БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСТИТЕТ

Кафедра математики, физики и информатики

Петракова Наталья Васильевна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

для студентов по направлению подготовки

21.03.02 «Землеустройство и кадастры»

очной и заочной формы обучения

БРЯНСКАЯ ОБЛАСТЬ
2016

УДК 681:004(07)

ББК 32.973:65.39

П 30

Петракова Н.В. **Решение задач линейного программирования**: Учебно-методическое пособие. /Н.В. Петракова. – Брянск. Издательство Брянский ГАУ, 2016. - 33 с.

В учебно-методическом пособии «Решение задач линейного программирования» рассматривается построение математических моделей задач линейного программирования и технология решения их в Microsoft Excel. Пособие содержит большое число примеров и задач, поэтому оно будет полезным не только для проведения лабораторных и практических занятий, контрольных работ, но и для обеспечения соответствующих тем лекционного курса.

Для студентов по направлению подготовки 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» очной и заочной формы обучения.

Рецензенты: доцент кафедры математики, физики и информатики, к.э.н. ***Верезубова Н.А.***
старший преподаватель кафедры природообустройства и водопользования ***Кровопускова В.Н.***

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией факультета энергетики и природопользования от 19 января 2016 г., протокол № 2.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1 Общая задача линейного программирования (ЗЛП)

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования [5].

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования.

Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом: *требуется найти максимум или минимум линейной функции, называемой целевой функцией на множестве неотрицательных решений системы линейных ограничений (уравнений или неравенств).*

Математическая модель задачи линейного программирования имеет вид:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \grave{a}_{ij} x_j \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} b_i, (i = 1:m)$$

$$x_j \geq 0, (j = 1:n)$$

где j – номер переменной;

n – число переменных;

i – номер ограничений;

m – число ограничений;

x_j – переменные (неизвестные);

a_{ij} – технико-экономические коэффициенты при переменных;

c_j – оценки целевой функции;

b_i – объемы ограничений.

Совокупность чисел $\overline{X} = (x_1, \mathrm{x}_2,..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$, удовлетворяющих ограничениям задачи, называется ***допустимым решением*** (или планом).

План $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение называется ***оптимальным***.

Задачи линейного программирования могут быть записаны в трех формах в зависимости от постановки задачи.

1. ***Стандартная (симметричная) форма записи:***

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad\qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, (i = 1:m) \qquad \text{или} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, (i = 1:m)$$

$$x_j \ge 0, (j = 1:n) \qquad\qquad x_j \ge 0, (j = 1:n)$$

2. ***Основная (каноническая) форма записи:***

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, (i = 1:m)$$

$$x_j \ge 0, (j = 1:n)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

Если система ограничений задачи линейного программирования является системой уравнений, то такая задача называется *канонической формой ЗЛП*.

3. ***Общая форма записи:*** в ней для отдельных ограничений могут присутствовать как знаки равенства, так и знаки неравенства.

Любая форма записи приводит к любой другой.

Например, чтобы перейти от стандартной задачи к канонической необходимо ввести новые переменные, а затем в зависимости от знака неравенства либо прибавить, либо вычесть их из каждого неравенства.

1.2 Построение экономико-математической модели задачи линейного программирования

Рассмотрим процесс построения экономико-математической модели задачи линейного программирования на примере.

Пример 1. В хозяйстве имеется 200 га неиспользуемых земель, пригодных для освоения под пашню и сенокос. Затраты труда на освоение 1 га земель под пашню составляют 200 чел.-ч., в сенокос – 50 чел.-ч. Для вовлечения земель в сельскохозяйственный оборот предприятие может затратить не более 15 тыс. чел.-ч. механизированного труда. Стоимость продукции, получаемой с 1 га пашни, составляет 600 руб., а с 1 га сенокосов – 200 руб. В задании на проектирование установлено, что площадь земель, осваиваемых под пашню, не должна превышать 2/3 площади сенокосов. Требуется определить, какую площадь необходимо освоить под пашню и сенокосы, чтобы получить максимальное количество продукции в стоимостном выражении.

Экономико-математическая модель

Система переменных:

x_1 – площадь, трансформируемая в пашню, га

x_2 – площадь, трансформируемая в сенокосы, га

Система ограничений:

1. Ограничение по общему количеству земли, выделяемой для освоения:

   $x_1 + x_2 = 200$

2. Ограничение по использованию трудовых ресурсов:

   $200x_1 + 50x_2 \leq 15000$

3. Ограничение по соотношению площадей пашни и сенокосов:

   $x_1 \leq 2/3x_2$

   или после преобразования $x_1 - 2/3x_2 \leq 0$

   или $x_1 - 0{,}66667x_2 \leq 0$

Условие неотрицательности:

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

Целевая функция – максимальное количество продукции в стоимостном выражении

$Z = 600x_1 + 200x_2 \rightarrow max$

1.3 Решение задач линейного программирования в Microsoft Excel

1. Ввести исходные данные задачи и формулы для вычислений (рис. 1).

D3 =СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B3:C3)

	A	B	C	D	E	F
1	**Переменные**	**x_1**	**x_2**			
2	**Значения**			**Значение Z - max**		
3	**Стоимости продукции**	600	200	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B3:C3)		
4						
5						
6	**Ограничения**	**Коэффициенты**		**Левая часть**	**Знак**	**Правая часть**
7	**Земля**	1	1	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B7:C7)	=	200
8	**Трудовые ресурсы**	200	50	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B8:C8)	<=	15000
9	**Соотношение площадей**	1	=-2/3	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B9:C9)	<=	0

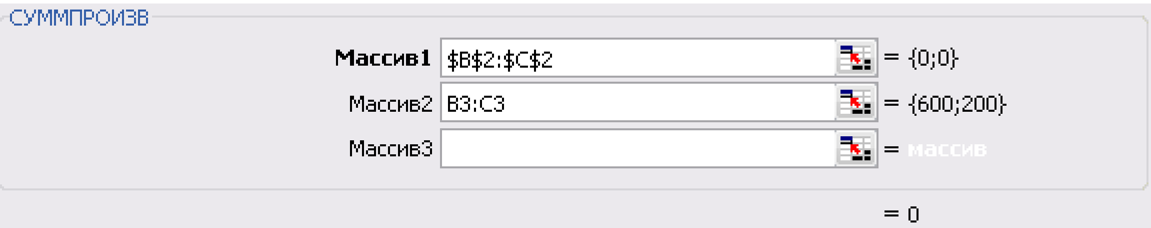
Рис. 1. Технология решения ЗЛП в MS Excel

Вод формул:

– *установить курсор в ячейку* D3, *на панели формул щелкнуть по кнопке* fx *(Вставка функции);*

– *в открывшемся диалоговом окне* ***Мастер функций*** *выбрать Категория:* **Математические** – *Функция:* **СУММПРОИЗВ**

– *в диалоговом окне* ***Аргументы функции*** *ввести выделением диапазоны ячеек:*



для ввода абсолютной адресации диапазона B2:C2 *щелкнуть по кнопке* **F4**.

– *в диалоговом окне щелкнуть по кнопке* Ok;

– *в ячейке* D3 *будет отображен результат* 0;

– *скопировать формулу из ячейки* D3 *в диапазон ячеек* D7:D9.

2. Установить курсор в ячейку D3, выбрать пункт меню **Данные,** в ленте команд выбрать **Поиск решения**[1]**.** В открывшемся диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 2) текстовое поле **Оптимизировать целевую функцию** будет содержать адрес целевой ячейки $D$3.

3. Выбрать вариант поиска решений – 

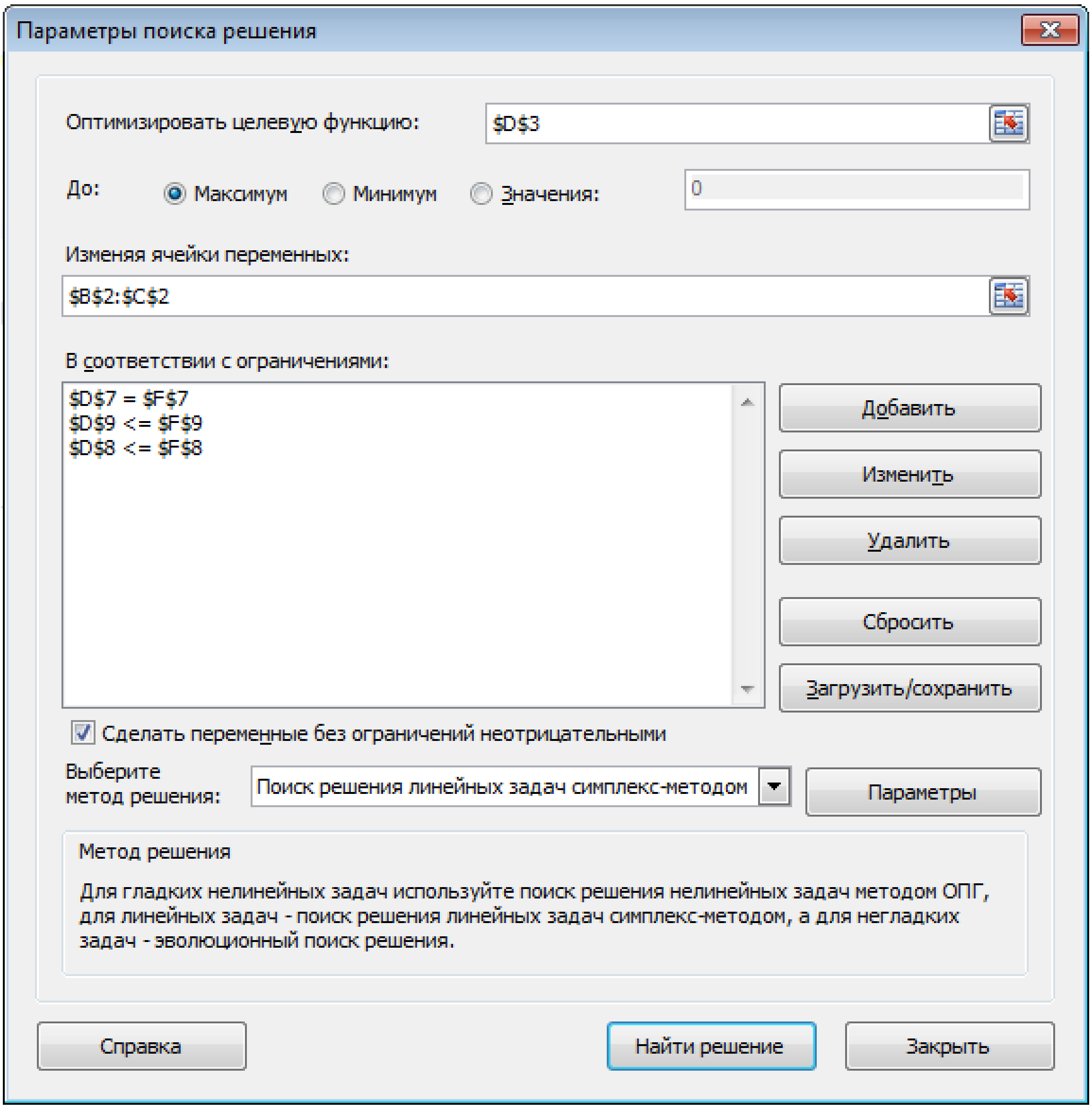


Рис. 2. Диалоговое окно Параметры поиска решения

4. Щелкнуть левой кнопкой мыши в текстовом поле **Изменяя ячейки переменных** и указать диапазон ячеек для получения оптимального результата,

[1] Если в ленте команд отсутствует **Поиск решения**, следует выполнить следующие действия: выбрать в меню **Файл – Параметры – Надстройки** – из списка надстроек выбрать **Поиск решения**, щелкнуть по кнопке **Перейти**. В открывшемся диалоговом окне ***Надстройки*** активизировать **Поиск решения** и щелкнуть по кнопке Ok.

для этого следует выделить диапазон ячеек B2:C2. В текстовом поле будет записано $B$2:$C$2.

5. Для ввода ограничений щелкнуть по кнопке 

 и в открывшемся диалоговом окне (рис. 3) ввести все ограничения. После ввода последнего ограничения щелкнуть по кнопке Ok, заданные ограничения будут отражены в диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 2).

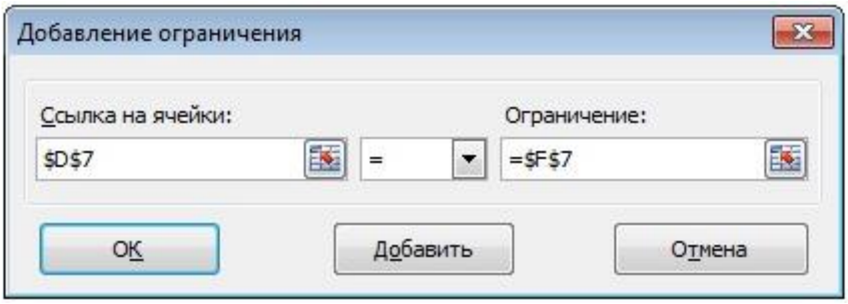
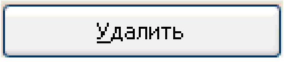
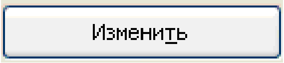


Рис. 3. Диалоговое окно Добавление ограничения

6. Чтобы удалить введенное ограничение, выделить его в списке и щелкнуть по кнопке 

. Для изменения ограничения следует использовать кнопку 

. Откроется диалоговое окно **Изменение ограничения**, аналогичное окну **Добавление ограничения**, где следует внести изменения.
7. Для выполнения условия неотрицательности переменных установить:

8. Выбрать метод решения

9. Запустить задачу на выполнение щелчком по кнопке 

10. В случае успешного завершения решения задачи на экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 4), в котором сообщается о найденном решении задачи. Установить переключатель *Сохранить найденное решение* выделить *Отчеты: Результаты, Устойчивость, Пределы* и щелкнуть по кнопке Ok.

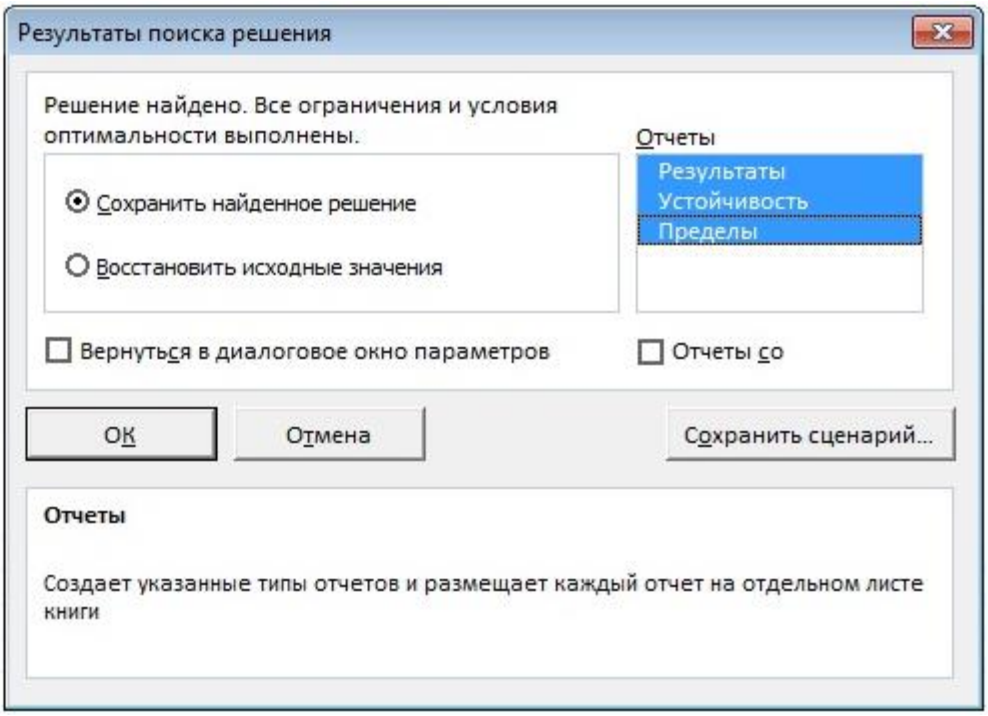


Рис. 4. Диалоговое окно Результаты поиска решения

Примечание:

В результате решения задачи в диалоговом окне **Результаты поиска решения** (рис. 4) возможно сообщение: **В ходе поиска не удалось найти допустимого решения**, которое свидетельствует о том, что при вводе условий задачи были допущены **ошибки**, не позволяющие MS Excel найти оптимальное решение.

	A	B	C	D	E	F
1	**Переменные**	**x_1**	**x_2**			
2	**Значения**	33,333	166,667	**Значение Z - max**		
3	**Стоимости продукции**	600	200	53333,33333		
4						
5						
6	**Ограничения**	**Коэффициенты**		**Левая часть**	**Знак**	**Правая часть**
7	**Земля**	1	1	200	=	200
8	**Трудовые ресурсы**	200	50	15000	<=	15000
9	**Соотношение площадей**	1	-0,6667	-77,77777778	<=	0

Рис. 5. Результаты поиска решения задачи

Анализ оптимального решения показывает, что для получения максимального количества продукции в стоимостном выражении в размере 53333,3 руб. необходимо освоить под пашню 33,3 га и сенокосы 167,7 га.

Создание отчетов о результатах поиска решения

Для того чтобы сохранить результаты работы процедуры поиска решения в виде отчета, необходимо тип отчета выбрать из списка в диалоговом окне **Результаты поиска решения**.

Программа предлагает отчеты следующих типов:

- Результаты
- Устойчивость
- Пределы

Каждый отчет создается на отдельном листе.

На рис. 6 представлен **отчет о результатах**.

Отчет состоит из трех таблиц:

таблица 1. Сведения о целевой функции

таблица 2. Значения искомых переменных

таблица 3. Результаты оптимального решения

В столбце **Формулы** (табл. 3) приведены ограничения, которые были введены в диалоговом окне **Параметры поиска решения**, в столбце **Значение ячейки** приведены значения использованного ресурса; в столбце **Допуск** отражено количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью (т.е. в ограничении используется строгое равенство), то в столбце **Состояние** указывается *привязка*, при неполном использовании ресурса (т.е. в ограничении используется строгое неравенство) указывается – *без привязки*.

Microsoft Excel Отчет о результатах
Лист: [ЗЛП.xls]ЗЛП
Отчет создан: 14.01.2016 12:14:21
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0,031 секунд.
Число итераций: 3 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время 100 с, Число итераций 100, Precision 0,000001
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 5%, Решение без целочисленных ограничений, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$D$3	Стоимости продукции Значение Z - max	53333,33333	53333,33333

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$2	Значения x1	33,33333333	33,33333333	Продолжить
$C$2	Значения x2	166,6666667	166,6666667	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$D$7	Земля Левая часть	200	$D$7=$F$7	Привязка	0
$D$8	Трудовые ресурсы Левая часть	15000	$D$8<=$F$8	Привязка	0
$D$9	Соотношение площадей Левая часть	-77,77777778	$D$9<=$F$9	Без привязки	77,77777778

Отчет о результатах 1 / Отчет об устойчивости 1 / Отчет о пределах 1

Рис. 6. Отчет о результатах

На рис. 7 представлен отчет об **устойчивости**.

Microsoft Excel Отчет об устойчивости
Лист: [ЗЛП.xls]ЗЛП
Отчет создан: 14.01.2016 12:14:22

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Значения x1	33,33333333	0	600	1E+30	400
$C$2	Значения x2	166,6666667	0	200	400	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$7	Земля Левая часть	200	66,66666667	200	100	63,63636364
$D$8	Трудовые ресурсы Левая часть	15000	2,666666667	15000	7000	5000
$D$9	Соотношение площадей Левая часть	-77,77777778	0	0	1E+30	77,77777778

Отчет о результатах 1 / Отчет об устойчивости 1 / Отчет о пределах 1

Рис. 7. Отчет об устойчивости

Отчет об устойчивости состоит из двух таблиц.

В таблице 1 приводятся следующие значения для переменных:

– окончательное значение – результат решения задачи;

– приведенная стоимость, которая показывает, на сколько изменяется значение целевой функции при принудительном включении единицы этого изделия в оптимальное решение;
– коэффициенты целевой функции;
– предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

В таблице 2 приводятся значения для ограничений:
– окончательное значение – величина использованных ресурсов;
– тень (теневая) цена – двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу;
– значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

На рис. 8 представлен **отчет о пределах**.

В отчете отражены пределы, в которых могут изменяться переменные, вошедшие в оптимальное решение.

Microsoft Excel Отчет о пределах
Лист: [ЗЛП.xls]ЗЛП
Отчет создан: 14.01.2016 12:14:22

	Целевая функция	
Ячейка	Имя	Значение
$D$3	Стоимости прс	53333,333

	Переменная		Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$2	Значения x1	33,333333	33,3333	53333,33333	33,33333	53333,33333
$C$2	Значения x2	166,66667	166,667	53333,33333	166,6667	53333,33333

Отчет об устойчивости 1 | Отчет о пределах 1

Рис. 8. Отчет о пределах

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов озимой ржи, озимой пшеницы и картофеля. Под посевы отведено 1000 га пашни, которая должна использоваться полностью. Общие ресурсы труда составляют 30 тыс. чел.-ч. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 1).

Таблица 1

Показатели	Озимая рожь	Озимая пшеница	Картофель
Урожайность с 1 га, ц	32	40	250
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	16	20	80
Производственные затраты на 1 га, ден. ед.	214	226	782

По плану требуется произвести 32 тыс. ц зерна и 40 тыс. ц картофеля. Критерий оптимальности – минимум производственных затрат.

Вариант 2.

Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов трех зерновых культур: озимой пшеницы, ярового ячменя и овса. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 2).

Таблица 2

Показатели	Озимая пшеница	Яровой ячмень	Овес
Урожайность с 1 га, ц	40	35	30
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	20	15	13
Затраты удобрений на 1 га, ден. ед.	80	50	40

Производственные ресурсы: пашня 1600 га, труд – 27000 чел.-ч., удобрения – 99000 ден. ед. В структуре посевов площадь под озимой пшеницей должна составлять не менее 50%.

Критерий оптимальности – максимум производства зерна.

Вариант 3.

Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов трех зерновых культур: озимой ржи, озимой пшеницы и картофеля. Под посевы отведено 2000 га пашни. Ресурсы труда составляют 72000 чел.-ч., резерв минеральных удобрений – 3730 ц действующего вещества. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 3).

В структуре посевов зерновые должны составлять не менее 80%.

Таблица 3

Показатели	Озимая рожь	Озимая пшеница	Картофель
Урожайность с 1 га, ц	28	36	220
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	18	22	105
Минеральные удобрения на 1 га, ц д. в.	1,75	2,1	1,8
Прибыль на 1ц, ден. ед.	9,30	8,65	2,40

Критерий оптимальности – максимум прибыли от реализации продукции.

Вариант 4.

Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов трех кормовых культур: кормовых корнеплодов, кукурузы на силос, однолетних трав на зеленый корм. Под посевы отведено 1500 га пашни. Ресурсы труда составляют 40630 чел.-ч. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 4).

Таблица 4

Показатели	Кормовые корнеплоды	Кукуруза на силос	Однолетние травы
Урожайность с 1 га, ц	600	400	200
Содержится в 1ц, ц корм. ед.	0,12	0,20	0,16
Затраты труда на 1га, чел.-ч.	81,3	28,6	10,3

По плану требуется произвести 100 тыс. ц кормовых корнеплодов, 200 тыс. ц силоса и 120 тыс. ц зеленого корма.

Критерий оптимальности – максимум производства кормов.

Вариант 5.

Составить экономико-математическую модель оптимизации сочетания способов уборки многолетних трав на сено, сенаж и силос. Площадь посева трав составляет 1000 га, а ресурсы труда – 15760 чел.-ч. По плану требуется произвести не менее 21 тыс. ц корм. ед. грубых кормов и 4 тыс. ц корм. ед. силоса. Производство многолетних трав в зависимости от способов уборки характеризуется следующими показателями (табл. 5).

Таблица 5

Показатели	Многолетние травы на		
	сено	сенаж	силос
Выход продукции с 1 га, ц	50	125	250
Содержание кормовых единиц в 1 ц корма, ц	0,5	0,128	0,1
Затраты труда на 1ц, чел.-ч.	0,2	0,4	0,16

Критерий оптимальности – максимум производства кормов.

Вариант 6.

Составить экономико-математическую модель оптимизации способов уборки льна-долгунца на солому и тресту на площади 400 га. Способы уборки льна характеризуются следующими показателями (табл. 6).

Таблица 6

Показатели	Способы уборки	
	на солому	на тресту
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.: в августе в сентябре	 59 –	 12 70
Прибыль с 1 га, руб.	500	370

Ресурсы труда в августе составляют 17000 чел.-ч., в сентябре – 10000 чел.-ч. Площадь уборки на солому должна составлять не менее 70% всей площади.

Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Вариант 7.

Составить экономико-математическую модель оптимизации производства кормов. Выход питательных веществ с 1 га и стоимость 1 кг корма представлены в табл. 7.

Таблица 7

Питательные вещества	Силос	Зерно	Потребность
Переваримый протеин	3	7	20
Каротин	7	3	22
Кальций	2	0	5
Фосфор	0	5	6

Стоимость 1 кг силоса 20 ден. ед., зерна – 26 ден. ед.

Критерий оптимальности – минимум стоимости кормов.

Вариант 8.

Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов трех кормовых культур: овса, кукурузы и многолетних трав на площади 600 га. Посевная площадь овса не должна превышать 180 га. Трудовые ресурсы составляют 5000 чел.-дней. Производство кормов на 1 га характеризуется следующими показателями (табл. 8).

Таблица 8

Показатели	Овес	Кукуруза	Многолетние травы
Выход кормов, ц корм. ед.	25	45	15
Затраты труда, чел.-дней	3	4	3

Критерий оптимальности – максимум производства кормов.

Вариант 9.

Составить экономико-математическую модель оптимизации структуры посевов пшеницы, ржи и кормовых корнеплодов. Под посевы отведено 1500 га пашни, которая должна использоваться полностью. Общие ресурсы труда составляют 35 тыс. чел.-ч. Производство культур характеризуется следующими показателями (табл. 9).

Таблица 9

Показатели	Пшеница	Рожь	Корнеплоды
Урожайность с 1 га, ц	30	40	300
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	16	18	100
Стоимость валовой продукции на 1 га, ден. ед.	320	250	175

По плану требуется произвести 32 тыс. ц зерна и 40 тыс. ц кормовых корнеплодов. Критерий оптимальности – максимум стоимости продукции.

Вариант 10.

Составить экономико-математическую модель оптимизации посевов четырех культур на зеленый корм. Под посевы отведено 1800 га. По плану требуется произвести 5600 ц корм. ед., в том числе в мае не менее 7%, в июне – 20%, в июле – 20%, в августе – 20% и в сентябре – 14% от общей потребности в зеленых кормах. Данные о поступлении зеленой массы с 1 га представлены в табл. 10.

Таблица 10

Культура	Поступление зеленой массы с 1 га, ц корм. ед.					
	всего	в мае	в июне	в июле	в августе	в сентябре
Однолетние травы	21,0	–	–	21,0	–	–
Многолетние травы	30,5	–	11,1	6,1	7,2	6,1
Озимая рожь	14,3	14,3	–	–	–	–
Пожнивные посевы	16,2	–	–	–	16,2	–

Критерий оптимальности – максимум производства кормов.

2. ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1 Постановка транспортной задачи

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных специальных задач линейного программирования. Первый точный метод решения транспортной задачи разработан Канторовичем Л.В. и Гавуриным М.К. Под названием «транспортная задача» объединяется широкий круг задач, не только транспортного характера, с единой математической моделью [5]. Общим для них является, как правило, распределение ресурсов находящихся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов.

Различают два типа транспортных задач:

- по критерию стоимости (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию);
- по критерию времени (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).

Постановка транспортной задачи.

Имеется m пунктов отправления (поставщиков) грузов:

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, A_m$

на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах соответственно: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a_m$.

Величины a_i определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза поставщиков составляет $\sum_{i=1}^{m} a_i$

Имеется n пунктов назначения:

$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_j, B_n$

которые подали заявку на поставку грузов в объемах соответственно: b_1, b_2, b_3, …, b_j, b_n. Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика $\mathbf{A}_i$ к потребителю $\mathbf{B}_j$ обозначим через $\mathbf{c}_{ij}$ (транспортный тариф), образующих матрицу транспортных затрат. В качестве критерия оптимальности выбираем суммарные затраты по перевозке грузов.

Формулировка транспортной задачи.

Необходимо составить оптимальный план, т.е. найти такие значения объема перевозок грузов x_{ij} от поставщиков $\mathbf{A}_i$ к потребителям $\mathbf{B}_j$, чтобы удовлетворить заявки каждого потребителя и обеспечить минимальные транспортные затраты на перевозку груза [4].

Данные задачи можно представить в таблице.

Пункты отправления	**Пункты назначения**						**Запасы a_i**
	B_1	**B_2**	…	**B_j**	…	**B_n**	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	**a_1**
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	**a_2**
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	**a_i**
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	**a_m**
Заявки b_j	**b_1**	**b_2**	…	**b_j**	…	**b_n**	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

2.2 Экономико-математическая модель транспортной задачи

Целевая функция имеет вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min(\max)$$

при условиях:

1. Ограничения по запасам:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,(i = 1:m)$$

2. Ограничения по потребностям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,(j = 1:n)$$

3. $x_{ij} \geq 0,$ где $\mathrm{i} = (1:\mathrm{m})$ $\mathrm{j} = (1:\mathrm{n})$

где:

i – номер поставщика;

m – число поставщиков;

j – номер потребителя;

n – число потребителей;

x_{ij} – количество груза, распределяемого от i-го поставщика j-му потребителю;

c_{ij} – затраты на единицу распределяемого груза;

a_i – наличие груза у *i-го* поставщика;

b_j – потребность в грузе j-го потребителя.

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

модель такой транспортной задачи называется ***закрытой***.

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения не равна запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то ***модель*** такой транспортной задачи называется ***открытой***.

1. Если суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей, т.е.

   $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то вводится фиктивный ($n+1$) потребитель с запросами $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, равными разности суммарных запросов поставщиков и запросов потребителей, и нулевыми стоимостями перевозок единицы $c_{i(n+1)}=0$.

2. Если суммарные запросы потребителей превосходят запасы поставщиков, т.е.

   $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то вводится фиктивный ($m+1$) поставщик с запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, равными разности суммарных запросов потребителей и запросов поставщиков, и нулевыми стоимостями перевозок единицы $c_{(m+1)j}=0$.

Таким образом, открытая модель задачи преобразуется в закрытую.

2.3 Построение экономико-математической модели транспортной задачи
Поиск решения в Microsoft Excel

Рассмотрим процесс построения экономико-математической модели транспортной задачи на примерах.

Пример 2. Три хозяйства имеют семь чересполосных участков, продукция которых используется на кормовые цели. Необходимо так перераспределить участки между хозяйствами, чтобы транспортные затраты на перевозку кормов были минимальными, при условии, что общий объем потребления кормов в каждом хозяйстве сохраняется. Общее производство кормов в хозяйстве на первоначально закрепленных за ним участках: «1 Мая» – 6000, «Луч» – 4000, «Победа» – 10000. Объемы производства кормов на различных участках: 1 – 1000, 2 – 2000, 3 – 3000, 4 – 2500, 5 – 1500, 6 – 9000, 7 – 1000. Стоимость транспортировки кормов с участков в хозяйства в рублях и первоначальное закрепление участков за хозяйствами представлены в таблице.

Хозяйства	**Участки**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
«1 Мая»	5	10	18	22	8	17	6
«Луч»	16	2	31	3	46	17	25
«Победа»	8	25	36	14	13	4	28

Исходные данные задачи представим в следующей таблице:

Хозяйства	**Участки**							**Производство кормов в хозяйстве**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
«1 Мая»	**5** x_{11}	**10** x_{12}	**18** x_{13}	**22** x_{14}	**8** x_{15}	**17** x_{16}	**6** x_{17}	**6000**
«Луч»	**16** x_{21}	**2** x_{22}	**31** x_{23}	**3** x_{24}	**46** x_{25}	**17** x_{26}	**25** x_{27}	**4000**
«Победа»	**8** x_{31}	**25** x_{32}	**36** x_{33}	**14** x_{34}	**13** x_{35}	**4** x_{36}	**28** x_{37}	**10000**
Объемы производства кормов на участках	**1000**	**2000**	**3000**	**2500**	**1500**	**9000**	**1000**	**20000** / **20000**

В данной модели транспортной задачи суммарные объемы производства кормов в хозяйствах $\sum_{i=1}^{m} a_i = 20000$ (запасы поставщиков) равны суммарным объемам производства кормов на участках $\sum_{j=1}^{n} b_j = 20000$ (запросам потребителей), ***модель*** такой транспортной задачи называется ***закрытой***.

Экономико-математическая модель задачи имеет следующий вид:

Система ограничений:

1. ***Ограничения по производству кормов в хозяйствах (по запасам):***

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 6000$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 4000$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 10000$

2. ***Ограничения по объему производства кормов на участках (по потребностям):***

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1000$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 3000$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2500$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 1500$

$x_{16} + x_{26} + x_{36} = 9000$

$x_{17} + x_{27} + x_{37} = 1000$

3. ***Условие неотрицательности:***

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{37} \geq 0$

Целевая функция – минимум транспортных затрат на перевозку кормов (руб.)

$Z = 5x_{11} + 10x_{12} + 18x_{13} + 22x_{14} + 8x_{15} + 17x_{16} + 6x_{17} + 16x_{21} + 2x_{22} + 31x_{23} + 3x_{24} +$

$+ 46x_{25} + 17x_{26} + 25x_{27} + 8x_{31} + 25x_{32} + 36x_{33} + 14x_{34} + 13x_{35} + 4x_{36} + 28x_{37} \to \min$

1. Ввести исходные данные и формулы для вычислений, как указано на рис. 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				Исходные данные								
2	Хозяйства				Участки				Производство			
3		1	2	3	4	5	6	7	кормов в			
4	«1 Мая»	5	10	18	22	8	17	6	6000			
5	«Луч»	16	2	31	3	46	17	25	4000			
6	«Победа»	8	25	36	14	13	4	28	10000			
7	Объемы производства комров на участках	1000	2000	3000	2500	1500	9000	1000	20000			
8												
9												
10				Решение задачи								
11	Хозяйства				Участки				Производство			
12		1	2	3	4	5	6	7	кормов в			
13	«1 Мая»	1	1	1	1	1	1	1	7			
14	«Луч»	1	1	1	1	1	1	1	7			
15	«Победа»	1	1	1	1	1	1	1	7			
16	Объемы производства комров на участках	3	3	3	3	3	3	3				
17	Целевая функция - минимум траспортных затрат на перевозку кормов								354			
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												

=СУММ(B13:H13)
=СУММ(B14:H14)
=СУММ(B15:H15)
=СУММ(B13:B15)
=СУММ(C13:C15)
=СУММ(D13:D15)
=СУММ(E13:E15)
=СУММ(F13:F15)
=СУММ(G13:G15)
=СУММ(H13:H15)
=СУММПРОИЗВ(B4:H6;B13:H15)

Рис. 9. Технология решения транспортной задачи в MS Excel

2. Установить курсор в ячейку I17, выбрать пункт меню **Данные,** в ленте команд выбрать **Поиск решения.** В открывшемся диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 10) текстовое поле **Оптимизировать целевую функцию** будет содержать адрес целевой ячейки $I$17.
3. Выбрать вариант поиска решений – **Минимум**.
4. В текстовом поле **Изменяя ячейки переменных** указать диапазон ячеек для получения оптимального результата, для этого следует выделить диапазон ячеек B13:H15. В текстовом поле будет записано $B$13:$H$15.
5. Для ввода ограничений щелкнуть по кнопке 

и в открывшемся диалоговом окне ввести все ограничения. После ввода последнего ограничения щелкнуть по кнопке Ok, заданные ограничения будут отражены в диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 10).

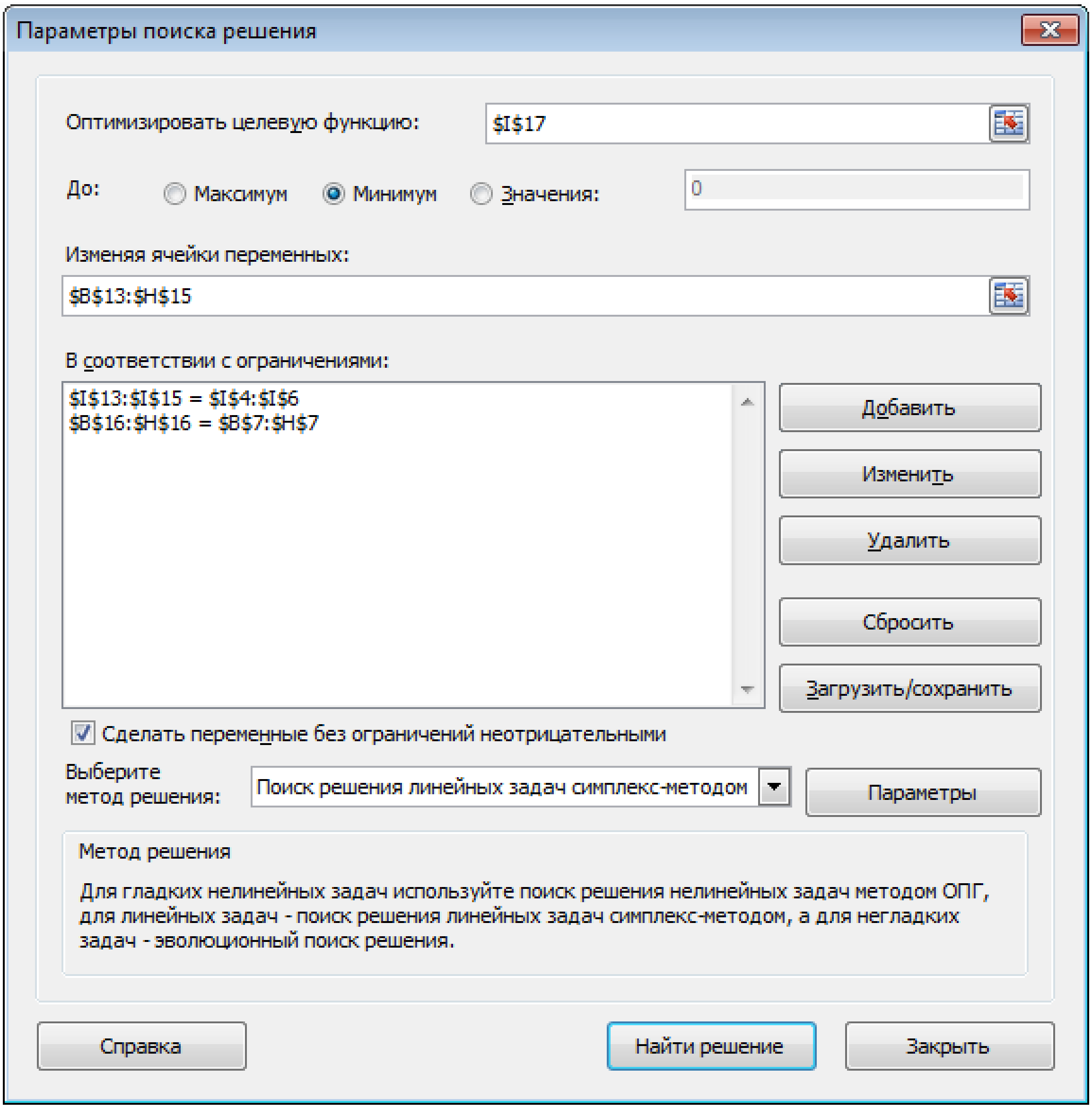
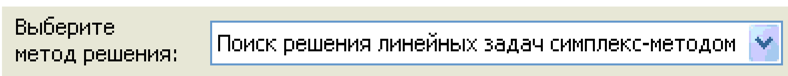


Рис. 10. Диалоговое окно Параметры поиска решения

6. Для выполнения условия неотрицательности переменных установить:

7. Выбрать метод решения



8. Запустить задачу на выполнение щелчком по кнопке 

В случае успешного завершения решения задачи на экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения**, в котором сообщается о найденном решении задачи. Установить переключатель *Сохранить найденное решение* и щелкнуть по кнопке Ok.

I17 fx =СУММПРОИЗВ(B4:H6;B13:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10	**Решение задачи**								
11	**Хозяйства**	**Участки**							**Производство кормов в**
12		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
13	**«1 Мая»**	500	0	3000	0	1500	0	1000	6000
14	**«Луч»**	0	2000	0	2000	0	0	0	4000
15	**«Победа»**	500	0	0	500	0	9000	0	10000
16	**Объемы производства комров на участках**	1000	2000	3000	2500	1500	9000	1000	
17	**Целевая функция - минимум траспортных затрат на перевозку кормов**								131500

Рис. 11. Результат решения транспортной задачи

Пример 3. При землеустроительном обследовании в хозяйстве было выделено 5 участков с различным плодородием, пригодных для трансформации угодий. Площади этих участков 250, 100, 520, 310 и 130 га. По проекту на них намечается разместить: кормовой севооборот площадью 600 га, полевой – 560 га, улучшенные сенокосы – 250 га. Необходимо так распределить севообороты и угодья по участкам, чтобы чистый доход был максимальным.

Угодья и севообороты	**Чистый доход при размещении на данном участке, руб. на 1 га**				
	1 (пастбище)	**2 (пашня)**	**3 (пашня)**	**4 (пашня)**	**5 (сенокосы)**
Кормовой севооборот	800	1100	800	600	440
Полевой севооборот	1000	1800	2000	2200	2000
Улучшенные сенокосы	550	440	380	300	700

Исходные данные задачи представим в следующей таблице:

Угодья и севообороты	**Чистый доход при размещении на данном участке, руб. на 1 га**					**Проектные площади угодий и севооборотов, га**
	1 (пастбище)	**2 (пашня)**	**3 (пашня)**	**4 (пашня)**	**5 (сенокосы)**	
Кормовой севооборот	**800** x_{11}	**1100** x_{12}	**800** x_{13}	**600** x_{14}	**440** x_{15}	**600**
Полевой севооборот	**1000** x_{21}	**1800** x_{22}	**2000** x_{23}	**2200** x_{24}	**2000** x_{25}	**560**
Улучшенные сенокосы	**550** x_{31}	**440** x_{32}	**380** x_{33}	**300** x_{34}	**700** x_{35}	**250**
Площади участков, га	**250**	**100**	**520**	**310**	**130**	**1410** / **1310**

В данной модели суммарные проектные площади угодий и севооборотов $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1410$ (***запасы поставщиков***) неравны суммарным площадям участков $\sum_{j=1}^{n} b_j = 1310$ (***запросам потребителей***), ***модель*** такой распределительной (транспортной) задачи называется ***открытой***.

Если суммарные проектные площади угодий и севооборотов (***запасы поставщиков***) превосходят суммарные площади участков (***запросы потребителей***), т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный участок площадью $b_6 = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 1410 - 1310 = 100$, равный разности суммарных проектных площадей и площадей участков, и нулевым чистым доходом при размещении на данном участке $c_{i(n+1)} = 0$.

Следовательно, исходные данные задачи будут представлены в таблице следующим образом:

Угодья и севообороты	**Чистый доход при размещении на данном участке, руб. на 1 га**						**Проектные площади угодий и севооборотов, га**
	1 (пастбище)	**2 (пашня)**	**3 (пашня)**	**4 (пашня)**	**5 (сенокосы)**	**6 (фиктив тив-ный)**	
Кормовой севооборот	**800** x_{11}	**1100** x_{12}	**800** x_{13}	**600** x_{14}	**440** x_{15}	**0** x_{16}	**600**
Полевой севооборот	**1000** x_{21}	**1800** x_{22}	**2000** x_{23}	**2200** x_{24}	**2000** x_{25}	**0** x_{26}	**560**
Улучшенные сенокосы	**550** x_{31}	**440** x_{32}	**380** x_{33}	**300** x_{34}	**700** x_{35}	**0** x_{36}	**250**
Площади участков, га	**250**	**100**	**520**	**310**	**130**	**100**	**1410** / **1410**

Экономико-математическая модель задачи имеет следующий вид:

Система ограничений:

1. ***Ограничения по проектным площадям угодий и севооборотов:***

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 600$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 560$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 250$

2. ***Ограничения по площадям участков:***

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 250$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 520$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 310$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 130$

$x_{16} + x_{26} + x_{36} = 100$

3. ***Условие неотрицательности:***

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36} \geq 0$

Целевая функция – максимальный чистый доход, руб.

$Z = 800x_{11} + 1100x_{12} + 800x_{13} + 600x_{14} + 440x_{15} + 0x_{16} + 1000x_{21} + 1800x_{22} + 2000x_{23} + 2200x_{24} + 2000x_{25} + 0x_{26} + 550x_{31} + 440x_{32} + 380x_{33} + 300x_{34} + 700x_{35} + 0x_{36} \rightarrow \max$

Решение открытой транспортной задачи в Microsoft Excel

Технология решения открытой транспортной задачи аналогична технологии решения закрытой (см. стр. 23-24). В данных задачах отличием является только то, что закрытая транспортная задача решается на минимум, а открытая – на максимум. Результаты решения открытой транспортной задачи представлены на рис. 12.

H17 | fx =СУММПРОИЗВ(B4:G6;B13:G15)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Исходные данные							
2	Угодья и севообороты	Чистый доход при размещении на данном участке, руб. на 1 га						Поектные площади угодий и севооборотов, га
3		1 (пастбище)	2 (пашня)	3 (пашня)	4 (пашня)	5 (сенокосы)	6 (фиктивный)	
4	Кормовой севооборот	800	1100	800	600	440	0	600
5	Полевой севооборот	1000	1800	2000	2200	2000	0	560
6	Улучшенные сенокосы	550	440	380	300	700	0	250
7	Площади участков, га	250	100	520	310	130	100	1410
8								
9								
10	Решение задачи							
11	Угодья и севообороты	Чистый доход при размещении на данном участке, руб. на 1 га						Поектные площади угодий и севооборотов, га
12		1 (пастбище)	2 (пашня)	3 (пашня)	4 (пашня)	5 (сенокосы)	6 (фиктивный)	
13	Кормовой севооборот	230	100	270	0	0	0	600
14	Полевой севооборот	0	0	250	310	0	0	560
15	Улучшенные сенокосы	20	0	0	0	130	100	250
16	Площади участков, га	250	100	520	310	130	100	
17	Целевая функция - максимальный чистый доход							1794000

Рис. 12. Результаты решения открытой транспортной задачи в MS Excel

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. В сельскохозяйственном предприятии на пахотных землях выделено пять категорий различной степени эродированности. Площадь земель различной категории представлена в табл. 1 (по вариантам). Площадь культур – в табл. 2 (по вариантам).

Таблица 1. **Площади земель различной категории**, га

Вариант	**Категории земель**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	400	450	500	300	350
2	450	500	300	350	400
3	400	350	300	500	450
4	350	300	500	450	400
5	350	400	450	500	300
6	450	400	350	300	500
7	400	300	550	400	350
8	500	300	350	400	450
9	500	450	400	350	300
10	300	350	400	450	500

Таблица 2. **Площади культур**, га

Вариант	**Культуры**				
	Озимая пшеница	**Ячмень**	**Многолетние травы**	**Однолетние травы**	**Пар чистый**
1	450	350	350	550	300
2	500	400	550	300	250
3	450	400	600	200	350
4	450	300	450	400	400
5	400	300	350	500	450
6	550	300	300	350	500
7	400	500	400	500	200
8	450	400	450	400	300
9	400	450	400	300	450
10	500	500	450	200	350

Интенсивность смыва почв при размещениях на землях определенной категории по культурам представлена в в табл. 3.

Таблица 3. **Интенсивность смыва почв**

Культуры	**Интенсивность смыва почв при размещениях на землях определенной категории по культурам, т/га – год**				
	Категории земель				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Озимая пшеница	1,8	4,7	10,2	30,5	61,4
Ячмень	2,4	6,3	12,0	34,0	64,0
Многолетние травы	0,2	0,8	2,4	4,8	6,4
Однолетние травы	2,3	6,3	11,8	33,5	64,0
Пар чистый	3,8	10,0	30,0	60,0	80,0

Необходимо так разместить культуры на землях различной категории, чтобы смыв с поверхности почвы был минимальным.

Задание 2. В хозяйстве возделывают три сорта яровой пшеницы. Известна средняя многолетняя урожайность этих сортов по различным предшественникам (табл. 1).

Таблица 1. **Урожайность сортов яровой пшеницы**, ц с 1 га

Предшественник	**Сорт пшеницы**		
	Краснозерная	**Харьковская-46**	**Стрела**
Чистый пар	32	34	29
Бобовые	30	31	28
Озимые	28	27	25
Многолетние травы	31	33	24

Площадь каждого сорта яровой пшеницы представлена в табл. 2 (по вариантам). Площади предшественников – в табл. 3 (по варианту).

Таблица 2. **Площади яровой пшеницы по сортам**, га

Вариант	**Сорт пшеницы**		
	Краснозерная	**Харьковская-46**	**Стрела**
1	350	300	200
2	300	300	300
3	140	460	250
4	200	300	400
5	240	360	400
6	200	200	300
7	240	350	310
8	300	450	200
9	350	350	350
10	415	385	250

Таблица 3. **Площади предшественников**, га

Вариант	Предшественник			
	Чистый пар	Бобовые	Озимые	Многолетние травы
1	100	200	300	200
2	200	110	290	200
3	200	100	250	250
4	130	170	220	280
5	250	250	200	200
6	150	150	150	150
7	220	200	280	120
8	290	300	150	200
9	250	250	250	250
10	200	300	200	250

Требуется так разместить посевы яровой пшеницы по предшественникам, чтобы ожидаемый валовой сбор зерна был максимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леоненков А.В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
2. Математические методы и модели в экономике: Учебник / С.Н. Грицюк, Е.В. Мирзоева, В.В. Лысенко – Ростов н/Д: Феникс, 2007.
3. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в сфере Excel: Практикум. – М.: Финстатинформ, 2000.
4. Панкова, Е.А. Транспортные задачи электроэнергетики. Проблемы энергообеспечения, информатизации и автоматизации, безопасности и природопользования в АПК // Международная научно-техническая конференция. – Брянск: Издательство Брянской ГСХА, 2013. – с. 72-74.
5. Петракова Н.В. Основы математического моделирования. Модели. Методы. Примеры. / Н.В. Петракова. Брянск: Издательство Брянская ГСХА. 2011.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Наталья Васильевна Петракова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 19.01.2016 г.
Формат 60x84. 1/16. Бумага печатная. Усл. печ. л. 2,09.
Тираж 50 экз. Изд. № 4956.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365, Брянская обл., Выгоничский район, п. Кокино, БГАУ