Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Бычкова Т.В.

Теория вероятностей

Учебное пособие

Кафедра автоматики, физики и математики

Брянская область - 2021

УДК 519.2 (07)

ББК 22.171

Б 95

Бычкова, Т. В. Теория вероятностей: учебное пособие / Т. В. Бычкова. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2021 г. – 44 с.

Учебное пособие предназначено для практических занятий и самостоятельной работы бакалавров очной и заочной форм обучения направления подготовки 09.09.03 «Прикладная информатика». Пособие содержит краткие теоретические сведения, примеры решений заданий, задания для самостоятельной работы при изучении курса «Теория вероятностей и математическая статистика».

Рецензенты: к.т.н. Безик Д.А.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования Брянского ГАУ протокол №6 от 29 марта 2021 года.

Оглавление

1. КЛАССИЧЕСКОЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Случайным событием (или просто событием) A называется явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении опыта (испытания). Например, испытание – подбрасывание монеты, событие A – выпадение орла; испытание – посадка в землю семени и т.д.

Событие A называется достоверным, если оно в данном опыте обязательно должно произойти. Например, выпадение не более шести очков при бросании игральной кости. Другой пример достоверного события: камень, брошенный вверх рукой, вернется на Землю и не станет её искусственным спутником.

Событие A называется невозможным, если оно в данном опыте произойти не может.

Классическое определение вероятности появления события A в данном испытании:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где n - число всех возможных исходов испытания,
m - число благоприятствующих событию A исходов.

Все n возможных исходов испытания должны быть равновозможными.

Очевидно, что $0 \le p(A) \le 1$ для любого случайного события A. Если событие A невозможно, то $p(A) = 0$, а если оно достоверно, то $p(A) = 1$.

Пример 1. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется:

а) случайно названное двузначное число (угадывают с первого раза);

б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны?

<u>Решение</u>

а) Событие A: случайно названное двузначное число окажется задуманным.

Число всех возможных исходов испытания – это общее количество двузначных чисел: $n = 99 - 9 = 90$ (1,2,3,4,...9,10,11,...99). Число благоприятствующих событию А исходов – это количество задуманных двузначных чисел: $m = 1$. Тогда по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90} \approx 0{,}011$.

б) Событие B: случайно названное число, цифры которого различны, окажется задуманным.

Число всех возможных исходов испытания – это общее количество двузначных чисел, цифры которых различны: n = 90 – 9 = 81 (исключаются числа 11, 22, 33, … ,99). Число благоприятствующих событию B исходов – это количество задуманных двузначных чисел: m = 1. Тогда по классическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{81}\approx 0{,}012.$$

Ответ: $а)\,\frac{1}{90},\quad б)\,\frac{1}{81}.$

Пример 2. В коробке шоколадных конфет «Ассорти» 5 конфет с ореховой, 8 со сливочной и 7 с шоколадной начинкой. Наугад вынимают три конфеты. Какова вероятность того, что:

а) все они с одинаковой начинкой;

б) все с разными начинками;

в) среди них 2 с ореховой и одна со сливочной начинкой?

<u>Решение</u>

а) Событие A: три конфеты взятых из коробки с одинаковой начинкой.

Число всех возможных вариантов – это количество способов взять три конфеты из 20 (всего конфет: 5 + 7 + 8 = 20):

$$n=C_{20}^{3}=\frac{20\,!}{3\,!\cdot(20-3)!}=\frac{20\,!}{3\,!\cdot 17\,!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20}{6}=1140.$$

Число благоприятствующих событию A исходов – это количество вариантов, чтобы взять или 3 с ореховой, или 3 со сливочной, или 3 с шоколадной начинкой. Выбирать три конфеты с ореховой начинкой из 5 можно C_5^3 способами; 3 конфеты со сливочной начинкой из 8 можно C_8^3 способами; 3 конфеты с шоколадной начинкой из 7 можно C_7^3 способами. Тогда $m = C_5^3 + C_8^3 + C_7^3$

$$C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10,\quad C_8^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6}=56,$$

$$C_7^3=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}=35,\ m = 10 + 56 + 35 = 101.$$

Тогда $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{101}{1140}\approx 0{,}089.$

б) Событие B: три конфеты взятых из коробки с разными начинками.

Число благоприятствующих событию B исходов - это количество вариантов, чтобы взять 1 конфету с ореховой и 1 со сливочной и 1 с шоколадной начинкой. Тогда по правилу умножения $m = C_5^1 \cdot C_8^1 \cdot C_7^1 = 5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{280}{1140} \approx 0{,}246$.

в) Событие C: среди трёх конфет, взятых из коробки 2 с ореховой и одна со сливочной начинкой.

Число благоприятствующих событию C исходов – это количество вариантов, чтобы взять 2 с ореховой и 1 со сливочной начинкой. Выбирать две конфеты с ореховой начинкой из 5 можно C_5^2 способами; 1 конфету со сливочной начинкой из 8 можно C_8^1 способами. Тогда $m = C_5^2 \cdot C_8^1 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot 8 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} \cdot 8 = 10 \cdot 8 = 80$.

Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{80}{1140} \approx 0{,}070$.

Ответ: а) 0,089; б) 0,246; в) 0,07.

Геометрическое определение вероятности: пусть в некоторую область случайным образом попадает точка T, причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки T. Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \qquad (2)$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ – геометрические меры (длина, площадь, объем и т. д.) областей A и Ω соответственно.

Пример 3. Какова вероятность того, что сумма двух положительных действительных чисел меньше 1, если каждое в отдельности не превышает 1?

Решение

Обозначим первое число x и второе y, причем $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $x \in (0; 1]$ и $y \in (0; 1]$. Общая область Ω может быть представлена в виде квадрата на плоскости XOY (рисунок 1), площадь которого равна 1.

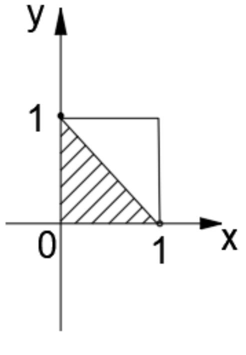


Рисунок 1 - Решение примера 3

Областью, являющейся выполнением условия $x + y < 1$ является заштрихованный на рисунке 1 треугольник, площадь которого равна 0,5. Тогда $P(A) = \frac{0,5}{1} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Пример 4. На плоскости начерчены две концентрические окружности радиусами 5 и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

Решение

Площадь кольца равна

$S_A = \pi\left(10^2 - 5^2\right) = 75\pi$.

Площадь большого круга равна

$S = 10^2\pi = 100\pi$.

Тогда искомая вероятность равна $P(A) = \dfrac{75\pi}{100\pi} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна семи;

б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырём.

Задача № 2. В группе 28 студентов. Из них на экзамене четверо получили отлично, 10 – хорошо, 12 – удовлетворительно, 2 – неудовлетворительно. Определить вероятность того, что 1) произвольно выбранный студент получил удовлетворительную оценку; 2) произвольно выбранный студент получил оценку не ниже хорошей.

Задача № 3. Какова вероятность при игре в покер вытащить четыре туза (в колоде 52 карты).

Задача № 4. В коробке 5 занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекаются все кубики. Какова вероятность того, что номера появятся в порядке возрастания.

Задача № 5. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

Задача № 6. Из 15 билетов выигрышными являются четыре. Какова вероятность того, что среди 6-ти билетов, взятых на удачу, будет два выигрышных?

Задача № 7. Монета подброшена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится орел.

Задача № 8. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между 13 и 14 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 20 минут, после чего уходит. Определить вероятность встречи друзей, если моменты их прихода в указанном промежутке времени равновозможные.

Задача № 9. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 3 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в больший круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

Задача № 10. Внутрь круга радиуса 5 см брошена точка. Найти вероятность, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

Задача № 11. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что точка, наудачу поставленная в круге, окажется внутри квадрата?

Задача № 12. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал из наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Задача № 13. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал из наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Задача № 14. В урне имеется 10 шаров, среди которых 3 белых. Наудачу извлекается 2 шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары окажутся белыми.

Задача № 15. В урне имеется 10 шаров, среди которых 3 белых. Наудачу извлекается 2 шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары окажутся черными.

Задача № 16. Из двух взятых наудачу костей домино одна переворачивается. Какова вероятность того, что вторая кость является дублем, если первая не дубль?

Задача № 17. При игре в домино участникам раздали по пять костей. Какова вероятность, что у одного из игроков будет

а) хотя бы одна с шестеркой?

б) все с шестеркой?

Задача № 18. В лифт 9ти этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найдите вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах?

Задача № 19. Устройство состоит и 5 элементов, 2 из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются 2 элемента. Определить вероятность, что включенными окажутся неизношенные элементы.

Задача № 20. Точку наудачу бросили на отрезок [0; 2]. Какова вероятность ее попадания в отрезок [0,5; 1,4]?

Задача № 21. Наугад взяты два положительных числа, каждое из которых не больше 3. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет 3, а произведение будет не больше 14/9?

Задача № 22. Наудачу выбирается 4-значное число. Какова вероятность следующих событий: а) число читается одинаково как слева направо, так и справа налево (например, 1551); б) число кратно пяти; в) число состоит из нечетных цифр; г) число состоит из четных цифр.

Задача № 23. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки, и вытянутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

Задача № 24. Колода карт (36 карты) делится пополам. Найти вероятность того, что количество черных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

Задача № 25. Какова вероятность, что взятое наудачу четырехзначное число кратно 5?

2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Пусть A и B – любые два случайных события.

Если в данном опыте появление одного события исключает появление другого, то такие события называются ***несовместными***. Если же появление одного из событий не исключает появление другого, то такие события называются ***совместными***.

Например, событие A – студент получил оценку «хорошо» и событие B – студент получил оценку «отлично». События A и B являются несовместными, если говорить про один и тот же экзамен и про одного студента.

События A и B называются ***независимыми*** друг от друга, если появление или не появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Несколько событий образуют ***полную_группу_событий***, если: а) они попарно несовместны; б) в результате испытания появится хотя бы одно из них. Например, события A и B – выпадение орла и выпадение решки при подбрасывании одной монеты - образуют полную группу событий. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.

Символом $\overline{A}$ обозначается событие ***противоположное*** событию A.

Суммой событий A + B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A **или** B.

Теорема сложения	
Если A, B – совместные события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$ **(3)**	Если A, B – несовместные события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$ **(4)**

Произведением событий A · B называется событие C, которое состоящее в появлении событий A **и** B.

Теорема умножения	
Если A, B – зависимые события, то $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$ **(5)** где $P_A(B)$ – условная вероятность, вероятность события B при условии, что A произошло.	Если A, B – независимые события, то $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ **(6)**

Пример 5. Вероятность первого охотника попасть в волка равна 0,7, а второго 0,8. Какова вероятность убить волка при одном залпе охотников?

<u>Решение</u>

Пусть событие A – первый охотник убьет волка, событие B – второй охотник убьет волка, событие C – кто-то (первый или второй охотник) убьет волка.

Очевидно, что событие C состоит в том, что произойдёт хотя бы одного из событий A или B, т.е. $C = A + B$. Поскольку события A и B совместны, то

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94..$$

Ответ: 0,94.

Пример 6. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Решение

Пусть событие A – первый билет окажется выигрышным, событие B – второй билет окажется выигрышным, событие C – оба билета выигрышные. Очевидно, что $C = A \cdot B$. События A и B – зависимые, по теореме умножения для зависимых событий, получаем:

$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$

Вероятность того, чтобы первый билет был выигрышным $P(A) =$ 0,05.

Если первый билет забрали, и он оказался выигрышным, тогда билетов осталось 99, а выигрышных 4, тогда вероятность для второго билета быть выигрышным, при условии, что первый билет выигрышный, равна $P_A(B) = \frac{4}{99} = 0{,}04$.

Таким образом, $P(C) = 0{,}05 \cdot 0{,}04 = 0{,}002$.

Ответ: 0,002.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 26. При подготовке к экзамену первый студент выучил 20 вопросов из 25, а второй 15 из 25. Найти вероятность того, что 1) оба студента знают ответ на заданный вопрос; 2) никто из них не знает ответ; 3) знает хотя бы один из них; 4) ответ знает только один из студентов.

Задача № 27. Из 35 вопросов студент знает ответ на 20 вопросов. Какова вероятность того, что он ответит на два, заданные подряд вопроса?

Задача № 28. У двух студентов есть три яблока, одно из которых червивое. Какова вероятность ни для кого из студентов не съесть червивое яблоко?

Задача № 29. Какова вероятность рождения у коровы детёнышей близнецов, если вероятность рождения двойни равна 0,0082, тройни – 0,0003, четырёх и более детенышей – 0,00002?

Задача № 30. В распоряжении агрохимика есть 8 различных видов минеральных удобрений. Ему необходимо провести несколько экспериментов по изучению совместного влияния любой тройки минеральных удобрений. Какова вероятность того, что в наудачу выбранной тройке удобрений одновременно окажутся удобрения A и B?

Задача № 31. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Задача № 32. В июле 6 пасмурных дней. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

Задача № 33. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного товара по телевизору, равна 0,08. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того или иного товара на рекламном стенде, равна 0,05. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит хотя бы одну рекламу?

Задача № 34. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

Задача № 35. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа хотя бы одного элемента.

Задача № 36. Два радиста пытаются принять сигнал передатчика. Первый из них сможет это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Найти вероятность, что хотя бы одному из них удастся принять сигнал.

Задача № 37. В партии лампочек в среднем 4 % брака. Найти вероятность, что среди наугад выбранных двух лампочек окажется хотя бы одна неисправная.

Задача № 38. Прибор содержит генератор и осциллограф. За время работы генератор может выйти из строя с вероятностью 30 %, а осциллограф – с вероятностью 20 %. Отказы осциллографа и генератора не связаны друг с другом. Найти вероятность, что прибор будет работать исправно.

Задача № 39. Радист пытается принять сигналы от трех передатчиков. Сигнал первого передатчика он может принять с вероятностью 50 %, второго – 40 % и третьего – 30 %. Найти вероятность, что ему удастся принять сигналы ото всех передатчиков.

Задача № 40. В урне имеется 3 белых и 4 черных шара. Из урны вытягиваются 3 шара. Найти вероятность, что хотя бы один из них окажется белым.

Задача № 41. Игральный кубик бросается 6 раз. Найти вероятность, что выпадет хотя бы одна шестерка.

Задача № 42. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задача № 43. Новому работнику предоставляются три попытки проявить свои способности. Вероятность того, что ему удастся это с первой попытки, равна 0,2, со второй – 0,3, с третьей – 0,4. Исходы попыток представляют независимые события. Найти вероятность того, что работник оправдает оказанное ему доверие.

Задача № 44. При передаче текста 10 % букв искажается и принимается неверно. Какова вероятность того, что все 5 букв данного сообщения будут приняты правильно?

Задача № 45. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверенных. Какова вероятность для данной партии быть принятой, если она содержит 5 % неисправных деталей.

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий. ***Полная вероятность*** события А находится по формуле:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{Bn}(A), \qquad (7)$$

где $P_{Bi}(A)$ – *условная вероятность события А, которое может наступить только с одной из гипотез* B_i, $i=1,\ldots,n$;

$P(B_i)$, $i=1,\ldots,n$ – *вероятности гипотез, причем* $\sum_{i=1}^{n} B_i = 1$.

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий. Чтобы узнать, какое из этих событий наступило, если известно, что событие A произошло, применяется ***формула Байеса***:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{Bi}(A)}{P(A)} \qquad (8)$$

где $i = 1,\ldots,n$; $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{Bn}(A)$ – полная вероятность события A.

Пример 7. В водоёме обитают особи рыб двух близких видов. Особи первого вида составляют 60% всей популяции, особи второго вида – 40%. На каждые 100 особей первого вида приходится в среднем 75 самцов, а на 100 особей второго – 65 самцов. Какова вероятность того, что первая рыба, выловленная из этого водоёма, окажется самцом?

Решение.

Пусть событие A - первая рыба, выловленная из этого водоёма, окажется самцом. Событие B_1 – выловленная рыба окажется особью первого вида, событие B_2 – выловленная рыба окажется особью второго вида. Событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий B_1, B_2.

$P(B_1) = 0,6$; $P(B_2) = 0,4$;

$P_{B1}(A) = 0,75$; $P_{B2}(A) = 0,65$;

По формуле полной вероятности, получаем:

$P(A) = 0,6 \cdot 0,75 + 0,4 \cdot 0,65 = 0,71$.

Ответ: 0,71.

Пример 8. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение

Пусть А – событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);
2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Байеса (8).

По условию задачи:

$P(B_1)=0{,}6$ (вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру);

$P(B_2)=0{,}4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A)=0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A)=0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Тогда искомая вероятность равна

$$P_A(B_1)=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98}\approx 0{,}59.$$

Ответ: 0,59.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 46. Имеются две одинаковые корзины с картофелем. В первой корзине находится 60% сорта «Синеглазка» и 40% сорта «Белорусская ранняя», во второй корзине – 45% картофеля «Синеглазка» и 55% сорта «Белорусская ранняя». Некто берёт наугад один клубень картофеля, он оказывается сорта «Синеглазка». Что вероятнее: клубень был из первой или из второй корзины?

Задача № 47. Предположим, что 5 % мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек 1) мужчина, 2) женщина?

Задача № 48. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием К; 30% с заболеванием L; 20% с заболеванием М. Вероятность полного излечения от болезни К равна 0,7; болезни L -0,8; болезни М -0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

Задача № 49. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй 15 из 25. Найти вероятность того, что наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

Задача № 50. В студенческой группе 70% - юноши. 20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал 1) юноше, 2) девушке?

Задача № 51. Перед посевом 80% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения растений, проросших из этих семян, вредителями равна 0,06, а растений, проросших из необработанных семян – 0,3. Какова вероятность того, что взятое наудачу растение будет поражённым? Если оно поражено, то какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

Задача № 52. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, фиксированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 60% случаев работы прибора, форсированный – в 30%, недогруженный – в 10%. Надежность прибора (вероятность его безотказной работы в течение заданного времени) для нормального режима равна 0,8, для недогруженного 0,9, для форсированного 0,5. Найти полную надежность прибора. Определить вероятность того, что прибор работал в форсированном режиме, если известно, что он безотказно работал в течение заданного времени.

Задача № 53. В двух коробках находятся однотипные диоды. В первой – 20 шт., из них 2 неисправных; во второй – 10 шт., из них 4 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран диод. Он оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из второй коробки.

Задача № 54. Два радиста пытались принять сигнал передатчика. Первый из них может это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Известно, что как минимум одному из радистов удалось принять сигнал. Найти вероятность, что это удалось обоим радистам.

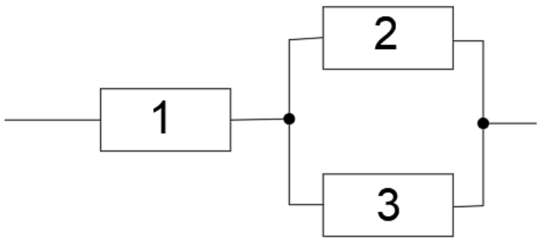
Задача № 55. На базе находятся лампы, изготовленные на двух заводах. Из них 70 % изготовлено на первом заводе, а 30 % – на втором. Известно, что 90 % ламп, изготовленных на первом заводе, соответствуют стандарту, а среди ламп, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту лишь 80 %. Найти вероятность, что взятая наугад лампа с базы будет соответствовать стандарту.

Задача № 56. Радиосообщение может быть передано днем (с вероятностью 0,75), либо ночью (с вероятностью 0,25). Из-за помех вероятность его успешного приема составляет днем 60 %, а ночью 80 %. Найти вероятность, что сообщение будет принято.

Задача № 57. В ящике 4 белых и 5 черных шаров. Наугад вынимаются 3 шара. Найти вероятность, что они окажутся одинакового цвета.

Задача № 58. На шахматную доску наугад ставятся два короля – черный и белый, в разные клетки. Какова вероятность, что при этом получится допустимая позиция? Недопустимой считается позиция, когда короли стоят в соседних (в том числе и по диагонали) клетках.

Задача № 59. Элементы соединены в цепь с одним входом и одним выходом по следующей схеме:



Отказы элементов являются независимыми событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Изначальные вероятности отказа элементов 1, 2, 3 соответственно равны $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}4$; $q_3 = 0{,}6$. Посланный сигнал не прошел со входа на выход. Найти вероятность того, что: а) элемент 1 отказал; б) только элемент 1 отказал; в) элемент 2 отказал; г) только элемент 2 отказал.

Задача № 60. Найти вероятность отгадать пин-код телефона с первого раза если в нем используются 4 строго возрастающие цифры.

Задача № 61. Три гимнаста стоят друг на друге. Вероятность падения нижнего составляет 0,08, второго – 0,5, третьего – 0,31. Найти вероятность того, что трюк не удастся.

Задача № 62. Двое соперников участвует в олимпиаде. Вероятность того, что первый решит все задачи верно равна 0,89. Для второго эта вероятность равна 0,92. Найти вероятность того, что только один займет первое место.

Задача № 63. В город поступило 3000 л молока с первого завода и 3500 – со второго завода. Известно, что средний процент непригодного молока среди продукции первого завода равен 1,5 %, второго – 1 %. Найти вероятность того, что купленный литр молока в этом городе окажется непригодным.

Задача № 64. Для каждого из трех друзей вероятности провала экзамена равны соответственно 0,01; 0,03; 0,1. Найти вероятность того, что только двое из них сдадут экзамен.

Задача № 65. Два датчика посылают сигнал в общий канал связи, причем первый из них посылает вдвое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика равна 0,06, от второго – 0,03. Какова вероятность получить неискаженный сигнал в общем канале связи?
Ответ: 0,95.

4. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

Формула Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний событие A наступило ровно k раз, то вероятность появления события A ровно k раз можно найти по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \tag{9}$$

где p, q – вероятности появления и не появления события А в одном испытании;

$p = P(A)$;

$q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$;

$p + q = 1$.

Вычисление вероятностей $P_n(k)$ при больших значениях n по формуле Бернулли проблематично, поэтому такие вычисления производят по приближенным формулам Лапласа и Пуассона.

Локальная формула Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \tag{10}$$

Функция $\varphi(x)$ называется *функцией вероятностей* (или *функцией Гаусса*). Для $0 \le x \le 5$ значение функции $\varphi(x)$ можно взять в таблице Приложения 1, содержащейся во многих пособиях по теории вероятностей.

Для отрицательных значений x используют четность функции $\varphi(x)$: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для $x<-5$ и $x>5$ значение $\varphi(x) \approx 0$. На практике локальную формулу Лапласа применяют, если $npq > 10$. Это условие обеспечивает приближенное нахождение вероятности $P_n(k)$ с точностью до процента.

Формула Пуассона применяется если число испытаний велико, а вероятность появления события в каждом испытании очень мала, т.е. при $np<10$:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{11}$$

где $\lambda = np$, $e = 2{,}7182\ldots$

Для нахождения вероятности того, что событие при n независимых испытаний наступило от k_1 до k_2 раз, нужно пользоваться ***интегральной формулой Лапласа:***

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (12)$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$,

значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся по таблице (см. Приложение 2); функция Лапласа является нечётной $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; для x > 5 $\Phi(x)$ = 0,5.

Пример 9. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти деталей две стандартные, если вероятность того, что каждая деталь окажется стандартной, равна 0,9.

Решение

Вероятность события A, состоящего в том, что взятая наудачу деталь стандартна, есть $p = 0{,}9$, а вероятность того, что она нестандартна, есть $q = 1 - p = 0{,}1$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна $P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}0081$.

Ответ: 0,0081.

Пример 10. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?

Решение

Пусть событие А – из 4 семян взойдут 3 семени; событие В – из 4 семян взойдет 4 семени. По теореме сложения вероятностей $P(A) = P(B) + P(C)$.

Вероятности P(B) и P(C) определим по формуле Бернулли:

$P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}2916$;

$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0{,}9^4 = 0{,}6561$.

Искомая вероятность $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

Ответ: 0,9477.

Пример 11. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10 000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение

По условию задачи $p = 0{,}0002$; $n = 10000$; $k = 6$. Поскольку число n испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала ($\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2 < 10$), то пользуемся формулой Пуассона

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} = \frac{64}{720} \cdot 0{,}1353 = 0{,}012.$$

Ответ: 0,012.

Пример 12. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p=0{,}4$. Найти вероятность того, что при 600 выстрелах мишень будет поражена 250 раз.

Решение

По условию, $n=600,\ k=250,\ p=0{,}4,\ q=0{,}6$.

Вычислим значение x: $x=\dfrac{250-600\cdot 0{,}4}{\sqrt{600\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=\dfrac{10}{12}\approx 0{,}833$.

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(0{,}833)=0{,}2820$.

Тогда искомая вероятность по формуле (2) равна

$$P_{600}(250)=\frac{1}{\sqrt{600\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\cdot 0{,}2820=0{,}0235.$$

Ответ: 0,0235.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 66. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырёх или три партии из шести (ничьи во внимание не берутся)?

Задача № 67. Кубик бросается 5 раз. Найти вероятность, что шестерка выпадет 2 раза.

Задача № 68. Бросается 10 монет. Найти вероятность, что число выпавших гербов будет равно шести.

Задача № 69. Бросается 12 монет. Найти вероятность, что гербов выпадет больше, чем решек.

Задача № 70. Монета бросается 100 раз. Найти вероятность, что количество выпавших гербов будет лежать в интервале: а) от 40 до 60; б) от 30 до 70.

Задача № 71. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?

Задача № 72. Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность того, что среди пяти случайно выбранных волокон смеси обнаружится менее двух окрашенных?

Задача № 73. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырёх?

Задача № 74. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 100. Берётся на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нём будет обнаружен хотя бы один микроб.

Задача № 75. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.

Задача № 76. Из шести яиц в среднем получается 5 живых цыплят. Какова вероятность того, что из 10 яиц получится от 6 до 8 живых цыплят?

Задача № 77. В некотором водоеме карпы составляют 90%. Найти вероятность того, что в улове из 100 рыб карпов окажется 96.

Задача № 78. Производится сортировка плодов некоторого растения. Известно, что данное растение дает в среднем 80% крупных плодов. Найти вероятность того, что из 400 плодов будет отобрано 330 крупных.

Задача № 79. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10 000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Задача № 80. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: 1) ровно 2; 2) менее двух; 3) более двух. (принять e^{-3}=0,04979).

5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное числовое значение.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, число возможных значений которой можно занумеровать.

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал числовой оси (конечный или бесконечный).

Закон распределения случайной величины – это любая функция, таблица, правило и т. п., устанавливающая соответствие между значениями случайной величины и вероятностями ее наступления.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент функции x:

$$F(x) = p\{X < x\}. \tag{13}$$

Свойства функции распределения:

$$\begin{gathered} 1.\ F(-\infty) = 0. \\ 2.\ F(+\infty) = 1. \\ 3.\ F(x_1) < F(x_2),\ при\ x_1 < x_2. \\ 4.\ p(a < X < b) = F(b) - F(a). \end{gathered} \tag{14}$$

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, в верхней строке которой перечислены все возможные значения x_i, ($i=1, \ldots, n$), а в нижней – вероятности их появления p_i, $i=1, \ldots, n$ где $p_i = p\{X = x_i\}$, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Функция распределения дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений:

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p(X = x). \tag{15}$$

Плотностью распределения (плотностью вероятности) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \tag{16}$$

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \geq 0$.

2. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1. \qquad (17)$$

3. Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок [a, b] равна

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (18)$$

4. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X выражается через ее плотность:

$$F(x) = p(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (19)$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины и определяется по формуле:

$$M(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \text{, для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \text{, для непрерывной случайной величины.} \end{cases} \qquad (20)$$

Свойства математического ожидания:

1. *M* [*C*] = *C, где C=const*.
2. *M* [*X*+C] = *M* [*X*] + *C*.
3. *M* [*C*·*X*] = C·*M* [*X*].
4. *M* [*X*+Y] = *M* [*X*] + *M* [*Y*].
5. *M* [*X*-Y] = *M* [*X*] – *M* [*Y*].
6. *M* [*X*·Y] = *M* [*X*] · *M* [*Y*].

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и определяется по формуле:

$$D(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \cdot p_i - M(X)^2 \text{,} \\ \text{для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M(X)^2 \text{,} \\ \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases} \qquad (21)$$

Свойства дисперсии:

1. *D* [*C*] = 0, *где C=const*.
2. *D* [*X* + *C*] = *D* [*X*].
3. *D* [*C*·*X*] = C² · *D*[*X*].
4. *D* [*X*+*Y*] = *D* [*X*] + *D* [*Y*].
5. *D* [*X*-*Y*] = *D* [*X*] + *D* [*Y*].

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется характеристика

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (22)$$

Среднее квадратическое отклонение измеряется в тех же физических единицах, что и случайная величина, и характеризует ширину диапазона значений случайной величины.

Правило «Трех сигм»: практически все значения случайной величины находятся в интервале

$$[M(X) - 3\sigma; M(X) + 3\sigma]. \qquad (23)$$

Модой (Мо) случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т. е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной случайной величины) или $f(x)$ (для непрерывных случайных величин) достигает максимума.

Медианой (Ме) случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие

$$p\{X < Me\} = p\{X \geq Me\}. \qquad (24)$$

Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин.

Пример 13. В коробке 7 шаров, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекают 3 шара. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу красных шаров в выборке.

<u>Решение</u>

В выборке из трех шаров может не оказаться ни одного красного шара, может появиться один, два или три красных шара. Следовательно, случайная величина может принимать только четыре значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. X

Найдем вероятности этих значений:

$$p_0 = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^4} = \frac{1}{35}$$

$$p_1 = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^4} = \frac{12}{35},$$

$$p_2 = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^4} = \frac{18}{35},$$

$$p_3 = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^4} = \frac{4}{35}$$

Проверка $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$

Ответ:

x	0	1	2	3
p	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Пример 14. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

	40	42	41	44
	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение σ.

Решение

1) M(X) = 40·0,1 + 42·0,3 + 41·0,2 + 44·0,4 = 42,4.

2) $D(X)=(40-42{,}4)^2\cdot 0{,}1+(42-42{,}4)^2\cdot 0{,}3+(41-42{,}4)^2\cdot 0{,}2+(44-42{,}4)^2\cdot 0{,}4=$

$=2{,}4^2\cdot 0{,}1+0{,}4^2\cdot 0{,}3+1{,}4^2\cdot 0{,}2+1{,}6^2\cdot 0{,}4=2{,}04$.

Дисперсию D(X) можно найти другим способом, исходя из следующего её свойства: дисперсия D(X) равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом математического ожидания M(X), то есть $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$.

Для вычисления $M(X^2)$ оставим следующий закон распределения величины X^2:

X^2	40^2	42^2	41^2	44^2
P	0,1	0,3	0,2	0,4.

Тогда

$M(X^2)=40^2\cdot 0{,}1+42^2\cdot 0{,}3+41^2\cdot 0{,}2+44^2\cdot 0{,}4=160+529{,}2+336{,}2+774{,}4=1799{,}8$

и дисперсия $D(X)==1799{,}8-42{,}4^2=2{,}04$.

3) $\sigma=\sqrt{2{,}04}\cong 1{,}43$.

Ответ: 1) 42,4; 2) 2,04; 3) 1,43.

Пример 15. Для случайной величины, распределенной по закону косинуса с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<-\dfrac{3\pi}{2} \text{ и } x>\dfrac{3\pi}{2},\\ C\cdot cos\dfrac{x}{3}, \text{при } x\epsilon\left[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Найти константу C, вероятность попадания в интервал $(-\frac{3}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$, а также математическое ожидание и дисперсию.

Решение

С учетом условия нормировки, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} C\cdot cos\frac{x}{3}dx=C\cdot 3\ sin\frac{x}{3}\Big|_{-3\pi/2}^{3\pi/2}=$$

$=3C\left(sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=6C.$

$6C=1.$

Следовательно, $C=\dfrac{1}{6}$.

Вероятность попадания в интервал есть интеграл от функции плотности по этому интегралу:

$$P\left(-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)=\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx=\int_{-3\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{6}cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}sin\frac{x}{3}\Big|_{-3\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(sin\frac{\pi}{6}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}$$

Математическое ожидание равно

$$M=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx=\frac{1}{6}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} x\cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} x\,d\left(\sin\frac{x}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}x\sin\frac{x}{3}\Big|_{-3\pi/2}^{3\pi/2}-\frac{1}{2}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2}\sin\frac{x}{3}\,dx=\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\cos\frac{x}{3}\Big|_{-3\pi/2}^{3\pi/2}=0+\frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{2}-\cos(-\frac{\pi}{2}))=0$$

(это было очевидно с самого начала, поскольку интегрируем нечетную функцию по симметричной относительно начала координат области).

Дисперсия равна

$$D=\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx-M^2=\frac{1}{6}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} x^2\cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{3\pi/2} x^2\cos\frac{x}{3}dx=$$

$$=\int_{0}^{3\pi/2} x^2\,d\left(\sin\frac{x}{3}\right)=x^2\sin\frac{x}{3}\Big|_{0}^{3\pi/2}-\int_{0}^{3\pi/2}\sin\frac{x}{3}\,dx^2$$

$$=\frac{9\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}-\int_{0}^{3\pi/2}2x\sin\frac{x}{3}\,dx=\frac{9\pi^2}{4}+\int_{0}^{3\pi/2}6xd\cos\frac{x}{3}=$$

$$\frac{9\pi^2}{4}+6x\cos\frac{x}{3}\Big|_{0}^{3\pi/2}-\int_{0}^{3\pi/2}6\cos\frac{x}{3}\,dx=$$

$$\frac{9\pi^2}{4}+6\cdot\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-18\sin\frac{x}{3}\Big|_{0}^{3\pi/2}=\frac{9\pi^2}{4}-18\sin\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi^2}{4}-18\approx 4.21.$$

Ответ: $C=\frac{1}{6}$, P($-\frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$)=$\frac{3}{4}$, M(X)=0, D(X)=4.21

Задачи для самостоятельного решения

<u>Задача № 81.</u> В группе людей 4 мужчины и 2 женщины. Из группы наудачу отбирают двух человек. Составить закон распределения случайной величины X – числа мужчин, попавших в группу отобранных. Найти M(X), D(X), σ(X).

<u>Задача № 82.</u> Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий стрелка при двух выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

Задача № 83. К какому типу случайных величин (дискретных или непрерывных) принадлежат следующие величины:

а) Время работы лампы дневного света до её поломки;

б) Число вызовов поступивших на телефонную станцию в течение часа.

Задача № 84. К какому типу случайных величин (дискретных или непрерывных) принадлежат следующие величины:

а) Время ожидания троллейбуса на остановке;

б) Сумма выигрыша в лотерею.

Задача № 85. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение σ; 4) функцию распределения F(X) и построить ее график.

X	8	4	6	5
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Задача № 86. Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение σ; 4) функцию распределения F(X) и построить ее график.

X	23	25	27	29
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Задача № 87. Задана непрерывная случайная величина X функцией распределения F(x). Требуется: 1) найти плотность распределения вероятностей f(x) ; 2) схематично построить графики функций f(x) и F(x); 3) найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X; 4) найти вероятность того, что X примет значение из интервала ($\alpha;\beta$).

$$F(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 0, & \alpha=-\infty, \\ \sin 2x, \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{4}, & \beta=\dfrac{\pi}{8}, \\ 1, \quad x>\dfrac{\pi}{4}. & \end{cases}$$

Задача № 88. Задана непрерывная случайная величина X функцией распределения F(x). Требуется : 1) найти плотность распределения вероятностей f(x) ; 2) схематично построить графики функций f(x) и F(x); 3) найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X; 4) найти вероятность того, что X примет значение из интервала ($\alpha;\beta$).

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{16}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha = 2, \\ \beta = 4, \\ \ \end{matrix}$$

Задача № 89. Две независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию для случайной величины Z=3X-2Y. Построить в виде таблицы закон распределения вероятностей случайной величины К=X·У.

X	-5	9	10	12
P	0,1	0,1	0,6	0,2

Y	-7	4
P	0,4	0,6

Задача № 90. Две независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию для случайной величины Z=3X-2Y. Построить в виде таблицы закон распределения вероятностей случайной величины К=X·У.

X	-4	-3	-2	5
P	0,1	0,5	0,2	0,2

Y	-6	0
P	0,7	0,3

6. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Биномиальный закон распределения описывает вероятность наступления события А m раз в n независимых испытаниях, при условии, что вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна.

Биномиальным называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли (9).

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$m_x=M(X)= np;$$
$$D_x =D(X)= nqp. \qquad 25$$

Пример 16. Отдел продаж магазина бытовой техники в среднем получает один заказ на покупку телевизоров из 10 звонков. Составить закон распределения вероятностей на покупку m телевизоров. Построить полигон распределения вероятностей.

Решение

Таблица 1 – Вычисления по формуле Бернулли в MS Excel

m	C_n^m	p^m	q^{n-m}	P(m,n)
0	1	1	0,34867844	0,3486784401
1	10	0,1	0,387420489	0,3874204890
2	45	0,01	0,43046721	0,1937102445
3	120	0,001	0,4782969	0,0573956280
4	210	0,0001	0,531441	0,0111602610
5	252	0,00001	0,59049	0,0014880348
6	210	0,000001	0,6561	0,0001377810
7	120	0,0000001	0,729	0,0000087480
8	45	0,00000001	0,81	0,0000003645
9	10	0,000000001	0,9	0,0000000090
10	1	0,0000000001	1	0,0000000001
$\sum$				1,0000000000

Вычисления проведем по формуле Бернулли (9), используя электронные таблицы MS Excel. В получившейся таблице 1:

m - число заказов, полученных компанией на покупку телевизора;

C_n^m - число сочетаний m телевизоров по n,

p - вероятность наступления события А, т.е. заказа телевизора,

q - вероятность не наступления события А, т.е. не заказа телевизора,

$P(m, n)$ - вероятность заказа m телевизоров из n.

На рисунке 2 изображен полигон распределения вероятностей, который построен на основе данных первого и пятого столбца таблицы 1

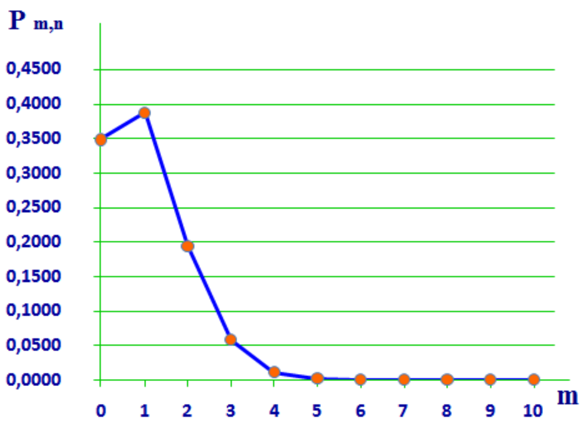


Рисунок 2 – Полигон распределения вероятностей для примера 16

Пример 1. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба при трех бросаниях монеты. Найти $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Решение. Так как случайная величина X представляет собой число появлений события A (выпадения герба) при трех повторных испытаниях (при трех бросаниях монеты), то она имеет биномиальный закон распределения:

Вероятности (p_0; p_1; p_2; p_3) найдем по формуле Бернулли (9) при $p(A)=p=\frac{1}{2}$ и $p(\overline{A})=q=\frac{1}{2}$:

$$p_0=\frac{1}{8};\quad p_1=\frac{3}{8};\quad p_2=\frac{3}{8};\quad p_3=\frac{1}{8}.$$

$$\sum_{i=0}^{3} p_i=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1.$$

Таким образом, для данной биномиально распределенной случайной величины X получаем следующий закон распределения:

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ее числовые характеристики $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $V(X)\%$ найдем с помощью доказанных выше формул (2.3):

$$M(X)=np=3\cdot\frac{1}{2}=1{,}5;\qquad D(X)=npq=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0{,}75.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}866;$$

Геометрический закон распределения возникает, когда проводится ряд одинаковых независимых опытов до первого появления некоторого события А. Случайная величина X – число проведенных безуспешных опытов до первого появления события А.

Геометрическое распределение случайной величины имеет следующий вид:

$$P_m = pq^{m-1}, \tag{26}$$

где P_m - вероятность наступления события А в испытание под номером m; p - вероятность наступления события А в одном испытании; q = 1 – р.

Числовые характеристики геометрического распределения:

$$\begin{gathered} M(X) = \frac{1}{(1-q)^2}, \\ D(X) = \frac{q}{p^2}, \\ \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}. \end{gathered} \tag{27}$$

Пример 17. В компанию по ремонту бытовой техники поступила партия из 10 запасных блоков для стиральных машин. Бывают случаи, что в партии оказывается 1 блок бракованный. Проводится проверка до обнаружения бракованного блока. Необходимо составить закон распределения числа проверенных блоков. Вероятность того, что блок может оказаться бракованным равна 0,1. Построить полигон распределения вероятностей.

Решение

Вычисления проведем по формуле геометрического закона распределения (26), используя электронные таблицы MS Excel. В получившейся таблице 2 видно, что с увеличением числа m, вероятность того, что будет обнаружен бракованный блок, снижается.

На рисунке 3 изображен полигон распределения вероятностей, который построен на основе данных первого и четвертого столбца таблицы 2.

Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального, когда число опытов n неограниченно увеличивается, а вероятность p события А в одном опыте стремится к 0. Распределение Пуассона также называют ***законом редких явлений***.

Случайная величина X имеет распределение Пуассона, если закон ее распределения имеет вид:

$$P_m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \tag{28}$$

где $\lambda = np = const$;

n - число испытаний, стремящиеся к бесконечности;

p - вероятность наступления события, стремящаяся к нулю (p<=0,1);

m - число появлений события А.

Таблица 2 - Вычисления по формуле геометрического закона распределения в MS Excel

m	p	q^{m-1}	P(m)
1	0,1	1	0,1000000000
2	0,1	0,9	0,0900000000
3	0,1	0,81	0,0810000000
4	0,1	0,729	0,0729000000
5	0,1	0,6561	0,0656100000
6	0,1	0,59049	0,0590490000
7	0,1	0,531441	0,0531441000
8	0,1	0,4782969	0,0478296900
9	0,1	0,43046721	0,0430467210
10	0,1	0,387420489	0,3874204890
∑			**1,0000000000**

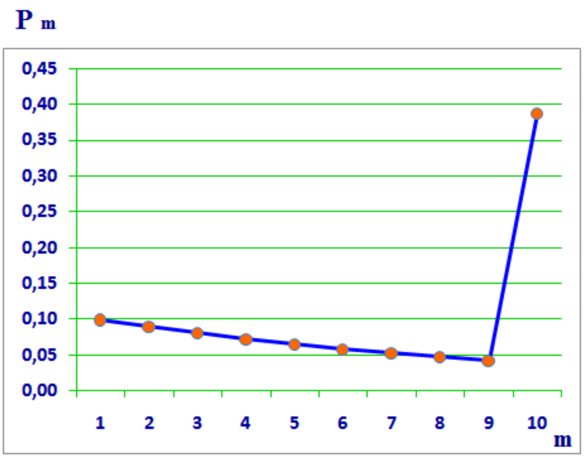


Рисунок 3- Полигон распределения вероятностей для примера 17

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M(X) = D(X) = \lambda,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{29}$$

Пример 18. В среднем за день в компанию по продаже телевизоров поступает около 100 звонков. Вероятность заказа телевизора марки А равна 0,08; В - 0,06 и С - 0,04. Составить закон распределения заказов на покупку телевизоров марок А,В и С. Построить полигон распределения вероятностей.

Решение

Из условия имеем: m=100, λ_1=8, λ_2=6, λ_3=4 ($np \leq 10$). Вычисления проведем по формуле Пуассона (28), используя электронные таблицы MS Excel. В получившейся таблице 3 видно, что если *n* достаточно большое и стремится к бесконечности, а значение *p* стремится к нулю, так что произведение *np* стремится к постоянному числу, то данный закон является приближением к биномиальному закону распределения.

На рисунке 4 изображен полигон распределения вероятностей, который построен на основе данных первого и четвертого столбца таблицы 3. Из графика на рисунке 4 видно, что чем больше вероятность p, тем ближе кривая расположена к оси m, т.е. более пологая.

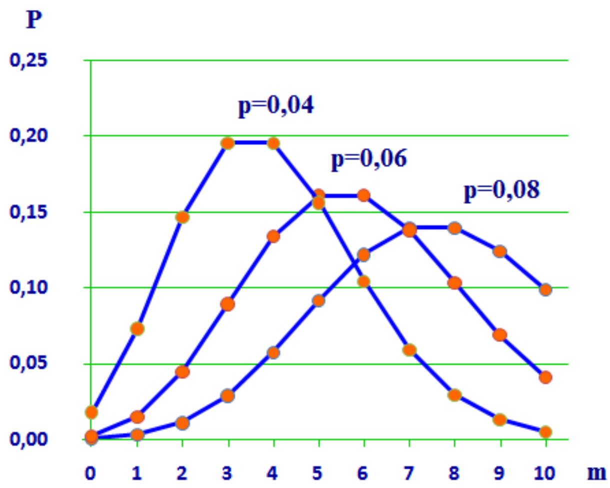


Рисунок 4 - Полигон распределения вероятностей для примера 18

Таблица 3 - Вычисления по формуле геометрического закона распределения в MS Excel

m	p = 0,08	p = 0,06	p = 0,04
0	0,00034	0,00248	0,01832
1	0,00268	0,01487	0,07326
2	0,01073	0,04462	0,14653
3	0,02863	0,08924	0,19537
4	0,05725	0,13385	0,19537
5	0,09160	0,16062	0,15629
6	0,12214	0,16062	0,10420
7	0,13959	0,13768	0,05954
8	0,13959	0,10326	0,02977
9	0,12408	0,06884	0,01323
10	0,09926	0,04130	0,00529

Пример 19. Среднее число бракованных деталей, изготавливаемых станком-автоматом в течение одного часа, равно 6. Составить закон

распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных деталей, которые будут изготовлены станком-автоматом в ближайшие полчаса. Найти числовые характеристики $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$ этой случайной величины.

Решение

Будем считать что бракованные детали распределены по закону Пуассона. Вероятности (p_0; p_1; p_2;...) найдем по формуле 28:

$$p_0 = \frac{3^0}{0!}e^{-3} = e^{-3} \approx 0{,}0498;$$

$$p_1 = \frac{3^1}{1!}e^{-3} = 3e^{-3} \approx 0{,}1494;$$

$$p_2 \approx 0{,}2241;$$

И т.д.

Закон распределения величины X примет вид:

X	0	1	2	3	4	...
p	0,0498	0,1494	0,2241	0,2241	0,1680	...

Числовые характеристики величины X найдем по формулам 29:

$M(X) = 3;$

$D(X) = 3;$

$\sigma(X) = \sqrt{3} \approx 1{,}73.$

Ответ: $M(X) = 3$; $D(X) = 3$; $\sigma(X) \approx 1{,}73.$

Необходимо отметить, что биномиальный, геометрический, закон распределения Пуассона выражают распределение вероятностей дискретной случайной величины.

Среди законов распределения непрерывных случайных величин наиболее распространенными является нормальный и равномерный законы распределения.

Нормальное распределение имеет непрерывная случайная величина *X*, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

$$F(X) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \qquad 30$$

где a, σ – постоянные, $\sigma > 0$;

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{t^2/2}dt$ - функция Лапласа.

На рисунке 5 приведены графики плотности и функции нормального распределения при m =1, σ =1. График функции плотности нормального закона представляет собой колоколообразную кривую, принимающую наибольшее значение в точке x=a и быстро убывающую при $x \to \pm\infty$. В частности, справедливо “правило σ”: 99% площади фигуры, заключенной между графиком плотности нормального закона и осью абсцисс, приходится на отрезок [а – 3σ; a + 3σ].

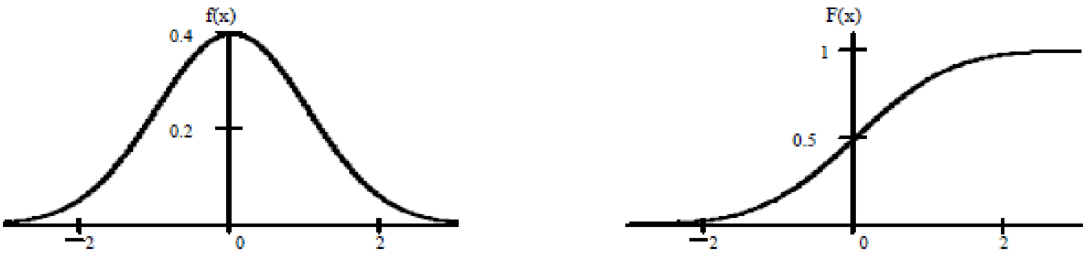


Рисунок 5 - Графики плотности и функции нормального распределения

Числовые характеристики нормальной случайной величины:

$$M(X)=a,$$
$$D(X)=\sigma^2 \quad 31$$

Пример 20. Для коров некоторой породы удой за лактацию – это некоторая случайная величина, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием a = 3200 кг и средним квадратическим отклонением σ = 300 кг.

Найти: а) Процент животных, удои которых за лактацию заключены в пределах от 3000 кг до 3500 кг? б) В каком диапазоне наблюдаются удои?

Решение

а) Воспользуемся формулой для вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}).$$

По условию задачи a = 3200, σ = 300, α = 3000, β = 3500. Тогда

$$P(3000 < X < 3500) = \Phi(\frac{3500-3200}{300}) - \Phi(\frac{3000-3200}{300}) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}66) =$$

$$= 0{,}3413 + 0{,}2454 = 0{,}5867 \approx 0{,}59$$

б) По правилу «трёх сигм» находим:

a - 3σ = 3200 – 900 = 2300,

a + 3σ = 3200 + 900 = 4100.

Тогда для коров данной породы удои за лактацию будут колебаться от 2300 кг до 4100 кг.

Ответ: 0,59; от 2300 кг до 4100 кг.

Пример 21. Станок-автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X – диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине не превосходит 0,7 мм. Опытным путем установлено, что $\sigma = \sigma(X)$ =0,4 мм. Определить, сколько процентов годных шариков изготовляет автомат.

Решение

Отклонение X диаметра шарика от проектного размера – это ошибка диаметра шарика. При условии, что станок настроен правильно (систематических ошибок в работе станка нет), эта ошибка X складывается из множества мелких случайных ошибок $X_к$, связанных с действием различных независимых друг от друга случайных факторов. То есть $X = \sum X_k$. Таким образом, X – случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием (средним значением) a = 0 и средним квадратическим отклонением σ = 0,4 мм. Величина σ = 0,4 мм означает, что среднее значение отклонения ошибки X от ее среднего значения a = 0 без учета знака отклонения, то есть среднее значение самой этой ошибки, если не учитывать ее знак, составляет 0,4 мм. По условию задачи, каждый изготовленный станком-автоматом шарик будет считаться годным, если ошибка X его диаметра будет удовлетворять неравенству $|x| \le 0{,}7$ мм, то есть она будет в пределах [-0,7 мм; 0,7 мм]. Найдем вероятность:

$$p(|X| \le 0{,}7) = p(-0{,}7 \le X \le 0{,}7) = 2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right) = 2\Phi(1{,}75) = 2 \cdot 0{,}4599 \approx 0{,}92$$

Итак, вероятность того, что каждый изготовленный станком-автоматом шарик окажется годным, составляет 0,92. Это значит, что этот станок изготовляет в среднем 92% годных шариков.

Ответ: 92%

Если плотность вероятности *f(x)* есть величина постоянная на определенном промежутке [a, b], то закон распределения называется ***равномерным***. Функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad (32)$$

где $a \le x \le b$.

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины:

$$M(x) = \frac{a+b}{2}$$
$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad 33$$
$$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Равномерно распределенными могут быть следующие величины:

1) координата *X* точки, бросаемой наудачу на отрезок [a, b];

2) ошибка *X*, производимая при округлении приближенных чисел до нужного десятичного знака при производстве арифметических вычислений;

3) время *T* ожидания пассажиром троллейбуса, маршрутного такси, поезда метро и прочих средств общественного транспорта при регулярном графике их движения.

Пример 22. При производстве арифметических вычислений их результаты округляют до сотых. Какова вероятность того, что ошибка *X*, допущенная при округлении очередного числа, окажется не больше одной тысячной (без учета ее знака)?

Решение

Ошибка *X* округления чисел до сотых – равномерно распределенная случайная величина, принимающая свои возможные значения (если не учитывать их знак) на промежутке [0; 0,005]. Поэтому ее плотность вероятности, согласно формулы 32, будет иметь вид:

$$f(x) = 200 \quad (0 \le x \le 0,005).$$

Тогда искомая вероятность:

$$p(0 \le X \le 0,001) = \int_0^{0,001} 200dx = 200x\Big|_0^{0,001} = 0,2.$$

Ответ: 0,2

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 91. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на промежутке [-2,6]. Построить график плотности распределения *y=f(x)* величины X. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, дисперсию, коэффициент вариации величины X.

Задача № 92. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием *a*=10. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0; 10)?

Задача № 93. Масса яблока, средняя величина которой равна 150 г, является нормально распределённой случайной величиной со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что масса наугад взятого яблока будет заключена в пределах от 130 г до 180 г.

Задача № 94. Средний вес зерна равен 0,2 г, Среднее квадратическое отклонение равно 0,05 г. Определить вероятность того, что вес наудачу взятого зерна окажется в пределах от 0,16 г до 0,22 г.

Задача № 95. Норма высева семян на 1 га равна 200 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения со средним квадратическим отклонением 10 кг. Определить количество семян, обеспечивающих посев на площади 100 га с гарантией 0,95.

Задача № 96. Заданы математическое ожидание ***a*** и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Написать плотность распределения вероятностей и схематично построить ее график. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$. Определить приближенно максимальное и минимальное значения случайной величины X, следуя правилу «трех сигм». Найти вероятность того, что X примет значение, превышающее β; найти интервал, симметричный относительно математического ожидания ***a***, в котором с вероятностью γ будут заключены значения случайной величины X.

$a = 8, \quad \sigma = 2, \quad \alpha = 6, \quad \beta = 11, \quad \gamma = 0{,}98.$

Задача № 97. Заданы математическое ожидание ***a*** и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Написать плотность распределения вероятностей и схематично построить ее график. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$. Определить приближенно максимальное и минимальное значения случайной величины X, следуя правилу «трех сигм». Найти вероятность того, что X примет значение, превышающее β; найти интервал, симметричный относительно математического ожидания ***a***, в котором с вероятностью γ будут заключены значения случайной величины X.

$a = 15, \quad \sigma = 2, \quad \alpha = 8, \quad \beta = 19, \quad \gamma = 0{,}97.$

Задача № 98. Интервал движения троллейбусов составляет 5 минут. Какова вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать очередного троллейбуса не менее трех минут?

Задача № 99. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок со средней случайной ошибкой 20 г (в ту или другую сторону). Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

Задача № 100. Норма высева семян на 1 га равна 200 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения со средним квадратическим отклонением 10 кг. Определить количество семян, обеспечивающих посев на площади 100 га с гарантией (вероятностью) 0,95.

Задача № 101. Станок-автомат производит цилиндрические болванки. Проектный размер диаметра болванок составляет 100 мм. Известно, что станок производит в среднем 2 % болванок диаметром более 101 мм. Болванка считается годной, если ее диаметр находится в пределах от 99 мм до 101 мм. Сколько процентов годных болванок производит станок-автомат?

Задача № 102. Испытывают два независимо работающих устройства. Длительность безотказной работы обоих устройств имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы первого устройства составляет 40 часов, второго 20 часов. Найти вероятность того, что в течение 10 часов:

а) не откажет первое устройство;

б) не откажет второе устройство;

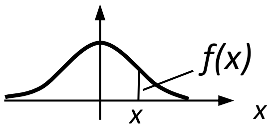
в) оба устройства не откажут;

г) оба устройства откажут;

д) хотя бы одно устройство не откажет.

ПРИЛОЖЕНИЯ

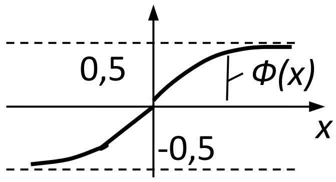
Приложение 1



Значения функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0026
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002-	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2



Значения функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790	1,56	0,4406	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810	1,57	0,4418	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1.19	0,3830	1,58	0,4429	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0.2910	1,20	0,3849	1,59	0.4441	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869	1,60	0,4452	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883	1,61	0,4463	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907	1.62	0,4474	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925	1,63	0,4484	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944	1,64	0.4495	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3078	1,26	0,3962	1,65	0,4505	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980	1,66	0,4515	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3997	1,67	0,4525	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015	1,68	0,4535	2,14	0.4838
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032	1,69	0,4545	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049	1,70	0,4554	2.18	0,4854
0,15	0,0596	0,54	0,2054	0,93	0,3238	1,32	0,4066	1,71	0,4564	2.20	0,4861
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082	1,72	0,4573	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099	1,73	0,4582	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115	1,74	0,4591	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,4131	1,75	0,4599	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0.4147	1,76	0,4608	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0.99	0,3389	1,38	0,4162	1,77	0,4616	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177	1,78	0,4625	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192	1,79	0,4633	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461	1.41	0,4207	1,80	0,4641	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1.42	0,4222	1,81	0,4649	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0.3508	1,43	0,4236	1,82	0,4656	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251	1,83	0,4664	2.44	0,4927
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265	1,84	0,4671	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279	1,85	0.4678	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292	1,86	0,4686	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4319	1,88	0,4699	2,70	0,4965
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1.11	0,3665	1,50	0,4332	1,89	0,4706	2,80	0,4974
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4345	1,90	0,4713	2,90	0,4981
0.35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357	1,91	0,4719	3,00	0,4986
0.36	0,1406	0,75	0,2734	1.14	0,3729	1,53	0,4370	1,92	0,4726	3,50	0,4997
0,37	0,1443	0,76	0.2764	1.15	0,3749	1,54	0.4382	1,93	0,4732	4,00	0,4999
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394	1,94	0,4738	5,00	0,5

Приложение 3

Критические точки $t_{кр} = t_{кр}(\alpha; k)$ распределения Стьюдента (Т - распределения) с k степенями свободы, удовлетворяющие условию $p(-t_{кр} < T < t_{кр}) = \gamma = 1 - \alpha$

k	γ (α)			k	γ (α)		
	0,90 (0,10)	0,95 (0,05)	0,99 (0,01)		0,90 (0,10)	0,95 (0,05)	0,99 (0,01)
1	6,31	12,71	63,66	9	1,83	2,26	3,25
2	2,92	4,30	9,92	10	1,81	2,23	3,17
3	2,35	3,18	5,84	15	1,75	2,13	2,95
4	2,13	2,78	4,60	20	1,72	2,09	2,85
5	2,02	2,57	4,03	30	1,70	2,04	2,75
6	1,94	2,45	3,71	60	1,67	2,00	2,66
7	1,89	2,36	3,50	120	1,66	1,98	2,62
8	1,86	2,31	3,36	∞	1,64	1,96	2,58

Литература

1. Агапов А.Г. Задачник по теории вероятностей: учеб. пособие для студентов втузов. М.: Высш. шк., 1986. 80 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов. М.: Высш. шк., 2003. 405 с.
3. Комогорцев В.Ф. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике для студентов экономических специальностей. Брянск: Изд-во Брянская ГСХА, 2007. 179 с.
4. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ К.Н. Лунгу и др.; под ред. С.Н. Федина. М.: Айрис-пресс, 2004. 592 с.
5. Высшая математика: программа, метод. указ. по изучению дисциплины и контрольные задания / сост. В.Г. Раскин, С.О. Стрыгина, С.Н. Дементьев. М.: Всесоюзный с.-х. ин-т заоч. образования, 1991. 48 с.

Учебное издание

Татьяна Викторовна Бычкова

Теория вероятностей

Учебное пособие для бакалавров очной
и заочной формы обучения направления подготовки
09.09.03 «Прикладная информатика»

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 23.04.21 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 2,55. Тираж 25 экз. Изд. № 6924.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ