линейных уравнений школьными способами, мы почленно умножали одно из уравнений на некоторое число, так, чтобы коэффициенты при первой переменной в двух уравнениях были противоположными числами. При сложении уравнений происходит исключение этой переменной. Аналогично действует и метод Гаусса.

С помощью первого уравнения исключим переменную $x_1$ из второго и всех последующих уравнений. Для этого ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}},$$

к третьему – первое уравнение, умноженное на

$$-\frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad \text{и т.д.}$$

Это возможно, так как

$$a_{11} \neq 0.$$

После выполнения этих преобразований могли появиться уравнения вида

$$0 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 + \ldots + 0 \bullet x_n = a$$

Если среди них есть хотя бы одно уравнение с отличным от нуля свободным членом, то данная система уравнений является несовместной и на этом её решение закончено.

Если же во всех уравнениях, имеющих вид

$$0 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 + \ldots + 0 \bullet x_n = a$$

свободные члены равны нулю, то это означает, что система имеет решение, а уравнения этого вида – «лишние» и их исключаем из системы.

В результате получим эквивалентную (равносильную) данной системе новую систему уравнений, в которой все уравнения, начиная со второго не содержат переменную $x_1$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad a'_{32}x_2 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{p2}x_2 + \ldots + a'_{pn}x_n = b'_p \end{cases},$$

где

$$a'_{22}, \ldots, a'_{2n}, \;\; a'_{32}, \ldots, a'_{3n}, \;\; a'_{p2}, \ldots, a'_{pn},$$
$$b'_2, \;\; b'_3, \;\; b'_p \;\; -$$

новые коэффициенты и свободные члены после выполнения преобразований.

Теперь, сохраняя первое уравнение полученной системы без изменений, с помощью второго уравнения исключаем переменную $x_2$ из всех последующих уравнений. Для этого к третьему уравнению прибавим второе, умноженное на

$$-\frac{a'_{32}}{a'_{22}},$$

к четвёртому – второе, умноженное на

$$-\frac{a'_{42}}{a'_{22}} \quad \text{и т.д.}$$

В результате получим эквивалентную (равносильную) данной систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a''_{q3}x_3 + \ldots + a''_{qn}x_n = b''_q. \end{cases}$$

Продолжим процесс последовательного исключения переменных. Если при этом ни разу не появилось уравнение вида

$$0 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 + \ldots + 0 \bullet x_n = a$$

ни с отличным от нуля, ни с равным нулю свободным членом, то в итоге получим эквивалентную данной системе систему уравнений треугольного вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases}$$

(пример 6). Решение найдём "с конца". Для этого из последнего уравнения определим $x_n$. Подставив это значение в предшествующее уравнение, найдём $x_{n-1}$ и т.д.

Если же при выполнении преобразований встретилось хотя бы одно уравнение вида

$$0 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 + \ldots + 0 \bullet x_n = a$$

с равным нулю свободным членом, то в итоге получим эквивалентную исходной системе систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2s}x_s + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{ss}^{(s-1)}x_s + \ldots + a_{sn}^{(s-1)}x_n = b_s^{(s-1)}. \end{cases}$$

В ней число уравнений *s* меньше числа переменных *n,* а все коэффициенты, у которых оба индексы одинаковы, также отличны от нуля.

Оставляя члены с первыми $s$ переменными на своих местах, перенесём члены с остальными переменными в правые части уравнений и придадим им произвольные значения (пример 7). Получим систему $s$ уравнений с $s$ переменными треугольного вида, которую также легко решить "с конца" - найдём только по одному значению $x_1, x_2, \dots, x_s$ переменных. Таким образом, каждому произвольному набору значений переменных $x_{s+1}, \dots, x_n$ соответствует одно решение системы. Но существует бесконечное множество способов выбора значений этих переменных, поэтому полученная система уравнений является неопределённой. Следовательно, в этом случае неопределённой является и исходная система.

Итак, с помощью метода Гаусса можно установить, совместна или несовместна любая система $n$ линейных уравнений с $n$ переменными.

**Пример.** Применяя метод Гаусса, решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 11, \\ x_1 - 6x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. С помощью первого уравнения нужно исключить из последующих уравнений переменную $x_1$. Но первое уравнение не содержит переменной $x_1$. Поэтому сначала меняем местами первое уравнение со вторым, в которое эта переменная входит и фактически будем решать систему

$$\begin{cases} x_1+3x_2+8x_3-x_4=22, \\ \quad x_2+3x_3-x_4=10, \\ 4x_1+2x_2 \quad -3x_4=11, \\ x_1-6x_2 \quad -2x_4=0. \end{cases}$$

Шаг 1. Чтобы с помощью первого уравнения исключить переменную $x_1$ из последующих уравнений, к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на -4, а к четвёртому уравнения – первое, умноженное на -1 и получим систему

$$\begin{cases} x_1+3x_2+8x_3-x_4=22, \\ \quad x_2+3x_3-x_4=10, \\ -10x_2-32x_3+x_4=-77, \\ -9x_2-8x_3-x_4=-22. \end{cases}$$

Шаг 2. Оставляя без изменения первое уравнение новой системы, с помощью второго исключаем переменную $x_2$ из последующих уравнений. Для этого к третьему уравнению прибавляем второе, умноженное на 10, а к четвёртому – второе, умноженное на 9. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1+3x_2+8x_3-x_4=22, \\ \quad x_2+3x_3-x_4=10, \\ \quad -2x_3-9x_4=23, \\ \quad 19x_3-10x_4=68. \end{cases}$$

Шаг 3. Сохраняя первые два уравнения новой системы, с помощью третьего уравнения исключаем переменную $x_3$ из последнего уравнения, прибавляя к нему третье, умноженное на 9,5. В результате приходим к системе треугольной формы, содержащей четыре уравнения и четыре переменные:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22, \\ \quad x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ \quad -2x_3 - 9x_4 = 23, \\ \quad -95,5x_4 = 286,5. \end{cases}.$$

Следовательно, полученная и данная системы являются совместными и определёнными. Искомое решение находим «с конца». Из четвёртого уравнения имеем

$$x_4 = -3.$$

Значение

$$x_4 = -3$$

Подставляем в третье уравнение системы и получаем

$$-2x_3 - 9 \bullet (-3) = 23,$$

Откуда

$$x_3 = 2.$$

Далее, подставляем значения $x_3$ и $x_4$ во второе уравнение системы:

$$x_2 + 3 \bullet 2 - (-3) = 10,$$

т.е. $$x_2 = 1.$$

Наконец, подстановка значений

$$x_2, x_3, x_4$$

в первое уравнение даёт

$$x_1 + 3 \bullet 1 + 8 \bullet 2 - (-3) = 22,$$

Откуда

$$x_1 = 0.$$

Итак, данная система уравнений имеет единственное решение (0; 1; 2; -3).

***Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом (с помощью обратной матрицы).***

Пусть система линейных алгебраических уравнений задана в матричной форме $A \cdot X = B$, где матрица *A* имеет размерность *n* на *n* и ее определитель отличен от нуля.

Так как $|A| \neq 0$, то матрица *A* – обратима, то есть, существует обратная матрица $A^{-1}$. Если умножить обе части равенства $A \cdot X = B$ на $A^{-1}$ слева, то получим формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных переменных $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$. Так мы получили решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

*Пример.*

Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ матричным методом.

*Решение.*

Перепишем систему уравнений в матричной форме:

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Так как
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 0 - $$
$$-(-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 0 = -13$$

то СЛАУ можно решать матричным методом. С помощью обратной матрицы решение этой системы может быть найдено

как
$$X = A^{-1}\cdot B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Построим обратную матрицу $A^{-1}$ с помощью матрицы из алгебраических дополнений элементов матрицы $A$ (при необходимости смотрите статью методы нахождения обратной матрицы):

## Тема: «Метод координат. Векторы. Действия над ними. Направляющие косинусы и длина вектора»

### Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов

### Что такое векторы

Векторы занимают особое место среди объектов, рассматриваемых в высшей математике, поскольку каждый вектор имеет не только числовое значение - длину, но и физическое и геометрическое - направленность. Вектор, представленный направленным отрезком, идущим от точки *A* к точке *B,* обозначается так: $\overrightarrow{AB}$.

Физическими примерами векторных величин могут служить смещение материальной точки, двигающейся в пространстве, скорость и ускорение этой точки, а также действующая на неё сила.

Абстрагируясь от конкретных свойств, встречающихся в природе физических векторных величин, приходим к понятию *геометрического вектора*. Геометрический вектор представлен в двумерном и трёхмерном пространстве в виде *направленного отрезка,* т.е. отрезка, у которого различают начало и конец.

Если *A* - начало вектора, а *B* - его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или одной строчной буквой $\vec{a}$. На рисунке конец вектора указывается стрелкой (рис. 1).

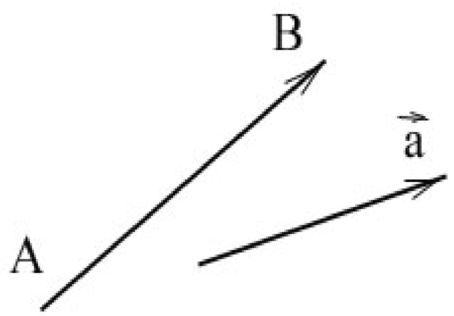


Рис. 1.

*Длиной* (или *модулем*) геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$

Два вектора называются *равными,* если они могут быть совмещены (при совпадении направлений) путём параллельного переноса, т.е. если они параллельны, направлены в одну и ту же сторону и имеют равные длины.

В физике часто рассматриваются закреплённые векторы, заданные точкой приложения, длиной и направлением. Если точка приложения вектора не имеет значения, то его можно переносить, сохраняя длину и направление в любую точку пространства. В этом случае вектор называется *свободным*. Мы договоримся рассматривать только свободные векторы.

## Линейные операции над геометрическими векторами

*Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* $\lambda$ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda| > 1$) или сжатием (при $|\lambda| < 1$) в $|\lambda|$ раз, $\vec{a}$ причём направление вектора сохраняется, если $\lambda > 0$, и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$ (Рис. 2).

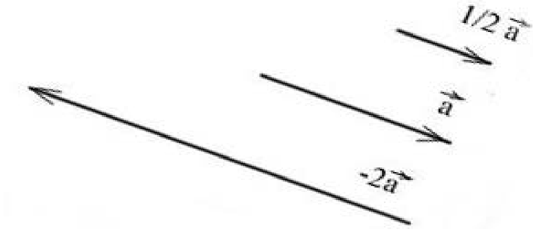



Рис. 2.

Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ всегда расположены на одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. (Можно говорить также, что эти векторы параллельны, однако в векторной алгебре принято говорить "коллинеарны".) Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны отношением

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}. \qquad (1)$$

Следовательно, равенство (1) выражает условие коллинеарности двух векторов.

*Суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$. (Рис. 3).

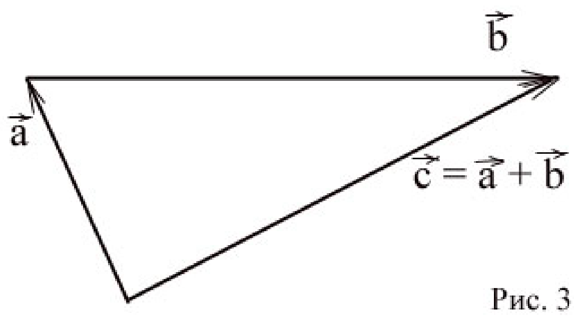



Рис. 3

Это определение может быть распределено на любое конечное число векторов. Пусть, в пространстве даны *n* свободных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Если к концу вектора $\vec{a}_1$ приложить начало вектора $\vec{a}_2$, а к концу вектора $\vec{a}_2$ - начало вектора $\vec{a}_3$ и т.д. и, наконец, к концу вектора $\vec{a}_{n-1}$ - начало вектора $\vec{a}_n$, то суммой этих векторов служит замыкающий вектор $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$, начало которого совпадает с началом первого вектора $\vec{a}_1$, а конец - с концом последнего вектора $\vec{a}_n$. (Рис. 4).

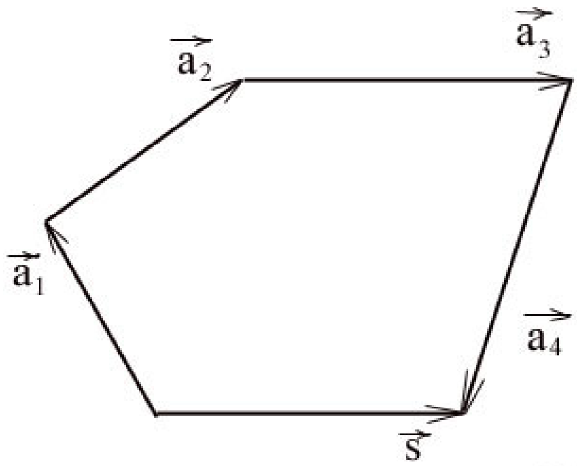


Рис. 4

Слагаемые $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются составляющими вектора $\vec{s}$, а сформулированное правило - *правилом многоугольника*. Этот многоугольник может и не быть плоским.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число -1 получается противоположный вектор $-\vec{a}$. Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ имеют одинаковые длины и противоположные направления. Их сумма $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ даёт *нулевой вектор*, длина которого равна нулю. Направление нулевого вектора не определено.

В векторной алгебре нет необходимости рассматривать отдельно операцию вычитания: вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ означает прибавить к вектору $\vec{a}$ противоположный вектор $-\vec{b}$, т.е. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

**Пример 1.** Упростить выражение:

$$2\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)+3\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)+4\vec{a}.$$

Решение:

$$\begin{aligned}&2\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)+3\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)+4\vec{a}=\\&=6\vec{a}-8\vec{b}+3\vec{b}-6\vec{a}+4\vec{a}=\\&=4\vec{a}-5\vec{b}.\end{aligned},$$

то есть, векторы можно складывать и умножать на числа так же, как и многочлены (в частности, также задачи на упрощение выражений). Обычно необходимость упрощать линейно подобные выражения с векторами возникает перед вычислением произведений векторов.

**Проекция вектора на ось**

Как известно, проекцией точки *A* на прямую (плоскость) служит основание $A_1$ перпендикуляра $AA_1$, опущенного из этой точки на прямую (плоскость).

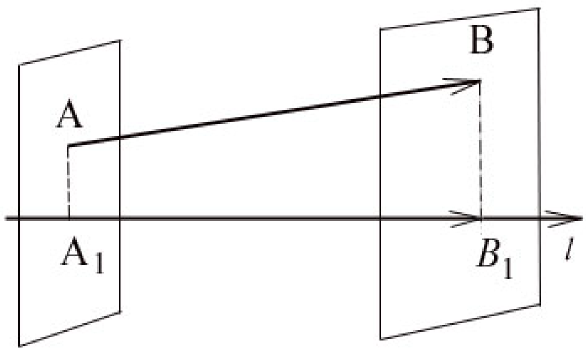



Рис. 5

Пусть $\overrightarrow{AB}$ - произвольный вектор (Рис. 5), а $A_1$ и $B_1$ - проекции его начала (точки *A*) и конца (точки *B*) на ось *l*. (Для построения проекции точки *A*) на прямую проводим через точку *A* плоскость, перпендикулярную прямой. Пересечение прямой и плоскости определит искомую проекцию.

*Составляющей вектора* $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ *на оси l* называется такой вектор $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}_l$, лежащий на этой оси, начало которого совпадает с проекцией начала, а конец - с проекцией конца вектора $\overrightarrow{AB}$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось *l* называется число

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = \pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \pm\left|\vec{a}_l\right|,$$

равное длине составляющего вектора на этой оси, взятое со знаком плюс, если направление составляющей совпадает с направлением оси *l*, и со знаком минус, если эти направления противоположны.

**Основные свойства проекций вектора на ось:**

1. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

2. При умножении вектора на число его проекция умножается на это же число.

3. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций на эту же ось слагаемых векторов.

4. Проекция вектора на ось равна произведению длины проектируемого вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos\varphi$$

## Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Упорядоченная система трёх взаимно перпендикулярных осей с общим началом отсчёта (началом координат) и общей единицей длины называется *прямоугольной декартовой системой* *координат в пространстве*. В этой упорядоченной системе координатных осей $0xyz$ ось $0x$ называется *осью абсцисс*, ось $0y$– *осью ординат*, и ось $0z$– *осью аппликат*.

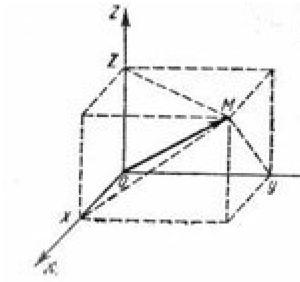


Рис. 6

С произвольной точкой $M$ пространства свяжем вектор $\overrightarrow{OM}$, называемый *радиус-вектором* точки $M$ и спроецируем его на каждую из координатных осей. Обозначим величины соответствующих проекций:

$$\text{пр}_x\overrightarrow{OM} = x,$$
$$\text{пр}_y\overrightarrow{OM} = y,$$
$$\text{пр}_z\overrightarrow{OM} = z.$$

Числа $x, y, z$ называются *координатами точки M*, соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*, и записываются в виде упорядоченной точки чисел: $M\,(x; y; z)$ (рис.6).

Вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением оси, называют *единичным вектором* (или *ортом*) оси. Обозначим через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

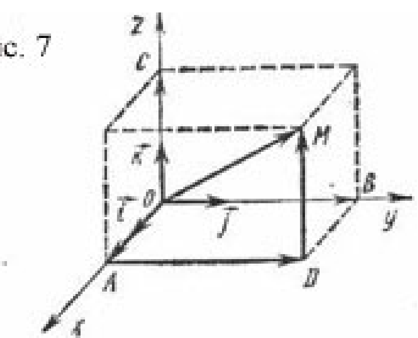
Соответственно орты координатных осей $Ox, Oy, Oz$

$$(|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1).$$

**Теорема.** Всякий вектор может быть разложен по ортам координатных осей.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ - произвольный вектор пространства

Рис. 7




$R^3$, а $x, y, z$ – его проекции на координатные оси. Так как мы рассматриваем свободные векторы, то совместим начало вектора $\vec{a}$ с началом координат и получим вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ с теми же проекциями $x, y, z$ (рис.7).

Согласно правилу сложения векторов, имеем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}.$$

Но $\begin{matrix} AD = OB, \\ \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OC}, \end{matrix}$ значит, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$

На основании правила умножения вектора на скаляр можно выразить составляющие вектора $\overrightarrow{OM}$ через его проекции и орты осей:

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i},$$
$$\overrightarrow{OB} = y\vec{i},$$
$$\overrightarrow{OC} = z\vec{k}.$$

Тогда предыдущее векторное равенство примет вид

$$\vec{a} = \overrightarrow{xi} + \overrightarrow{yi} + \overrightarrow{zk}. \qquad (2)$$

Равенство (2) называется разложением вектора по координатным осям. Коэффициентами этого разложения являются проекции вектора на координатные оси. Таким образом, коэффициентами разложения (2) вектора по координатным осям являются координаты вектора.

После выбора в пространстве определённой системы координат вектор и тройка его координат однозначно определяют друг друга, поэтому вектор (1) может быть записан в форме

$$\vec{a} = (x; y; z). \qquad (3)$$

Представления вектора в виде (2) и (3) тождественны.

### Условие коллинеарности векторов в координатах

Как мы уже отмечали, векторы называются коллинеарными, если они связаны отношением

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Пусть даны векторы $\vec{a}(a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b}(b_x;\ b_y;\ b_z)$. Эти векторы коллинеарны, если координаты векторов связаны отношением

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda,$$

то есть, координаты векторов пропорциональны.

**Пример 2.** Даны векторы $\vec{a}(3;\ -2;\ 4)$, $\vec{b}(6;\ -4;\ 8)$. Коллинеарны ли эти векторы?

Решение. Выясним соотношение координат данных векторов:

$$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \lambda.$$

Координаты векторов пропорциональны, следовательно, векторы коллинеарны, или, что то же самое, параллельны.

### Длина вектора

Вследствие взаимной перпендикулярности координатных осей длина вектора

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} = (x; y; z)$$

равна длине диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах

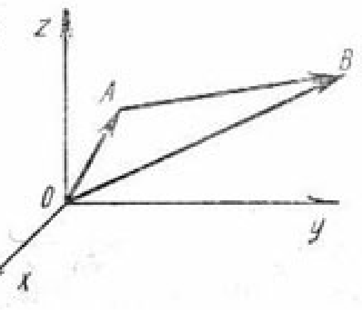
$$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k},$$

и выражается равенством

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{4}$$

Вектор полностью определяется заданием двух точек (начала и конца), поэтому координаты вектора можно выразить через координаты этих точек.

Рис. 8




Пусть в заданной системе координат начало вектора $\vec{a}$ находится в точке $A(x_1; y_1; z_1)$, конец – в точке $B(x_2; y_2; z_2)$. (рис.8).

Тогда

$$\overline{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{i} + z_1\vec{k},$$
$$\overline{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{i} + z_2\vec{k}.$$

Из равенства $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ следует, что

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}).$$

Отсюда

$$\vec{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

или в координатной форме

$$\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{5}$$

Следовательно, *координаты вектора равны разностям од-*

*ноимённых координат конца и начала вектора*. Формула (4) в этом случае примет вид

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (6)$$

**Пример 3.** Найти длину вектора *x* = (3; 0; 4).

Решение. Длина вектора равна

$$|x| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5.$$

**Пример 4.** Даны точки:

$$A(5;\ 7;\ 2),\ B(5;\ 4;\ 6),\ C(9;\ 4;\ 9)$$

Выяснить, равнобедренный ли треугольник, построенный на этих точках.

Решение. По формуле длины вектора (6) найдём длины сторон и установим, есть ли среди них две равные:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5-5)^2 + (4-7)^2 + (6-2)^2} = 5,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(9-5)^2 + (4-4)^2 + (9-6)^2} = 5.$$

Две равные стороны нашлись, следовательно, необходимость искать длину третьей стороны отпадает, а заданный треугольник является равнобедренным.

## Операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданные своими проекциями:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

или

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1),$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

или

$$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2).$$

Укажем действия над этими векторами.

*1. Сложение:*

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

или, что то же

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(x_1 + x_2;\ \ y_1 + y_2;\ \ z_1 + z_2\right),$$

т.е. при сложении двух векторов одноимённые координаты складываются.

*2.Вычитание:*

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k},$$

или, что то же

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(x_1 - x_2;\ \ y_1 - y_2;\ \ z_1 - z_2\right),$$

т.е. при вычитании двух векторов одноимённые координаты вычитаются.

*3. Умножение вектора на число:*

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} + (\lambda z_1)\vec{k},$$

или, что то же

$$\lambda\vec{a} = \left(\lambda x_1;\ \ \lambda y_1;\ \ \lambda z_1\right),$$

т.е. при умножении вектора на число все координаты умножаются на это число.

**Пример 5.** Даны два вектора:

$$\vec{a}\left(1;\ 4;\ -2\right),\ \vec{b}\left(2;\ 3;\ -4\right).$$

Найти $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Решение:

$$\vec{c} = \left(1+2;\ 4+3;\ -2-4;\right) = \left(3;\ 7;\ -6\right).$$

**Пример 6.** Даны четыре вектора:

$$\vec{a}\left(3;\ 0;\ -2\right),\ \vec{b}\left(1;\ 2;\ -5\right),\ \vec{c}\left(-1;\ 1;\ 1\right),\ \vec{d}\left(8;\ 4;\ 1\right).$$

Найти координаты векторов $\vec{e}_1 = -5\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c} + \vec{d}$ и $\vec{e}_2 = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$.

Решение.

$$\vec{e}_1 = \left(-5\bullet 3+1-6\bullet(-1)+8;\ \ -5\bullet 0+2-6\bullet 1+4;\ \ -5\bullet(-2)-5-6\bullet 1+1\right) = \\ = (0;\ \ 0;\ \ 0).$$

$$\vec{e}_2 = \left(3\bullet 3-1+1-8;\ \ 3\bullet 0-2-1-4;\ \ 3\bullet(-2)+5-1-1\right) = \\ = \left(1;\ -7;\ -3\right).$$

## Тема: «Скалярное произведение векторов и его свойства. Угол между векторами. Условие ортогональности векторов. Механический смысл скалярного произведения»

В этой статье начинаем рассматривать произведения векторов, видов которых в высшей математике рассматривается три. Прикладное значение задач на скалярное произведение двух векторов (это важно - обозначается точкой между буквами векторов) - возможность определения угла между векторами. Особое место в них занимает задача на установление перпендикулярности (ортогональности) двух векторов. Это надо просто запомнить: в векторной алгебре перпендикулярность векторов называется ортогональностью. Соответственно, два ортогональных вектора - это перпендикулярные векторы.

**Определение 1**. Скалярным произведением двух векторов называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Согласно определению, формула выглядит так:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \bullet \left|\vec{b}\right| \cos\varphi. \tag{1}$$

**Косинусы и синусы углов, часто встречающихся в задачах**

| $\varphi$ | $0\ (0^\circ)$ | $\frac{\pi}{6}\ (30^\circ)$ | $\frac{\pi}{4}\ (45^\circ)$ | $\frac{\pi}{3}\ (60^\circ)$ | $\frac{\pi}{2}\ (90^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\varphi$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin\varphi$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

Если в задаче и длины векторов, и угол между ними преподнесены "на блюдечке с голубой каёмочкой", то условие задачи и её решение выглядят так:

**Пример 1.** Даны $\vec{a},\ \vec{b}$. Найти $\vec{a}\bullet\vec{b}$, если

**Пример 1.** Даны $\vec{a},\ \vec{b}$. Найти $\vec{a}\bullet\vec{b}$, если

$$\left|\vec{a}\right| = 3;\ \ \left|\vec{b} = 8\right|;\ \ \varphi\left(\vec{a},\ \ \vec{b}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Решение:

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = 3\bullet 8\bullet\cos\frac{\pi}{6} = 3\bullet 8\bullet\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$

Сформулируем другое определение скалярного произведения двух векторов, эквивалентное определению 1.

**Определение 2**. Скалярным произведением двух векторов называется число (скаляр), равное произведению длины одного их этих векторов на проекцию другого вектора на ось, определяемую первым из указанных векторов. Формулы выглядят так:

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\text{пр}_a\vec{b} \tag{2}$$

или

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\text{пр}_b\vec{a} \tag{3}$$

**Алгебраические свойства скалярного произведения векторов**

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительное свойство)

$\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ (сочетательное относительно числового множителя свойство)

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (распределительное относительно суммы векторов свойство)

$\vec{a}\vec{a} > 0$, если $\vec{a}$ - ненулевой вектор, $\vec{a}\vec{a} = 0$ и , если $\vec{a}$ - нулевой вектор.

**Выражение скалярного произведения векторов через координаты перемножаемых векторов**

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\vec{a} = \left(x_1,\ \ y_1,\ \ z_1\right)$$

и

$$\vec{b} = \left(x_2,\ \ y_2,\ \ z_2\right),$$

то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, т.е.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

**Геометрические свойства скалярного произведения векторов**

1. Два вектора называют *ортогональными*, если скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е.

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Как уже замечалось, ортогональностью в векторной алгебре называется перпендикулярность двух векторов.

2. Два ненулевых вектора составляют острый угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно, а тупой угол - тогда и только тогда, когда их скалярное произведение отрицательно.

**Пример 2.** Доказать, что вектор $\vec{c} = \vec{a} - \dfrac{\vec{b}\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)}{\vec{b}^2}$ ортогонален (перпендикулярен) вектору $\vec{b}$.

Решение. Векторы ортогональны (перпендикулярны), если скалярное произведение этих векторов равно нулю. Перемножим векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ как многочлены:

$$\vec{c} \bullet \vec{b} = \left( \vec{a} - \frac{\vec{b}\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)}{\overrightarrow{b^2}} \right) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b} - \frac{\vec{b} \bullet \vec{b}\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)}{\overrightarrow{b^2}} = \vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{a} \bullet \vec{b} = 0.$$

Итак, ортогональность (перпендикулярность) векторов доказана.

**Пример 3.** Даны длины двух векторов и угол между ними:

$$\left|\vec{a}\right| = 3, \ \left|\vec{b}\right| = 2, \ \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Определить, при каком значении $\lambda$ векторы $3\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$ ортогональны (перпендикулярны).

Решение. Векторы ортогональны (перпендикулярны), если скалярное произведение этих векторов равно нулю. Перемножим векторы по правилу умножения многочленов:

$$\left(3\vec{a} + \lambda\vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = 3\overrightarrow{a^2} - 6\vec{a}\vec{b} + \lambda\vec{a}\vec{b} - 2\lambda\overrightarrow{b^2}.$$

Теперь вычислим каждое слагаемое:

$$3\overrightarrow{a^2} = 3 \bullet \left|\vec{a}\right|^2 = 3 \bullet 9 = 27;$$

$$6\vec{a}\vec{b} = 6 \bullet \left[\left|\vec{a}\right| \bullet \left|\vec{b}\right| \bullet \cos\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right] = 6 \bullet \left[6 \bullet \frac{1}{2}\right] = 18;$$

$$\lambda\vec{a}\vec{b} = \lambda \bullet \left[6 \bullet \frac{1}{2}\right] = 3\lambda;$$

$$2\lambda\overrightarrow{b^2} = 2\lambda \bullet \left|\vec{b}\right|^2 = 2\lambda \bullet 4 = 8\lambda.$$

Составим уравнение (равенство скалярного произведения векторов нулю), приведём подобные члены и решим уравнение:

$$
\begin{aligned}
&27-18+3\lambda-8\lambda=0\\
&9-5\lambda=0\\
&5\lambda=9\\
&\lambda=\frac{9}{5}=1,8.
\end{aligned}
$$

**Пример 4.** Даны векторы:

$$\vec{a}=\left(1;\ \ 5;\ \ 1\right),\ \ \vec{b}=\left(1;\ -5;\ \ 2\right),\ \ \vec{c}=\left(2;\ \ 1;\ \ \frac{3}{2}\right),\ \ \vec{d}=\left(0;\ \ 0;\ \ 1\right).$$

Вычислить скалярные произведения всех пар данных векторов. Какой угол (острый, прямой, тупой) образуют эти пары векторов?

Решение. Векторы даны в координатах, поэтому скалярные произведения векторов будем вычислять путём сложения произведений соответствующих координат.

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=1\bullet1+5\bullet(-5)+1\bullet2=1-25+2=-22.$$

Скалярное произведение векторов отрицательно, поэтому эти векторы образуют тупой угол.

$$\vec{a}\bullet\vec{c}=1\bullet2+5\bullet1+1\bullet\frac{3}{2}=2+5+\frac{3}{2}=\frac{17}{2}=8,5.$$

Скалярное произведение векторов положительно, поэтому эти векторы образуют острый угол.

$$\vec{a}\bullet\vec{d}=1\bullet0+5\bullet0+1\bullet1=1.$$

Скалярное произведение векторов положительно, поэтому эти векторы образуют острый угол.

$$\vec{b} \bullet \vec{c} = 1 \bullet 2 + (-5) \bullet 1 + 2 \bullet \frac{3}{2} = 2 - 5 + 3 = 0.$$

Скалярное произведение векторов равно нулю, поэтому эти векторы образуют прямой угол.

$$\vec{b} \bullet \vec{d} = 1 \bullet 0 + (-5) \bullet 0 + 2 \bullet 1 = 2.$$

Скалярное произведение векторов положительно, поэтому эти векторы образуют острый угол.

$$\vec{c} \bullet \vec{d} = 2 \bullet 0 + 1 \bullet 0 + \frac{3}{2} \bullet 1 = \frac{3}{2}.$$

Скалярное произведение векторов положительно, поэтому эти векторы образуют острый угол.

**Угол между двумя векторами**

Чтобы выразить скалярное произведение

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \bullet \left|\vec{b}\right| \cos\varphi \tag{1}$$

в координатной форме, предварительно найдём скалярные произведение ортов. По определению,

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \bullet \left|\vec{a}\right| \cos 0 = \left|\vec{a}\right|^2.$$

Итак, *скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату длины вектора*. В частности,

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1.$$

Так как векторы

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

попарно перпендикулярны, то

$$\vec{i}\bullet\vec{j}=\vec{i}\bullet\vec{k}=\vec{j}\bullet\vec{k}=0.$$

Теперь выполним умножение векторных многочленов:

$$\begin{aligned}&\vec{a}\bullet\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=\\&=x_1x_2\vec{i}\bullet\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\bullet\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\bullet\vec{k}+\\&+y_1x_2\vec{j}\bullet\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\bullet\vec{j}+y_1z_2\vec{j}\bullet\vec{k}+\\&+z_1x_2\vec{k}\bullet\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\bullet\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\bullet\vec{k}.\end{aligned}$$

Подставляя в правую часть равенства значения соответствующих скалярных произведений ортов, получим

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Получаем формулу угла между двумя векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

**Пример 5.** Даны три точки $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$, $C(2;1;2)$.
Найти угол $\varphi=\angle BAC$.

Решение. Находим координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}=(1;\ 1;\ 0),$$

$$\overrightarrow{AC}=(1;\ 0;\ 1).$$

По формуле косинуса угла между векторами получаем:

$$\cos\varphi=\frac{1\bullet1+1\bullet0+0\bullet1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\bullet\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi=60^\circ$.

**Пример 6.** Среди векторов

$$\vec{a} = (-1; 3; 5; -4),$$
$$\vec{b} = (4; 2; 2; 3),$$
$$\vec{c} = (2; -6; -10; 8)$$

Найти а) коллинеарные; б) ортогональные.

**Решение.**

а) проверим пропорциональность соответствующих координат векторов - условие коллинеарности (повторение материала предыдущей части темы "Векторы").

Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\lambda = -1/4 = 3/2 = 5/2 = -4/3.$$

Равенство не выполняется.

Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$:

$$\lambda = -1/2 = 3/-6 = 5/10 = -4/8.$$

Равенство выполняется.

Для векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\lambda = 4/2 = 2/-6 = 2/-10 = 3/8.$$

Равенство не выполняется.

Таким образом, коллинеарны векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

б) найдём скалярные произведения векторов.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = (-1) \bullet 4 + 3 \bullet 2 + 5 \bullet 2 + (-4) \bullet 3 = -4 + 6 + 10 - 12 = 0.$$

$$\vec{a} \bullet \vec{c} = (-1) \bullet 2 + 3 \bullet (-6) + 5 \bullet (-10) + (-4) \bullet 8 = -2 - 18 - 50 - 32 = -102.$$

$$\vec{b} \bullet \vec{c} = 4 \bullet 2 + 2 \bullet (-6) + 2 \bullet (-10) + 3 \bullet 8 = 8 - 12 - 20 + 24 = 0.$$

Таким образом, ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

## Тема: «Векторное произведение векторов и его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Простейшие приложения векторного произведения в науке и технике. Смешанное произведение векторов»

**Определение.** Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $\vec{c} = \left[\vec{a}\vec{b}\right]$ и удовлетворяющий следующим трём требованиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла $\varphi$ между ними, т.е.

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ является правой.

**Правые и левые тройки векторов**

Для того, чтобы получить векторное произведение двух векторов, необходимо, чтобы:

1) векторы были не коллинеарны;

2) векторы были взяты в определённом порядке.

Определённый порядок связан с понятием упорядоченных троек векторов. В этой тройке два вектора - перемножаемые векторы, а третий - векторное произведение этих векторов.

**Определение 1**. Три вектора называются упорядоченной тройкой (или просто тройкой), если указано, какой из этих векторов является первым, какой - вторым и какой - третьим.

При записи тройки векторов мы всегда будем располагать эти векторы в порядке их следования. Так, запись $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ означает, что первым элементом тройки является вектор $\vec{b}$, вторым - вектор $\vec{a}$ и третьим - вектор $\vec{c}$.

**Определение 2**. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ называется правой(левой), если выполнено одно из следующих трёх условий:

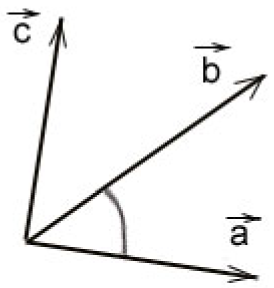


Рис. 1

1. если, будучи приведены к общему началу, эти векторы располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой, не согнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки;

2. если после приведения к общему началу вектор $\vec{c}$ располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, откуда кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ представляется совершающимся

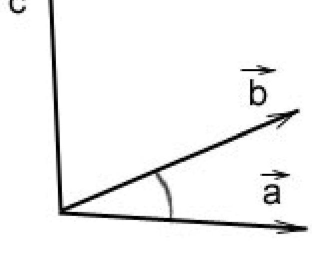


Рис. 2

против часовой стрелки (по часовой стрелке);

3. если, находясь внутри телесного угла, образованного приведёнными к общему началу векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, мы видим поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от него к $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Условия 1, 2 и 3 эквивалентны между собой. С помощью каждого из приведённых условий можно убедиться в том, что тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, изображённая на рис. 1, является правой, а тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, изображённая на рис. 2, является левой.

**Замечание.** Понятие правой и левой тройки теряет смысл для компланарных векторов.

Если две тройки векторов либо обе являются правыми, либо обе являются левыми, то принято считать, что эти тройки одной ориентации. В противном случае - две тройки противоположной ориентации.

Всего из трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ можно составить следующие шесть троек:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c};\ \vec{b}\vec{c}\vec{a};\ \vec{c}\vec{a}\vec{b} \tag{1}$$

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c};\ \vec{a}\vec{c}\vec{b};\ \vec{c}\vec{b}\vec{a} \tag{2}$$

С помощью условия 3 определения 2 легко проверить, что все три тройки (1) той же ориентации, что и тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а все три тройки (2) имеют ориентацию, противоположную $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

**Определение 3.** Аффинная или декартова система координат называется правой (левой), если три базисных вектора образуют правую (левую) тройку.

**Пример 1.** Найти длину векторного произведения векторов $\vec{c}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 2,\ \left|\vec{b}\right| = 4,\ \varphi = \frac{\pi}{4}.$

Решение:

$$\left|\vec{c}\right| = 2 \bullet 4 \bullet \sin\frac{\pi}{4} = 8 \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Итак, в чём главное отличие векторного произведения двух векторов от уже рассмотренного нами скалярного произведения? В том, что скалярное произведение двух векторов - это число, а векторное произведение векторов - это вектор.

**Пример 2.** Вычислить векторное произведение векторов $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$, если их длины $\left|\vec{a}\right| = 4$ и $\left|\vec{b}\right| = 15$, а скалярное произведение $\vec{a} \bullet \vec{b} = 48$.

Решение. Была бы очень простая задача, как в примере 1, но нам не дан синус угла между векторами. Однако из отношения скалярного произведения к произведению длин векторов можем найти косинус этого угла:

$$\cos\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \bullet \left|\vec{b}\right|} = \frac{48}{4 \bullet 5} = \frac{4}{5}.$$

Синус угла между векторами можем выразить через косинус по известному из школьного курса тригонометрическому тождеству:

$$\sin\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Теперь для вычисления векторного произведения векторов у нас есть всё. Вычисляем:

$$\vec{N} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\bullet \sin\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) =$$
$$= 4\bullet 15\bullet\frac{3}{5} = 60\bullet\frac{3}{5} = 12\bullet 3 = 36.$$

**Геометрические свойства векторного произведения векторов**

**Теорема 1.** Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю векторного произведения этих векторов.

**Теорема 2.** Длина (или модуль) векторного произведения векторов $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ равна площади *S* параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**Следствие.** Площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна половине длины векторного произведения этих векторов.

**Пример 3.** Найти

1) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из примера 1;

2) площадь треугольника, построенного на тех же векторах.

Решение:

1) из примера 1, где была найдена длина векторного произведения данных векторов, получаем, $S_{\pi} = 4\sqrt{2}$ у.е.

2) площадь искомого треугольника равна половине длины векторного произведения векторов, или, что то же самое, половине площади параллелограмма, т.е. $S_{T} = \frac{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ у.е.

**Пример 4.** Вычислить площадь треугольника *ABC*, если известны координаты его вершин:

$A$ (3; 1; -1), $B$ (-1; 0; 2), $C$ (3; 2; -2).

Решение. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left(-1-3;\ \ 0-1;\ \ 2-(-1)\right) = \left(-4;\ -1;\ 3\right)$$
$$\overrightarrow{AC} = \left(3-3;\ \ 2-1;\ -2-(-1)\right) = \left(0;\ 1;\ -1\right)$$

Площадь треугольника равна половине длины векторного произведения векторов, на которых он построен. Найдём векторное произведение векторов через их координаты:

$$\vec{N} = \left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}.$$

То есть, координаты вектора, являющегося векторным произведением исходных векторов:

$\vec{N} = \left(-2;\ -4;\ -4\right)$, откуда найдём его длину:

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Теперь получим искомую сумму треугольника:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\left|\vec{N}\right|}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

**Алгебраические свойства векторного произведения векторов**

**1.** $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\vec{a}\right]$ (свойство антиперестановочности сомножителей);

**2.** $\left[\left(\alpha\vec{a}\right)\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ (сочетательное относительно числового множителя свойство);

**3.** $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\vec{c}\right]$ (распределительное относительно суммы векторов свойство);

**4.** $\left[\vec{a}\vec{a}\right]=0$ для любого вектора $\vec{a}$.

**Выражение векторного произведения векторов в декартовых координатах**

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\vec{a}=\left(x_1;\ \ y_1;\ \ z_1\right),\ \vec{b}=\left(x_2;\ \ y_2;\ \ z_2\right),$$

то векторное произведение этих векторов имеет вид

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\left(y_1z_2-y_2z_1;\ \ z_1x_2-z_2x_1;\ \ x_1y_2-x_2y_1\right) \qquad (1).$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать определитель и переписать формулу в виде

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, получим разложение вектора $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ по базису *i*, *j*, *k*, эквивалентное (1).

**Пример 5.** Найти:

1) координаты векторного произведения векторов $\vec{c}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$;

2) длину векторного произведения векторов $\vec{c}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$,

если $\vec{a} = (2;\ 3;\ 4),\ \vec{b} = (1;\ 1;\ 3).$

Решение:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

1) $= 5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}.$

Это означает:

$$\vec{c} = (5;\ -2;\ -1).$$

2) $|\vec{c}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}.$

## Двойное векторное произведение векторов

Пусть даны три произвольных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если вектор $\vec{b}$ векторно умножается на вектор $\vec{c}$, а вектор $\vec{a}$ также векторно умножается на векторное произведение $[\vec{b}\vec{c}]$, то получающийся при этом вектор $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$ называется двойным векторным произведением.

## Смешанное произведение векторов

**Определение.** Пусть даны три произвольных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если вектор $\vec{a}$ векторно умножается на вектор $\vec{b}$, а затем получившийся при этом вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ скалярно умножается на вектор $\vec{c}$, то в результате получается число $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$, называемое смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

### Геометрический смысл смешанного произведения

**Теорема 3.** Смешанное произведение $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$ равно объёму параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ левая. Если же векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$ равно нулю.

**Следствие 1.** Справедливо равенство $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]$.

**Следствие 2.** Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

**Следствие 3.** Смешанное произведение трёх векторов, два из которых совпадают, равно нулю.

### Выражение смешанного произведения в декартовых координатах

**Теорема 4.** Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\vec{a}=\left(x_1;\ \ y_1;\ \ z_1\right),\ \vec{b}=\left(x_2;\ \ y_2;\ \ z_2\right),\ \vec{c}=\left(x_3;\ \ y_3;\ \ z_3\right),$$

то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

равно определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

**Пример 6.** Даны векторы:

$$\vec{a}(1;\ -1;\ 2),\ \vec{b}(1;\ 1;\ 4),\ \vec{c}(6;\ -1;\ 3).$$

Найти:

1) смешанное произведение векторов;

2) объём параллелепипеда, построенного на данных трёх векторах;

3) объём треугольной пирамиды, построенной на данных трёх векторах.

Решение:

1) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 28$

2) $V_{\text{пир}} = 28 \quad ед^3$

3) $V_{\text{ттр.пи}} = \dfrac{28}{6} \quad ед^3$

**Следствие.** Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов

$$\vec{a} = (x_1;\ \ y_1;\ \ z_1),\ \vec{b} = (x_2;\ \ y_2;\ \ z_2) \text{ и } \vec{c} = (x_3;\ \ y_3;\ \ z_3)$$

является равенство нулю определителя, строками которого служат координаты этих векторов, т.е. равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Тема: «Линия на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Линии 2-го порядка»**

**Декартова система координат на плоскости и в пространстве. Полярная и цилиндрическая системы координат**

*Декартовы прямоугольные координаты* (рис. 4.1)

$O$ - начало координат, $Ox$ - ось абсцисс, $Oy$ - ось ординат, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ -базисные векторы, перпендикулярные друг другу

$x = OM_x$ - абсцисса точки $M$ ($M_x$ - проекция точки $M$ на ось $Ox$ параллельно оси $Oy$), $y = OM_y$ - ордината точки $M$ ($M_y$ - проекция точки $M$ на ось $Oy$ параллельно оси $Ox$).

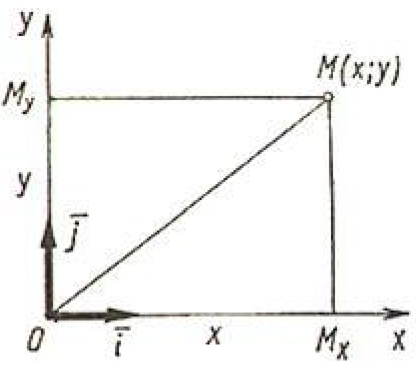


Рис. 4.1

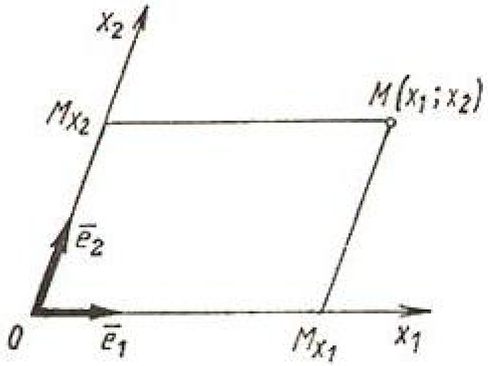


Рис. 4.2

*Декартовы косоугольные (афинные) координаты* (рис. 4.2)

$O$ - начало координат, $Ox_1, Ox_2$ - оси координат,

$x_1 = OM_{x_1}$, $x_2 = OM_{x_2}$

- координаты точки $M$ ($M_x$ - проекция точки $M$ на ось $Ox_1$, параллельно оси $Ox_2$, аналогично $M_y$), $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ - базисные векторы.

*Полярные координаты* (рис. 4.3) $O$ - полюс, $Ox$ - полярная ось, $\rho = |OM|$ - полярный радиус, $\varphi$ - полярный угол.

Главные значения $\rho$ и $\varphi$: $0 \le \rho < \infty, \ -\pi < \varphi \le \pi$ (иногда $0 \le \rho < \infty, \ 0 \le \varphi < 2\pi$).

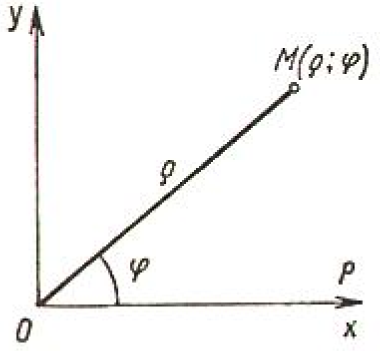



Рис. 4.3

*Выражение декартовых прямоугольных координат через полярные*

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi.$$

*Выражение полярных координат через декартовы прямоугольные*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

*Декартовы прямоугольные координаты* (рис. 4.4) $O$ - начало координат, $Ox$ - ось абсцисс, $Oy$ - ось ординат, $Oz$ - ось аппликат,

$\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\ \left(|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1,\ \bar{i}\perp\bar{j},\ \bar{i}\perp\bar{k},\ \bar{j}\perp\bar{k}\right)$ - базисные векторы. *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* - координатные плоскости, $x = OM_x$ - абсцисса точки *M* ($M_x$ - проекция точки *M* на ось *Ox* параллельно плоскости *Oyz*), $y = OM_y$ - ордината точки *M* ($M_y$ - проекция точки *M* на ось *Oy* параллельно плоскости *Oxz*), $z = OM_z$ - ордината точки *M* ($M_z$ - проекция точки *M* на ось *Oz* параллельно плоскости *Oxy*).

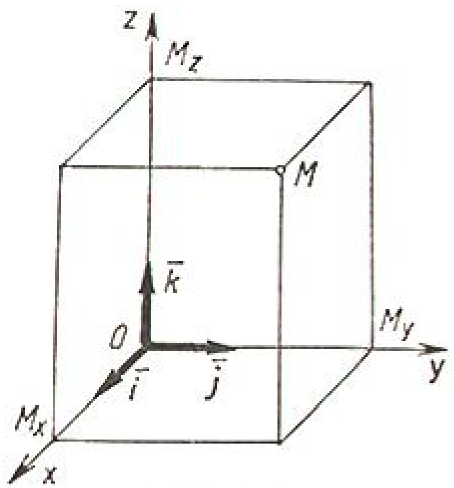



Рис. 4.4

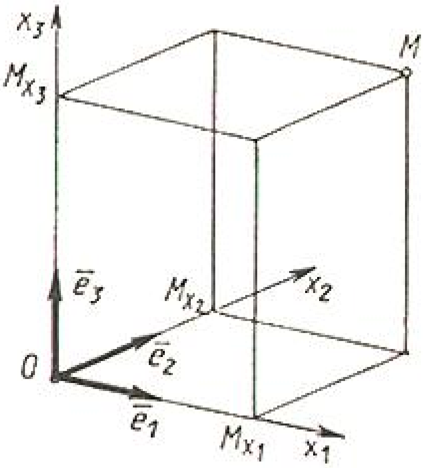



Рис. 4.5

***Для дополнительного чтения***

*Декартовы косоугольные (афинные) координаты* (рис. 4.5)

*O* - начало координат, $Ox_1,\ Ox_2,\ Ox_3$ - оси координат, $Ox_1,\ Ox_2$, $Ox_1,\ Ox_3$, $Ox_2,\ Ox_3$ - координатные плоскости, $x_i = OM_{x_i},\ \ i = 1,\ 2,\ 3,$ - координаты точки *M* ($M_{x_1}$ - проекция точки *M* на ось $Ox_1$ параллельно плоскости $Ox_1,\ Ox_3$; аналогично $M_{x_2}$, $M_{x_3}$), $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\ \left(\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3 \neq 0\right)$ - базисные векторы.

*Цилиндрические координаты* (рис. 4.6)

Главные значения $\rho,\ \varphi,\ z$: $0 \le \rho < +\infty,\ \ -\pi < \varphi \le \pi,\ \ -\infty < z < +\infty.$

Связь между декартовыми прямоугольными и цилиндрическими координатами:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

*Сферические координаты* (рис. 4.7)

Главные значения $\rho$, $\varphi$, $\theta$: $0 \le \rho < +\infty, \quad -\pi < \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$

Иногда вместо $\theta$ рассматривают $\psi$: $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2.$

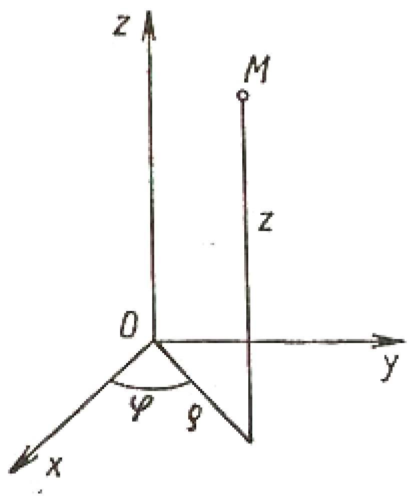



Рис. 4.6

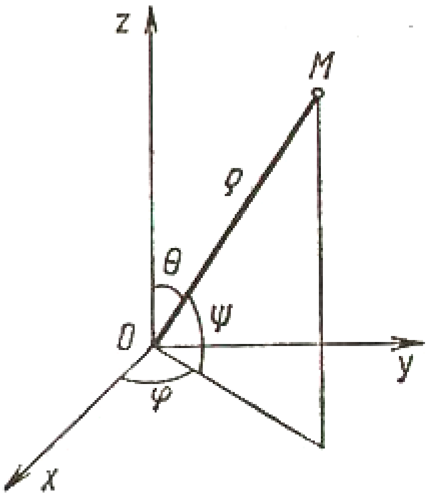



Рис. 4.7

## Линии на плоскости и их уравнения

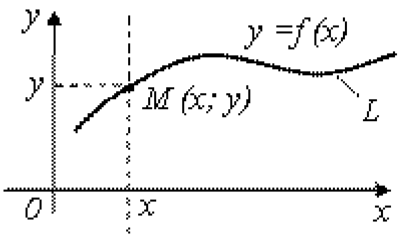



Рис. 1.9

Пусть на плоскости с декартовой системой координат изображена некоторая линия *L* (рис. 1.9). И пусть это такая линия, что каждая вертикальная прямая, пересекающая линию, пересекает ее только один раз (как на рис. 1.9). Тогда, зная абсциссу *X* любой точки *M (X; Y)* этой линии, можно однозначно найти её ординату *У*. Таким образом, указанная линия *L* устанавливает однозначное соответствие между двумя переменными *X* и

*У* (координатами её точек), а значит, *Определяет некоторую функцию*

$$y = f(x) \tag{4.1}$$

Сама же линия *L* является *Графиком этой функции*

Функция (4.1) является, по своей сути, некоторым уравнением. Ему удовлетворяют координаты (*X; У*) любой точки линии *L* и только они. Вот такое уравнение, по определению, и называется *Уравнением линии*. Естественно, что у разных линий будут и разные уравнения. Уравнение линии указывается рядом с линией (см. рис. 1.9).

Мы предполагали, что вертикальные прямые, пересекающие линию *L*, пересекают ее только один раз. Если это не так, но зато таким свойством обладают горизонтальные прямые, то тогда по ординатам *Y* точек линии будут однозначно определяться их абсциссы *X*. И тогда уравнение линии можно будет записать в виде функции

$$X = G(Y) \tag{4.2}$$

(здесь использована другая буква для обозначения функции, ибо функции (4.1) и (4.2) – разные даже для одной и той же линии).

А теперь будем считать, что *L* – совершенно произвольная (например, замкнутая) линия, которую некоторые (или даже все) и вертикальные, и горизонтальные прямые пересекают более, чем один раз. У такой линии уже не может быть уравнения ни в форме (4.1), ни в форме (4.2). Но такие уравнения (в той или другой форме) будут у отдельных кусков линии. Далее, может оказаться, что уравнения различных кусков линии можно объединить в некотором едином уравнении вида

$$F(X; Y) = 0 \tag{4.3}$$

И этому уравнению удовлетворяют координаты *(X; Y)* Любой точки линии, и только они. Тогда уравнение (4.3) будет являться уравнением данной линии. Такое уравнение называется *Неявным уравнением линии*, ибо в нем ни одна из переменных не выражена через другую – в отличие от *Явных уравнений* (4.1) *и* (4.2).

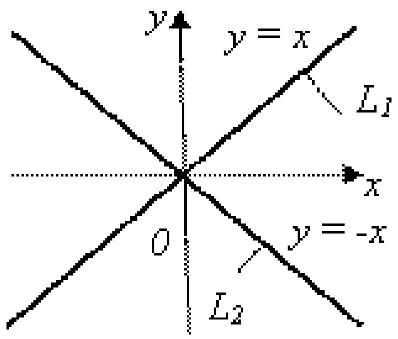


Рис.1. 10

Пример 1.

Рассмотрим рис. 1.10, на котором изображена прямая *L1* – биссектриса первого и третьего координатных углов, и прямая *L2* – биссектриса второго и четвертого координатных углов. Уравнения этих прямых очевидны: $y=x$ – уравнение*L1*, $y=-x$ – уравнение *L2*. Это – *Явные уравнения* типа (4.1). Их можно записать и в явном виде типа (4.2): $x=y$ и $x=-y$. А теперь рассмотрим объединение этих прямых, то есть линию *L*, представляющую собой крест из прямых *L1* и *L2*. Чтобы записать уравнение этого креста, нужно объединить в одно уравнение уравнения $y=x$ и $y=-x$прямых, образующих этот крест. И это уравнение очевидно: $y^2-x^2=0$. Действительно, выражая из него *Y*, получим две функции $y=x$ и $y=-x$, то есть получим уравнения тех двух прямых, которые образуют крест. Кстати, полученное уравнение креста $y^2 - x^2$ – уравнение типа (4.3), то есть неявное уравнение.

Из различных форм уравнения линии наиболее удобной является форма (4.1), потому что в этом случае уравнение линии представляет собой обычную функцию $y = f(x)$. А значит, исследование уравнения линии означает исследование функции, что является классической и хорошо разработанной математической процедурой. В принципе так же удобно иметь дело и с уравнением линии в форме (4.2). А вот неявное уравнение линии в форме (4.3) гораздо менее удобно для исследования. Поэтому такое уравнение стараются перевести (преобразовать) в явную форму (4.1) или (4.2), выражая из него *Y* через *X* или *X* через *Y* (если это возможно). Если это не удается, приходится иметь дело с неявным уравнением (4.3), которое труднее, но тоже поддается математическому исследованию.

*Пример 2*. Пусть $2y - 4x^2 = 0$ – неявное уравнение некоторой линии. Выразив из него *Y*, получим $y = 2x^2$. Это уже явное уравнение той же линии, и теперь даже ясно, какой – параболы.

Примечание. Перенеся в уравнениях (4.1) и (4.2) правую часть налево, мы сделаем эти явные уравнения неявными. Поэтому неявное уравнение линии в форме (4.3) является наиболее общим – в этом виде можно записать уравнение любой линии на плоскости с декартовой системой координат. Но не всякое такое уравнение является уравнением какой-то линии на плоскости.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяется, очевидно, лишь при $X = 0$ и $Y = 0$ одновременно и, следовательно, определяет лишь одну точку плоскости – точку $O(0;0)$. А уравнение $x^2 + y^2 = -1$ не может быть удовлетворено ни при каких $X$ и $Y$, а значит, вообще никаких геометрических объектов на плоскости не определяет. Но такие случаи малосодержательны, являются исключениями, поэтому на них останавливаться и смысла нет.

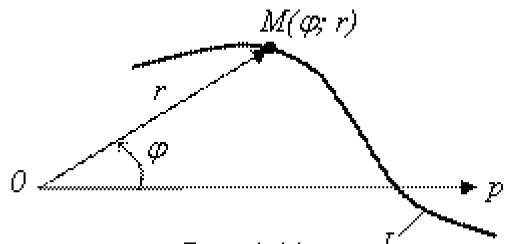


Рис. 1.11

Если на плоскости вместо декартовой системы координат введена полярная система, и на этой плоскости содержится некоторая линия $L$(рис. 1.11), то уравнение этой линии будет связывать уже не декартовы координаты *(X; Y)* произвольной точки $M$ линии $L$, а ее полярные координаты ($\varphi$; $R$). При этом если каждому $\varphi$ будет соответствовать вполне определенное $R$, то линия $L$ задает $R$ как функцию от $\varphi$:

$$r = f(\varphi) \tag{4.4}$$

Эта функция будет явным уравнением линии $L$ В полярных координатах. В противном случае уравнением линии $L$ в полярных координатах будет некое неявное уравнение вида

$$F(\varphi; r) = 0 \tag{4.5}$$

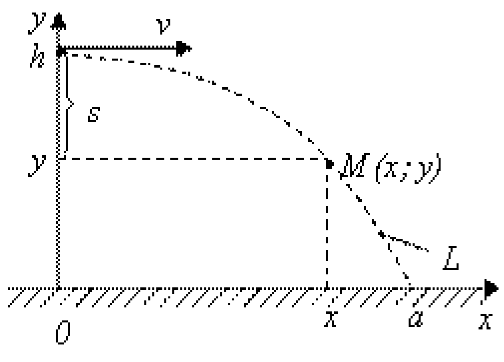


Рис. 1.12

Наконец, уравнение линии на плоскости иногда записывают и в так называемой *Параметрической форме*.

Пусть, например, по плоскости с введенной на ней декартовой системой координат движется точка *M*, положение которой в каждый момент времени *T* известно. Это значит, что координаты *(X; Y)* движущейся точки заданы как некие функции времени:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{4.6}$$

Система (4.5) определяет движение указанной точки *M(X; Y)* по плоскости, а значит, определяет и траекторию *L* движущейся точки. Эта система называется *Параметрическим уравнением линии L на плоскости.* В нем координаты *(X; Y)* точек линии связаны не непосредственно друг с другом (как в формах (4.1) – (4.3)), а через посредника – параметр *T*. Исключив из системы (4.6) этот параметр, мы можем связать *X* и *Y*непосредственно друг с другом. Кстати, параметр *T* в системе (4.6) может иметь и какой-то другой смысл, не обязательно представлять собой время.

*Пример 3*. Материальная точка поднята над поверхностью земли на высоту *H* и брошена горизонтально со скоростью *V*. Найти уравнение траектории *L* брошенной точки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

*Решение*. Рассмотрим рис. 1.12. Так как брошенная точка участвует одновременно в двух независимых движениях – равномерном горизонтально со скоростью *V* и равноускоренном вертикально с ускорением свободного падения *G*, то в любой момент времени $t \geq 0$ координаты *(X; Y)* движущейся точки *M* найдутся по хорошо известным из школьной физики формулам:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = h - s = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (t \geq 0) \tag{4.7}$$

Это и есть уравнение траектории *L* брошенной точки (параметрическое). Его, при желании, можно привести и к явному виду (4.1). Для этого из первого уравнения системы (4.7) выразим параметр $t = \frac{x}{v}$ и подставим его во второе уравнение. В итоге получим явное уравнение траектории *L* (параболы):

$$y = h - \frac{gx^2}{2v^2}. \tag{4.8}$$

Кстати, положив в (4.8) *Y* = 0 и *X* = *A*, найдем дальность полета *A*:

$$a = v\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{4.9}$$

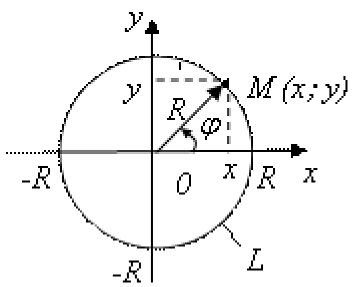


Рис. 1.13

*Пример 4*. Рассмотрим окружность радиуса *R* с центром в начале декартовой системы координат (рис. 1.13). Из рисунка очевидно, что для каждой точки *M(X; Y)*указанной окружности *L* выполняются равенства:

$$\begin{cases} x = RCos\,\varphi \\ y = RSin\,\varphi \end{cases} \quad (-\pi < \varphi \leq \pi], \tag{4.10}$$

Где $\varphi$ – полярный угол точки *M*. Система (4.10) имеет вид (4.6) при $t=\varphi$ и, следовательно, представляет собой параметрическое уравнение окружности *L*(параметром является угол $\varphi$).

Можно связать *X* и *Y* и напрямую друг с другом, без посредника $\varphi$. Для этого возведем каждое уравнение (4.10) в квадрат и сложим их. В итоге получим:

$$x^2+y^2=R^2 \tag{4.11}$$

Это – уравнение окружности *L* в декартовых координатах в неявной форме (в форме (4.3)). Выражая из этого уравнения *Y*, можем привести его и к явной форме (форме (4.1)):

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2} \tag{4.12}$$

Равенство (4.12) содержит два уравнения. При этом $y=\sqrt{R^2-x^2}$ – это явное уравнение верхней полуокружности, а $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ – нижней.

**Упражнения**

1. Решить задачу, рассмотренную в примере 3, когда точка брошена не горизонтально, а под некоторым углом $\alpha$ к поверхности земли.

<u>*Ответ*</u>: $\begin{cases} x=(vCos\alpha)\cdot t \\ y=(vSin\alpha)\cdot t-\dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$ – в параметрической форме (t ³ 0 – время).

2. Точка движется в полярной системе координат по кривой

Архимеда, если ее движение представляет собой наложение (суперпозицию) двух независимых движений: равномерного радиального движения с некоторой линейной скоростью $V$ и равномерного вращения $\rho = \frac{V}{\omega}\varphi$ радиальной прямой вокруг полюса с некоторой угловой скоростью $\omega$. Найти уравнение кривой Архимеда, если в начальный момент времени точка двинулась вдоль полярной оси.

<u>*Ответ*</u>: .

**Первая задача аналитической геометрии на плоскости**

Основных задач аналитической геометрии на плоскости две. Первая из них: *Для заданной линии найти ее уравнение.* Вторая задача – обратная: *По заданному уравнению линии построить линию.*

Начнем с рассмотрения первой, более трудной, задачи. Трудность решения этой задачи очевидна: ведь нужно найти математическое уравнение, которому будут удовлетворять координаты любой точки данной линии, и только они. Для достаточно сложных линий (например, для линии, образованной свободным движением руки) точное решение этой задачи вообще оказывается невозможным – только приближенное. Однако для не слишком сложных и, главное, четко описанных линий их уравнения найти можно. Мы, например, без труда сделали это в предыдущем параграфе для линий, изображенных на рис. 1.12 и 1.13. Рассмотрим еще несколько примеров.

<u>*Пример 1*</u>. Найти уравнения вертикальной прямой $L1$ и горизонтальной

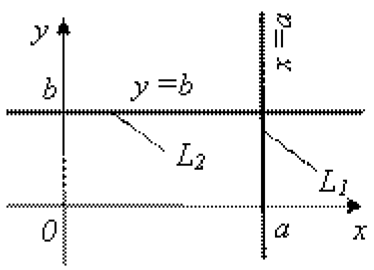


Рис.1.14

прямой $L2$, изображенных на рис. 1.14.

<u>*Решение*</u>. Уравнения этих прямых очевидны: $X = A$ – уравнение прямой $L1$, $Y = B$ – уравнение прямой $L2$. Действительно, этим уравнениям удовлетворяют координаты любой точки соответствующих прямых, и только они. В частности, $Y = 0$ – это уравнение оси $Ox$, а $X = 0$ – уравнение оси $Oy$.

<u>*Пример 2*</u>. Найти уравнение прямой $L$, изображенной на рис. 1.15.

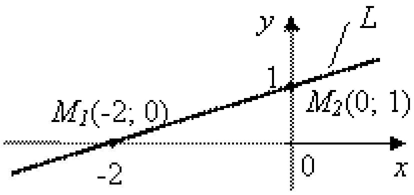



Рис. 1.15

<u>*Решение*</u>. Как известно из школьного курса математики, наклонная прямая – это график линейной функции вида $Y = Kx + B$. Значит, уравнение данной прямой $L$ имеет вид $Y = Kx + B$. Нам только нужно найти параметры $K$ и $B$ этого уравнения.

Используем рис. 1.15. Так как точки $M1(-2; 0)$ и $M2\ (0; 1)$ лежат на прямой $L$, то их координаты $(X; Y)$ должны удовлетворять уравнению прямой. Подставляя эти координаты в уравнение прямой $Y = Kx + B$, получим систему из двух равенств:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot (-2) + b \\ 1 = k \cdot 0 + b \end{cases}$$

Решая ее, находим: $k = \frac{1}{2}$; $B = 1$. Следовательно, уравнение данной прямой $L$ таково: $y = \frac{1}{2}x + 1$. Или, в неявной форме, $x - 2y + 2 = 0$.

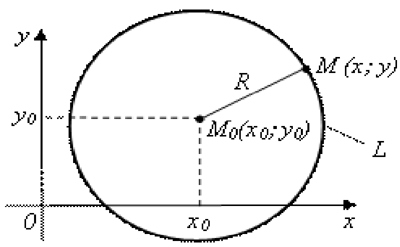



Рис. 1.16

<u>*Пример 3*</u>. Найти уравнение окружно-

сти $L$ с центром в заданной точке $M_0(x_0; y_0)$ и заданным радиусом $R$ (рис. 1.16).

*Решение*. Для любой точки *M(X; Y)* окружности *L*, и только для точек этой окружности, имеет место равенство:

$$|M_0M| = R$$

Реализуя это равенство с помощью формулы (3.1) расстояния между двумя точками, получим:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим равносильное равенство:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2. \tag{5.1}$$

Это и есть искомое уравнение указанной окружности *L*.

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$), то ее уравнение примет вид:

$$X2 + Y2 = R2 \tag{5.2}$$

Это уравнение, кстати, совпадает с уравнением (4.11), полученным ранее другим путем.

*Пример 4*. Найти уравнение линии, состоящей из точек, равноудаленных от оси *Ox* и от точки $F(0; \frac{1}{2})$.

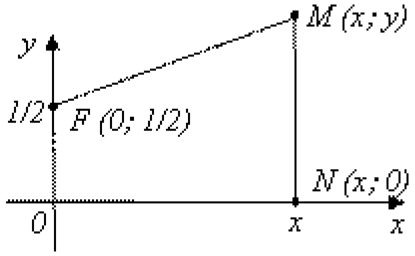



Рис. 1.17

*Решение.* Пусть *M(X; Y)* – произвольная точка указанной линии, а *N (x; 0)* – проекция точки *M(X; Y)* на ось *Ox* (рис. 1.17). По условию задачи $|FM|=|NM|$ для любой точки *M(X; Y)* линии и только для точек этой линии. Если использовать формулу (3.1) расстояния между двумя точками, то это равенство примет вид:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2}$$

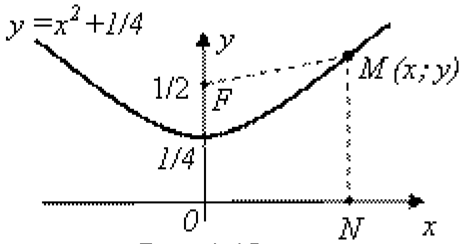


Рис. 1.18

После возведения в квадрат обеих частей и очевидных упрощений оно примет вид: $y=x^2+\frac{1}{4}$. Это и есть уравнение указанной в задаче линии. Судя по этому уравнению, эта линия – парабола *Y* = *X2*, поднятая на $\frac{1}{4}$ вдоль оси *Oy* (рис. 1.18).

А теперь рассмотрим вопрос о *Приближенных уравнениях линий*. Чаще всего этот вопрос возникает, когда речь идет о линиях, полученных в результате экспериментов.

А именно, пусть экспериментальным путем изучается зависимость *Y* = *F(X)* между двумя величинами. Например, зависимость урожайности культуры *Y* от количества внесенных под нее удобрений *X*; пройденного пути *Y* от времени движения *X*; прибыли предприятия *Y* от величины затрат *X* и т. д. В ходе эксперимента для ряда значений *X* определяются соответствующие значения *Y*, что приводит к экспериментальной таблице вида

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *X* | *X1* | *X2* | … | *Xn* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Y* | *Y1* | *Y2* | … | *Yn* |

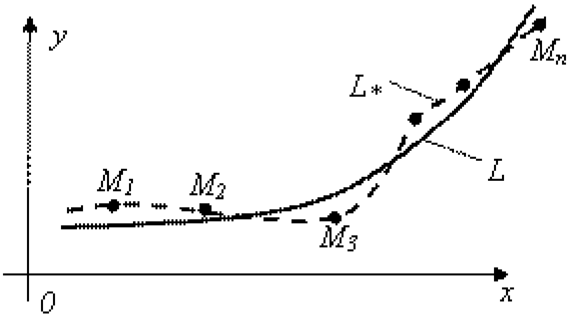


Рис. 1.19

Данные этой таблицы можно изобразить и графически в виде системы экспериментальных точек *M1 (X1; Y1), M2 (X2; Y2), …MN (Xn; Yn)* (рис. 1.19). По этим экспериментальным данным нужно получить искомое уравнение *Y = F(X)*, связывающее *Y* с *X*. Такое уравнение называется *Эмпирической формулой*, а сама задача получения такой формулы называется *Задачей построения эмпирической формулы.*

В этой задаче фактически идет речь о нахождении уравнения *Y =F(X)* линии *L* по точкам *M1*, *M2*, … *MN*, которые, вообще говоря, на этой линии не лежат, так как они содержат в себе неизбежные погрешности эксперимента и, кроме того, содержат результат влияния различных неучтенных факторов (помех). Поэтому искомая линия *L* может отличаться от линии *L**, непосредственно соединяющей экспериментальные точки. В частности, линия *L** может иметь весьма причудливую форму, в то время как сама линия *L* будет простой и гладкой (например, прямой). Линия *L* должна как бы сглаживать линию *L**, устраняя ее незначительные перепады, связанные с неточным положением экспериментальных точек.

При нахождении эмпирической формулы *Y = F(X)*, а значит, и соответствующей ей линии *L*, приходится решать две частные задачи.

Первая из них – выбор *Типа эмпирической формулы*. То есть выбор того класса функций, к которому принадлежит искомая функция $Y = F(X)$. Во многих случаях класс функций, из которого подбирается эмпирическая формула, подсказывается теоретическими представлениями о характере изучаемой зависимости (зависимость линейная вида$Y = Kx$ или $Y = Kx + B$, квадратичная вида $y = ax^2 + bx + c$, обратно пропорциональная вида $y = \frac{k}{x}$, показательная вида $y = ke^{ax}$ и т. д.). Или, если указанные теоретические представления отсутствуют, то класс функций для эмпирической формулы подбирают по характеру расположения экспериментальных точек.

После того, как вид эмпирической формулы выбран, то есть первая частная задача решена, остается определить *Наилучшие значения входящих в эту формулу числовых коэффициентов.* Эта задача (вторая частная задача) уже более легкая, ибо решается стандартным методом – *Методом наименьших квадратов*. В соответствии с этим методом наилучшими значениями параметров эмпирической формулы считаются те, при которых сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от эмпирической кривой $Y = F(X)$ была бы минимальной.

Вручную реализовывать метод наименьших квадратов трудоемко, но это и не требуется – это обычно делается по стандартным программам на ЭВМ.

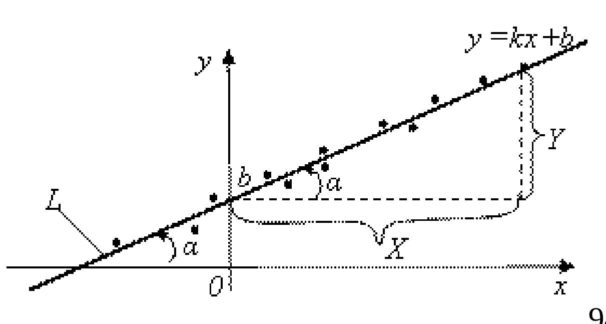


Рис 1.20

Впрочем, в простейшем (и наиболее часто встречающимся на практике) случае, когда экспериментальные точки располагаются приблизительно по прямой, можно обойтись и без метода наименьших квадратов – можно все сделать вручную, графическим путем.

В этом случае эмпирическая формула *Y* = *F(X)* строится, $k = tg\alpha = \frac{Y}{X}$ естественно, в виде уравнения прямой *Y* = *Kx* + *B*. Параметры  и *B* этого уравнения имеют наглядный геометрический смысл (рис.1.20), поэтому могут быть найдены из чертежа. Сама прямая *L,* сглаживающая экспериментальные точки, строится на глаз, вручную. Этот графический путь почти исключает вычисления, он нагляден, и при достаточном навыке дает результаты ненамного худшие, чем метод наименьших квадратов.

Кстати, этим путем можно построить и достаточно хорошие эмпирические формулы для ряда экспериментальных кривых – параболы, гиперболы и т. д., но на этом останавливаться не будем.

**Упражнения**

1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(-2;3)$.

*Ответ:* *Y* = -1,5 *X*

2. Написать уравнение линии, по которой движется точка *M(x; y),* равноудаленная от начала координат и от точки *A*(-4; 2). Лежат ли на этой линии точки *B*(-2;1), *C*(2;3), *D*(1;7)?

*Ответ:* *Y* = 2 *X* + 5. Точки *B* и *D* лежат на линии, *C* – не лежит.

3. Найти уравнение линии, по которой движется точка, оставаясь постоянно вдвое ближе к оси *Ox*, чем к оси *Oy*. Построить линию по ее уравнению.

$y = \pm\frac{1}{2}x$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{2}x$

*Ответ:* – крест из прямых  и

4. Найти уравнение линии, состоящей из таких точек, что разность расстояний от каждой из них до точек $F1(-2;-2)$ и $F2(2;2)$ равна 4. Построить линию по ее уравнению.

*Ответ:* $y = \frac{2}{x}$ – гипербола.

5. По данным эксперимента, представленным в таблице, графическим путем подобрать эмпирическую формулу вида $Y = Kx + B$.

| $X$ | -0,20 | 0,20 | 0,40 | 0,60 | 0,70 | 0,80 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 0,96 | 1,40 | 1,56 | 1,74 | 1,92 | 2,04 |

*Ответ*: $Y = 1{,}03X + 1{,}19$.

**Вторая основная задача аналитической геометрии на плоскости**

Эта задача обратна первой. То есть уравнение линии $L$ дано, а по нему эту линию нужно построить. Указанная задача существенно проще первой основной задачи, и решается она стандартными методами.

Пусть, например, уравнение некоторой линии $L$ задано в декартовых координатах в виде функции $Y = F(X)$ (в явном виде). Требуется по данному уравнению линии $L$ построить саму линию $L$. В данном случае линия $L$ – это просто график функции $Y = F(X)$.

В принципе, построить линию – это значит нанести на

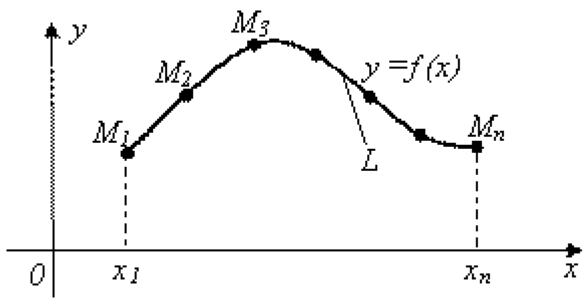


Рис.1.21

плоскость все точки линии, совокупность которых и образует линию. Точками, лежащими на линии, будут те и только те точки *M (X; Y),* координаты *(X; Y)* которых удовлетворяют уравнению линии $Y = F(X)$. Так как на любой линии лежит бесчисленное множество точек, то определить координаты каждой из них и нанести все их на плоскость невозможно. Поэтому на практике при построении линии по ее уравнению $Y = F(X)$ поступают так. Из области определения функции $Y = F(X)$ (то есть из множества всех тех значений *X*, для которых можно найти *Y*) на выбранном участке оси *Ox* выбирают ряд значений *(X1; X2; … Xn)* аргумента *X*, и по уравнению линии $Y = F(X)$ вычисляют соответствующий им набор значений (*Y1;Y2; … Yn*) функции *Y*. В итоге получают таблицу вида

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *X* | *X1* | *X2* | … | *XN* | (6.1) |
| *У* | *У1* | *У2* | … | *Yn* | |

Содержащую координаты *N* точек (*M1 (X1; Y1)*; *M2 (X2; Y2)*; … *MN(Xn; Yn)*) искомой линии. Нанося эти точки на плоскости *Xoy* и соединяя их плавной кривой, строят искомую линию *L* (рис. 1.21). Этот хорошо известный способ называется *Построением линии по точкам.*

По точкам, очевидно, можно построить и линию по ее явному уравнению $r = f(\varphi)$ в полярных координатах. Для этого нужно задать ряд значений полярного угла $\varphi$ и для них найти соответствующие значения полярного радиуса *R*. Затем по найденным точкам (*M1 (φ1; R1)*; *M2 (φ2; R 2)*; … *MN (φN; R N)*) строят и саму линию.

Наконец, по точкам можно построить и линию, заданную уравнением в параметрической форме, то есть заданную системой уравнений вида (4.6). Для этого для ряда выбранных значений (*T1; T2; … Tn*) параметра *T* вычисляют соответствующие значения *X* И *Y,* что приводит к таблице вида:

| *T* | *T1* | *T2* | … | *Tn* | (6.2) |
|---|---|---|---|---|---|
| *X* | *X1* | *X1* | … | *Xn* | |
| *Y* | *Yn* | *Yn* | … | *Yn* | |

В итоге находятся и точки (*M1 (X1; Y1)*; *M2 (X2; Y2)*; … *MN (Xn; Yn)*), по которым строят и саму линию.

Отметим, что качество построенной по точкам линии будет выше, если в состав точек, по которым строится линия, будут включены наиболее интересные и важные точки этой линии – ее вершины, впадины, точки пересечения линии с осями координат, точки разрыва линии, и т. д., а также будет учтена возможная симметрия линии, ее повторяемость (периодичность) и другие ее особенности. Получение всей этой важной информации о линии связано с математическим исследованием уравнения линии, на чем мы подробно остановимся позднее – в § 3 главы 4.

Примечание. Если уравнение линии задано в неявной форме (например, в виде $F(x;y)=0$ или в виде $F(\varphi; R)=0$), то и математическое исследование такого уравнения, и нахождение точек такой линии существенно усложняется. Например, задав в уравнении $F(X;Y)=0$ значение *X*, нам придется для нахождения соответствующего значения (значений) *Y* решать это уравнение относительно *Y*. А это может оказаться сделать и непросто. Возможно, даже придется решать это уравнение приближенно машинным путем (на ЭВМ).

Отметим еще следующее. Построение линии по ее уравнению значительно упрощается, если это уравнение принадлежит к известному типу. Например, если уравнение линии представляет собой линейную функцию вида $y = kx + b$, квадратичную функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, показательную функцию вида $y = a^x$, логарифмическую функцию вида $y = \log_a x$ и т. д. Тогда сразу становится известен тип самой линии (прямая, парабола, показательная кривая, логарифмическая кривая и т. д.). Остается лишь установить детали этой линии. Скажем, для параболы – это направление ее ветвей, координаты вершины, точки пересечения с осями координат. После получения этой информации легко строится и сама парабола.

*Пример 1*. Построить линию, имеющую уравнение $y = 4x - x^2$.

*Решение*. Уравнение линии представляет собой квадратичную функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, где *A* = -1; *B* = 4;*C* = 0, поэтому данная линия – парабола. Ветви этой параболы направлены вниз, т. к. $a = -1 < 0$. Найдем вершину параболы. Абсциссу *XB* вершины найдем по известной школьной формуле:

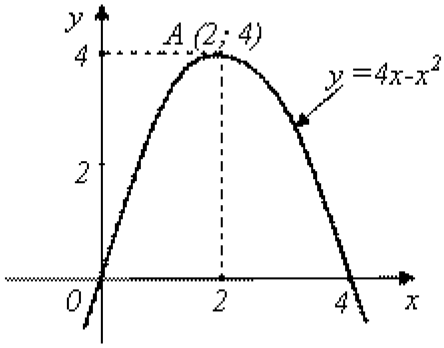
$$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$$

А ординату вершины *YB* найдем по уравнению параболы: $y_в = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$. Итак, точка *A* (2;4) – вершина параболы.

Теперь найдем точки пересечения параболы с осью *Ox*. На этой оси $Y=0$, поэтому получаем:

$y=0 \Rightarrow 4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0$ Þ $X1 = 0$ и $X2 = 4$.

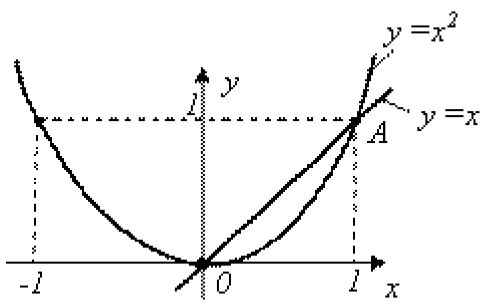
Итак, парабола пересекает ось *Ox* в двух точках: *X1* = 0 и *X2* = 4. А теперь строим параболу (данных для ее построения достаточно).




При построении на одном чертеже нескольких линий может возникнуть *Вопрос об определении точек пересечения этих линий*.

Пусть, например, *Y =F1(X)* и *Y=F2(X)* – уравнения некоторых двух линий, и требуется найти точки их пересечения. Так как искомые точки должны одновременно принадлежать обеим линиям, то и их координаты *(X;Y)* должны одновременно удовлетворять уравнениям обеих линий. То есть они должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} y=f_1(x) \\ y=f_2(x) \end{cases} \tag{6.3}$$




Из уравнений этих линий. Обратно, решив систему (6.3), мы найдем такую пару (или такие пары) значений *(X;Y),* которые будут одновременно удовлетворять обоим уравнениям этой системы. А это значит, что точки с найденными координатами *(X;Y)* Лежат на обеих линиях, то есть являются точками пересечения этих линий.

Таким образом, *Найти точки пересечения линий – это зна-*

*чит решить систему из уравнений этих линий.*

*Пример 2*. Найти точки пересечения прямой $Y = X$ и параболы $У=x2$. Сделать иллюстрирующий чертеж.

*Решение*. Составим и решим систему из уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases} -$$

- два решения системы. Таким образом, имеются две точки пересечения данных прямой и параболы: точка $O(0;0)$ и точка $A$ (1;1). Иллюстрация этого представлена выше.

**Упражнения**

1. Построить линию, имеющую уравнение $Xy = 0$.

*Ответ*: крест из координатных осей $Ox$ и $Oy$.

2. Построить линию, имеющую уравнение $2X – 3Y = 6$.

*Ответ:* прямая, пересекающая ось $Ox$ в точке $x = 3$ и ось $Oy$ в точке $y = -2$.

3. Найти точки пересечения прямой $Y = X$ и кубической параболы $y = x^3$.

*Ответ:* $O(0;\ 0)$; $M1(1;\ 1)$; $M2(-1;\ -1)$.

4. Построить в полярных координатах линию, имеющую уравнение $r = 2\varphi$.

*Ответ:* кривая Архимеда. Ее удобно строить по точкам, используя таблицу значений:

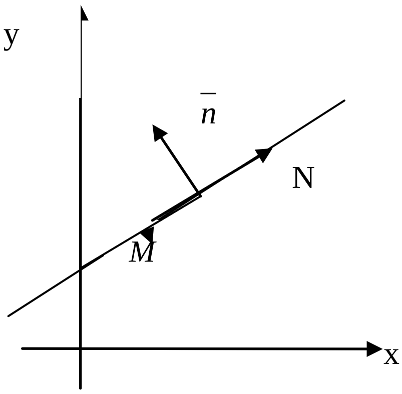
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | 0 | P/2 | P | 3p/2 | 2p | 5p/2 | … |
| $R$ | 0 | P | 2p | 3p | 4p | 5p | … |

5. Построить линию, имеющую следующее уравнение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$$

<u>*Ответ*</u>: парабола *Y* = *X2*.

**Прямая на плоскости и ее уравнение**




$\overline{MN}$ -на прямой, и он перпендикулярен вектору $\bar{n}$, значит их скалярное произведение равно 0.

Имеем: $\bar{n}$(A,B); $\overline{MN}\,(x - x_0; y - y_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$$

$Ax + By + C = 0$ -общее уравнение прямой

Общим оно называется потому, что в этом виде можно записать уравнение любой прямой на плоскости. Впрочем, для горизонтальных, вертикальных и наклонных прямых удобнее записывать их конкретные уравнения.

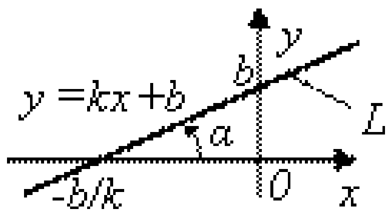


Рис. 1.22

Остановимся подробнее на уравнениях наклонных прямых $y = kx + b$, хорошо известных еще из школьного курса математики. Прямая *L* с уравнением $y = kx + b$ изображена на рис. 1. 22:

$k = tg\,\alpha$ – см. рис.

$b$ – см. рис.

Величина $k = tg\alpha$ называется *Угловым коэффициентом прямой L* (прямой $y = kx + b$), а величина *B* определяет точку пересечения этой прямой с осью *Oy*. Само уравнение $y = kx + b$ называется *Уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Для построения прямой по ее уравнению $y = kx + b$ достаточно найти и нанести на плоскость *Xoy* любые две ее точки. Удобнее всего в качестве этих точек взять точки пересечения прямой с осями координат.

<u>*Пример 1*</u>. Построить линию *L*, имеющую уравнение $y = 2x - 7$ (или, что то же самое, построить график функции $y = 2x - 7$).

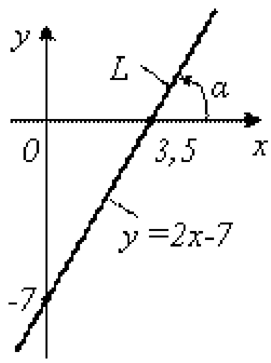


Рис. 1.23

<u>*Решение*</u>. Данное уравнение $y = 2x - 7$ – это уравнение вида $y = kx + b$ при $k = 2$ и $b = -7$. Но уравнение вида $y = kx + b$ – уравнение наклонной прямой. Значит, наша линия *L* – наклонная прямая. Найдем точки ее пересечения с осями координат.

А) *С осью ох*: на оси *Ox* *Y* = 0, поэтому из уравнения прямой получаем: $y = 0 \Rightarrow 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = 3{,}5$ - точка пересечения прямой с осью *Ox*.

Б) *С осью оу*: на оси *Oy* *X* = 0, поэтому из уравнения прямой получаем: $x = 0 \Rightarrow y = -7$ - точка пересечения прямой с осью *Oy*.

А теперь строим прямую *L* (рис. 1.23).

<u>*Пример 2*</u>. Найти угол $\alpha$, под которым прямая $y = 2x - 7$ наклонена к оси *Ox* (см. рис. 1.23).

*Решение*. Из уравнения прямой $y = 2x - 7$ определяем ее угловой коэффициент *K*: $k = 2$. Но $k = tg\alpha$. Значит, $tg\alpha = 2$, откуда

$$\alpha = arctg\,2 + \pi n \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Согласно таблице (таблице Брадиса) $arctg\,2 = 63°26'$. Значит,

$$\alpha = 63°26' + 180° \cdot n \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Так как $k = tg\alpha = 2 > 0$, то угол $\alpha$ острый ($0° < \alpha < 90°$). Это подтверждает и рис. 1.23. Чтобы из предыдущей формулы получить такой угол $\alpha$, нужно в ней положить $n = 0$. В итоге получим окончательно: $\alpha = 63°26'$.

А теперь рассмотрим несколько важных стандартных задач на прямые на плоскости.

**Задача 1**. Пусть на прямой *L* известна только одна ее точка *M0(X0; Y0)*. Каким будет уравнение этой прямой?

*Решение*. Если эта прямая вертикальная, то ее уравнением будет, очевидно, уравнение $x = x_0$, а если горизонтальная – то уравнение $y = y_0$. Если же прямая *L* наклонная, то для полного задания этой прямой, а значит, и для возможности найти ее уравнение нужно, кроме точки *M0(X0; Y0)*, через которую проходит прямая, задать еще и угол $\alpha$ – угол наклона прямой к оси *Ox*. Или, что более удобно, задать угловой коэффициент $k = tg\alpha$ этой прямой (см. рис. 1.24).

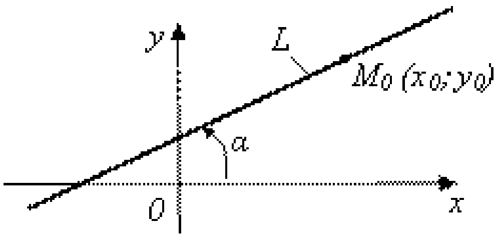


Рис. 1.24

*M0(X0; Y0)* – задана;

$$k = tg\alpha \text{ – задан}$$

Уравнение изображенной на рис. 1.24 прямой *L* будем искать в виде $y = kx + b$. Величина *K* уже известна. А для определения величины *B* подставим в это уравнение координаты *(X0; Y0)* точки *M0,* лежащей на прямой. В результате найдем *B*:

$$y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - kx_0$$

Подставляя найденное значение *B* в уравнение $y = kx + b$, получим:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (7.3)$$

Это и есть искомое уравнение прямой *L*, изображенной на рис. 1.24 (уравнение прямой, проходящей через заданную точку *M0(X0; Y0)* и имеющую заданный угловой коэффициент *K*).

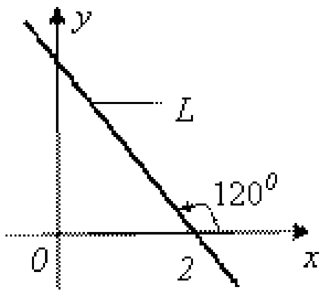


Рис 1.25

*Пример 3*. Найти уравнение прямой *L*, изображенной на рис. 1.25.

*Решение*. Данная прямая *L* проходит через точку *M0*(2; 0) и имеет угловой коэффициент

$$k = tg\alpha = tg120^0 = tg(180^0 - 60^0) = tg(-60^0) = -tg60^0 = -\sqrt{3}$$

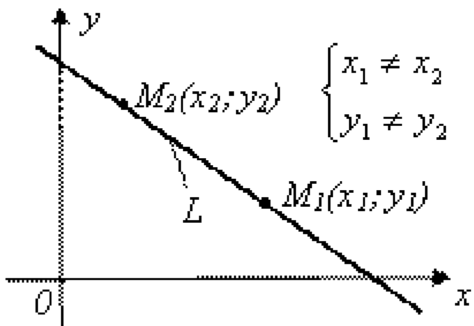


Рис 1.26

Поэтому, согласно (7.3), получаем следующее уравнение прямой *L*:

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x-2) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

**<u>Задача 2</u>**. Пусть теперь на наклонной прямой *L* заданы две какие-либо ее точки *M1(X1; Y1)* и *M2(X2; Y2)*. Нужно найти уравнение этой прямой (рис. 1.26).

*<u>Решение</u>*. Уравнение данной наклонной прямой *L* будем искать в виде $y = kx + b$. Здесь ни *K*, ни *B* не известны. Но зато на прямой *L* известны две ее точки *M1(X1; Y1)* и *M2(X2; Y2)*. Подставляя координаты каждой из них в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными для определения *K* и *B*. Решая ее, получим:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \end{cases} \tag{7.4}$$

Подставляя найденные значения *K* и *B* в уравнение $y = kx + b$, после упрощений получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{7.5}$$

Это и есть уравнение наклонной прямой, проходящей через две заданные точки *M1(X1; Y1)* и *M2(X2; Y2)*.

*<u>Пример 4</u>*. Найти уравнение прямой, проходящей через точки *A*(-1; 2) и *B*(2; 0), и найти точку пересечения этой прямой с осью *Oy*.

*<u>Решение</u>*. Приняв точку *A*(-1; 2) за точку *M1(X1; Y1)*, точку

$B$(2; 0) за точку *M2(X2; Y2)* (а можно и наоборот!) и воспользовавшись уравнением (7.5), получим:

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{0-2}\Leftrightarrow\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}\Leftrightarrow 2x+3y-4=0 .$$

Это и есть искомое уравнение прямой (в форме общего уравнения (7.2)). Выразив из него $Y$, можем записать это уравнение и в явном виде $y=kx+b$:

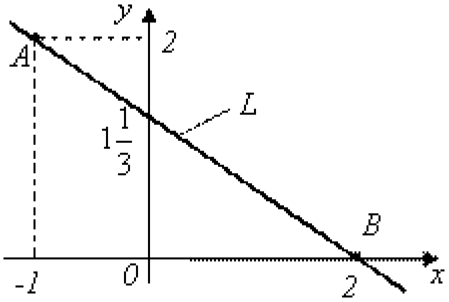


Рис.1.27

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3} .$$

Величина $b=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ и определяет точку пересечения данной прямой с осью $Oy$. Эта прямая $L$ изображена на рис. 1.27.

<u>**Задача 3**</u>. Пусть $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ – уравнения некоторых двух данных наклонных прямых. Требуется установить:

А) параллельны они или нет?

Б) перпендикулярны или нет?

В) если не параллельны и не перпендикулярны, то каков угол $\alpha$ между ними?

<u>*Решение*</u>. а) Пусть прямые *L1* и *L2* параллельны (рис. 1.28 (а)):

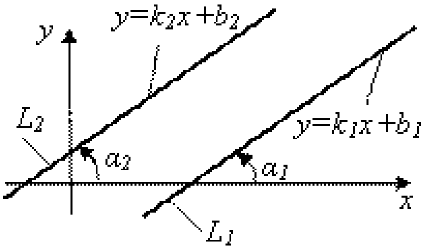



Рис. 1.28 (а)

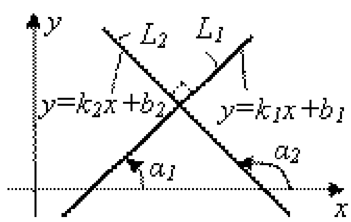



Рис. 1.28 (б)

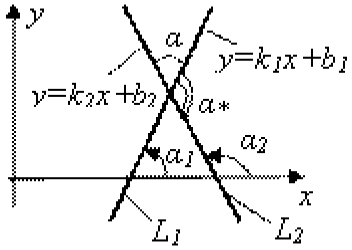
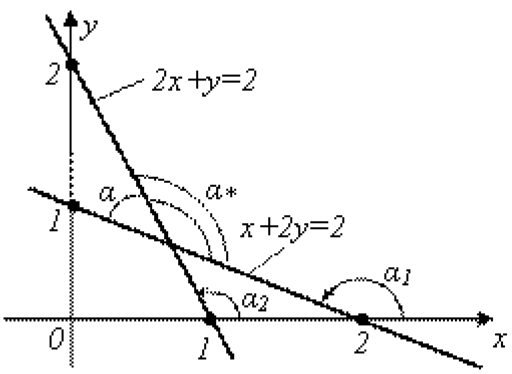



Рис. 1.28 (в)

Тогда $\alpha_1 = \alpha_2$, а значит, $k_1 = k_2$, ибо $k_1 = tg\alpha_1$, а $k_2 = tg\alpha_2$. Обратно, если $k_1 = k_2$, то $tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha_2$, откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$ или что $\alpha_1$ отличается от $\alpha_2$ на угол $\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \dots$). В любом из этих двух случаев прямые *L1* и *L2* одинаково наклонены к оси *Ox*, а значит между собой параллельны.

Таким образом, *Прямые* $y = k_1 x + b_1$ *и* $y = k_2 x + b_2$ *параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты*:

$$k_1 = k_2 \tag{7.6}$$




Условие (7.6) называется *Условием параллельности прямых*.

Пример 5. Показать, что прямые $y = \frac{1}{2}x$ и $x - 2y + 4 = 0$ параллельны.

*Решение*. Из уравнения первой прямой следует, что ее угловой коэффициент $k_1 = \frac{1}{2}$. Чтобы получить $y = \frac{1}{2}x$ угловой коэффициент *K2* другой прямой $x - 2y + 4 = 0$, нужно привести её уравнение к виду $y = kx + b$ - к виду с угловым коэффициентом. Делая это, получаем $y=\frac{1}{2}x+2$, откуда следует: $k_2=\frac{1}{2}$. Так как $k_1=k_2$, то указанные прямые действительно параллельны.

Б) Пусть прямые *L1* и *L2* перпендикулярны (рис. 1.28 (б)). Тогда углы их наклона к оси *Ox* отличаются один от другого на прямой угол. То есть $\alpha_2-\alpha_1=\frac{\pi}{2}$ или $\alpha_1-\alpha_2=\frac{\pi}{2}$. А значит, в любом случае имеет место равенство: $\alpha_2=\alpha_1\pm\frac{\pi}{2}$. Но тогда

$$k_2=tg\alpha_2=tg(\alpha_1\pm\frac{\pi}{2})=-Ctg\alpha_1=-\frac{1}{tg\alpha_1}=-\frac{1}{k_1}$$

То есть получаем:

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \tag{7.7}$$

Условие (7.7) является *Условием перпендикулярности прямых*.

*Пример 6*. Подтвердить перпендикулярность прямых $x-3y=4$ и $3x+y-1=0$.

*Решение.* Преобразуя уравнения этих прямых к виду $y=kx+b$ (к виду с угловым коэффициентом), находим:

$$x-3y=4\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3};\ k_1=\frac{1}{3}$$

$$3x+y-1=0\Leftrightarrow y=-3x+1;\ k_2=-3.$$

Так как условие (7.7) выполняется, то указанные прямые перпендикулярны.

В) Пусть теперь прямые *L1* и *L2* составляют между собой угол $\alpha$ (рис. 1.28 (в)), отличный от прямого. Впрочем, углом между прямыми можно, при желании, считать и угол $\alpha_*$. Но так как в сумме $\alpha$ и $\alpha_*$ составляют, очевидно, 180°, то зная $\alpha$, можно найти и $\alpha_*$: $\alpha_* = 180^\circ - \alpha$.

Угол $\alpha$, согласно рис. 1.28 (в), представляет собой разность углов $\alpha_1$ и $\alpha_2$. То есть или $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, или $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Найдя $\alpha_1$ и $\alpha_2$, найдем и $\alpha$.

<u>*Пример 7.*</u> Найти угол между прямыми $x + 2y = 2$ и $2x + y = 2$.

<u>*Решение.*</u> Сначала построим прямые и обозначим на рисунке интересующий нас угол $\alpha$.

Из рисунка очевидно, что $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Найдем $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Для этого сначала найдем $k_1 = tg\,\alpha_1$ и $k_2 = tg\,\alpha_2$ – угловые коэффициенты прямых:

$$x + 2y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1;\ k_1 = -\frac{1}{2}$$

$$2x + y = 2 \Leftrightarrow y = -2x + 2;\ k_2 = -2.$$

Отсюда следует:

$$tg\,\alpha_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = arctg(-\frac{1}{2}) + \pi n = -arctg 0{,}5 + \pi n =$$
$$= -26^\circ 34' + 180^\circ \cdot n = |\text{полагаем } n = 1| = -26^\circ 34' + 180^\circ = 153^\circ 26';$$

$$tg\,\alpha_2 = -2 \Rightarrow \alpha_2 = arctg(-2) + \pi n = -arctg 2 + \pi n = -63^\circ 26' + 180^\circ \cdot n =$$
$$= |\text{полагаем } n = 1| = -63^\circ 26' + 180^\circ = 116^\circ 34'.$$

Значит,

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 153^\circ 26' - 116^\circ 34' = 36^\circ 52';\ \alpha_* = 143^\circ 08'.$$

**<u>Задача 4</u>**. Пусть $ax + by + c = 0$ – уравнение некоторой прямой *L* на плоскости в общем виде. И пусть *M0(X0; Y0)*– некоторая точка плоскости, не лежащая на этой прямой. Требуется найти расстояние *D* от указанной точки до указанной прямой.

*<u>Решение</u>.* Рассмотрим рис. 1.29. Если данная прямая *L* горизонтальна или вертикальна, то решение поставленной задачи труда, естественно, не представляет. Поэтому будем считать, что *L* – наклонная прямая. В этом случае задачу можно решить по следующей схеме:

1. Из заданного уравнения $ax + by + c = 0$ прямой *L* находим ее угловой коэффициент *K*.

2. Находим $k_* = -\dfrac{1}{k}$ – угловой коэффициент прямой *L**, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно прямой *L*.

3. Используя равенство (7.3), записываем уравнение прямой *L**:

$$y - y_0 = k_*(x - x_0)$$

4. Решаем систему

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y - y_0 = k_*(x - x_0) \end{cases}$$

Из уравнений прямых *L* и *L** и находим точку *M1(X1; Y1)* – точку их пересечения.

5. Наконец, используя формулу (3.1) для нахождения расстояния между двумя точками плоскости, находим искомое расстояние $d = |M_0M_1|$.

Если осуществить приведенную выше схему, то в итоге получается следующая простая формула (убедитесь в этом самостоятельно):

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{7.8}$$

Это – формула расстояния от заданной точки $M_0(x_0; y_0)$ до заданной прямой $ax + by + c = 0$. Кстати, эта формула оказывается справедливой не только для наклонной, но и для горизонтальной и для вертикальной прямой (убедитесь в этом самостоятельно).

*Пример 8*. В треугольнике *ABC* с вершинами *A*(-3;0); *B*(2;5); *C*(3;2) найти длину *H* высоты *BD*.

*Решение*. Искомая высота *H* есть расстояние от точки *B* до прямой *L*, проходящей через точки *A* и *C*. Чтобы найти это расстояние, нужно сначала найти уравнение этой прямой *L*. Его найдем, используя уравнение (7.5) прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad \frac{x + 3}{3 + 3} = \frac{y - 0}{2 - 0} \Rightarrow \frac{x + 3}{6} = \frac{y}{2} \Rightarrow x - 3y + 3 = 0.$$

Итак, $x - 3y + 3 = 0$ – уравнение прямой *AC* (в общем виде). А теперь по формуле (7.8) найдем расстояние *H* от точки *B* до этой прямой:

$$h = \frac{|2 - 3 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \approx 3{,}16.$$

**Линии второго порядка**

*Общим уравнением второго порядка* называется уравнение вида: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

где коэффициенты *A, B, C* одновременно не равны нулю.

Линии, определяемые такими уравнениями, называются *кривыми второго порядка*. *Центром* некоторой линии называется такая точка плоскости, по отношению к которой точки этой линии расположены симметрично парами. Линии второго порядка, обладающие единственным центром, называются *центральными*. Координаты центра S ($x_0$; $y_0$) линии определяются из системы:

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+D=0 \\ Bx_0+Cy_0+E=0 \end{cases}$$

Обозначим через $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. При $\Delta\neq0$ кривая второго порядка будет центральной. Причем, при $\Delta>0$ уравнение является уравнением *эллиптического типа*. Каждое эллиптическое уравнение является уравнением либо обыкновенного эллипса, либо вырожденного эллипса (точка), либо мнимого эллипса (в этом случае уравнение не определяет на плоскости никакого геометрического образа).

При $\Delta<0$ уравнение является уравнением *гиперболического типа*. Каждое гиперболическое уравнение определяет либо обыкновенную гиперболу, либо вырожденную (пару пересекающихся прямых).

При $\Delta=0$ линия второго порядка не является центральной. Такие уравнения называются уравнениями *параболического типа* и определяют на плоскости либо обыкновенную параболу, либо пару параллельных (или совпадающих) прямых, либо не определяют на плоскости никакого геометрического образа

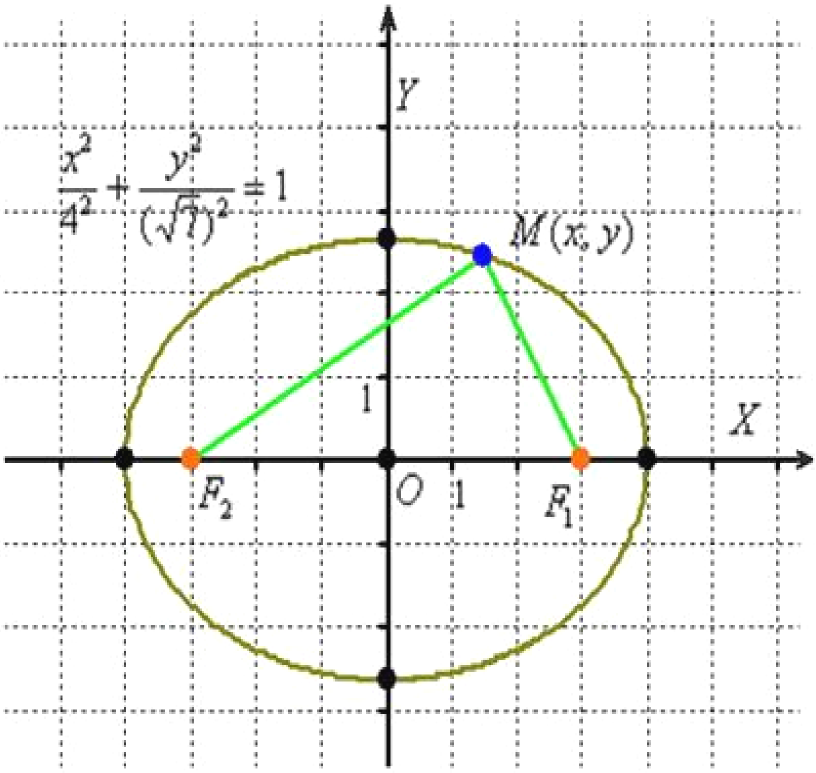
Классификация кривых второго порядка:

- Эллипс
- Окружность
- Гипербола
- Парабола

**Эллипс** – это множество всех точек плоскости, сумма расстояний до каждой из которых от двух данных точек $F_1, F_2$, называемых **фокусами** эллипса, – есть величина постоянная, численно равная длине большой оси этого эллипса: $2a$.

При этом расстояния между фокусами меньше данного значения: $|F_1F_2| < 2a$.

Сейчас станет всё понятнее:




Представьте, что синяя точка «ездит» по эллипсу. Так вот, какую бы точку эллипса $M(x;y)$ мы ни взяли, сумма длин отрезков $F_1M$, $F_2M$ всегда будет одной и той же:

$$|F_1M|+|F_2M|=2a=const$$

Убедимся, что в нашем примере значение суммы $|F_1M|+|F_2M|$ действительно равно восьми. Мысленно поместите точку «эм» в правую вершину эллипса, тогда: $|F_1M|+|F_2M|=1+7=8=2a$, что и требовалось проверить.

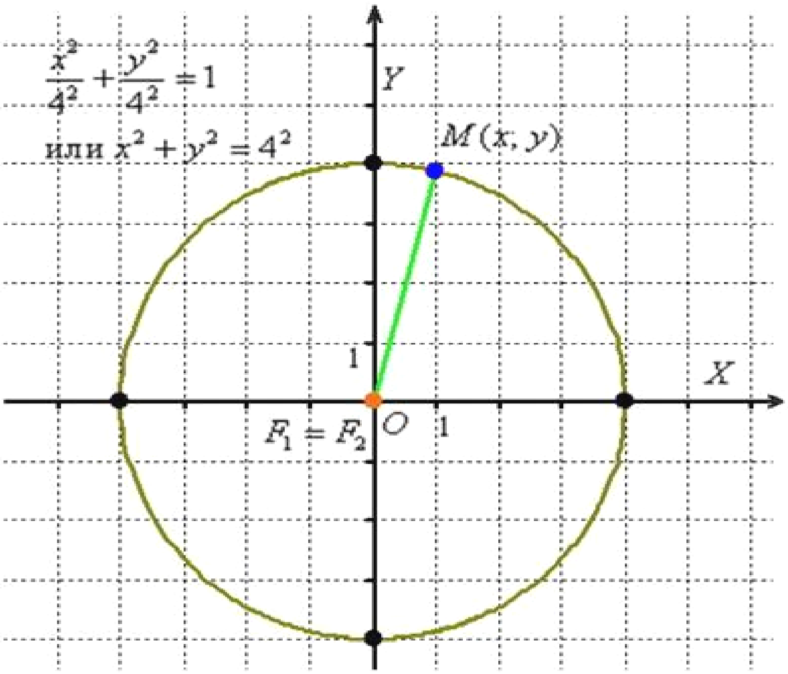
**Окружность – это частный случай эллипса**

Действительно, в случае равенства полуосей каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ принимает вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, который рефлекторно преобразуется к $x^2+y^2=a^2$ – хорошо известному из школы уравнению окружности с центром в начале координат радиуса «а».

На практике чаще используют запись с «говорящей» буквой «эр»: $x^2+y^2=r^2$. Радиусом называют длину отрезка $r=|OM|$, при этом каждая точка $M(x;y)$ окружности удалена от центра $O$ на расстояние радиуса.

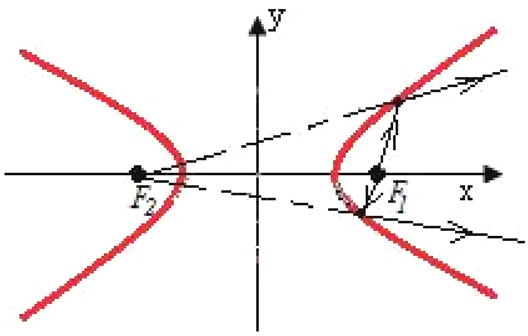
Заметьте, что определение эллипса остаётся полностью корректным: фокусы совпали $F_1=F_2$, и сумма длин совпавших отрезков $|F_1M|+|F_2M|$ для каждой точки окружности – есть величина постоянная. Так как расстояние между фокусами $2c=0$, то **эксцентриситет** $\varepsilon=\frac{c}{a}$ **любой окружности равен нулю**.

Строится окружность легко и быстро, достаточно вооружиться циркулем. Тем не менее, иногда бывает нужно выяснить координаты некоторых её точек, в этом случае идём знакомым путём – приводим уравнение $x^2+y^2=r^2$ к бодрому матановскому виду: $y^2=r^2-x^2$ $y=\sqrt{r^2-x^2}$ – функция верхней полуокружности; $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ – функция нижней полуокружности.



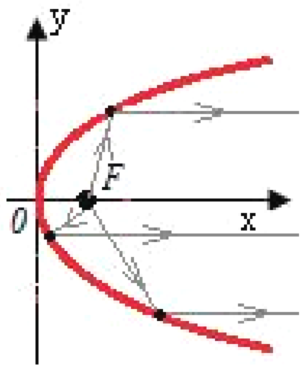

Гипербола

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-каноническое уравнение гиперболы




Парабола

$y^2=\pm 2px$
$x^2=\pm 2py$-канонические уравнения параболы



Уравнение в полярных координатах.

Полярное уравнение, общее по форме для эллипса, одной ветви гиперболы и параболы имеет вид:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi}$$

где φ,ρ - полярные координаты произвольной точки линии, *p* – параметр, ε - эксцентриситет. При этом полярная система координат выбрана следующим образом: полюс находится в фокусе, полярная ось направлена в сторону, противоположную ближайшей к этому фокусу директрисы.

В частности, при ε=0, получим уравнение окружности в полярных координатах: ρ=R

## Тема: «Плоскость. Прямая в пространстве»

*Векторное параметрическое уравнение прямой* в пространстве:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad t \in (-\infty,\ +\infty),$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор некоторой фиксированной точки $M_0$, лежащей на прямой, $\vec{a}$ — ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой (называемый её направляющим вектором), $\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой.

*Параметрические уравнения прямой* в пространстве:

$$x = x_0 + t\alpha,\ y = y_0 + t\beta,\ z = z_0 + t\gamma, \quad t \in (-\infty,\ +\infty),$$

где $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — координаты некоторой фиксированной точки $M_0$, лежащей на прямой; $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ — координаты вектора, коллинеарного этой прямой.

*Каноническое уравнение прямой* в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

где $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — координаты некоторой фиксированной точки $M_0$, лежащей на прямой; $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ — координаты вектора, коллинеарного этой прямой.

*Общее векторное уравнение прямой*[*уточнить*] в пространстве:

Поскольку прямая является пересечением двух различных плоскостей, заданных соответственно общими уравнениями:

$$(\vec{r},\ \vec{N}_1) + D_1 = 0 \text{ и } (\vec{r},\ \vec{N}_2) + D_2 = 0,$$

то уравнение прямой можно задать системой этих уравнений:

$$\begin{cases} (\vec{r},\ \vec{N}_1) + D_1 = 0, \\ (\vec{r},\ \vec{N}_2) + D_2 = 0. \end{cases}$$

*Векторное уравнение прямой в пространстве*[1]:196-199:

Уравнение прямой в пространстве можно записать в виде векторного произведения радиуса-вектора произвольной точки этой прямой $\vec{r}$ на фиксированный направляющий вектор прямой $\vec{a}$:

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M},$$

где фиксированный вектор $\vec{M}$, ортогональный вектору $\vec{a}$, можно найти, подставляя в это уравнение радиус-вектор какой-нибудь одной известной точки прямой.

**Взаимное расположение точек и прямых на плоскости**

Три точки $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ и $(x_3,\ y_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Отклонение* точки $(x_1,\ y_1)$ от прямой $Ax + By + C = 0$ может быть найдено по формуле

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где знак перед радикалом противоположен знаку $C$. Отклонение по модулю равно *расстоянию между точкой и прямой*; оно положительно, если точка и начало координат лежат по разные стороны от прямой, и отрицательно, если по одну сторону.

В пространстве расстояние от точки $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямой, заданной параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha, \\ y = y_0 + t\beta, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + t\gamma, \end{cases}$$

можно найти как минимальное расстояние от заданной точки до произвольной точки прямой. Коэффициент $t$ этой точки может быть найден по формуле

$$t_{\min} = \frac{\alpha(x_1 - x_0) + \beta(y_1 - y_0) + \gamma(z_1 - z_0)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

### Параллельные прямые в пространстве

Две **прямые** в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются скрещивающимися (рис. 322).

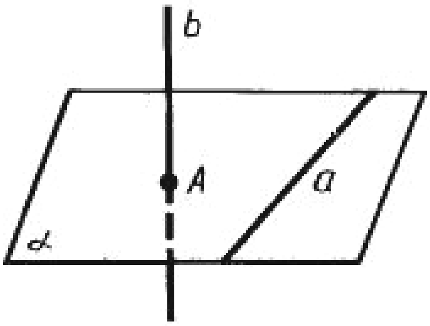



Рис. 322

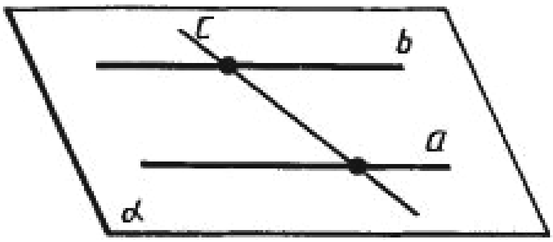



Рис. 323

### Плоскость – основные понятия, обозначения и изображение

Простейшими и основными геометрическими фигурами в трехмерном пространстве являются точка, прямая и плоскость. Мы уже имеем представление о точке и прямой на плоскости. Если поместить плоскость, на которой изображены точки и прямые, в трехмерное пространство, то мы получим точки и прямые в пространстве. Представление о плоскости в пространстве позволяет получить, к примеру, поверхность стола или стены. Однако, стол или стена имеют конечные размеры, а плоскость простирается за их границы в бесконечность.

Точки и прямые в пространстве обозначаются также, как и на плоскости – большими и маленькими латинскими буквами соответственно. Например, точки $A$ и $Q$, прямые $a$ и $d$. Если заданы две точки, лежащие на прямой, то прямую можно обозначить двумя буквами, соответствующими этим точкам. К примеру, прямая $AB$ или $BA$ проходит через точки $A$ и $B$. Плоскости принято обозначать маленькими греческими буквами, например, плоскости $\alpha$, $\gamma$ или $\pi$.

При решении задач возникает необходимость изображать плоскости на чертеже. Плоскость обычно изображают в виде параллелограмма или произвольной простой замкнутой области.


Плоскость обычно рассматривается вместе с точками, прямыми или другими плоскостями, при этом возникают различные варианты их взаимного расположения. Переходим к их описанию.

**Взаимное расположение плоскости и точки**

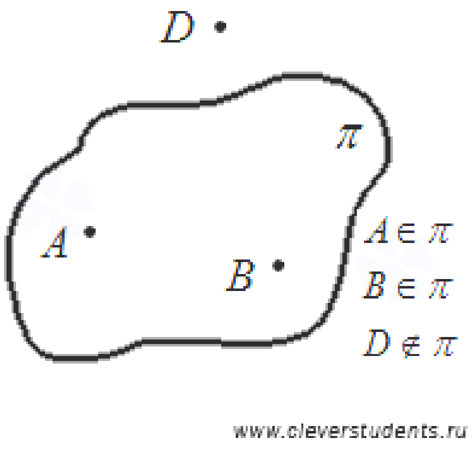
Начнем с аксиомы: в каждой плоскости имеются точки. Из нее следует первый вариант взаимного расположения плоскости и точки – точка может принадлежать плоскости. Другими словами, плоскость может проходить через точку. Для обозначения принадлежности какой-либо точки какой-либо плоскости используют символ «$\in$». Например, если плоскость $\pi$ проходит через точку *A*, то можно кратко записать $A \in \pi$.

Следует понимать, что на заданной плоскости в пространстве имеется бесконечно много точек.

Следующая аксиома показывает, сколько точек в пространстве необходимо отметить, чтобы они определяли конкретную плоскость: через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, причем только одна. Если известны три точки, лежащие в плоскости, то плоскость можно обозначить тремя буквами, соответствующими этим точкам. Например, если плоскость проходит через точки *A*, *B* и *C*, то ее можно обозначить *ABC*.

Сформулируем еще одну аксиому, которая дает второй вариант взаимного расположения плоскости и точки: имеются по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Итак, точка пространства может не принадлежать плоскости. Действительно, в силу предыдущей аксиомы через три точки пространства проходит плоскость, а четвертая точка может как лежать на этой плоскости, так и не лежать. При краткой записи используют символ «$\notin$», который равносилен фразе «не принадлежит».

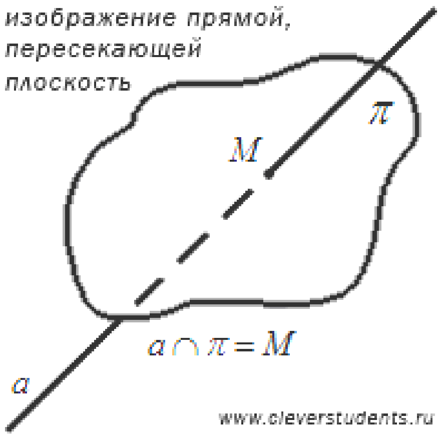
К примеру, если точка *A* не лежит в плоскости $\pi$, то используют краткую запись $A \notin \pi$.



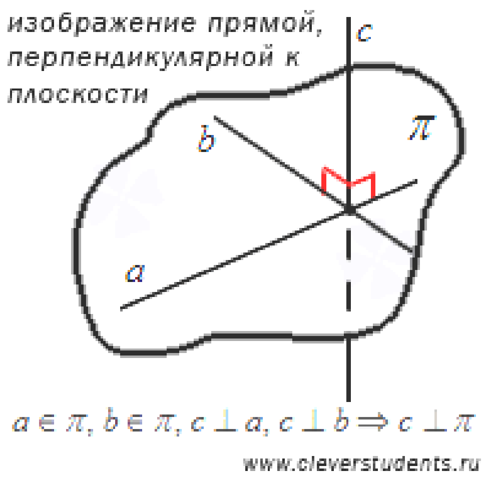

*Прямая и плоскость в пространстве.*

Во-первых, прямая может лежать в плоскости. В этом случае, в плоскости лежат хотя бы две точки этой прямой. Это устанавливается аксиомой: если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки этой прямой лежат в плоскости. Для краткой записи принадлежности некоторой прямой данной плоскости пользуются символом «$\in$». Например, запись $a \in \pi$ означает, что прямая *a* лежит в плоскости $\pi$.

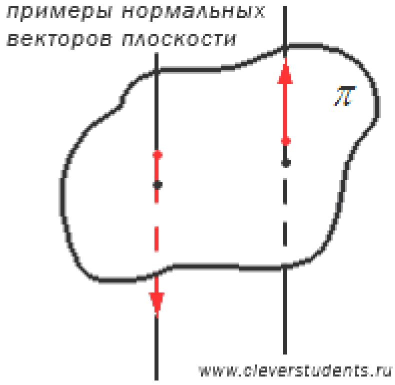

Во-вторых, прямая может пересекать плоскость. При этом прямая и плоскость имеют одну единственную общую точку, которую называют точкой пересечения прямой и плоскости. При краткой записи пересечение обозначаю символом «$\cap$». К примеру, запись $a \cap \pi = M$ означает, что прямая $a$ пересекает плоскость $\pi$ в точке $M$. При пересечении плоскости некоторой прямой возникает понятие угла между прямой и плоскостью.




Отдельно стоит остановиться на прямой, которая пересекает плоскость и перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Такую прямую называют перпендикулярной к плоскости. Для краткой записи перпендикулярности используют символ «$\perp$». Для более глубокого изучения материала можете обратиться к статье перпендикулярность прямой и плоскости.



Особую значимость при решении задач, связанных с плоскостью, имеет так называемый нормальный вектор плоскости. Нормальным вектором плоскости является любой ненулевой вектор, лежащий на прямой, перпендикулярной этой плоскости.




В-третьих, прямая может быть параллельна плоскости, то есть, не иметь в ней общих точек. При краткой записи параллельности используют символ «$\|$». Например, если прямая *a* параллельна плоскости $\pi$, то можно записать $a \| \pi$. Рекомендуем подробнее изучить этот случай, обратившись к статье параллельность прямой и плоскости.

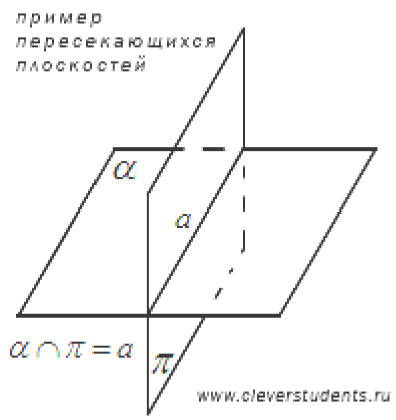

$AB \in \pi,\ a \notin \pi,\ a \| AB,\ a \| \pi$

Следует сказать, что прямая, лежащая в плоскости, делит эту плоскость на две полуплоскости. Прямая в этом случае называется границей полуплоскостей. Любые две точки одной полуплоскости лежат по одну сторону от прямой, а две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от граничной прямой.

***Взаимное расположение плоскостей***

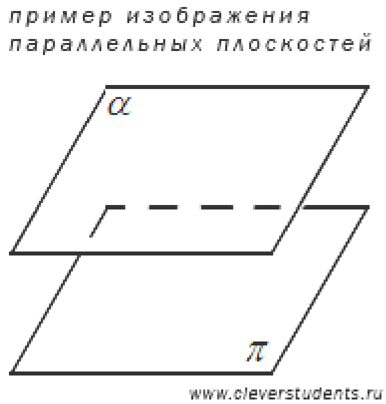
Две плоскости в пространстве могут совпадать. В этом случае они имеют, по крайней мере, три общие точки.

Две плоскости в пространстве могут пересекаться. Пересечением двух плоскостей является прямая линия, что устанавливается аксиомой: если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.




В этом случае возникает понятие угла между пересекающимися плоскостями. Отдельный интерес представляет случай, когда угол между плоскостями равен девяноста градусам. Такие плоскости называют перпендикулярными. О них мы поговорили в статье перпендикулярность плоскостей.

Наконец, две плоскости в пространстве могут быть параллельными, то есть, не иметь общих точек. Рекомендуем ознакомиться со статьей параллельность плоскостей, чтобы получить полное представление об этом варианте взаимного расположения плоскостей.



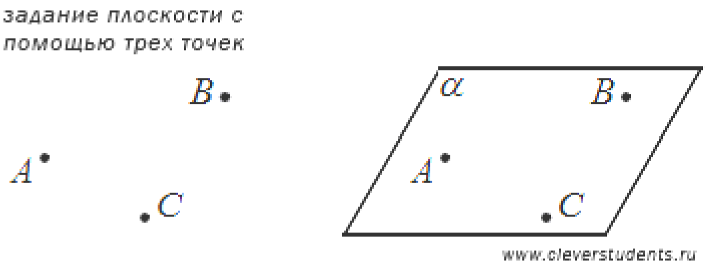

Также интересны случаи, когда несколько плоскостей пересекаются по одной прямой и несколько плоскостей пересекаются в одной точке. О таком взаимном расположении плоскостей смотрите статьи пучок плоскостей и связка плоскостей.

***Способы задания плоскости.***

Сейчас мы перечислим основные способы задания конкретной плоскости в пространстве.

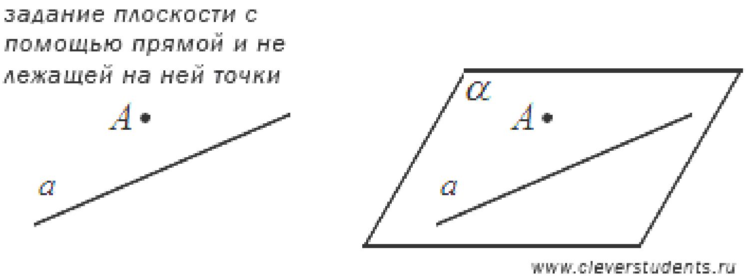
Во-первых, плоскость можно задать, зафиксировав три не лежащие на одной прямой точки пространства. Этот способ основан на аксиоме: через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.

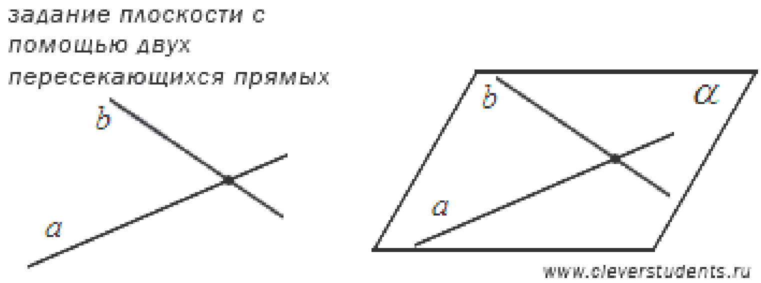
Если в трехмерном пространстве зафиксирована прямоугольная система координат и задана плоскость с помощью указания координат трех ее различных точек, не лежащих на одной прямой, то мы можем написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.




Два следующих способа задания плоскости являются следствием из предыдущего. Они основаны на следствиях из аксиомы о плоскости, проходящей через три точки:

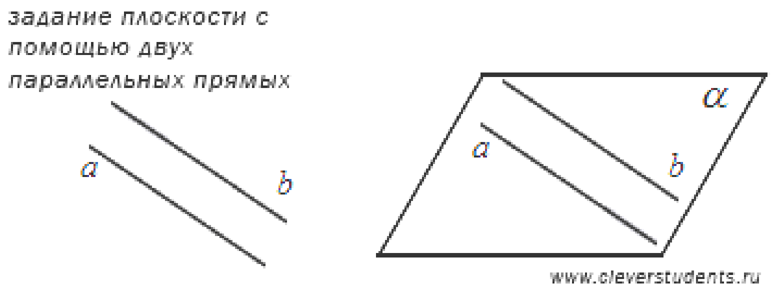
- через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, притом только одна (смотрите также статью уравнение плоскости, проходящей через прямую и точку);
- через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость (рекомендуем ознакомиться с материалом статьи уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые).
-





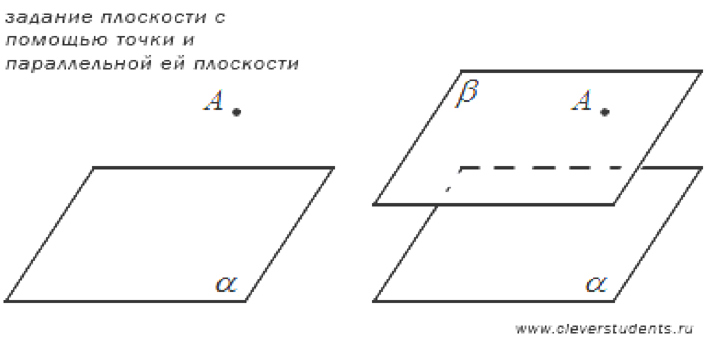

Четвертый способ задания плоскости в пространстве основан на определении параллельных прямых. Напомним, что две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Таким образом, указав две параллельные прямые в пространстве, мы определим единственную плоскость, в которой эти прямые лежат.

Если в трехмерном пространстве относительно прямоугольной системы координат задана плоскость указанным способом, то мы можем составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые.




Признак параллельности двух плоскостей дает нам еще один способ задания плоскости. Вспомним формулировку этого признака: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны. Следовательно, мы можем задать конкретную плоскость, если укажем точку, через которую она проходит и плоскость, которой она параллельна.

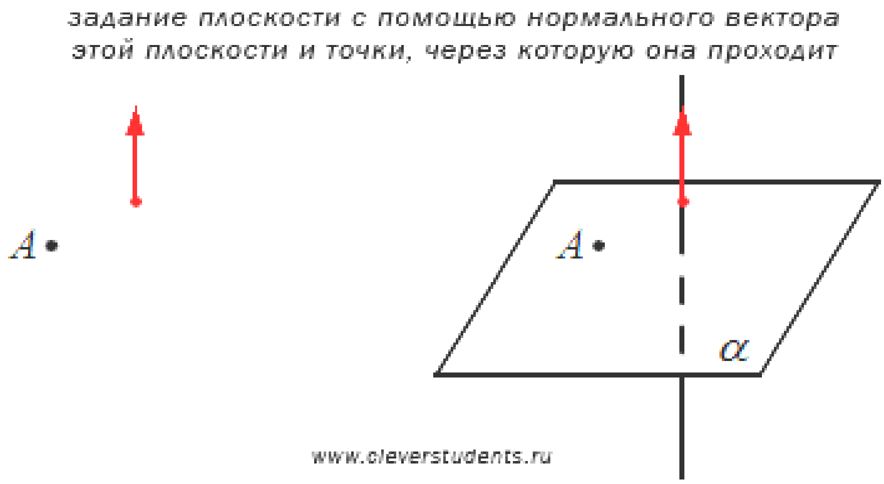
Рекомендуем ознакомиться также со статьей уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно заданной плоскости.




В курсе средней школы на уроках геометрии доказывается следующая теорема: через фиксированную точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная к данной прямой. Таким образом, мы можем задать плоскость, если укажем точку, через которую она проходит, и прямую, перпендикулярную к ней.

Если в трехмерном пространстве зафиксирована прямоугольная система координат и задана плоскость указанным способом, то можно составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно к заданной прямой.

Вместо прямой, перпендикулярной к плоскости, можно указать один из нормальных векторов этой плоскости. В этом случае есть возможность написать общее уравнение плоскости.




На этом завершаем обзор основных способов, с помощью которых определяется конкретная плоскость пространства.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

### Тема: «Введение. Функция. Предел переменной. Предел функции»

**Функция** - это одно из важнейших математических понятий. Функция - зависимость переменной **y** от переменной **x**, если каждому значению **x** соответствует единственное значение **y**. Переменную **x** называют независимой переменной или аргументом. Переменную **y** называют зависимой переменной. Все значения независимой переменной (переменной **x**) образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная (переменная **y**), образуют область значений функции.

**Графиком функции** называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, то-есть по оси абсцисс откладываются значения переменной **x**, а по оси ординат откладываются значения переменной **y**. Для построения графика функции необходимо знать свойства функции. Основные свойства функции будут рассмотрены далее!

## Основные свойства функций

### 1) Область определения функции и область значений функции

Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента **x** (переменной **x**), при которых функция **y = f(x)** определена. Область значений функции - это множество всех действительных значений **y**, которые принимает функция.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

### 2) Нули функции

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

### 3) Промежутки знакопостоянства функции

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

**4) Монотонность функции**

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

**5) Четность (нечетность) функции**

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **x** из области определения выполняется равенство **f(-x) = f(x)**. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **x** из области определения справедливо равенство **f(-x) = - f(x)**. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

**6) Ограниченная и неограниченная функции**

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leq M$ для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

**7) Периодическость функции**

Функция f(x) - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: $f(x+T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

Изучив данные свойства функции  без проблем можно исследовать функцию и по свойствам функции можно построить график функции.

## Предел функции

**Преде́л фу́нкции** (**предельное значение функции**) в заданной точке, предельной для области определения функции, — такая величина, к которой стремится значение рассматриваемой функции при стремлении её аргумента к данной точке.

**Предел функции** является обобщением понятия предела последовательности: изначально под пределом функции в точке понимали предел последовательности элементов области значений функции, составленной из образов точек последовательности элементов области определения функции, сходящейся к заданной точке (предел в которой рассматривается); если такой предел существует, то говоря, что функция сходится к указанному значению; если такого предела не существует, то говорят, что функция расходится.

Наиболее часто определение **предела функции** формулируют на языке окрестностей. То, что предел функции рассматривается только в точках, предельных для области определения функции, означает, что в каждой окрестности данной точки есть точки области определения; это позволяет говорить о стремлении аргумента функции (к данной точке). Но предельная точка области определения не обязана принадлежать самой области определения: например, можно рассматривать предел функции на концах открытого интервала, на котором определена функция (сами концы интервала в область определения не входят).

В общем случае необходимо точно указывать способ сходимости функции, для чего вводят т.н. базу подмножеств области определения функции, и тогда формулируют определение предела функции по (заданной) базе. В этом смысле система проколотых окрестностей данной точки — частный случай такой базы множеств.

Поскольку на расширенной вещественной прямой можно построить базу окрестностей бесконечно удалённой точки, то оказывается допустимым описание предела функции при стремлении аргумента к бесконечности, а также описание ситуации, когда функция сама стремится к бесконечности (в заданной точке). Предел последовательности (как предел функции натурального аргумента), как раз предоставляет пример сходимости по базе «стремление аргумента к бесконечности».

Отсутствие предела функции (в данной точке) означает, что для любого заранее заданного значения области значений и всякой его окрестности сколь угодно близко от заданной точки существуют точки, значение функции в которых окажется за пределами заданной окрестности.

Если в некоторой точке области определения функции существует предел и этот предел равен значению функции в данной точке, то функция оказывается непрерывной (в данной точке).

**Опр. 1:** Постоянное число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \longrightarrow x_0$, если для любого $E > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при выполнении неравенства $|x - x_0| < \delta \quad (x \neq x_0) \Rightarrow (1)$ следует выполнение неравенства $|f(x) - A| < E \Rightarrow (2)$.

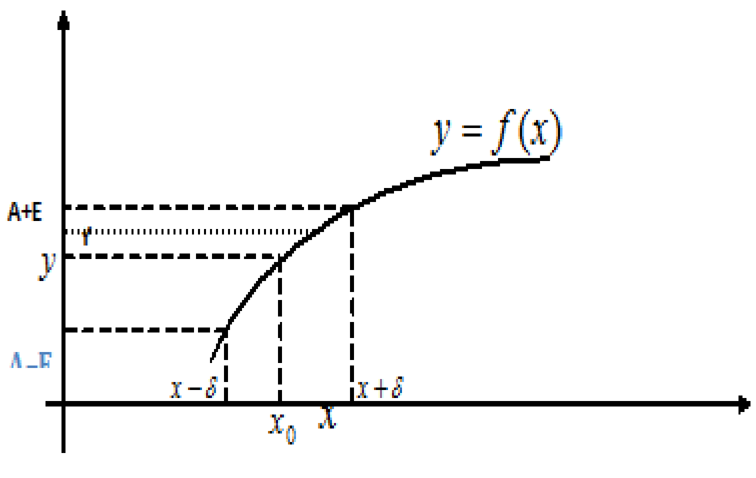
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$$

Запишем неравенство **(1)** и **(2)** без модуля:

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow (3)$$

$$|f(x) - A| < E \Leftrightarrow A - E < f(x) < A + E \Rightarrow (4)$$

Двойное неравенство **(3)** определяет $\delta$ – окрестность точки $x$ на оси абсцисс. Двойное неравенство **(4)** определяет $E$ – окрестность точки $A$ на оси ординат.




Определение предела функции означает, что по выделенной производной

$E$ – окрестности точки $A$ на оси $OY$ определяется $\delta$ – окрестность. Есть точка $x_0$ на оси $OX$ такая, что как только переменная $x$ попадает в $\delta$ – окрестность своей предельной точки $x_0$, так сейчас же переменная $y$ попадает в $E$ – окрестность своего предельного значения $A$.

*Замечание*

В определении предела указывается, что $x \neq x_0$ т. к. в точке $x_0$ функция может быть не определена.

Все теоремы о пределах, сформулированные и доказанные для случая переменной $x_n$, т. е. последовательности, переносятся без существенных изменений на случай предела функции.

***Основные теоремы о пределах***

***Теорема 1.***

Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

***Следствие.*** Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

***Теорема 2.*** Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

Теоремы 1 и 2 справедливы для любого конечного числа функций.

***Следствие.*** Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

***Следствие.*** Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$$

***Следствие.***

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

**Теорема.** Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)},$$

$$(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0)$$

**При нахождении пределов применяют соотношения:**

$\lim\limits_{x\to a} k = k$, ($k$=const); $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k\cdot x = \pm\infty$;

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{x} = \pm 0; \qquad \lim_{x\to\pm 0}\frac{k}{x} = \pm\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0<a<1; \\ +\infty, & a>1. \end{cases}; \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1; \\ 0, & a>1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x = \begin{cases} +\infty, & a>1; \\ -\infty, & 0<a<1 \end{cases}; \qquad \lim_{x\to 0+}\log_a x = \begin{cases} -\infty, & a>1; \\ +\infty, & 0<a<1. \end{cases}$$

**Постановка задачи.** Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

**План решения.** Для того чтобы найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ вычисляем $f(x_0)$, при этом:

▪ если данное выражение имеет смысл, то предел равен этому выражению;

если в результате вычислений нет неопределённостей, воспользуемся одним из соотношений (28).

Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 2x + 7)$; 2) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$;3) $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$.

1) Применяя теоремы о пределах, получаем:

$$\lim_{x \to 2}(3x^2 - 2x + 7) = 3\lim_{x \to 2} x \cdot \lim_{x \to 2} x - 2\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 7 = 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 7 = 15;$$

2) Пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю. Пользуясь теоремой о пределе частного, находим: $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x-2}{x^2+3x-1} = \dfrac{0}{9} = 0$;

3) Непосредственно применять теорему о пределе частного нельзя, так как предел знаменателя равен нулю (в знаменателе есть бесконечно малая величина при $x \to 3$). В числителе имеем ограниченную величину, отличную от нуля. Таким образом, под знаком предела будет произведение ограниченной величины $x^2 + 3x - 1$, отличной от нуля, на бесконечно большую величину $\frac{1}{x-3}$ при $x \to 3$ как величину, обратную бесконечно малой. Поэтому

$$\lim_{x \to 3}\frac{x^2-2x+1}{x-3} = \frac{4}{0^{+}} = \infty.$$

**Постановка задачи.** Найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $x_0 = a$ или $x_0 = \pm\infty$.

**План решения.** Для того чтобы найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ вычисляем $f(x_0)$, если в результате вычислений получилась неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$

или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, следует применить соответствующие правила для раскрытия данных неопределённостей.

***Неопределённость вида*** $\left[\frac{0}{0}\right]$

▪ Для того чтобы разрешить неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, до вычисления предела средствами алгебры в числителе и знаменателе выделяем множитель $(x-a)\to 0$ и сокращаем на него, т.к. $(x-a)\neq 0$.

▪ Чтобы раскрыть неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует соответствующим образом избавиться от иррациональности.

***Неопределённость вида*** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

▪ Если числитель и знаменатель, *сложные степенные* функции: необходимо вынести за скобку в числителе и знаменателе дроби неизвестное с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; после сокращения дроби неопределённость устраняется.

Частный случай: предел рационального выражения вида $R(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+...+b_mx^m}$ при $x\to\infty$ будем рассматривать как предел частного двух многочленов, который равен:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+...+b_mx^m}=\begin{cases}0, & n<m;\\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

Если числитель и знаменатель, *сложные показательные* функции: за скобку вынести наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби; после сокращения дроби неопределённость устраняется.

Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-4x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-4x-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, для раскрытия данной неопределенности средствами алгебры разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x+3)}{2(x-3)\,(x+1)},$$

сократим множитель ($x$ – 3) имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{2(x+1)}=\frac{3}{4};$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Данное предельное выражение содержит иррациональность в числителе, следовательно, домножим дробь на сопряженное выражение, т.е. на $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$, тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

В числителе последнего выражения получилась формула — разность квадратов, таким образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1;$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right],$$

для раскрытия данной неопределенности сделаем замену:

$$\left|\begin{array}{l} 1+x=t^6; \\ \sqrt[3]{x+1}=t^2; \\ \sqrt{x+1}=t^3; \\ t\to 1. \end{array}\right|$$

тогда исходное предельное выражение имеет вид:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1},$$

которое раскрывается по известным правилам, т.е.:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

для раскрытия данной неопределенности разделим почленно числитель и знаменатель на $x^2$, тогда:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0+0}{0+0}=\infty;$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

для раскрытия данной неопределенности разделим почленно числитель и знаменатель на $x^3$, тогда:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{5}{x^3}}=\frac{4}{3};$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

для раскрытия данной неопределенности разделим почленно числитель и знаменатель на $n^4$, тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n^2+11n+6}{n^4+n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^4}+6\frac{n^2}{n^4}+11\frac{n}{n^4}+\frac{6}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{1}=0;$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right],$

для раскрытия данной неопределенности разделим почленно числитель и знаменатель на *n*, тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1}=0.$$

**Постановка задачи.** Найти $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

**План решения.** Для того чтобы найти $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ вычисляем $f(x_0)$, если в результате вычислений получилась одна из неопределённостей $[\infty-\infty],[0\cdot\infty]$ или др., то данные неопределённости раскрываются путём преобразования и сведения их к неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

1) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=[\infty-\infty]$,

данное предельное выражение преобразуем таким образом:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4};$$

2) Рассмотрим два случая:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. Перенеся иррациональность из числителя в знаменатель, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=0;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$$

## Тема: «Теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы»

### Односторонние пределы слева и справа

Сформулированное определение предела в предыдущей лекции относится к так называемому двустороннему пределу, что означает, что переменная $x$ приближается к своему предельному значению с любой стороны, и слева, и справа. В некоторых случаях двусторонний предел может не существовать, но существуют односторонние пределы, когда переменная $x$ приближается к $x_0$ только с одной стороны, или слева, или справа. В этом случае указывается соотношение $x < x_0$ или $x > x_0$.

*Запись*

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = A$ – предел слева.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = B$ – предел справа

Второй вариант записи:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \Rightarrow (1)$$ – предел слева.

**ТЕОРЕМА:** Для того, чтобы в точке $x_0$ существовал двусторонний предел функции, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба односторонних предела и они были равны между собой:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A \Rightarrow (5)$$

**Замеча́тельные преде́лы**

**Первый замечательный предел:**

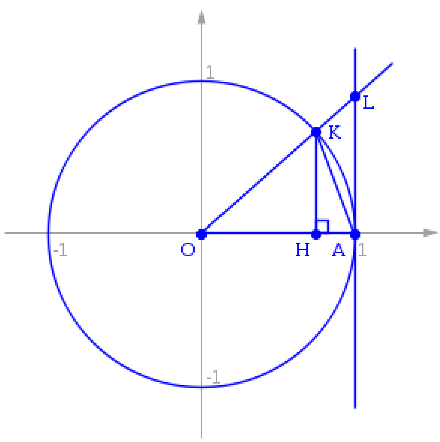
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Второй замечательный предел:**

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Доказательство**



Рассмотрим односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}$ и докажем, что они равны 1.

Пусть $x \in (0;\frac{\pi}{2})$. Отложим этот угол на единичной окружности ($R = 1$).

Точка *K* — точка пересечения луча с окружностью, а точка *L* — с касательной к единичной окружности в точке $(1;0)$. Точка *H* — проекция точки *K* на ось *OX*.

Очевидно, что:

$S_{\triangle OKA} < S_{sectOKA} < S_{\triangle OAL}$ (1)

(где $S_{sectOKA}$ — площадь сектора $OKA$)

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|KH| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$S_{sectOKA} = \frac{1}{2}R^2x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAL} = \frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|LA| = \frac{\mathrm{tg}x}{2}$$

(из $\triangle OAL$: $|LA| = \mathrm{tg}x$)

Подставляя в (1), получим:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg}x}{2}$$

Так как при $x \to 0+ : \sin x > 0, x > 0, \text{tg}x > 0$:

$$\frac{1}{\text{tg}x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Умножаем на $\sin x$:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Перейдём к пределу:

$$\lim_{x\to 0+} \cos x \leqslant \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

$$1 \leqslant \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Найдём левый односторонний предел:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \begin{bmatrix} u = -x \\ x = -u \\ u \to 0+ \\ x \to 0- \end{bmatrix} = \lim_{u\to 0+} \frac{\sin(-u)}{-u} = \lim_{u\to 0+} \frac{-\sin(u)}{-u} = \lim_{u\to 0+} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, а значит и сам предел равен 1.

**Следствия**

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$

Второй замечательный предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

Зная, что второй замечательный предел верен для натуральных значений x, докажем второй замечательный предел для вещественных x, то есть докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e; x\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $x\to+\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n\leqslant x<n+1$, где $n=[x]$ — это целая часть x.

Отсюда следует:

$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n} \iff 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}$, поэтому $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$. Поэтому, согласно пределу $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

*2.* Пусть $x \to -\infty$. Сделаем подстановку $-x = t$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^1 = e\cdot 1 = e.$$

Из двух этих случаев вытекает, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ для вещественного х. ►

**Следствия**

1. $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$ для $a > 0$, $a \neq 1$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$

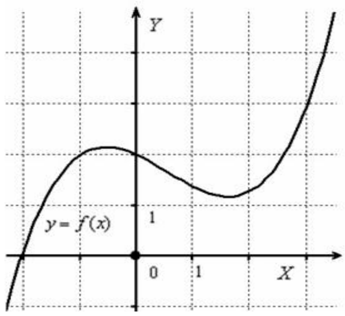
## Тема: «Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Точки разрыва функции. Теоремы о непрерывности функции»

### Непрерывность функции

### Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

### Понятие непрерывности функции

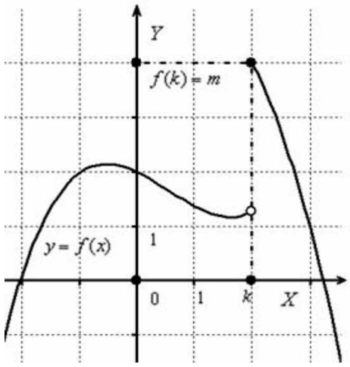
Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, непрерывную на всей числовой прямой:



Или, говоря лаконичнее, наша функция непрерывна на $\mathfrak{R}$ (множестве действительных чисел).

Каков «обывательский» критерий непрерывности? Очевидно, что график непрерывной функции можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

При этом следует чётко отличать два простых понятия: **области определения функции** и н**епрерывность функции**. В общем случае это не одно и то же. Например:

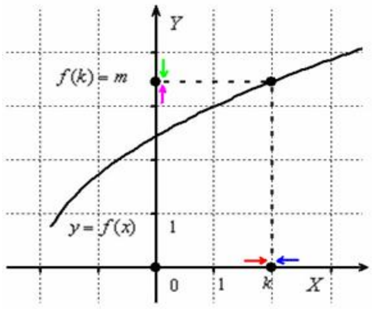



Данная функция определена на всей числовой прямой, то есть для **каждого** значения «икс» существует своё значение «игрека» $y = f(x)$. В частности, если $x = k$, то $y = f(k) = m$. Заметьте, что другая точка выколота, ведь по определению функции, значению аргумента должно соответствовать **единственное** значение функции. Таким образом, **область определения** нашей функции: $D(f) = \mathfrak{R}$.

## Непрерывность функции в точке и на интервале

В той или иной математической задаче речь может идти о непрерывности функции в точке, непрерывности функции на интервале, полуинтервале или непрерывности функции на отрезке. То есть, **не существует «просто непрерывности»** – функция может быть непрерывной ГДЕ-ТО. И основополагающим «кирпичиком» всего остального является **непрерывность функции <u>в точке</u>**.

Теория математического анализа даёт определение непрерывности функции в точке с помощью «дельта» и «эпсилон» окрестностей.




Если приближаться по оси $OX$ к точке $k$ **слева** (красная стрелка), то соответствующие значения «игреков» будут идти по оси $OY$ к точке $m$ (малиновая стрелка). Математически данный факт фиксируется с помощью **левостороннего предела**:

$$\lim_{x \to k-0} f(x) = m$$

Обратите внимание на запись $x \to k-0$ (читается «икс стремится к ка слева»). «Добавка» «минус ноль» символизирует *бесконечно малое отрицательное число*, по сути это и обозначает, что мы подходим к числу $k$ с левой стороны.

Аналогично, если приближаться к точке «ка» **справа** (синяя стрелка), то «игреки» придут к тому же значению $m$, но уже по зелёной стрелке, и **правосторонний предел** оформится следующим образом:

$$\lim_{x\to k+0} f(x) = m$$

«Добавка» $+0$ символизирует *бесконечно малое положительное число*, и запись $x \to k+0$ читается так: «икс стремится к ка справа».

**Если односторонние пределы конечны и равны** (как в нашем случае): $\lim_{x\to k-0} f(x) = \lim_{x\to k+0} f(x) = m$, то БУДЕМ ГОВОРИТЬ, что существует ОБЩИЙ предел $\lim_{x\to k} f(x) = m$. Всё просто, общий предел – это наш «обычный» **предел функции**, равный конечному числу.

Заметьте, что если функция не определена при $x = k$ (выколите чёрную точку на ветке графика), то перечисленные выкладки остаются справедливыми. Как уже неоднократно намекалось и отмечалось, в частности, в статье **о бесконечно малых функциях**, выражения $x \to k+0$, $x \to k-0$, $x \to k$ не обязывают нас «строго заходить» в точку $k$, вполне достаточно к ней и *бесконечно близко приближаться* (не достигая её). Хороший пример встретится в следующем параграфе, когда анализу подвергнется функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

**Определение**: функция непрерывна в точке $k$, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$.

Определение детализируется в следующих условиях:

1) Функция должна быть определена в точке $k$, то есть должно существовать значение $f(k)$.

2) Должен существовать общий предел функции $\lim_{x \to k} f(x)$. Как отмечалось выше, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim_{x \to k-0} f(x) = \lim_{x \to k+0} f(x)$.

3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$.

*!!! Рекомендую законспектировать пункты, поскольку они потребуются для решения практических задач. Далее по тексту они будут отмечаться как Условие №1, Условие №2 и Условие №3.*

Если нарушено **хотя бы одно** из 3-х условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке $k$.

**Непрерывность функции на интервале** формулируется остроумно и очень просто: функция непрерывна на интервале $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке данного интервала.

В частности, многие функции непрерывны на бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$, то есть на множестве действительных чисел $\Re$. Это линейная функция, многочлены, экспонента, синус, косинус и др. И вообще, любая **элементарная функция** непрерывна на своей **области определения**, так, например, логарифмическая функция $f(x) = \ln x$ непрерывна на интервале $(0; +\infty)$.

## Классификация точек разрыва

Увлекательная жизнь функций богата всякими особенными точками, и точки разрыва лишь одна из страничек их биографии.

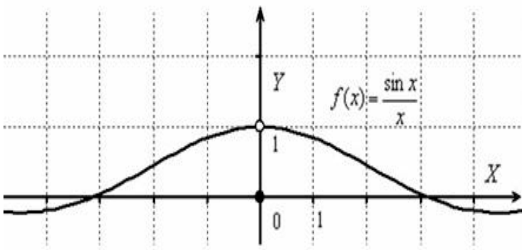
***Примечание**: на всякий случай остановлюсь на элементарном моменте: точка разрыва – это всегда отдельно взятая* *точка – не бывает «несколько точек разрыва подряд», то есть, нет такого понятия, как «интервал разрывов».*

Данные точки в свою очередь подразделяются на две большие группы: **разрывы первого рода** и **разрывы второго рода**. У каждого типа разрыва есть свои характерные особенности.

### Точка разрыва первого рода

Если в точке $k$ нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы конечны**, то она называется **точкой разрыва первого рода**.

Изобразим на чертеже график функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ :



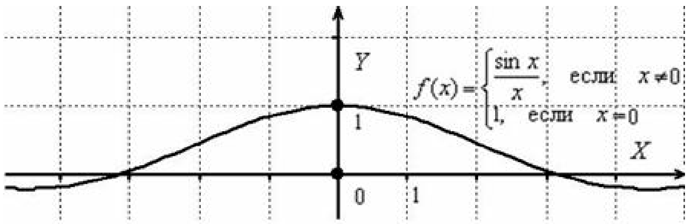

Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x = 0$. И в самом деле, знаменатель же не может быть равен нулю. Однако хоть точка и выколота, справедливость первого замечательного предела $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ вовсе не нарушена – мы можем приблизиться к «нулю» и слева и справа *бесконечно близко*, таким образом, односторонние пределы существуют и совпадают: $\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Условие №2 непрерывности выполнено).

Но функция не определена в точке $x=0$, следовательно, нарушено Условие №1 непрерывности, и функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ терпит разрыв в данной точке.

Разрыв такого вида (с существующим общим пределом) называют **устранимым разрывом**. Почему устранимым? Потому что функцию можно доопределить в точке разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x\neq 0\\ 1, & \text{если} \quad x=0\end{cases}$$

Теперь разрыв устранён.




Выполним формальную проверку:

1) $f(0)=1$ – функция определена в данной точке;

2) $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$ – общий предел существует;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=f(0)$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, все три условия выполнены, и функция непрерывна в точке $x=0$ по определению непрерывности функции в точке.

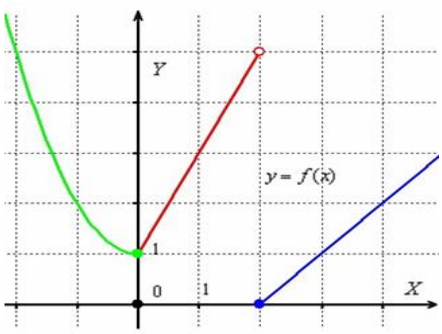
**Разрыва первого рода со скачком**. Такой разрыв возникает, как правило, в **кусочно-заданных функциях.**

Рассмотрим кусочную функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если} \quad x\le 0 \\ 1+2x, & \text{если} \quad 0<x<2 \\ x-2, & \text{если} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

и выполним её чертёж. Как построить график? Очень просто. На полуинтервале $(-\infty;0]$ чертим фрагмент параболы $f(x)=x^2+1$ (зеленый цвет), на интервале $(0;2)$ – отрезок прямой $f(x)=1+2x$ (красный цвет) и на полуинтервале $[2;+\infty)$ – прямую $f(x)=x-2$ (синий цвет).

При этом в силу неравенства $x\le 0$ значение $f(0)$ определено для квадратичной функции $f(x)=x^2+1$ (зелёная точка), и в силу неравенства $x\ge 2$, значение $f(2)$ определено для линейной функции $f(x)=x-2$ (синяя точка):




Сейчас нас будет интересовать только точка $x=2$. Исследуем её на непрерывность:

1) $f(2)=2-2=0$ – функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы.

Слева у нас красный отрезок прямой, поэтому левосторонний предел: $\lim\limits_{x\to 2-0}(1+2x)=1+2\cdot 2=5$

Справа – синяя прямая, и правосторонний предел: $\lim\limits_{x\to 2+0}(x-2)=2-2=0$

В результате получены *конечные числа*, причем они *не равны*. Поскольку односторонние пределы конечны и различны: $\lim\limits_{x\to 2-0}(1+2x)\neq \lim\limits_{x\to 2+0}(x-2)$, то наша функция терпит разрыв первого рода со скачком.

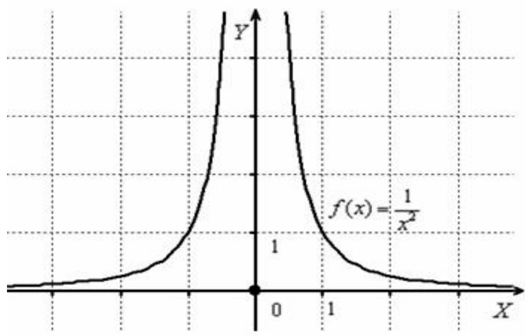
Логично, что разрыв не устраним – функцию действительно не доопределить и «не склеить», как в предыдущем примере.

## Точки разрыва второго рода

Обычно на практике в 99%-ти процентах задач вам встретится **бесконечный разрыв**– когда левосторонний или правосторонний, а чаще, оба предела бесконечны.

И, конечно же, самая напрашивающаяся картинка – гипербола в точке ноль. Здесь оба односторонних предела бесконечны: $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$, следовательно, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ терпит разрыв второго рода в точке $x=0$.

График функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$, который ещё не встречался:



Исследуем на непрерывность точку $x = 0$ по стандартной схеме:

1) Функция не определена в данной точке, поскольку знаменатель обращается в ноль.

Конечно, можно сразу сделать вывод о том, что функция терпит разрыв в точке $x = 0$, но хорошо бы классифицировать характер разрыва, что часто требуется по условию. Для этого:

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(+0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Напоминаю, что под записью $-0$ понимается *бесконечно малое отрицательное число*, а под записью $+0$ – *бесконечно малое положительное число*.

Односторонние пределы бесконечны, значит, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ терпит разрыв 2-го рода в точке $x = 0$. Ось ординат является **вертикальной асимптотой** для графика.

Не редка ситуация, когда оба односторонних предела существуют, но бесконечен только один из них, например, это график функции $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$

Исследуем на непрерывность точку $x = 2$:

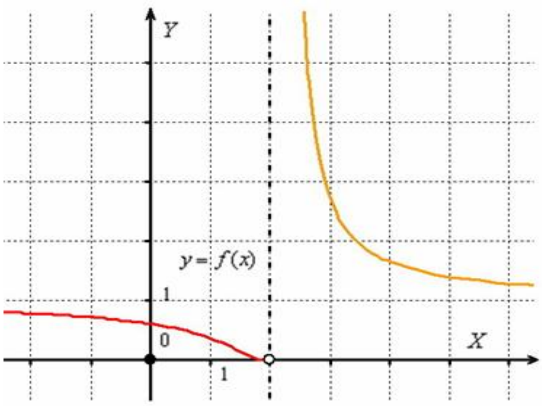
1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2-0-2}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2+0-2}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Левосторонний предел конечен и равен нулю (в саму точку мы «не заходим»), но правосторонний предел бесконечен и оранжевая ветка графика бесконечно близко приближается к своей **вертикальной асимптоте**, заданной уравнением $x=2$ (чёрный пунктир).




Таким образом, функция $y = f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ терпит **разрыв второго рода** в точке $x=2$.

Как и для разрыва 1-го рода, в самой точке разрыва функция может быть определена. Например, для кусочной функции $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x > 0 \end{cases}$ смело ставим чёрную жирную точку в начале координат. Справа же – ветка гиперболы, и правосторонний предел бесконечен.

Пример

Исследовать функцию $y = f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

**Решение**:

1) Под прицел попадает единственная точка $x = 1$, в которой функция не определена.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} (x^2) = 1$$
$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} (x^2) = 1$$

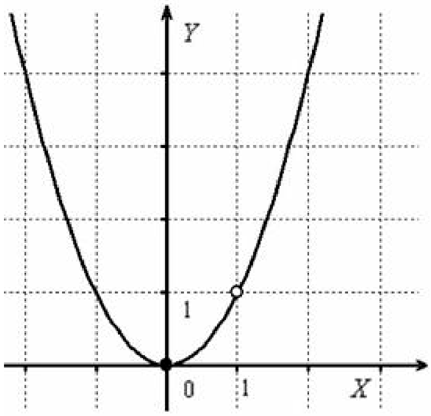
Односторонние пределы конечны и равны.

Таким образом, в точке $x = 1$ функция терпит устранимый разрыв.

Как выглядит график данной функции?

Хочется провести упрощение $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x-1} = \frac{x^2(x-1)}{x-1} = x^2$, и вроде бы получается обычная парабола. **НО** исходная функция не определена в точке $x = 1$, поэтому обязательна следующая оговорка: $f(x) = x^2, \quad \text{если} \quad x \neq 1$

Выполним чертёж:



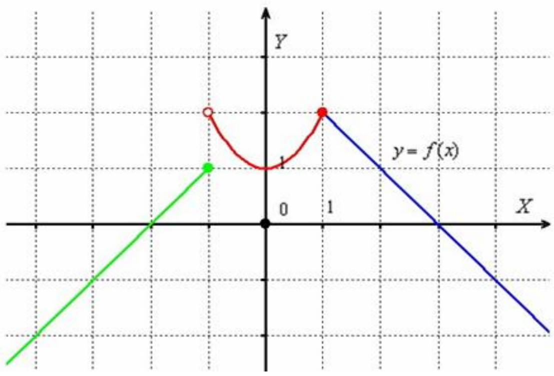

**Ответ**: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x=1$, в которой она терпит устранимый разрыв.

Пример 2

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если} \quad x\le -1 \\ x^2+1, & \text{если} \quad -1<x\le 1 \\ -x+3, & \text{если} \quad x>1 \end{cases}.$$

**Решение**: очевидно, что все три части функции непрерывны на соответствующих интервалах, поэтому осталось проверить только две точки «стыка» между кусками.




**I)** Исследуем на непрерывность точку $x=-1$

1) $f(-1)=-1+2=1$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}(x+2) = 1$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}(x^2+1) = 1+1 = 2$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция $f(x)$ терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x=-1$.

Вычислим скачок разрыва как разность правого и левого пределов:

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) - \lim_{x\to -1-0} f(x) = 2-1 = 1,$$

то есть, график рванул на одну единицу вверх.

Исследуем на непрерывность точку $x=1$

1) $f(1) = 1^2+1 = 2$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x^2+1) = 1+1 = 2$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(-x+3) = -1+3 = 2$$

– односторонние пределы конечны и равны, значит, существует общий предел.

3) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=1$ по определению непрерывности функции в точке.

**Ответ**: функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x=-1$, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком.

## Тема: «Производная функции. Таблица производных. Правила дифференцирования. Геометрический и механический смысл производной»

### Введение

Нахождение производной f'(x) или дифференциала df=f'(x)dx функции f(x) является основной задачей дифференциального исчисления. В интегральном исчислении решается обратная задача: по заданной функции f(x) требуется найти такую функцию F(x), что F'(x)=f(x) или F(x)=F'(x)dx=f(x)dx. Таким образом, основной задачей интегрального исчисления является восстановление функции F(x) по известной производной (дифференциалу) этой функции. Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т. д.

**Определение:** Производной функции f(x) ($f'(x_0)$) в точке $x_0$ называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ при } \Delta x$$

, стремящемся к нулю.

## Производные элементарных функций

1. $c' = 0, \ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

## Правила дифференцирования

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

$$1)\ (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$2)\ (cf(x))' = c \cdot f'(x), \text{ где } c - const$$
$$3)\ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$4)\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Производная сложной функции:

$$h(x) = g(f(x)) \text{ - сложная функция}$$
$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Основные свойства дифференциала:

1. $dC = 0$, где $C = const$.

2. $dCU = CdU$

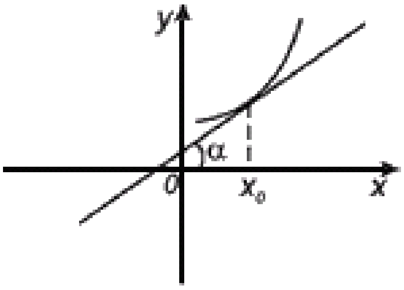
3. $d(U+V) = dU \pm dV$

4. $d(UV) = UdV + VdU$

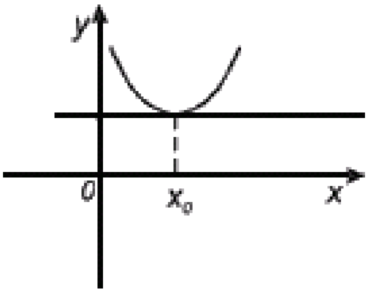
5. $d(\frac{U}{V}) = \frac{VdU - UdV}{V^2}$

6. $df(U) = f'(U)dU$

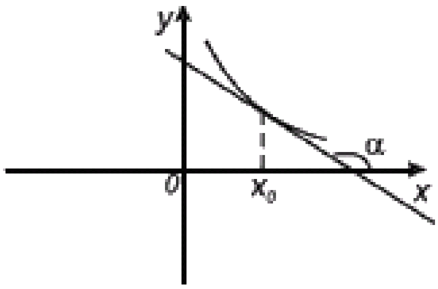
**Геометрический смысл производной.** Производная в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции y=f(x) в этой точке




$$f'(x_0) = tg\alpha > 0$$




$$f'(x_0) = tg\alpha = 0$$




$$f'(x_0) = tg\alpha < 0$$

**Уравнение касательной** к графику функции y=f(x) в точке $x_0$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**Физический смысл производной.**

Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = x'(t)$$

**Скорость изменения функции**]

Пусть $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения. Тогда $v(t_0) = s'(t_0)$ выражает мгновенную скорость движения в момент времени $t_0$. Вторая производная $a(t_0) = s''(t_0)$ выражает мгновенное ускорение в момент времени $t_0$.

Вообще производная функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ выражает скорость изменения функции в точке $x_0$, то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью $y = f(x)$.

## Тема: «Производные высших порядков. Производная сложной функции. Производная функций, заданных параметрически. Логарифмическое дифференцирование»

*Производные высших порядков*

Если $y'$ есть производная от функции $y = f(x)$, то производная от $y'$ называется второй производной, или производной второго порядка и обозначается $y''$, или $f''(x)$, или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются производные любого порядка: производная третьего порядка

$$\left(y''\right)' = y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3};$$

производная n-го порядка:

$$\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Для произведения двух функций можно получить производную любого n-го порядка, пользуясь формулой Лейбница:

$$(UV)^{(n)} = U^{(n)} \cdot V + nU^{(n-1)}V' + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot U^{(n-2)}V'' + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot U^{(n-k)} \cdot V^{(k)} + \ldots + nU'V^{(n-1)} + UV^{(n)}.$$

Пример:

$$y = x^5 - 7x^3 + 2;\; y''' - ?$$
$$y' = 5x^4 - 21x^2,$$
$$y'' = 20x^3 - 42x,$$
$$y''' = 60x^2 - 42.$$

***Производная сложной функции***

Понятие производной произвольного порядка задаётся рекуррентно. Полагаем

$$f^{(0)}(x_0) \equiv f(x_0).$$

Если функция $f$ дифференцируема в $x_0$, то производная первого порядка определяется соотношением

$$f^{(1)}(x_0) \equiv f'(x_0).$$

Пусть теперь производная $n$-го порядка $f^{(n)}$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и дифференцируема. Тогда

$$f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0).$$

Если функция $u = f(x, y, z)$ имеет в некоторой области D частную производную по одной из переменных, то названная производная, сама являясь функцией от $x, y, z,$ может иметь в некоторой точке $(x_0, y_0, z_0)$ частные производные по той же или по любой другой переменной. Для исходной функции $u = f(x, y, z)$ эти производные будут частными производными второго порядка (или вторыми частными производными).

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0) \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}$$

$$u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y}$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной. Например,

$$u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)$$

***ПРИМЕР***

Пусть $f(x) = x^2$. Тогда

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0.$$

Пусть $f(x)=|x|$. Тогда если $x_0\neq 0$, то

$$f'(x_0)=\operatorname{sgn} x_0,$$

где $\operatorname{sgn}$ обозначает функцию знака .А если $x_0=0$, то $f'_+(x_0)=1,\ f'_-(x_0)=-1,$ а, следовательно $f'(x_0)$ не существует.

***Логарифмическое дифференцирование***

Если требуется найти $y'$ из уравнения $y=f(x)$, то можно:

а) логарифмировать обе части уравнения

$$\ln y=\ln f(x)=\varphi(x);$$

б) дифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ есть сложная функция от x,

$$\frac{y'}{y}=\varphi'(x)\Rightarrow y'=y\cdot\varphi'(x).$$

в) заменить $y$ его выражением через x

$$y'=f(x)\cdot\varphi'(x).$$

Пример: $y=x^x$

$$а)\ \ln y=x\ln x;$$

$$б)\ \frac{y'}{y}=x'\cdot\ln x+1;\ y'=y(\ln x+1);$$

$$в)\ y'=x^x\cdot(\ln x+1).$$

*Дифференцирование неявных функций*

Пусть уравнение $F(x,y)=0$ определяет $y$ как неявную функцию от x.

а) продифференцируем по x обе части уравнения $F(x,y)=0$, получим уравнение первой степени относительно $y'$;

б) из полученного уравнения выразим $y'$.

Пример: $x^2+y^2=4$.

$$\begin{aligned}&а)2x\cdot x'+2y\cdot y'=0;\\&2x+2y\cdot y'=0;\\&x+y\cdot y'=0;\\&б)y'=-\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

*Вторая производная от неявной функции*

$F(x,y)=0$ - уравнение определяет $y$, как неявную функцию от x.

а) определим $\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y)$ ;

б) продифференцируем по x левую и правую части равенства

$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y)$,

причем, дифференцируя функцию $\varphi(x,y)$ по переменной x, помним, что $y$ есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi(x,y)}{dx}=F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right);$$

в) заменяя $\frac{dy}{dx}$ через $\varphi(x,y)$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(\ x, y, \varphi(x,y)\ ) = \psi(x,y)$$ и т.д.

Пример:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$$

***Дифференцирование функций, заданных параметрически***

Пусть функция задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t)$,

Тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ , или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

Пример:

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)} = 5t^2.$$

Пример:

Найти $y' = \dfrac{dy}{dx}, y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ .

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(a\sin^3 t\ \right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -tgt,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-tgt)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

## Тема: «Точки экстремума функции. Интервалы монотонности. Точки перегиба и интервалы выпуклости, вогнутости»

### 1. Локальные экстремумы функции

Пусть задана функция $y = f(x)$ на множестве $X$ и $x_0$ - внутренняя точка множества $X$.

Обозначим через $U(x_0)$ окрестность точки $x_0$. В точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет **локальный максимум**, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$, что для всех $x$ из этой окрестности выполнено условие $f(x)\ f(x_0)$.

*Аналогично:* функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ **локальный минимум**, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$, что для всех $x$ из этой окрестности выполнено условие $f(x)\ f(x_0)$.

Точки локальных максимума и минимума называются *точками локальных экстремумов*, а значения функции в них - *локальными экстремумами функции.*

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и имеет локальный экстремум на каком-то из концов этого отрезка. Тогда такой экстремум называется*локальным односторонним* или *краевым экстремумом*. В этом случае соответствующая окрестность является правой для *«a»* и левой для *«b»*полуокрестностью.

Проиллюстрируем данные выше определения:

На рисунке точки $x_1$, $x_3$ - точки локального минимума, точки $x_2$, $x_4$ - точки локального максимума, $x = a$ - краевого максимума, $x = b$ - краевого минимума.

Заметим, что наряду с локальными минимумом и максимумом определяют так называемые глобальные минимумы и максимумы функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. На рисунке точка $x = a$ - точка глобального максимума (в этой точке функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[a, b]$), точка $x = x_3$ - точка соответственно глобального минимума.

## 2. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа

Рассмотрим некоторые теоремы, которые позволят в дальнейшем проводить исследование поведения функций. Они носят названия основных теорем математического анализа или основных теорем дифференциального исчисления, поскольку указывают на взаимосвязь производной функции в точке и ее поведения в этой точке. Рассмотрим теорему Ферма.

*Пьер Ферма* (1601-1665) - французский математик. По профессии - юрист. Математикой занимался в свободное время. Ферма - один из создателей теории чисел. С его именем связаны две теоремы: *великая теорема Ферма* (для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых положительных числах $x, y, z$) и малая теорема Ферма (если $p$ - простое число и $a$ - целое число, не делящееся на $p$, то $a^{p-1} - 1$ делится на $p$).

**Теорема Ферма.** Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a, b)$ и в некоторой точке $x_0$ $(a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда, если в точке $x_0$существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

***Доказательство.***

Пусть, для определенности, в точке $x_0$ функция имеет локальный минимум, то есть $f(x)$ $f(x_0)$, $x$ $U(x_0)$. Тогда в силу дифференцируемости

$f(x)$ в точке $x_0$ получим:

при $x > x_0$:

при $x < x_0$:

Следовательно, эти неравенства в силу дифференцируемости имеют место одновременно лишь когда

$$f'(x_o) = 0$$

*Теорема доказана.*

*Геометрический смысл теоремы Ферма:* если $x_0$ $(a, b)$ является точкой минимума или максимума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная функции, то касательная, проведенная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, параллельна оси $Ox$:

Заметим, что оба условия теоремы Ферма - интервал $(a, b)$ и дифференцируемость функции в точке локального экстремума - обязательны.

**Пример 1.** $y = x$, $x$ (-1; 1).

В точке $x_0 = 0$ функция имеет минимум, но в этой точке производная не существует. Следовательно, теорема Ферма для данной функции неверна (не выполняется условие дифференцируемости функции в точке $x_0$).

**Пример 2.** $y = x^3$, $x$ [-1; 1].

В точке $x_0$ = 1 функция имеет краевой максимум. Теорема Ферма не выполняется, так как точка $x_0 = 1 \in (-1; 1)$.

*Мишель Ролль* (1652-1719) - французский математик, член Парижской академии наук. Разработал метод отделения действительных корней алгебраических уравнений.

**Теорема Ролля.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на $(a, b)$, $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка , $a < < b$, такая, что $f'(x) = 0$.

***Доказательство:***

1) если $f(x)$ = const на $[a, b]$, то $f'(x) = 0$, $x$ $(a, b)$;

2) если $f(x)$ const на $[a, b]$, то непрерывная на $[a, b]$ функция достигает наибольшего и наименьшего значений в некоторых точках отрезка $[a, b]$. Следовательно, max $f(x)$ или min $f(x)$ обязательно достигается во внутренней точке отрезка $[a, b]$, а по теореме Ферма имеем, что $f'(c) = 0$.

*Теорема доказана.*

*Геометрический смысл теоремы Ролля:* при выполнении условий теоремы внутри отрезка $[a, b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка, такая, что касательная к графику $f(x)$ в точке (, $f$()) $Ox$ (см. рисунок).

Заметим, что все условия теоремы существенны.

**Пример 3.** $f(x) = x$, $x$ $[-1; 1]$. $f(-1) = f(1) = 1$.

В точке $x = 0$ нарушено условие дифференцируемости. Следовательно, теорема Ролля не применяется - ни в одной точке отрезка [-1; 1] производная в нуль не обращается.

**Пример 4.**

Для данной функции $f(0) = f(1) = 0$, но ни в одной точке интервала (0; 1) производная не равна 0, так как теорема Ролля не выполняется - функция не является непрерывной на [0; 1].

*Огюстен Коши* (1789-1857) - французский математик, член Парижской академии наук, почетный член Петербургской и многих других академий. Труды Коши относятся к математическому анализу, дифференциальным уравнениям, алгебре, геометрии и другим математическим наукам.

**Теорема Коши.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a:b]$ и дифференцируемы на интервале $(a, b)$, причем g'($x$) 0, $x$ $(a, b)$. Тогда на $(a, b)$ найдется точка с такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-(g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (1)$$

***Доказательство.***

Рассмотрим вспомогательную функцию

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $(a, b)$, причем $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля на $(a, b)$ существует точка, такая, что $F'$(c) = 0: Следовательно *Теорема доказана.*

*Жозеф Луи Лагранж* (1736-1813) - французский математик и механик, почетный член Парижской и Петербургской академий. Ему принадлежат выдающиеся исследования по математическому анализу, по различным вопросам дифференциальных уравнений, по алгебре и теории чисел, механике, астрономии. Лагранж впервые ввел в рассмотрение тройные интегралы, предложил обозначения для производной ($y'$, $f'(x)$).

**Теорема Лагранжа.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда на $(a, b)$ найдется точка, такая, что

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (2)$$

***Доказательство.***

Из формулы (1) при $g(x) = x$ получаем формулу (2).

*Теорема доказана.*

Равенство (2) называют **формулой конечных приращений** или *формулой Лагранжа о среднем.*

*Геометрический смысл теоремы Лагранжа.*

При выполнении условий теоремы внутри отрезка $[a, b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка такая, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке, параллельна секущей, проходящей через точки А $(a, f(a))$ и В $(b, f(b))$.

Рассмотрим следствия из теоремы Лагранжа:

1. *(условие постоянства функции на отрезке)*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $(a, b)$. Если $f'(x) = 0$, $x$ $(a, b)$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$,

дифференцируемы на интервале $(a, b)$, $f'(x) = g'(x)$, $x$ $(a, b)$. Тогда $f(x) = g(x) + C$, где $C = \text{const}$.

3. *(условие монотонности функции).* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируемая на интервале $(a, b)$. Тогда, если $f'(x) > 0$, $x$ $(a, b)$, то $f(x)$ строго монотонно возрастает на $(a, b)$. Если же $f'(x) < 0$, $x$ $(a, b)$, то $f(x)$ строго монотонно убывает на $(a, b)$.

## 1. Достаточные условия экстремума функции

В лекции 1 мы рассмотрели основные теоремы математического анализа, которые широко используются при исследовании функции, построении ее графика.

По теореме Ферма: из дифференцируемости функции $f(x)$ в точке локального экстремума $x_0$ следует, что $f'(x_0) = 0$. Данное условие является *необходимым условием* существования в точке локального экстремума, то есть если в точке $x_0$ - экстремум функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то $f'(x_0) = 0$. Точки $x_0$, в которых $f'(x_0) = 0$, называются *стационарными* точками функции. Заметим, что равенство нулю производной в точке не является достаточным для существования локального экстремума в этой точке.

**Пример 1.** $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'(0) = 0$, но в точке $x_0 = 0$ нет экстремума.

Точками, подозрительными на экстремум функции $f(x)$ на интервале $(a, b)$, являются точки, в которых производная существует и равна 0 либо она не существует или равна бесконечности. На рисунках функции имеют минимум в точке $x_0 = 0$:

$$f'(0) = 0 \quad f'(0) = 0$$

Рассмотрим достаточные условия существования в точке локального экстремума, которые позволят ответить на вопрос: «Есть ли в точке экстремум и какой именно - минимум или максимум?».

***Теорема 1*** *(первое достаточное условие экстремума).* Пусть непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой **проколотой** окрестности $U(x_0)$ точки$x_0$ (проколотая окрестность означает, что сама точка $x_0$ выбрасывается из окрестности) и непрерывна в точке $x_0$. Тогда:

1) если (1), то в точке $x_0$ - локальный максимум;

2) если (2), то в точке $x_0$ - локальный минимум.

***Доказательство.***

Из неравенств (1) и следствия 3 теоремы Лагранжа (о монотонности функции) следует, что при $x < x_0$ функция не убывает, а при $x > x_0$ функция не возрастает, то есть

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \text{величина положительная, или } 0 \qquad (3)$$

т.е. $f'(x_0) \geq 0$.

Следовательно, из (3) получаем, что в точке $x_0$ функция имеет локальный максимум.

Аналогично можно рассмотреть неравенства (2) для локального минимума..

**Пример 2.** Исследовать на монотонность и локальный экстремум функцию с помощью производной первого порядка.

***Решение.*** Найдем стационарные точки функции:

$$x^2 -1 = 0 \; x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Заметим, что данная функция не определена в точке $x = 0$. Следовательно:

| $x$ | (-; -1) | -1 | (-1; 0) | 0 | (0; 1) | 1 | (1; +) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| $y$ | | -2 | | - | | 2 | |

max min

То есть функция возрастает на интервалах (-; -1) и (1; +), убывает на интервалах (-1; 0), (0; 1), имеет локальный максимум в точке $x_1 = -1$, равный $y_{\max}(-1) = -2$; имеет локальный минимум в точке $x_2 = 1$, $y_{\min}(1) = 2$.

***Теорема 2*** *(второе достаточное условие экстремума).* Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема. Если $x_0$ - стационарная точка ($f'(x_0) = 0$), в которой $f''(x_0) > 0$, то в точке $x_0$ функция имеет локальный минимум. Если же $f''(x_0) < 0$, то в точке $x_0$ функция имеет локальный максимум.

***Доказательство.*** Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда

Следовательно:

при $x < x_0$, $f'(x) < 0$,

при $x > x_0$, $f'(x) > 0$.

Поэтому по теореме 1 в точке $x_0$ функция имеет локальный минимум.

*Теорема доказана.*

**Пример 3.** Исследовать на экстремум функцию с помощью второй производной.

***Решение.*** В примере 2 для данной функции мы нашли первую производную и стационарные точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Найдем вторую производную данной функции:

Найдем значения второй производной в стационарных точках.

в точке $x_1 = -1$ функция имеет локальный максимум;

в точке $x_2 = 1$ функция имеет локальный минимум (по теореме 2).

## 2. Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точка перегиба

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a, b)$ и $x_1$, $x_2$ - любые различные точки этого интервала. Через точки А $(x_1, f(x_1))$ и В $(x_2, f(x_2))$ графика функции $f(x)$ проведем прямую, отрезок АВ которой называется **хордой.** Уравнение этой прямой запишем в виде $y = y(x)$.

Выпуклость функции, точки перегиба.

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, является на этом интервале **выпуклым**, если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$ лежит не выше любой своей касательной (рис. 1).

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, является на этом интервале **вогнутым**, если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$ лежит не ниже любой своей касательной (рис. 2).

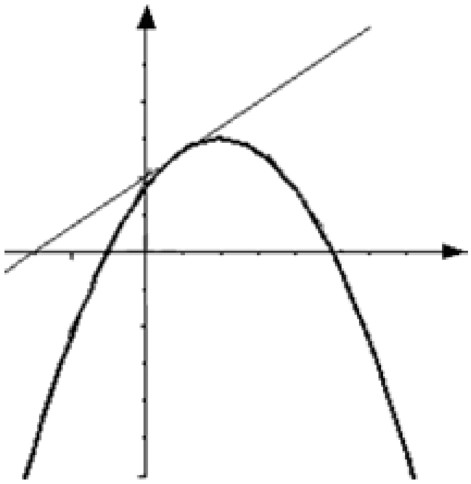


рис 1

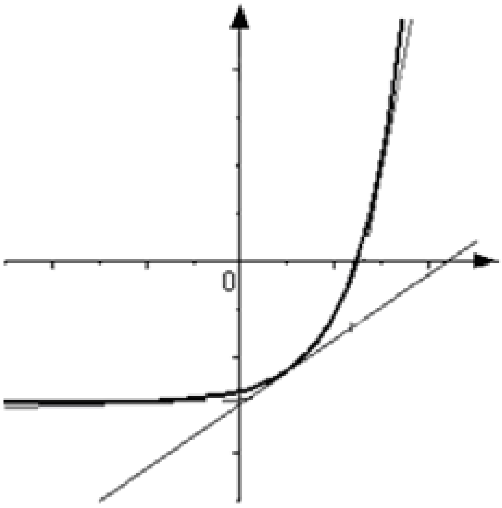



рис 2

Функция $f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** на интервале $(a, b)$, если для любых точек $x_1$, $x_2$ $(a, b)$, $a$ $x_1 < x_2$ $b$, хорда AB лежит *не ниже* графика этой функции, т. е. если $f(x)$ $y$ $(x)$, $x$ $[x_1, x_2]$ $(a, b)$:

Заметим, что выпуклую вниз функцию иногда называют вогнутой функцией. Аналогично определяется выпуклость функции вверх.

Функция $f(x)$ называется ***выпуклой вверх*** на интервале $(a, b)$, если для любых точек $x_1$, $x_2$ $(a, b)$, $a$ $x_1 < x_2$ $b$, хорда AB лежит *не выше* графика этой функции, т. е. если $f(x)$ $y$ $(x)$, $x$ $[x_1, x_2]$ $(a, b)$:

***Теорема 3*** *(достаточное условие выпуклости).* Если $f(x)$ - дважды непрерывно дифференцируема на интервале $(a, b)$ и

1) $f''(x) > 0$, $x$ $(a, b)$, то на $(a, b)$ функция $f(x)$ выпукла вниз;

2) $f''(x) < 0$, $x$ $(a, b)$, то на $(a, b)$ функция $f(x)$ выпукла вверх.

Точка $x_0$ называется *точкой перегиба* функции $f(x)$, если - окрестность точки $x_0$, что для всех $x$ $(x_0 - , x_0)$ график функции находится с одной стороны касательной, а для всех $x$ $(x_0, x_0 + )$ - с другой стороны касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $x_0$, то есть точка $x_0$ - точка перегиба функции $f(x)$, если при переходе через точку $x_0$ функция $f(x)$ меняет характер выпуклости:

***Теорема 4*** *(необходимое условие существования точки перегиба).* Если функция $f(x)$ имеет непрерывную в точке $x_0$ производную $f''$ и $x_0$ - точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

***Доказательство.***

Если бы $f''(x_0) < 0$ или $f''(x_0) > 0$, то по теореме 3 в точке $x_0$ функция $f(x)$ была бы выпукла вверх или вниз. Следовательно, $f''(x_0) = 0$.

*Теорема доказана.*

**Теорема 5** *(достаточное условие перегиба).* Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0$ и при переходе через точку $x_0$производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $x_0$ является точкой перегиба функции $f(x)$.

**Пример 4.** Исследовать на выпуклость и найти точки перегиба функции $y = x^3$.

***Решение.*** $y' = 3x^2$, $y'' = 6x = 0$ $x_0 = 0$ - точка, подозрительная на перегиб.

В точке $x_0 = 0$ функция $y = x^3$ имеет перегиб:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | (-; 0) | 0 | (0; +) |
| $y''$ | - | 0 | + |
| $y$ | выпукла вверх | 0 | выпукла вниз |
| | | точка перегиба | |

**Пример 5.** Исследовать на выпуклость и найти точки перегиба функции.

***Решение.*** В примере 3 мы уже находили вторую производную данной функции. Так как точек подозрительных на перегиб нет. Рассмотрим промежутки выпуклости:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | (-; 0) | 0 | (0; +) |
| $y''$ | - | - | + |
| $y$ | выпукла вверх | - | выпукла вниз |
| | | функция не определена | |

## 3. Асимптоты графика функции

**Асимптотой** будем называть прямую, к которой график функции неограниченно близко приближается. Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $f(x)$, если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f$

($x_0$ + 0) равен бесконечности.

**Пример 6.** Найти вертикальные асимптоты функций:

***Решение.*** Вертикальными асимптотами функций будут прямые $x = x_0$, где $x_0$ - точки, в которых функция не определена.

а) $x$ = 3 - вертикальная асимптота функции.

Действительно;

б) $x$ = 2, $x$ = - 4 - вертикальные асимптоты функции.

Действительно,

в) $x$ = 0 - вертикальная асимптота функции

Действительно.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика непрерывной функции $f(x)$ при $x$ + или $x$ -, если $f(x) = kx + b$ + б($x$), , то есть если наклонная асимптота для графика функции $f(x)$ существует, то разность ординат функции $f(x)$ и прямой $y = kx + b$ в точке $x$ стремится к 0 при $x$ + или при $x$ - .

***Теорема 6.*** Для того чтобы прямая $y = kx + b$ являлась наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x$ + или $x$ - , необходимо и достаточно существование конечных пределов:

(4) Следовательно, если хотя бы один из данных пределов не существует или равен бесконечности, то функция не имеет наклонных асимптот

**Задание.** Найти асимптоты графика функции

$$y(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$$

**Решение.** Область определения функции:

$$D[f]: x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$$

а) вертикальные асимптоты: прямая $x = -1$ - вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{x \to -1} y(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \left[\frac{6}{0}\right] = \infty$$

б) горизонтальные асимптоты: находим предел функции на бесконечности:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \infty$$

то есть, горизонтальных асимптот нет.

в) наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x + 1)} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [y(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x + 2}{x + 1} = -4$$

Таким образом, наклонная асимптота: $y = x - 4$ .

**Ответ.** Вертикальная асимптота - прямая $x = -1$ .

Наклонная асимптота - прямая $y = x - 4$ .

## Тема: «Приложение производной для решения геометрических, механических задач. Формулы Тейлора, Маклорена»

## Приложение производной к задачам геометрии и механики

Пусть $y = f(x)$ и $f'(x_0) = tg\alpha$, где $\alpha$-угол, образованный с положительным направлением оси OX касательной к кривой в точке с абсциссой $x_0$.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$, где $y_0'$-производная $y'$ при $x = x_0$.

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0).$$

Угол между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке $M_0$. Этот угол находится по формуле

$$tg\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

*Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на* *отрезке*

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ , то она на этом отрезке достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Если свое наибольшее значение $M$ функция $f(x)$ принимает в точке $x_0 \in [a; b]$, то $M = f(x_0)$ будет локальным максимумом функции $f(x)$, так как в этом случае существует окрестность точки $x_0$, такая, что $f(x) \leq f(x_0)$ .

Однако свое наибольшее значение $M$ функция $f(x)$ может принимать и на концах отрезка $[a; b]$ . Поэтому, чтобы найти наибольшее значение $M$ непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ , надо найти все максимумы функции на интервале $(a; b)$ и значения $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$, то есть $f(a)$ и $f(b)$, и выбрать среди них наибольшее. Вместо исследования на максимум можно ограничиться нахождением значений функции в критических точках.

Наименьшим значением $m$ непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ будет наименьший минимум среди всех минимумов функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ и значений $f(a)$ и $f(b)$.

**Задание.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4$ на отрезке $[0; 5]$.

**Решение.** Находим производную функции:

$$y'(x) = \left(4x^3 - 2x^2 + 4\right)' = 12x^2 - 4x$$

Находим точки, в которых производная равна нулю:

$$y'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$$

Из полученных значений нам надо оставить лишь те, которые принадлежат заданному промежутку $[0;\ 5]$ . Оба значения лежат в этом промежутке.

Находим значения функции в полученных стационарных точках из промежутка и на концах промежутка:

$$y(0) = 4; \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{106}{27} \approx 3,92; \quad y(5) = 454$$

Таким образом,

$$\underset{[0;\ 5]}{y_{\min}} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{106}{27}; \quad \underset{[0;\ 5]}{y_{\max}} = y(5) = 454$$

**Ответ.** $\underset{[0;\ 5]}{y_{\min}} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{106}{27}; \quad \underset{[0;\ 5]}{y_{\max}} = y(5) = 454$

**<u>Задача</u>** Найти приближенное значение функции

**arcsin(0,08)** с помощью дифференциала

$$y = \arcsin x\ , \qquad x = 0{,}08, \qquad x_0 = 0\ ,\ ,\ \Delta x = 0{,}08$$

$$y \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x\ , \quad y(0) = \arcsin 0 = 0, \quad y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

$$\boxed{y \approx 0 + 1 \cdot 0{,}08 = 0{,}08}$$

## 4. Общая схема построения графика функции

1. Находим область определения функции.

2. Исследуем функцию на периодичность, четность или нечетность.

3. Исследуем функцию на монотонность и экстремум.

4. Находим промежутки выпуклости и точки перегиба.

5. Находим асимптоты графика функции.

6. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

7. Строим график.

Прежде чем перейти к примерам, напомним определения четности и нечетности функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любого значения $x$, взятого из области определения функции, значение $(-x)$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$. График **четной** функции симметричен **относительно оси ординат**.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной*** для любого значения $x$, взятого из области определения функции, значение $(-x)$ также принадлежит области определения, и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График **нечетной** функции симметричен **относительно начала координат**.

*Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график*

**Пример** Построить по изложенной выше схеме график функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

**Решение.**

**I**. Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме x=1.

**II.** Так уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ox, но пересекает ось Oy в точке (0;-1).

**III.** Выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва x=1. Так как $y \to \infty$ при $x \to -\infty$, $y \to +\infty$ при $x \to 1+$, то прямая x=1 является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x \to +\infty(x \to -\infty)$, то $y \to +\infty(y \to -\infty)$; следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее, из существования пределов

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1.$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(f(x)-kx)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1-x^2-x}{x-1}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+x}{x-1}=1$$

Решая уравнение $x^2-2x-1=0$ получаем две точки возможного экстремума:

$$x_1=1-\sqrt{2} \text{ и } x_2=1+\sqrt{2}$$

**V**. Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$y'' = (f'(x))' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2} =$$

$$\frac{(x-1)((2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-1))}{\left((x-1)^2\right)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x+2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3};$$

Так как f''(x) в нуль не обращается, то критических точек нет.

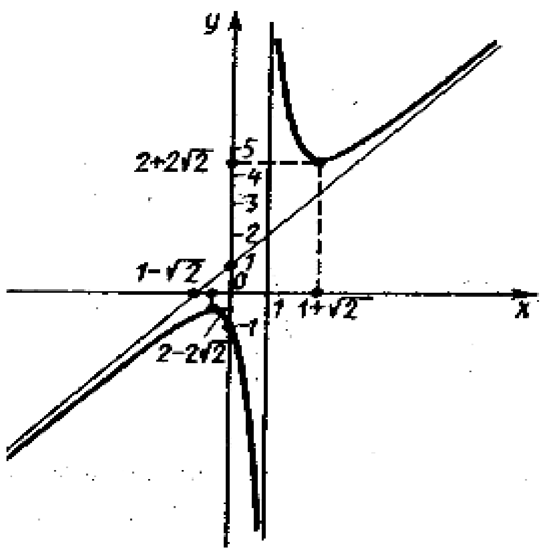
**VI.** Исследуем знак первой и второй производных. Точки возможного экстремума, подлежащие рассмотрению: $x_1=1-\sqrt{2}$ и $x_2=1+\sqrt{2}$, разделяют область существования функции на интервалы (-∞;1-√2),(1-√2;1+√2) и (1+√2;+∞).

В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом – плюс, во втором – минус, в третьем – плюс. Последовательность знаков первой производной запишется так: +, -, +.

Получаем, что функция на (-∞;1-√2) возрастает, на (1-√2;1+√2) убывает, а на (1+√2;+∞) снова возрастает. Точки экстремума: максимум при x=1-√2, причем f(1-√2)=2-2√2 минимум при x=1+√2, причем f(1+√2)=2+2√2. На (-∞;1) график направлен выпуклостью вверх, а на (1;+∞) - вниз.

**VII** Составим таблицу полученных значений

| *X* | (-∞;1-√2) | 1-√2 | (1-√2;) | 1 |
|---|---|---|---|---|
| *f'(x)* | + | 0 | - | ∞ |
| *f''(x)* | – выпукла вверх | – выпукла вверх | – выпукла вверх | ∞ |
| *f(x)* | | $y_{max}$=2-2√2 | | ∞ |




**VIII** По полученным данным строим эскиз графика функции

**Задача 1**. Молодой предприниматель Михайлов Юрий в свете экономического кризиса решил выкупить нерентабельное провинциальное перерабатывающее предприятие и пригласил экономиста Гульдерова Германа помочь с расчетами по оптимизации расходов. Одна из задач поставленных перед Германом была следующая: найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

*Решение.*

Найдем производную S´(x):

$$S'(x) = \left(\frac{\pi x^3 + 2V}{x}\right)' = \left(\frac{6\pi x^2 x - \left(2\pi x^3 + 2V\right)}{x^2}\right) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2} .$$

Для нахождения критических точек решим уравнение S´(x) = 0.

Корень уравнения: x = $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .

При x < 0 < $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S´(x) < 0, а при x > $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S´(x) > 0.

Следовательно, в точке x = $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S(x) имеет минимум.

| X | $(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$ | $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ | $(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \infty)$ |
|---|---|---|---|
| S´ | – | 0 | + |
| S | ↘ | min | ↗ |

Следовательно, функция в этой точке достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра,

$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

имеющего объем V, будет наименьшей при h = 2x = 2 = ,
т.е. когда цилиндр равносторонний.

## Тема: «Первообразная. Неопределенный интеграл. Таблица и свойства неопределенного интеграла»

Интеграл (от лат. Integer - целый ) - одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью, с одной стороны отыскивать функции по их производным (например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки), а с другой - измерять площади, объемы, длины дуг, работу сил за определенный промежуток времени и т. п.

Символ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integero, которое переводится как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. (Действительно, операция интегрирования “восстанавливает” функцию, Интеграл (от лат. Integer - целый) - одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью, с одной стороны отыскивать функции по их производным (например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки), а с другой - измерять площади, объемы, длины дуг, работу сил за определенный промежуток времени и т. п.

Символ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integero, которое переводится как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. (Действительно, операция интегрирования “восстанавливает” функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция.) Возможно происхождение слова интеграл иное: слово integer означает целый. В ходе переписки И. Бернулли и Г. Лейбниц согласились с предложением Я. Бернулли. Тогда же, в 1696 г., появилось и название новой ветви математики - интегральное исчисление, которое ввел И. Бернулли (дифференцированием которой получена подынтегральная функция.) Возможно происхождение слова интеграл иное: слово integer означает целый.

В ходе переписки И. Бернулли и Г. Лейбниц согласились с предложением Я. Бернулли. Тогда же, в 1696 г., появилось и название новой ветви математики - интегральное исчисление, которое ввел И. Бернулли.

**Неопределённый интегра́л**

для функции $f(x)$ — это совокупность всех первообразных данной функции.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(a,b)$ и $F(x)$ - её первообразная, то есть $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

где C — произвольная постоянная.

**Первообра́зной**[1] или **примити́вной функцией** (иногда называют также *антипроизводной*) данной функции $f$ называют такую $F$, производная которой (на всей области определения) равна $f$, то есть $F' = f$. Вычисление первообразной заключается в нахождении неопределённого интеграла, а сам процесс называется **интегрированием**.

Так, например, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной $f(x) = x^2$. Так как производная константы равна нулю, $x^2$ будет иметь бесконечное количество первообразных, таких как $x^3/3 + 45645$ или $x^3/3 - 36$ и т. д.;

таким образом семейство первообразных функции $x^2$ можно обозначить как

$$F(x) = x^3/3 + C,$$

где $C$ — любое число. Графики таких первообразных смещены вертикально относительно друг друга, и их положение зависит от значения $C$.

Первообразные важны тем, что позволяют вычислять интегралы. Если $F$ — первообразная интегрируемой функции $f$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Это соотношение называется формулой Ньютона — Лейбница.

Благодаря этой связи множество первообразных данной функции *f* называют **неопределённым интегралом (общим интегралом)** *f* и записывают в виде интеграла без указания пределов:

$$\int f(x)\,dx$$

Если *F* - первообразная *f*, и функция *f* определена на каком-либо интервале, тогда каждая последующая первообразная *G* отличается от *F* на константу: всегда существует число *C*, такое что $G(x) = F(x) + C$ для всех *x*. Число *C* называют постоянной интегрирования.

Каждая непрерывная функция *f* имеет первообразную *F*, одна из которых представляется в виде интеграла от *f* с переменным верхним пределом:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Также существуют не непрерывные (разрывные) функции, которые имеют первообразную. Например,

$$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$f(0) = 0$ непрерывна при $x = 0$, но имеет первообразную

$$F(x) = x^2 sin\frac{1}{x}$$

$$F(0) = 0.$$

Некоторые первообразные, даже несмотря на то, что они существуют, не могут быть выражены через элементарные функции (такие как многочлены, экспоненциальные функции, логарифмы, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции и их комбинации). Например:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{\sin(x)}{x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx.$$

Более развёрнутое изложение этих фактов см. в дифференциальной теории Галуа.

## Свойства неопределенного интеграла

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$$

$$\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то и

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где

$u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную

**Таблица интегралов**

$$\int 0 \cdot dx = C;$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1);$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1);$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' (C' = \frac{\pi}{2} + C);$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

## Тема: «Основные методы интегрирования»

### Табличное интегрирование

**Пример:**

$$I = \int \left(4\sqrt{x} + 6x^2 - 5\sqrt[5]{x}\right) dx.$$

$$I = \int 4\sqrt{x}dx + \int 6x^2dx - \int 5\sqrt[5]{x}dx = 4\int \sqrt{x}dx + 6\int x^2dx - 5\int \sqrt[5]{x}dx.$$

**Пример**:

Найти $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

*Решение*

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int (\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

### Замена переменной

Для интегрирования многих функций применяют метод замены переменной, или *подстановки,* позволяющий приводить интегралы к табличной форме.

Если функция f(z) непрерывна на [ □□,], функция z =g (x) имеет на [a, b] непрерывную производную и $\alpha \le g(x) \le \beta$, то

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz,$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку z=g(x).

Для доказательства достаточно записать исходный интеграл в виде:

$$\int f(g(x))\, g(x)\, dx = \int f(g(x))\, dg(x).$$

Например:

1) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int (\ln\ x)' \frac{dx}{\ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$ ;

2) $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{(\sin x)' dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z + C = \operatorname{arctg}(\sin x) + C$ .

**Пример:** Вычислить $\int dx/(x+2)$.

*Решение.*

Обозначим t = x+2, тогда dx = dt, $\int dx/(x+2) = \int dt/t = \ln|t|+C = \ln(|x+2)|+C$.

**Пример:** Найти $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

*Решение.*

$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \sin x/\cos x\, dx = - \int d(\cos x)/ \cos x$. Пусть t=cos x, тогда $\int \operatorname{tg} x\, dx = - \int dt/t = - \ln| t |+C = - \ln|\cos x|+C$.

**Пример**: Найти $\int dx/\sin x$.

*Решение.*

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int tg\frac{x}{2}dx + \frac{1}{2}\int ctg\frac{x}{2}dx = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

### *Метод интегрирования по частям*

Пусть u = f(x) и v = g(x) - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда, по правилу дифференцирования произведения,

$$d(uv) = udv + vdu \text{ или } udv = d(uv) - vdu.$$

Для выражения d(uv) первообразной, очевидно, будет *uv*, поэтому имеет место формула:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Эта формула выражает правило *интегрирования по частям*. Оно приводит интегрирование выражения udv=uv'dx к интегрированию выражения vdu=vu'dx.

Пусть, например, требуется найти x cosx dx. Положим u = x, dv = cos x dx, так что du=dx, v=sinx. Тогда

$$\int x \cos x\, dx = \int x\, d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^k \ln^m x\, dx, \int x^k \sin bx\, dx, \int x^k \cos bx\, dx, \int x^k e^{ax}\, dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

***Примеры вычисления интегралов***

**Пример**: Найти $\int$ arctg x dx.

*Решение.* Обозначим u=arctg x, dv=dx. Тогда du = dx/($x^2$+1), v=x, откуда $\int$ arctg x dx = x arctg x - $\int$ x dx/($x^2$+1) = x arctg x + 1/2ln($x^2$+1) +C; так как $\int$x dx/($x^2$+1) = 1/2 $\int$ d($x^2$+1)/($x^2$+1) = 1/2 ln($x^2$+1) +C.

**Пример**: Вычислить $\int$ ln x dx.

*Решение.* Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

u=ln x, dv=dx, du= 1/x dx, v=x.

Тогда $\int$ ln x dx = x lnx - $\int$ x 1/x dx =

= x lnx - $\int$dx = x lnx - x + C.

**Пример**: Вычислить $\int$ $e^x$ sin x dx.

*Решение.*

Обозначим u = $e^x$, dv = sin x dx, тогда du = $e^x$ dx, v = $\int$ sin x dx= - cos x → $\int$ $e^x$ sin x dx = - $e^x$ cos x + $\int$ $e^x$ cos x dx. Интеграл$\int$ $e^x$ cos x dx также интегрируем по частям: u = $e^x$, dv = cos x dx □ du=$e^x$dx, v=sin x. Имеем:

$\int$ $e^x$ cos x dx = $e^x$ sin x - $\int$ $e^x$ sin x dx. Получили соотношение $\int$ $e^x$ sin x dx = - $e^x$ cos x + $e^x$ sin x - $\int$ $e^x$ sin x dx, откуда 2 $\int$ $e^x$ sin x dx = - $e^x$cos x + $e^x$ sin x + C.

**Пример**: Вычислить J = $\int$ cos(ln x)dx/x.

*Решение.* Так как dx/x = d(ln x), то J= $\int$ cos(ln x)d(ln x). Заменяя ln x через t, приходим к табличному интегралу J = ∫ cos t dt = sin t+ C = sin(ln x) + C.

**Интегрирование некоторых иррациональностей**

**Пример**: Вычислить J = $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$ .

*Решение.* Учитывая, что $\frac{dx}{x}$ = d(ln x), производим подстановку ln x = t. Тогда J = $\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + c = \arcsin\frac{\ln x}{2} + c$ .

**Интегрирование рациональных выражений**

Для интегрирования рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где $P(x)$ и $Q(x)$ - полиномы, используется следующая последовательность шагов:

1. Если дробь неправильная (т.е. степень $P(x)$ больше степени $Q(x)$), преобразовать ее в правильную, выделив целое выражение;

2. Разложить знаменатель $Q(x)$ на произведение одночленов и/или несократимых квадратичных выражений;

3. Разложить рациональную дробь на простейшие дроби, используя *метод неопределенных коэффициентов*;

4. Вычислить интегралы от простейших дробей.

Рассмотрим указанные шаги более подробно.

***Шаг 1. Преобразование неправильной рациональной дроби***

Если дробь неправильная (т.е. степень числителя $P(x)$ больше степени знаменателя $Q(x)$), разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$.

Получим следующее выражение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

Где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь.

***Шаг 2. Разложение знаменателя на простейшие дроби***

Запишем многочлен знаменателя $Q(x)$ в виде

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} \left(x^2+px+q\right)^{\mu} \cdots \left(x^2+rx+s\right)^{\nu},$$

где квадратичные функции являются несократимыми, то есть не имеющими действительных корней.

***Шаг 3. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей.***

Запишем рациональную функцию в следующем виде:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \ldots + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$
$$+ \frac{Kx+L}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}} + \frac{K_1x+L_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{K_{\mu-1}x+L_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{Mx+N}{\left(x^2+rx+s\right)^{\nu}} + \frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+rx+s\right)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{x^2+rx+s}.$$

Общее число неопределенных коэффициентов $A_i$ , $B_i$ , $K_i$ , $L_i$, $M_i$ , $N_i$ , ... должно быть равно степени знаменателя $Q(x)$.

Затем умножим обе части полученного уравнения на знаменатель $Q(x)$ и приравняем коэффициенты при слагаемых с одинаковыми степенями $x$. В результате мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_i$ , $B_i$

, $K_i$ , $L_i$ , $M_i$ , $N_i$ , .... Данная система всегда имеет единственное решение. Описанный алгоритм представляет собой *метод неопределенных коэффициентов*.

### *Шаг 4. Интегрирование простейших рациональных дробей*

Простейшие дроби, полученные при разложении произвольной правильной рациональной дроби, интегрируются с помощью следующих шести формул:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = \ln|x-a|$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}$$

У дробей с квадратичным знаменателем сначала необходимо выделить полный квадрат:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{Ax+B'}{(t^2+m^2)^k},$$

Где

$$t = x+\frac{p}{2},\ m^2 = \frac{4q-p^2}{4},\ B' = B-\frac{Ap}{2}.$$

Затем применяются следующие формулы:

$$\int \frac{tdt}{t^2+m^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+m^2\right)$$

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{2\left(1-k\right)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}$$

$$\int \frac{tdt}{t^2+m^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+m^2\right)$$

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{2\left(1-k\right)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}$$

$$\int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}$$

Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x+3}{x^2-9}dx.$$

*Решение.*

Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{2x+3}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

Сгруппируем слагаемые и приравняем коэффициенты при членах с одинаковыми степенями:

$$A\left(x+3\right) + B\left(x-3\right) = 2x+3,$$
$$Ax+3A+Bx-3B = 2x+3,$$
$$\left(A+B\right)x+3A-3B = 2x+3.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A-3B=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} A=\dfrac{3}{2} \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{2x+3}{x^2-9}=\frac{\frac{3}{2}}{x-3}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Теперь легко вычислить исходный интеграл

$$\int\frac{2x+3}{x^2-9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{3}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-3)^3(x+3)\right|+C.$$

Вычислить интеграл

$$\int\frac{x^2-2}{x+1}dx.$$

*Решение.*

Сначала выделим правильную рациональную дробь, разделив числитель на знаменатель.

$$\frac{x^2-2}{x+1}=x-1-\frac{1}{x+1}.$$

Получаем

$$\int\frac{x^2-2}{x+1}dx=\int\left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int xdx-\int dx-\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}-x-\ln|x+1|+C.$$

Вычислить интеграл

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

*Решение.*

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

*Решение.*

Разложим подынтегральное выражение на сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Определим ы:

$$A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) = x^2,$$
$$Ax^2 - 2Ax - 3Ax + 6A + Bx^2 - Bx - 3Bx + 3B + Cx^2 - Cx - 2Cx + 2C = x^2,$$
$$(A+B+C)x^2 - (5A+4B+3C)x + 6A + 3B + 2C = x^2.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -4 \\ C = 9/2 \end{cases}.$$

Получаем

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{9/2}{x-3}.$$

Интеграл, соответственно, равен

$$\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - 4\int\frac{dx}{x-2} + \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - 4\ln|x-2| + \frac{9}{2}\ln|x-3| + C.$$

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Решить систему уравнений методом Крамера и методом Гаусса

1. $\begin{cases} -3x+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -3x+y+z=0 \\ 2x-3y+z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -2x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -4x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} -x+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} -3x-z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -3x-z=1 \\ 2x-y+3z=-1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ 2x-y+z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} -x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x+y-z=3 \\ x-3y+z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} -4x-y+3z=1 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} -x+2y+z=-1 \\ 2x-3y+z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x+2y-4z=1 \\ 2x-y+3z=-2 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} -x+y+3z=4 \\ 2x-y-z=-1 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} -x+2y-3z=2 \\ -x-y+3z=1 \\ x-3y+z=-1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x+3y-4z=1 \\ 2x-y-z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -3x-y-z=1 \\ 2x-y-z=-1 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -5x+y+z=-1 \\ 2x-y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -x+5y+z=-2 \\ 2x-3y+z=1 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -x+y+5z=1 \\ 2x-3y+z=-3 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} -4x+2y+3z=-2 \\ 2x+y-z=1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} -3x-y+3z=1 \\ 2x-y+2z=1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} -x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=1 \\ x-3y+z=-1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -2x+y+3z=-1 \\ 2x-3y-z=2 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} -2x+2y+z=3 \\ 2x-y-z=0 \\ x-3y+z=1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x-y+z=0 \\ x-y+3z=1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-4y+z=0 \\ x-3y+z=1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} -2x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=1 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} -x+2y-3z=1 \\ x-4y+z=3 \\ x-3y+z=1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -3x+y+5z=4 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

31. $\begin{cases} -5x+2y+z=1 \\ 2x-3y+z=2 \\ x-y+4z=0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-y+3z=1 \end{cases}$

II.

## «Векторы»

В. 1

1. Даны точки: A(1;-1;6) и B(2;5;-2).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора$\left|\overline{AB}\right|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-1;3) , B(-3;-2), C(-3;2). В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(5\overline{m}-2\overline{n})^2$,если $\left|\overline{m}\right| = 2\sqrt{2}$, $\left|\overline{n}\right| = 2$, угол между векторами $(\overline{m,n}) = 45^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(5;-1;4) , B(9;3;-6),C(7;10;14), D(5;1;-3).

6. Проверить компланарность векторов:

$$\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{4j} + \overline{k}, \quad \overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j}, \quad \overline{c} = -2\overline{i} + \overline{3j} + \overline{k}$$

В. 2

1. Даны точки: A(1;1;5) и B(2;5;-2).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора $|\overline{AB}|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-2;3) , B(-3;2), C(-3;2). В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(3\overline{m} - 2\overline{n})^2$,если $|\overline{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\overline{n}| = 2$, угол между векторами $(\overline{m,n}) = 45^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(3;-1;2) , B(6;3;-6),C(7;10;14), D(2;1;-3).

6. Компланарны ли векторы:

$\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j}$, $\overline{c} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$

В. 3

1. Даны точки: A(1;0;5) и B(2;5;2).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора $|\overline{AB}|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-5;3) , B(3;2), C(3;-2). В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(\overline{4m}-\overline{n})^2$,если $|\overline{m}|=2\sqrt{2}$, $|\overline{n}|=2$, угол между векторами $(\overline{m,n})=30^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}=-3\overline{i}+\overline{2j}$, $\overline{b}=2\overline{i}-4\overline{j}+3\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(2;1;2) , B(0;4;2), C(0;1;8), D(2;4;10).

6. Компланарны ли векторы:

$$\overline{a}=\overline{i}+\overline{4j}+\overline{k},\quad \overline{b}=3\overline{i}-2\overline{j},\quad \overline{c}=-\overline{i}-\overline{3j}+\overline{k}$$

## B.4

1. Даны точки: A(1;3;5) и B(1;5;-3).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора $|\overline{AB}|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-6;2), B(3;4), C(5;-2). В начале координат приложены силы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(\overline{7m}-3\overline{n})^2$,если $|\overline{m}|=5$, $|\overline{n}|=2$, угол между векторами $(\overline{m,n})=60^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}=-3\overline{i}+\overline{2j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-4\overline{j}+3\overline{k}$.

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(2;3;0), B(0;6;0), C(0;3;6), D(2;6;8).

6. Компланарны ли векторы:

$$\overline{a}=\overline{i}+\overline{4j}+\overline{k}, \quad \overline{b}=3\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k}, \quad \overline{c}=-\overline{i}-\overline{3j}+\overline{k}$$

## В.5

1. Даны точки: A(7;3;5) и B(1;8;-3).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора$\left|\overline{AB}\right|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-4;-2) , B(3;4), C(1;6). В начале координат приложены силы $\overline{OA},\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(\overline{3m}-3\overline{n})^2$,если $\left|\overline{m}\right|=5$,$\left|\overline{n}\right|=4$, угол между векторами$(\overline{m},\overline{n})=60^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}=-3\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(2;2;1) , B(0;5;1),C(0;2;7), D(2;5;9).

6. Компланарны ли векторы:

$$\overline{a}=\overline{i}+\overline{4j}+\overline{k}, \quad \overline{b}=3\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k}, \quad \overline{c}=-\overline{2i}-\overline{3j}+\overline{5k}$$

## В.6

1. Даны точки: A(0;3;5) и B(1;4;-3).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора$\left|\overline{AB}\right|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-3;-2) , B(5;4), C(1;6). В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(\overline{3m}-\overline{n})^2$, если $|\overline{m}|=4$, $|\overline{n}|=3$, угол между векторами $(\overline{m,n})=60^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}=\overline{i}+\overline{2j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-4\overline{j}+4\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(1;3;1), B(-1;6;1),C(-1;3;7), D(1;6;9).

6. Компланарны ли векторы:

$\overline{a}=7\overline{i}+\overline{4j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=3\overline{i}+5\overline{k}$, $\overline{c}=-\overline{2i}-\overline{3j}+\overline{5k}$

В. 7

1. Даны точки: A(-1;3;5) и B(1;6;-3).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора $|\overline{AB}|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-5;-2) , B(1;4), C(1;6). В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(\overline{6m}-\overline{n})^2$,если $|\overline{m}|=4$, $|\overline{n}|=3$, угол между векторами $(\overline{m,n})=45^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(1;2;2) , B(-1;5;2),C(-1;2;8), D(1;5;10).

6. Компланарны ли векторы:

$\overline{a} = 7\overline{i} + \overline{4j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + 5\overline{k}$, $\overline{c} = -\overline{i} - \overline{3j}$

## В. 8

1. Даны точки: A(-1;7;5) и B(1;5;-3).Найти координаты вектора $\overline{AB}$, модуль вектора $|\overline{AB}|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-7;-4) , B(1;5), C(1;8). В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(\overline{m} - 2\overline{n})^2$,если $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 3$, угол между векторами $(\overline{m,n}) = 45^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a} = -3\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 5\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(2;3;1), B(0;6;1), C(0;3;7), D(2;6;9).

6. Компланарны ли векторы:

$\overline{a} = -\overline{i} + \overline{4j} - \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + 5\overline{k}$, $\overline{c} = -5\overline{i} - \overline{3j}$

## В. 9

1. Даны точки: A(-1;3;5) и B(0;5;-3).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора $\left|\overline{AB}\right|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-4;-4) , B(-1;5), C(3;8). В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(2\overline{m} - 2\overline{n})^2$,если $\left|\overline{m}\right| = 2$, $\left|\overline{n}\right| = 3$, угол между векторами $(\overline{m,n}) = 90^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a} = -\overline{i} - \overline{2j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(2;2;2) , B(0;5;2),C(0;2;8), D(2;5;10).

6. Компланарны ли векторы:

$\overline{a} = -3\overline{i} + \overline{5j} - 6\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + 4\overline{k}$, $\overline{c} = -5\overline{i} - \overline{9j}$

## В. 10

1. Даны точки: A(-1;-4;-2) и B(3;5;3).Найти координаты век-

тора $\overline{AB}$, модуль вектора $\left|\overline{AB}\right|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-3;-4) , B(1;5), C(3;-2). В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(2\overline{m}-\overline{n})^2$,если $\left|\overline{m}\right|=3, \left|\overline{n}\right|=5$, угол между векторами $(\overline{m,n})=90^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}=-2\overline{i}+\overline{3j}+5\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(0;2;1) , B(-2;5;1),C(-2;2;7), D(0;5;9).

6. Компланарны ли векторы:

$\overline{a}=-3\overline{i}-6\overline{k}$, $\overline{b}=3\overline{i}+4\overline{k}$, $\overline{c}=-5\overline{i}-\overline{9j}$

## В. 11

1. Даны точки: A(-1;-3;-5) и B(2;6;2).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора$\left|\overline{AB}\right|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-3;4) , B(1;7), C(3;-2). В начале координат приложены силы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через еди-

ничные векторы.

3. Вычислить $(2\overline{m}-\overline{n})^2$,если $|\overline{m}|=8$, $|\overline{n}|=5$, угол между векторами $(\overline{m,n})=120^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{3j}+5\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+4\overline{j}-3\overline{k}$

5.Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(2;1;0) , B(0;4;0),C(0;1;6), D(2;4;8).

6.Компланарны ли векторы:

$\overline{a}=-3\overline{i}+7\overline{j}-4\overline{k}$, $\overline{b}=3\overline{i}+\overline{3j}+4\overline{k}$, $\overline{c}=-\overline{i}-\overline{9j}+3\overline{k}$

## В. 12

1. Даны точки: A(1;-3;-1) и B(5;3;2).Найти координаты вектора $\overline{AB}$,модуль вектора $|\overline{AB}|$, разложить вектор по базису орт, найти направляющие косинусы.

2. Даны точки A(-8;1) , B(-1;7), C(3;-2). В начале координат приложены силы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Найти их результирующую $\overline{OM}$, ее величину. Выразить векторы и их результирующую через единичные векторы.

3. Вычислить $(2\overline{m}-\overline{n})^2$,если $|\overline{m}|=4$, $|\overline{n}|=5$, угол между векторами $(\overline{m,n})=120^0$.

4. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах: $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{5j}+3\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+4\overline{3j}-3\overline{k}$

5. Найти объем пирамиды ABCD и высоту, опущенную на грань ABC, если: A(0;1;2) , B(-2;4;2),C(-2;1;8), D(0;4;10).

6. Компланарны ли векторы: $\overline{a} = 3\overline{i} + 6\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = -3\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = -\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$

## В.13

1. Даны векторы $\overline{a} = \overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$, Определить $ПР_{\overline{b}}\overline{a}$.

2.Построить треугольник, заданный вершинами A(0;0;1) , B(1;-2;3), C(0;3;0). Вычислить его площадь.

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{i} + 6\overline{j}$, $\overline{b} = -2\overline{j} + \overline{k}$.

4. Доказать, что векторы $\overline{a} = \overline{i} + 6\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$ компланарны и разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$

5. Найти $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot \overline{c}$, если $\overline{a} = (1;1;2)$, $\overline{b} = (3;2;0)$ и $\overline{c} = (0;5;2)$

## В. 14

1. Даны векторы $\overline{a} = 2\overline{i} + 6\overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$, Определить $ПР_{\overline{b}}\overline{a}$.

2. Построить треугольник, заданный вершинами A(2;0;1) , B(1;-2;3), C(0;4;0). Вычислить его площадь.

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, постро-

енного на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} + 6\bar{j}$, $\bar{b} = -\bar{j} + \bar{k}$.

4. Доказать, что векторы $\bar{a} = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{л}$, $\bar{c} = -3\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k}$ компланарны и разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$

5. Найти $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot \bar{c}$, если $\bar{a} = (-1;1;2)$, $\bar{b} = (3;2;1)$ и $\bar{c} = (0;5;2)$

В. 15

1. Даны точки A(1;2;-1), B(1;3;4), C(0;1;5). Разложить по ортам $\bar{a} = \overline{AB} - \overline{BC}$

2. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ ,$\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$. Найти $Cos(\bar{a}, \bar{b})$.

3. В параллелограмме ABCD даны $\overline{AB} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\overline{AD} = \{2;1;-2\}$. Найти $\overline{AC} \times \overline{BD}$

4. Точки $A(2;3;l)$, $B(3;-1;-2)$, $C(1;4;0)$, $D(1;3;2)$ - лежат в одной плоскости. Найти l.

5. Доказать, что $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) = 2\bar{a} \times \bar{b}$

III.

## ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Найти указанные пределы.

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 4}$; $a) x_0 = 2, \quad б) x_0 = -1, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 2x}{\sin 3x}$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{4 - x - 3x^2}$; $a) x_0 = -1, \quad б) x_0 = 1, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x \cos 3x}$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2}$; $a) x_0 = 2, \quad б) x_0 = -2, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x tg 3x}{\sin^2 2x}$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{14 - x - 3x^2}$; $a) x_0 = 1, \quad б) x_0 = 2, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x tg 3x}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 3x + 5}$; $a) x_0 = -2, \quad б) x_0 = -1, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{tg 2x}$

6. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{3x - x^2 - 2}$; $a) x_0 = -1, \quad б) x_0 = 1, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x \cos 5x}{\sin 3x}$

7. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{3x^2 - x - 14}$; $a) x_0 = 2, \quad б) x_0 = -2, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x tg 4x}{\sin^2 6x}$

8. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 - 7x + 6}{6 - x - x^2}$; $a) x_0 = 1, \quad б) x_0 = 2, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x tg 4x}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 6x - 7}{3x^2 + x - 2}$; $a) x_0 = -2, \quad б) x_0 = -1, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 8x}{tg 5x}$

10. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 + x - 4}{4x - x^2 - 3}$; $a) x_0 = -1, \quad б) x_0 = 1, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x \cos 7x}{\sin 2x}$

11. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + x - 6}$; $a) x_0 = 2, \quad б) x_0 = -2, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x tg 2x}{\sin^2 3x}$

12. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{6 - x - x^2}$; $a) x_0 = 1, \quad б) x_0 = 2, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x tg 2x}{x^2}$

13. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 7x - 8}{2x^2 + 5x + 3}$; $a) x_0 = -2, \quad б) x_0 = -1, \quad b) x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{tg 2x}$

14. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-3x-1}{5x-x^2-4}$; $a)x_0=-1,\quad б)x_0=1,\quad b)x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cos 8x}{\sin 10x}$

15. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2-2x-16}$; $a)x_0=2,\quad б)x_0=-2,\quad b)x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xtg4x}{\sin^2 6x}$

16. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-6}{5x-x^2-6}$; $a)x_0=1,\quad б)x_0=2,\quad b)x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2xtg3x}{x^2}$

17. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+8x+7}{3x^2-x-4}$; $a)x_0=-2,\quad б)x_0=-1,\quad b)x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg3x}$

18. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-x-4}{3x-x^2-2}$; $a)x_0=-1,\quad б)x_0=1,\quad b)x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 5x}{\sin 8x}$

19. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+3x-2}$; $a)x_0=2,\quad б)x_0=-2,\quad b)x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5xtg2x}{\sin^2 4x}$

20. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-x-10}{3x-x^2-10}$; $a)x_0=1,\quad б)x_0=2,\quad b)x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6xtg2x}{x^2}$

**IY.** ПРОИЗВОДНАЯ

## Найти производные функции

1. $a)y=x^2+\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^3}$; $b)y=\dfrac{Sin^2 3x}{\sqrt{x}}+\ln\sqrt[3]{x}$; $c)xy^2+6Siny-e^{x+y}=0$

2. $a)y=x^5+\dfrac{1}{x^6}-\sqrt{x^3}$; $b)y=\dfrac{tg^2 3x}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}$; $c)y^3+x^2+\ln(x-y)-5=0$

3. $a)y=2x^5+\dfrac{1}{x^3}-\ln x$; $b)y=\dfrac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{x+1}}+Sin\sqrt{x}$; $c)y=(Sinx)^x$

4. $a)y=3x^{-2}+\dfrac{1}{x^{-3}}-\sqrt[5]{x^2}$; $b)y=\dfrac{\arcsin^2 x}{\ln\sqrt{x+1}}+Sin4x$; $c)y=(Cosx)^x$

5. $a)y=x^{-5}+\dfrac{1}{x^{-3}}+\arccos x$; $b)y=\dfrac{\arcsin\ x}{\ln\sqrt{x^2+1}}+Sinx\cdot tgx$; $c)y=(\ln x)^x$

6. $a)y=(x^2+\sqrt{x^3})^2$; $b)y=Sin3x\cdot tg^2x$; $c)y=(tgx)^x$

7. $a)y=(3x^2+\sqrt{x})^2$; $b)y=ctg3x\cdot tg^2x$ ; $c)x=Sin^2t, y=Cos^2\dfrac{t}{2}$

8. $a) y=(3x^2+x)^3$;  $b) y=\ln x\cdot tg^2 x$;  $c) y=\arccos 2t, x=\arcsin t$

9. $a) y=\sqrt{x}+x^4+\frac{1}{x^5}-\ln x$;  $b) y=x^5\cdot tg^2 3x$;  $c) y=\sqrt{t}, x=at$

10. $a) y=\frac{1}{x^2}\sqrt{x}++\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;  $b) y=\frac{3Sinx}{\sqrt{x+1}}+ctg\sqrt[3]{x}$;  $c) y=(3x)^x$

11. $a) y=x\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$;  $b) y=\frac{\arcsin^3 x}{\ln\sqrt{x^2+1}}+x\cdot tgx$;  $c) y=2t+3,\quad y=\sqrt{t^2+1}$

12. $a) y=x\sqrt{x^3}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$;  $b) y=\frac{\ln^3 x}{\ln\sqrt{x^2+1}}+tg3x$;  $c) 3\ln(x^2+y)-8y=0$

13. $a) y=\sqrt{x}\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+x^{-3}+\frac{1}{x^6}$;  $b) y=\frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{x}}+\ln\sqrt{x}$;  $c) y=(5x)^x$

14. $a) y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}+x^{-3}+\frac{1}{\sqrt{x}}$;  $b) y=\frac{(\arcsin\ x-3x)}{\sqrt{x^2+1}}$;  $c) y=3\sin 2t,\quad x=e^{t^2}$

15. $a) y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x}}-3x^{-3}+\frac{1}{\sqrt{x}}$;  $b) y=\frac{(x-3x)^4}{\sqrt{x^2+1}}$;  $c) x=arctg(2t+1),\quad y=tg3t$

16. $a) y=\frac{x^4}{\sqrt[7]{x}}-\frac{1}{x}\cdot 3x^{-3}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;  $b) y=\frac{(x-3x)^4}{\arccos 2x}$;  $c) 3x^2+6y^2-8\sin^2 x+10y=0$

17. $a) y=e^x-\frac{1}{x}x^{-3}+\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$;  $b) y=\frac{\ln^2\sqrt{x}}{\arccos 2x}$;  $c) 5x^3-8y^3+3x=0$

18. $a) y=a^x-\frac{1}{x}+\frac{x^4}{\sqrt[3]{x^2}}$;  $b) y=\sqrt{x+3}\cdot\arccos 5x$;

$c) 2xy + 6y^2 - 8\cos y - 2y = 0$

19. $a) y = -\dfrac{1}{x} - a^x + \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$; $b) y = \sqrt{x^2 + 3} \cdot 2\arccos^4 x$;

$c) y = 3Sin2t, x = 2Cos3t$

20. $a) y = -\dfrac{1}{x^3} - \cos x + \dfrac{\sqrt{x^3}}{x}$; $b) y = 3Sin^3 2x\sqrt{x \quad + 3}$;

$c) 3\sin(x + 2y) - \cos x = 5$

## Исследовать функции методами дифференциального исчисления и построить график

1. а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$; б) $y = \ln(1 + x^2)$

2. а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; б) $y = \dfrac{3x^2}{x+1}$

3. а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$; б) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

4. а) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$; б) $y = \dfrac{4x^3}{9(3 - x^2)}$

5. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$; б) $y = x^3 e^{-x}$

6. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$; б) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

7. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$; б) $y = \dfrac{e^x}{x}$

8. а) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$; б) $y = \dfrac{x^2 + 5}{x + 2}$

9. а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$; б) $y = \dfrac{x}{e^x}$

10. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$; б) $y = \frac{2}{x} + 3x^2$

11. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$; б) $y = \frac{x^2 + 9}{x}$

12. а) $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$; б) $y = \frac{2x}{e^x}$

13. а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$; б) $y = \sqrt[3]{x} - 2$

14. а) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$; б) $y = \frac{x^2 + 16}{x + 3}$

15. а) $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$; б) $y = x - \ln(x + 1)$

16. а) $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$; б) $y = \frac{x^2 + 25}{x}$

17. а) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$; б) $y = 2x \ln x$

18. а) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$; б) $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$

19. а) $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$; б) $y = \frac{x^2 + 27}{x + 3}$

20. а) $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$: б) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$

**Вычислить приближенно результат округлить до двух знаков после запятой.**

1. $\sqrt[4]{620}$

2. $tg47°$

3. Вычислить значение функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ в точке

$x_0 = 1{,}04$

4. Вычислить значение функции $f(x) = \arcsin x$ в точке

$x_0 = 0{,}08$

5. $\sqrt[3]{8{,}2}$

6. Вычислить значение функции $f(x) = x^3 + 3x - 1$ в точке

$x_0 = 1{,}003$

7. $arctg1{,}01$

8. $\sqrt[3]{27{,}3}$

9. $\sin 32^0$

10. $\sqrt[4]{15{,}8}$

11. $arctg1{,}03$

12. $\lg 13$

13. $e^{2{,}02}$

14. $2^{3{,}3}$

15. $\arcsin 0{,}8$

16. $(3,02)^4 + (3,02)^3$

17. $\ln(tg\,47^0)$

18. Найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ в точке $x = 1{,}03$

19. Найти приближенное значение функции $f(x) = \sqrt{5x - 1}$ в точке $x = 1{,}99$

20. $(8{,}2)^{2/3}$

**Решить задачу,**
**используя понятия наибольшего наименьшего значения функции**

1. Каковы должны быть размеры прямоугольника наибольшей площади, вписанного в круг радиуса 6 *см*?

2. Проволока длиной 40 *см* согнута в прямоугольник. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

3. Канал, ширина которого 27 *м*, под прямым углом впадает в другой канал шириной 64 *м*. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?

4. Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна S=24$\pi$ $(м^2)$

5. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна $l = \sqrt{3}(\text{м})$.

6. Турист идет из пункта А, находящегося на шоссейной дороге, в пункт В, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от А до В по прямой составляет 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт В, если его скорость передвижений по шоссе 5км/ч, а по бездорожью 3км/ч?

7. Объем правильной треугольной призмы равен $V = 16(\text{м}^3)$. Какова должна быть длина стороны основания призмы, чтобы ее полная поверхность была наименьшей?

8. Открытый чан имеет форму цилиндра объема $V = 27\pi(\text{м}^3)$. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

9. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20*см*. Какова должна быть высота воронки, чтобы его объем был наибольшим?

10. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 *(см³)*, причем стороны основания относились бы

как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

11. Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

12. Требуется изготовить полотняный шатер, имеющий форму прямого кругового конуса заданной вместимости $V=\frac{9}{2}\pi(\text{м}^3)$.Каковы должны быть размеры конуса( высота и радиус основания), чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

13. Из прямоугольного листа жести размером $24\times 9\,см$ требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наименьшей?

14. Найти прямоугольник наибольшей площади, если сумма длин его катета и гипотенузы постоянна и равна 4(см).

15. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

16. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

17. Какое положительное число, будучи сложенным с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

18. Деталь из листового железа имеет форму равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 *см*. Каким должно быть основание треугольника, чтобы его площадь бала наибольшей?

19. Огород прямоугольной формы огорожен изгородью, длина которой 72 *м*. Каковы должны быть размеры огорода, чтобы его площадь была максимальной?

20. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 $м^2$ и разделить этот участок забором на две конгруэнтные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

# Y. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Найти неопределенный интеграл

(тесты)

**1.** $\int(x^2 + x - 1)dx$.

**A)** $2x+1+C$; **B)** $\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-1+C$; **C)** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$; **D)** $3x^3+2x^2-x+C$; **E)** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+C$.

**2.** $\int(\sin x - 3\cos x)dx$.

**A)** cosx-3sinx+C; **B)** –cosx+3sinx+C; **C)** -cosx-3sinx+C; **D)** cosx+3sinx+C; **E)** -cosx-sinx.

**3.** $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

**A)** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$; **B)** $\frac{2}{3}\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$; **C)** $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$;

**D)** $\frac{3}{2}x\sqrt{x}+\sqrt{x}+C$; **E)** $\frac{1}{2}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

**4.** $\int(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x})dx$.

**A)** tgx-ctgx+C; **B)** tgx+ctgx+C; **C)** ctgx-tgx+C;

**D)** $tg^2x+ctg^2x+C$; **E)** $tg^2x-ctg^2x+C$.

**5.** $\int(4x-3)^5dx$.

**A)** $\frac{(4x-3)^6}{24}$ + C; **B)** $\frac{(4x-3)^6}{4}$ + C; **C)** $20(4x-3)^4$ + C; **D)** $\frac{(4x-3)^6}{6}$ + C; **E)** $\frac{(4x-3)^4}{20}$ + C.

**6.** $\int\sqrt{2x+5}\,dx$.

**A)** $\frac{2}{3}(2x+5)\sqrt{2x+5}$ +C; **B)** $\frac{2}{\sqrt{2x+5}}$ + C; **C)** $\frac{1}{3}\sqrt{2x+5}$ +C;

**D)** $\frac{1}{3}(2x+5)\sqrt{2x+5}$ +C; **E)** $\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ + C.

**7.** $\int\sin(12x+7)dx$.

**A)** $-\frac{1}{2}\cos(12x+7)$+C; **B)** $-\frac{1}{12}\cos(12x+7)$+C; **C)** $\frac{1}{12}\cos(12x+7)$+C;

**D)** $-\frac{1}{6}\sin(12x+7)$+C; **E)** $-\cos(12x+7)$+C.

**8.** $\int\frac{dx}{(5x-4)^2}$.

**A)** $-\frac{1}{5x-4}$+C; **B)** $-\frac{1}{4(5x-4)}$+C; **C)** $-\frac{1}{5(5x-4)}$+C; **D)** $\frac{1}{5(5x-4)}$+C; **E)** $-\frac{1}{25x-4}$+C.

## Литература

1. Высшая математика: учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – Москва: Флинта: МПСИ, 2010. – 359 с.

2. Высшая математика: учебник для студентов высших технических учебных заведений / Г.Л. Луканкин [и др.]. – Москва: Высшая школа, 2009. – 583 с.

3. Краткий курс высшей математики: учебник / К. В. Балдин [и др.]. – Москва: Дашков и К°, 2012. – 510 с.

4. Кундышева, Е. С. Математика: учебник / Е. С. Кундышева. – Москва: Дашков и К°, 2011. – 561 с.

5. Малыхин, В. И. Высшая математика: учебное пособие / В. И. Малыхин. – Москва: Инфра-М, 2010. – 363 с.

6. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д Мышкис.- Москва: Лань, 2007.

7. Основы высшей математики: пособие для студентов вузов / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2012. – 204 с.

8. Основы высшей математики для инженеров: учебное пособие для высших технических учебных заведений / Ю. В. Липов-

цев, О. Н. Третьякова. – Москва: Вузовская книга, 2009. – 482 с.

9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления /Пискунов Н.С. –М: Физматлит, 2002. - 746 с.

10. Шипачев, В. С. Основы высшей математики: учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – Москва: Юрайт, 2009. – 478 с.

Учебное издание

Рыжик Валентина Николаевна

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## ЧАСТЬ I

Учебно-методическое пособие
для всех направлений инженерно-технологических специальностей
Квалификация (степень) выпускника: **Бакалавр**

Редактор Павлютина И.П.

Подписано в печать 25.05. 2017 г. Формат 60×84 1/16.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 13,94. Тираж 200 экз. Изд. №5310.

Брянский государственный аграрный университет
243365, Брянская обл., Выгоничский р-н, с. Кокино