ФГБОУ ВО «Брянский государственный аграрный университет»

Факультет среднего профессионального образования

Дьяченко О.В.

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

по математике

для аудиторной и самостоятельной работы студентов первого курса

Студента (ки)____

Группы ____

Специальность _______________________________________

Брянская область, 2018

УДК 51
ББК 22.1 Я72
Д 93

Дьяченко, О.В. **Рабочая тетрадь по математике для аудиторной и самостоятельной работы студентов первого курса факультета среднего профессионального образования** (издание второе) / О.В. Дьяченко. – Брянск.: Издательство Брянский ГАУ, 2017. - 108 с.

Рекомендована цикловой методической комиссией общеобразовательных, гуманитарных и социально-экономических, математических и общих естественно-научных дисциплин протокол № 4 от 7 февраля 2018 г.

Рецензент: преподаватель математики факультета СПО М.М. Сидорова

Введение

Рабочая тетрадь по математике для студентов 1 курса факультета среднего профессионального образования составлена в соответствии с действующими рабочими программами государственного образовательного стандарта и может быть использована для аудиторной и самостоятельной работы обучающимися, а также для выполнения домашних работ. Тетрадь содержит задачи репродуктивного, поискового характера, а так же имеется ряд задач повышенной сложности, решение которых требует определенных умений и навыков, которые могут служить базой для дальнейшего изучения курса математики.

В процессе изучения тем у студентов формируются общие компетенции (ОК):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.

Тема 1. Повторение

<u>Практическая работа</u>

Вариант 1

1. Найти значение выражения 0,2 • 0,02 • 0,002=____
2. Вычислить 0,875 • $2\ ^{2}/_{7}$=____
3. Вычислите значение выражения 2,1• 3,2 – 2,1•1,2 + 1=__________________________________
4. Вычислите значение выражения 0,8 • 3,9 + 0,8 • 6,1 – 2=_______________________________
5. Вычислите значение выражения $\frac{4{,}2\cdot 1{,}8}{6{,}3} =$____
6. Вычислите 8/9 + 2/3 • 1,7=____
7. Расположите в порядке возрастания: -0,2; $(-0{,}2)^2$; $(-0{,}2)^3$ _________________________________
8. Сопоставьте выражения и принимаемые ими значения:

ВЫРАЖЕНИЯ

А)$\sqrt{25}$ • $\sqrt{0{,}01}$ - $\sqrt{36}$ Б) $\sqrt{16}$:$\sqrt{0{,}01}$ + $\sqrt{81}$ В) ($\sqrt{4}$ - $\sqrt{16}$ • $\sqrt{1}$)^2

ЗНАЧЕНИЯ

1) 49 2) 5,5 3) -5,5 4) 4

ОТВЕТ ____

9. Запишите номера верных равенств

1) 2^{-2}• 8 – 3^{-2} • 27 = 1; 2) 5^{-1} • 25 + 3^{-1} • 9 = 8; 3) 2^{-3} • 64 – 5^{-1} • 25 = -3

ОТВЕТ ____

10. Укажите наибольшее из чисел:

1) 8 2)$\sqrt{66}$ 3) 2$\sqrt{25}$

ОТВЕТ ____

11. Найдите значение выражения ab/a-b (b/a – a/b) при a = $\sqrt{3}$, b=3-$\sqrt{3}$

ОТВЕТ ____

12. В какое из данных выражений можно преобразовать произведение (3x-3)(1-3x)

1) 3(1-x)(x-1); 2) -3(x-1)(3x-1); 3) 3(x+1)(1-3x)

13. Найти значение выражения x^2-6x+9 при x=$2^{1}/_{7}$

ОТВЕТ ____

<u>**Самостоятельная работа**</u>

Вариант № 2

1. Найти значение выражения $30 - 0{,}8 \cdot (-10)^2 =$ ______________________________

2. Вычислить $0{,}375 \cdot 2\,{}^{2}/_{3} =$ ______________________________

3. Найти значение выражения $45 \cdot ({}^{1}/_{9})^2 - 14 \cdot {}^{1}/_{9} =$ ______________________________

4. Вычислите значение выражения $0{,}2 \cdot 5{,}9 + 0{,}2 \cdot 4{,}1 =$ ______________________________

5. Вычислить $\frac{1{,}8 \cdot 2{,}4}{1{,}2} =$ ______________________________

6. Найти значение выражения $0{,}35 + 3/4 \cdot 2 =$ ______________________________

7. Значение какого из выражений является числом рациональным?

   1) $\sqrt{5} + \sqrt{20}$ 2) $(\sqrt{5} - \sqrt{10})^2$ 3) $\sqrt{36}/(\sqrt{2})^2$

ОТВЕТ ______________________________

8. Укажите наибольшее из чисел: $\sqrt{35}$; $2\sqrt{8}$; $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}}$

ОТВЕТ ______________________________

9. Найти значение выражения $(2-c)^2 - c(c+4)$, при $c = -1/8$

ОТВЕТ ______________________________

10. В какое из данных выражений можно преобразовать произведение $(6x-2)(x-3)$

   1) $2(3x-2)(x-3)$ 2) $-2(3x-1)(3-x)$ 3) $-2(1-3x)(3-x)$

ОТВЕТ ______________________________

11. Найти значение выражения $x^2 - 10x + 25$, если $x = 5\,{}^{1}/_{2}$

ОТВЕТ ______________________________

<u>**Домашнее задание**</u>

1. Сберегательный банк начисляет на срочный вклад 20% годовых. Вкладчик положил на счет 800 р. Какая сумма будет на этом счете через год, если никаких операций со счетом проводиться не будет?

____

1. 960 р.   2. 820 р.   3. 160 р.   4. 1600 р.

2. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^{11}$м. выразите это расстояние в миллиметрах.

____

1) $1,5 \cdot 10^{15}$; 2) $1,5 \cdot 10^{14}$; 3) $1,5 \cdot 10^{13}$; 4) $1,5 \cdot 10^{12}$.

3. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия ($t^\circ C$) в шкалу Фаренгейта ($t^\circ F$) пользуются формулой $F = 1,8C + 32$, где C — градусы Цельсия, F — градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Фаренгейта соответствует 5° по шкале Цельсия?

---

4. Из физической формулы $P = I^2R$ выразите переменную I (все величины положительны).

---

5. Какой из следующих квадратных трехчленов нельзя разложить на множители?
1. $x^2 - 2x - 1$ 2. $x^2 + 6x + 5$ 3. $x^2 - 4x + 5$ 4. $x^2 - 6x + 9$

Тема 2. Повторение

Практическая работа

1. Преобразуйте в многочлен выражение $3c(c+2)-(3+c)^2$=______________________________
2. Упростите выражение $\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{1}{b-a}$ =____
3. При каком значении х выражение $\frac{2+2x}{3x+6}$ не имеет смысла?

   1) 2; 2) -2; 3) -1; 4) 0.

____

4. Сократите дробь $\frac{b^2+5b}{b^2-25}$ =____
5. Разложите на множители $x^2 - y^2 - 2x - 2y$=____
6. Решите уравнение $\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{3}$.

____

7. Решите уравнение $x^2=2x+8$.

____

8. Решите уравнение $5x+3(-1-x)=-8x-8$.

____

9. Моторная лодка прошла по течению реки 15 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 40 минут больше. Скорость течения реки 3 км/ч. Пусть х км/ч – собственная скорость лодки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

   1) $\frac{15}{x-3}-\frac{15}{x+3}=\frac{2}{3}$; 2) $\frac{15}{x+3}-\frac{15}{x-3}=\frac{2}{3}$; 3) $\frac{15}{x-3}-\frac{15}{x+3}=40$; 4) $\frac{15}{x-3}-\frac{15}{x+3}=40$.

ОТВЕТ ____

10. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x+4y=2\\x-y=3\end{cases}$

____

11. Вычислите координаты точек пересечения параболы $y=x^2-5x$ и прямой $y=x+16$.

____

Самостоятельная работа

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=3 \\ 3y-x^2=9 \end{cases}$.

2. Решите неравенство $-4x^2+5x+60>(x+6)^2$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2-3x \le 8, \\ 5x+6>6x. \end{cases}$

4. Функция задана формулой $y=4x^3+2x^2-5x-15$. Найдите значение функции при $x=-2$.

Домашнее задание

1. Решите неравенство $6x-4(x-2)\le 4x+16$.

2. Решите неравенство $(3-2x)(x-5)<0$.

3. Решите неравенство $\frac{8x-9}{5} \ge \frac{x^2}{3}$.

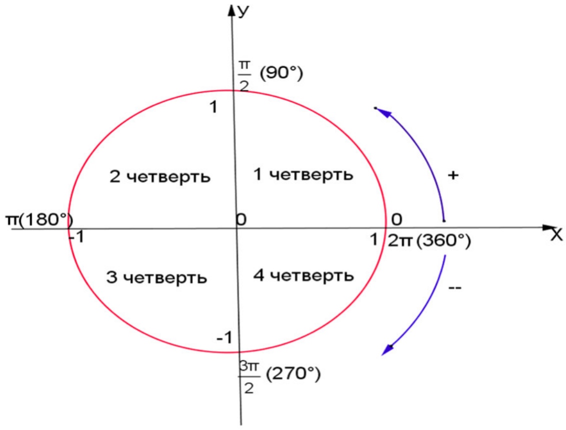
4. Последовательность задана условиями $b_1=4$, $b_{n+1}=-\frac{1}{b_n}$. Найдите b_4.

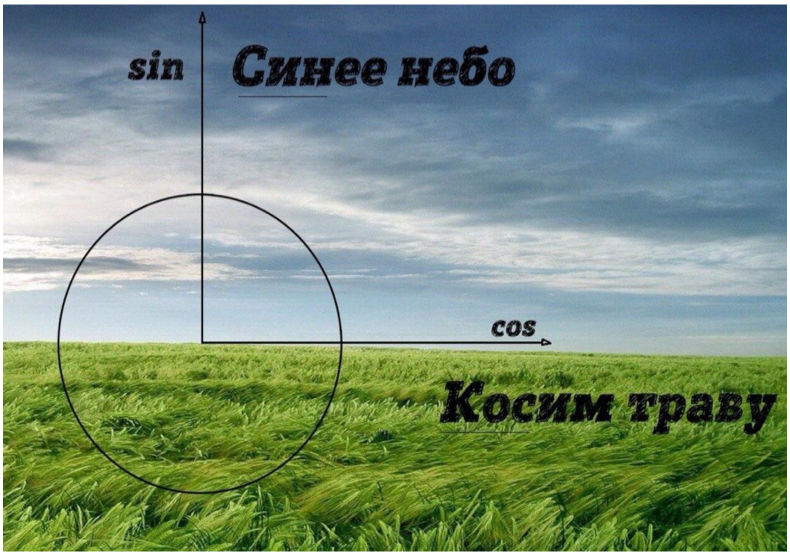
5. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии 4; 8;… .

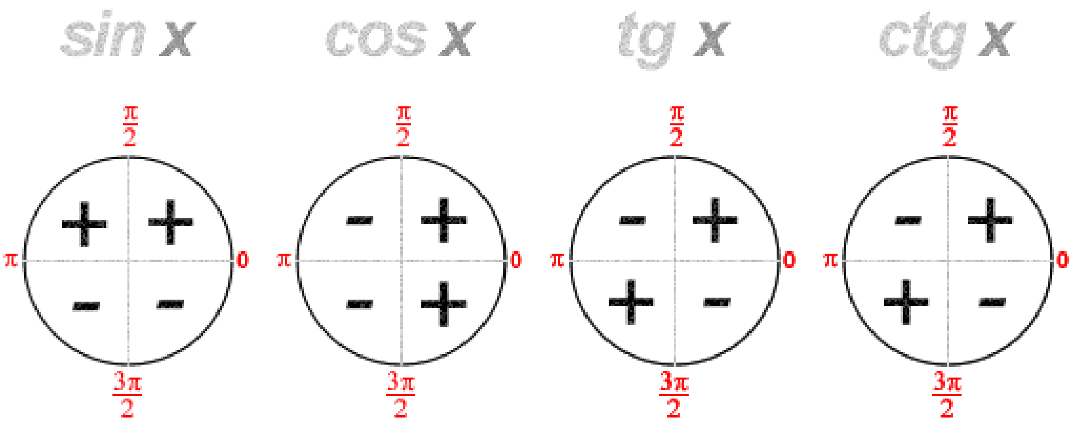
Тема 3. Тригонометрические функции числового аргумента

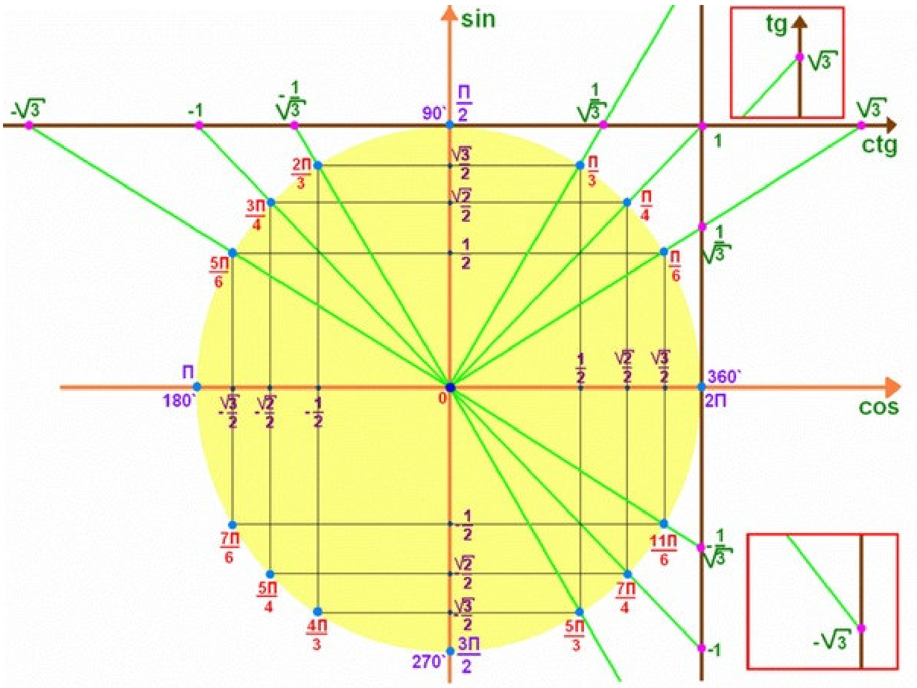
<u>Запомни!</u>

Единичная окружность









α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Практическая работа

1. Вычислите:

а) $\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \text{tg}\,45^0 - \frac{1}{2}\,\text{ctg}\,\frac{\pi}{2}$=____

б) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \text{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$=____

в) $\cos 1110^0$=____

г) $\text{tg}\,585^0$=____

д) $3\cos\frac{\pi}{3} - \text{tg}\,\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\,\text{ctg}\frac{\pi}{6} + \sin 90°$=____

е) $\text{tg}\,(-30^0) - \text{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos(-\pi)$=____

ж) $\sin 1500^0$=____

з) ctg 930^0=

2. Найдите sin α, если cos α = $\frac{2}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

Найдите cos α, если sin α = $\frac{1}{4}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

3. Найдите значение выражения: $\frac{\sin 130° + \sin 110°}{\cos 130° + \cos 110°}$

Найдите значение выражения: $\frac{\sin 145° - \sin 125°}{\cos 145° - \cos 125°}$

4. Упростите выражение: $\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot (1 + \sin^2 \alpha)}$

Упростите выражение: $3\cos^2\alpha + \frac{3}{ctg^2\alpha + 1}$ - 22,4

<u>Самостоятельная работа</u>

Вариант 1

1. Вычислите:

а) tg $\frac{\pi}{3}$ + 4ctg $\frac{\pi}{4}$ - sin 30^0 + $\frac{1}{5}$ cos 90^0=

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ - $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ + $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$=

в) cos 1845^0=

г) ctg 1320^0=

2. Найдите tg α, если cos α = $-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$

3. Найдите значение выражения: $\frac{\cos 185° + \cos 115°}{\sin 185° + \sin 115°}$

4. Упростите выражение: $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\sin\pi + 2\cos\frac{\pi}{3}$ - $\text{tg}\,45^0$ + $\frac{1}{3}\,\text{ctg}30^0$=____________________________________

б) $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \text{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$=____________________________________

в) $\cos 1140^0$=____

г) $\text{tg}\,570^0$=____

2. Найдите ctg α, если $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

____

3. Найдите значение выражения: $\frac{\sin 290° + \sin 50°}{\cos 290° - \cos 50°}$

____

4.Упростите выражение: $\frac{\text{ctg}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \frac{tg\,\alpha}{\sin\alpha}$

____

Домашнее задание

1. Найти радианную меру угла:

$$135^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot ... = ...\,_{рад}$$

$$18^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 18 = \frac{18\pi}{180} = ...\,_{рад}$$

$$54^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 54 = \frac{...\pi}{180} = ...\,_{рад}$$

2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

$$\frac{\pi}{18}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{18})^\circ = (\frac{180}{18})^\circ = 10^\circ \quad \frac{5\pi}{6}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6})^\circ = (\frac{...}{6})^\circ = ...^\circ$$

$$\frac{\pi}{20}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{20})^\circ = (\frac{180}{20})^\circ = ...^\circ \qquad \frac{\pi}{3}\,_{рад} = (\frac{180}{\pi} \cdot ....)^\circ = ...^\circ$$

Тема 4. Основные формулы тригонометрии

Запомни!

Основное тригонометрическое свойство

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \; tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}, \alpha, \beta, (\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}, \alpha, \beta, (\alpha - \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Формулы двойного угла

$$sin2\alpha = 2sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2} \qquad tg^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2} \qquad tg^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$ctg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Формулы суммы и разности

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

<u>Практическая работа</u>

1. Вычислить: $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=$ ______________________

$\sin 73^\circ\cdot\cos 17^\circ - \cos 73^\circ\cdot\sin 17^\circ=$ ______________________

$\cos\frac{8\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}=$ ______________________

$\cos 150^\circ=$ ______________________

$\sin 240^\circ=$ ______________________

2. Упростить: $(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)=$ ______________________

$\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=$ ______________________

$\frac{1+tg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}=$ ______________________

$\frac{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-tg(\pi+\alpha)+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=$ ______________________

$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{ctg(2\pi-\alpha)}\cdot\frac{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=$ ______________________

$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+ctg(\pi-\alpha)}{tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}=$ ______________________

$\frac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=$ ______________________

<u>Самостоятельная работа</u>

1. Упростить: $\dfrac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1} =$ ______________________________

____

$\sin 12° \cdot \cos 18° + \sin 18° \cdot \cos 12° =$ ______________________________

$\sin 65° \cdot \sin 55° + \cos 65° \cdot \cos 55° =$ ______________________________

$\sin 4{,}25 \cdot \cos 1{,}11 - \sin 1{,}11 \cdot \cos 4{,}25 =$ ______________________________

$\sin {}^{3\pi}/_{7} \cdot \sin {}^{5\pi}/_{21} - \cos {}^{3\pi}/_{7} \cdot \cos {}^{5\pi}/_{21} =$ ______________________________

$\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) =$ ______________________________

____

2. Вычислить: $\sin 105° - \sin 75° =$ ______________________________

$\cos 105° + \cos 165° =$ ______________________________

Домашняя работа

Вычислить: $\sin\dfrac{8\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{11\pi}{6} + \cos\dfrac{29\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{1}{\cos\dfrac{23\pi}{3} \cdot \sin\dfrac{11\pi}{6}} + 7$ = ______________________________

____

Тема 5. Введение понятия линий синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Построение графиков

Функция y = sinx, её свойства и график

<u>Запомни!</u>

<u>Основные свойства:</u>
Область определения – множество R всех действительных чисел;
Множество значений – отрезок[-1;1];
Функция y=sinx – периодическая с периодом 2π, т.е. sin(x+2π)=sinx
Функция y=sinx - нечётная, т.е.sin(-x)=-sinx
Функция y=sinx:

возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n \in Z$

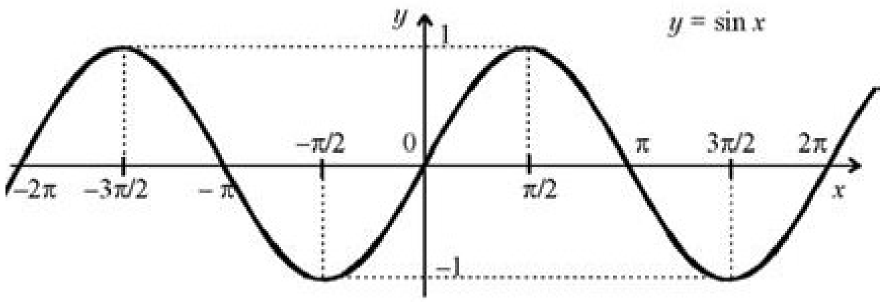
убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right], n \in Z$

Функция y=sinx принимает

Наибольшее значение, равное 1, при x=$\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$

Наименьшее значение, равное –1, при x=-$\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$

Значение равное нулю, при x=$\pi n, n \in Z$



Функция y = cosx, её свойства и график

<u>Запомни!</u>

<u>Основные свойства:</u>
Область определения – множество R всех действительных чисел;
Множество значений – отрезок[-1;1];
Функция y=cosx – периодическая с периодом 2π, т.е. cos(x+2π)=cosx
Функция y=cosx чётная, т.е.cos(-x)=cosx

Функция y=cosx:

возрастает на отрезках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n], n \in Z$

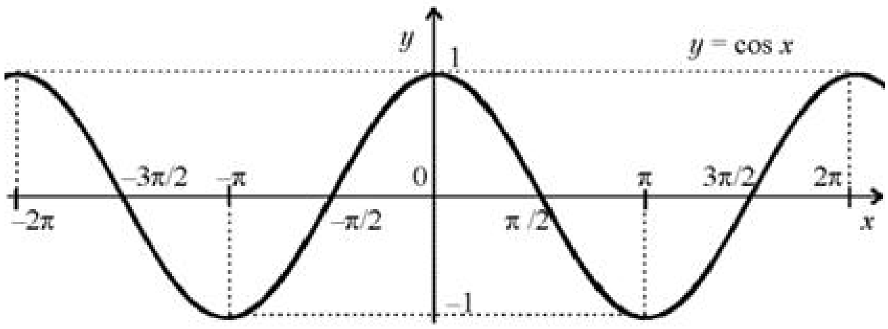
убывает на отрезках $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$

Функция y=cosx принимает

Наибольшее значение, равное 1, при x=$2\pi n, n \in Z$

Наименьшее значение, равное –1, при x=$\pi + 2\pi n, n \in Z$

Значение равное нулю, при x=$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$



Функция y = tgx, её свойства и график

Запомни!

Основные свойства:

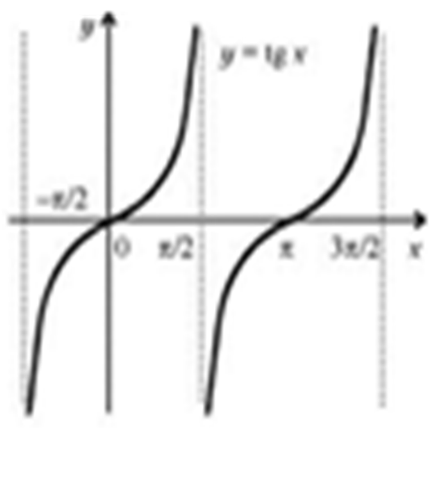
Область определения – множество R всех действительных чисел, кроме чисел $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

Множество значений – множество R всех действительных чисел;
Функция y=tgx – периодическая с периодом π, т.е. tg(x+π)=tgx
Функция y=tgx нечётная, т.е.tg(-x)=-tgx

Функция y=tgx возрастает (убывает) на интервалах $\operatorname{tg} x > 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in \mathbf{Z}$,

$\operatorname{tg} x < 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), \ n \in \mathbf{Z}$

Функция y=tgx принимает значение равное нулю, при x=$\pi n, n \in Z$



Функция y = ctgx, её свойства и график

<u>Запомни!</u>

<u>Основные свойства:</u>

Область определения – множество R всех действительных чисел, кроме чисел $\pi n, n \in Z$;

Множество значений – множество R всех действительных чисел;

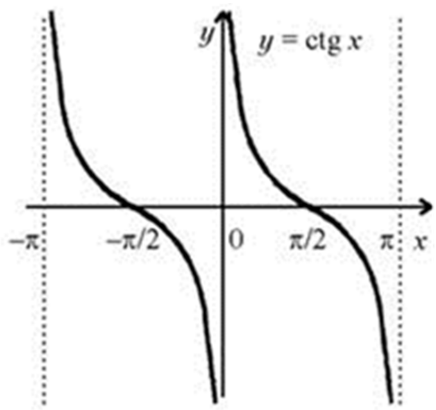
Функция y=ctgx – периодическая с периодом π, т.е. ctg(x+π)=tgx

Функция y=ctgx нечётная, т.е.tg(-x)=-tgx

Функция y=ctgx возрастает (убывает) на интервалах

$\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$

Функция y=ctgx принимает значение равное нулю, при x=$\pi n, n \in Z$



<u>Практическая работа</u>

Задание 1:Изобразить график функции y=2+sinx; y=2sinx; y=sinx-1; y=sinx+3

Задание 2: Изобразить график функции y=cosx-1; y=cosx+1; y=cosx-2; y=0.5cosx

Задание 3. Определите, является ли функция $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}x^4$ четной или нечетной?

Задание 4. Найдите наименьший положительный период функции у = $3sin\frac{x}{4}$.

Задание 5. В одной системе координат постройте графики функций у =cos x, у =cos x – 3. Для каждой из функций укажите область определения и область значений.

Задание 6. Определите, является ли функция $f(x) = \sin x - 4x^3$ четной или нечетной?

Задание 7. Найдите наименьший положительный период функции у = $4tg\,3x$.

Задание 8. В одной системе координат постройте графики функций у =sin x, у =3sin x. Для каждой из функций укажите область определения и область значений.

Задание 9. В одной системе координат постройте графики функций y =ctg x, y =ctg x +2. Для каждой из функций укажите область определения и область значений.

Домашняя работа

Задание 1. В одной системе координат постройте графики функций y =cos x, y =4cos x. Для каждой из функций укажите область определения и область значений

Задание 2. В одной системе координат постройте графики функций y =sin x, y =3sin x. Для каждой из функций укажите область определения и область значений

Тема 6. Исследование функций.

Схема исследования функций

<u>Запомни!</u>

Линейная функция - это функция вида: $y = kx + b$

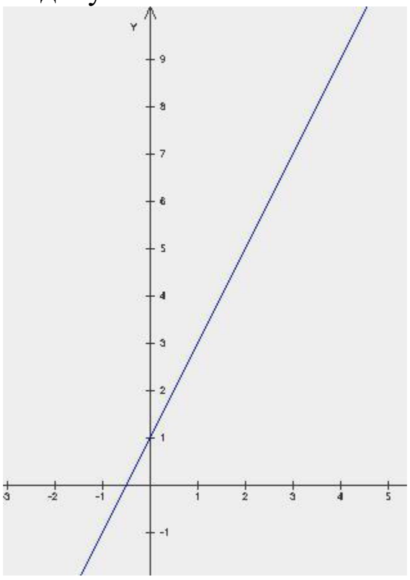


График функции $y = x^2$ называется парабола:

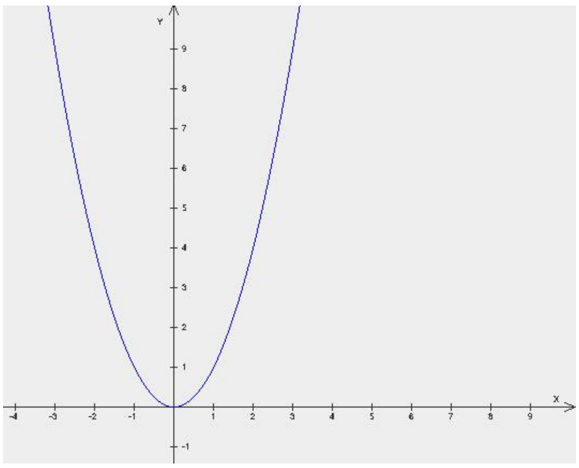
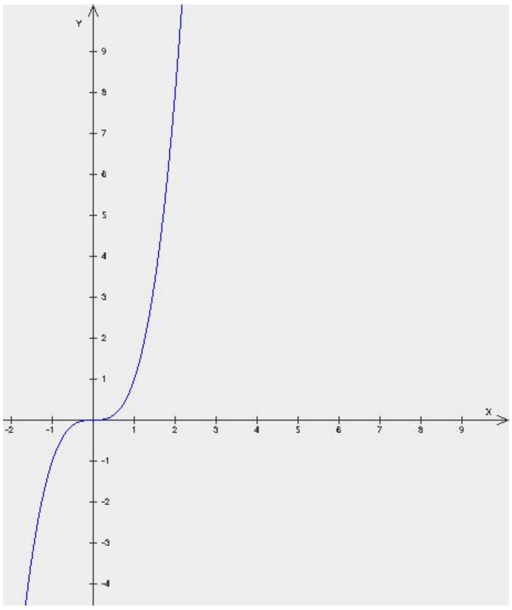


График функции $y = x^3$ называется кубическая парабола:



Преобразования графиков функций

Общий вид функции	**Преобразования**
$y = f(x - b)$	***Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на | b | единиц*** вправо, если $b > 0$; влево, если $b < 0$.
$y = f(x + b)$	влево, если $b > 0$; вправо, если $b < 0$.
$y = f(x) + m$	***Параллельный перенос графика вдоль оси ординат на | m | единиц*** вверх, если $m > 0$, вниз, если $m < 0$.
	Отражение графика
$y = f(-x)$	симметричное отражение графика относительно оси ***ординат.***
$y = -f(x)$	симметричное отражение графика относительно оси ***абсцисс.***
	Сжатие и растяжение графика
$y = f(kx)$	При $k > 1$ — сжатие графика к оси ординат в k раз, при $0 < k < 1$ — растяжение графика от оси ординат в k раз.
$y = kf(x)$	При $k > 1$ — растяжение графика от оси абсцисс в k раз, при $0 < k < 1$ — сжатие графика к оси абсцисс в k раз.
	Преобразования графика с модулем
$y = \|f(x)\|$	При $f(x) > 0$ — график остаётся без изменений, при $f(x) < 0$ — график симметрично отражается относительно оси абсцисс.
$y = f(\|x\|)$	При $x \geq 0$ — график остаётся без изменений, при $x < 0$ — график симметрично отражается относительно оси ординат.

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4. Исследовать функцию на монотонность, то есть найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции;
6. Построить график функции.

<u>Практическая работа</u>

Задание 1. Укажите области определения функций:

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$; ____

2) $y = \sin 2x$. ____

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$; ____

Задание 2. Найдите нули (корни) функций:

1) $y = x^3 - 9x$; ____

2) $y = \sin 2x$;

____

Задание 3. Укажите, какие из нижеприведенных функций являются: а) четными; б) нечетными:

1) $y = x^3 - 9x$; ____

2) $y = x^3 - 5x^2 + 6x$; ____

Задание 4. Найдите периоды функций:

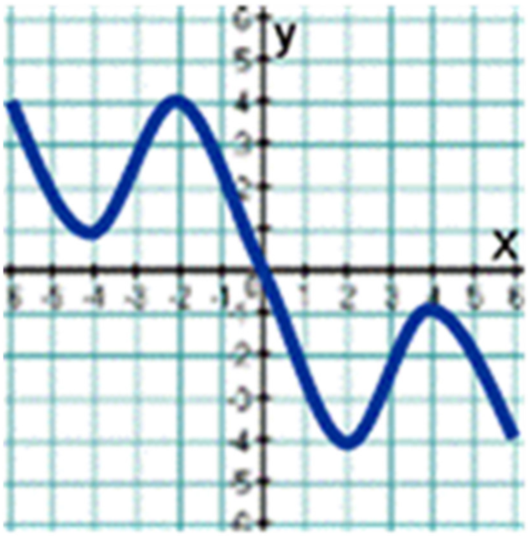
1) $y = \sqrt{3} \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$; ____

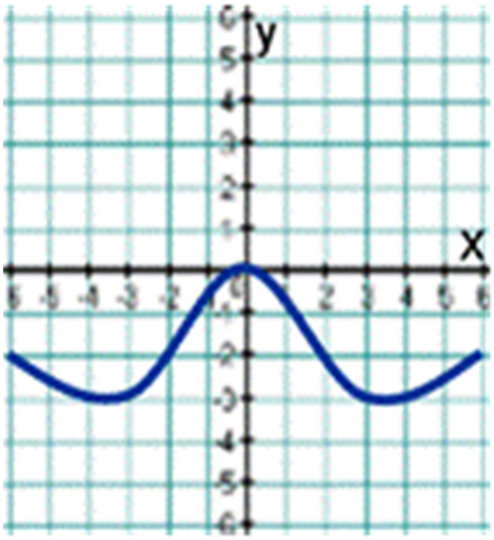
2) $y = 25 \cos\left(\dfrac{3}{2}x + \dfrac{\pi}{12}\right)$; ____

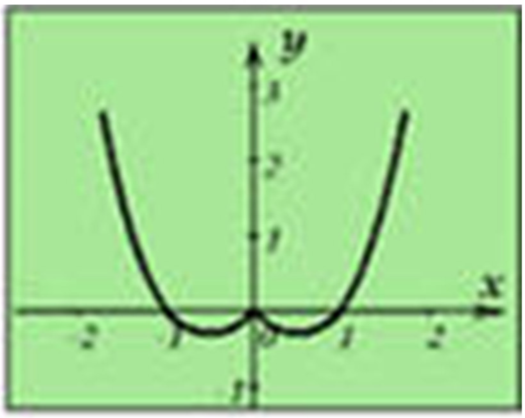
3) $y = 15 tg\left(\dfrac{7}{10}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; ____

<u>Самостоятельная работа</u>

Задание 1. Исследуйте функции по графику (устно):







Задание 2. Проведите по общей схеме исследование каждой из функций и постройте ее график

$$f(x) = 5 - 2x$$

____

____

____

____

____

____

$$f(x) = 3 - 2x - x^2$$

____

____

____

____

____

____

$$f(x) = 3x - 2$$

Домашняя работа

Задание 1. Проведите по общей схеме исследование каждой из функций:

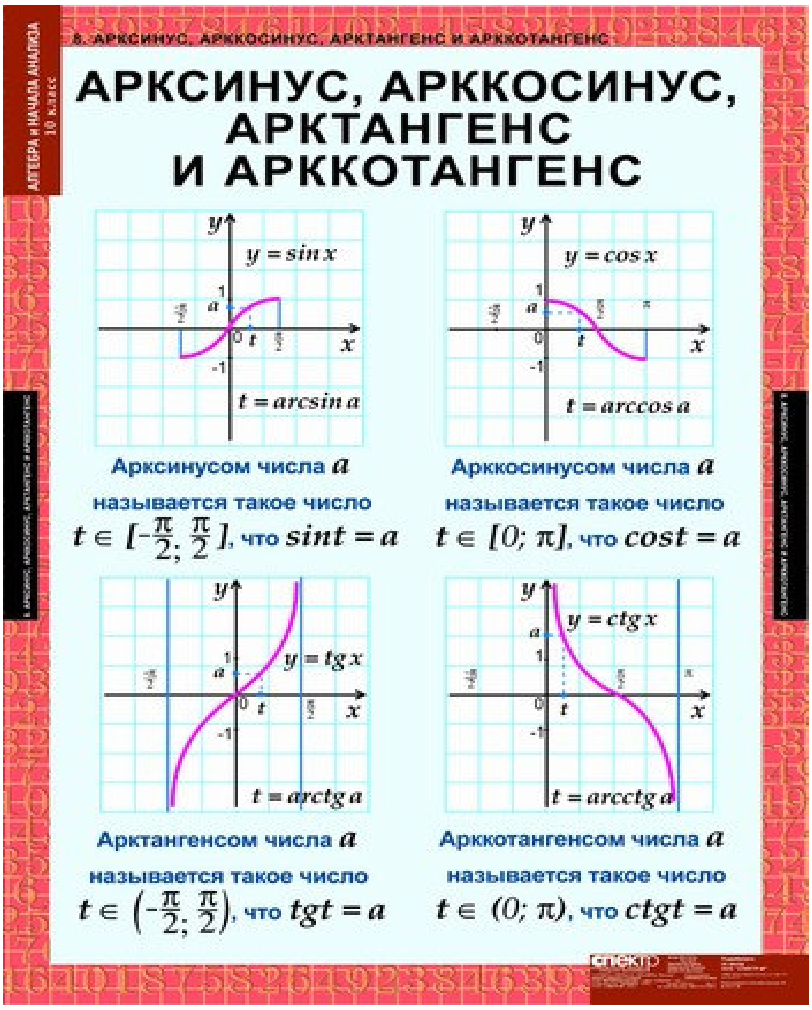
$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2$$

$$f(x) = x^3 - 1$$

Тема 7. Обратные тригонометрические функции

<u>Запомни!</u>



Связь между тригонометрическими функциями:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 30^\circ = \arcsin \frac{1}{2}$ $\qquad \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$

$\sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ = \arcsin 1$ $\qquad \arccos(-1) = 180^\circ$ или π

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\qquad \arccos 0 = 90^\circ$ или $\frac{\pi}{2}$

$\arcsin 0 = 0$

$arctg 1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\qquad arcctg 1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$

$arctg \sqrt{3} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$ $\qquad arcctg \sqrt{3} = 30^\circ$ или $\frac{\pi}{6}$

$$tg\left(arctgx\right)=x \qquad ctg\left(arcctgx\right)=x$$

$$tg\left(\arcsin x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad ctg\left(\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$tg\left(\arccos x\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad ctg\left(\arccos x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$tg\left(arcctgx\right)=\frac{1}{x} \qquad ctg\left(arctgx\right)=\frac{1}{x}$$

Операции с обратными тригонометрическими функциями:

$$\sin\left(\arcsin x\right)=x \qquad \cos\left(\arccos x\right)=x$$

$$\sin\left(\arccos x\right)=\sqrt{1-x^2} \qquad \cos\left(\arcsin x\right)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin\left(arctgx\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos\left(arctgx\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin\left(arcctgx\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos\left(arcctgx\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Практическая работа

1) Чему равны углы:

$\arcsin\frac{1}{2}$ $\quad arctg\sqrt{3}$ $\quad \arcsin\left(-0,76\right)$ $\quad arctg\left(-2\right)$

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad arcctg1$ $\quad \arccos\left(-0,326\right)$ $\quad arcctg\left(-0,45\right)$

____

____

____

2) Область определения функций:

$\arcsin x$ $\quad arctgx$

$\arccos x$ $\quad arcctgx$

____

____

____

3) Чему равны:

$\arcsin\left(-x\right)$ $\quad arctg\left(-x\right)$

$\arccos\left(-x\right)$ $\quad arcctg\left(-x\right)$

____

____

____

Самостоятельная работа

I. Закончите решение:

arcsin1+ arcsin$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}{}^{(2}+\frac{\pi}{4}{}^{(1}=\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=$…..

4 arcsin(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$)-2 arcsin0=4·(-$\frac{\pi}{3}$)-2·0=…..

3 arcsin$\frac{\sqrt{2}}{2}$-2 arcsin(-1)=3·$\frac{\pi}{4}$-2·($\frac{\pi}{2}$)=$\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}+\pi=$…..

arcsin$\frac{1}{2}$- arcsin(-$\frac{1}{2}$)=$\frac{\pi}{6}$-(…..)=…..

II. Вычислить:

1) 2 arcsin$\frac{\sqrt{3}}{2}$+3 arcsin (-$\frac{1}{2}$)=____

2) arcsin$\frac{1}{\sqrt{2}}$-4 arcsin1= ____

3) 5 arcsin(-$\frac{1}{2}$)+ arcsin(-1)= ____

4) arcsin0+ arcsin(-1)+ arcsin(-$\frac{1}{2}$)+ arcsin(-$\frac{\sqrt{2}}{2}$)+arcsin$\frac{\sqrt{3}}{2}$=

____

III. Выполнить по аналогии:

sin(arcsin$\frac{\sqrt{3}}{2}$)=sin$\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

tg(2 arcsin $\frac{1}{2}$)=tg(2·$\frac{\pi}{6}$)=tg$\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

arcsin(sin$\frac{2\pi}{3}$)=[свойство3 arcsin(sinα)=α]=$\frac{2\pi}{3}$

sin(arcsin$\frac{\sqrt{2}}{2}$)= ____

tg(4 arcsin$\frac{\sqrt{2}}{2}$)= ____

arcsin(2sin$\frac{\pi}{6}$)= ____

Домашняя работа

Задание 1. Найдите ошибку:

arccos (-$\frac{\sqrt{3}}{2}$)+3arcsin(-1)= $\frac{5\pi}{6}$+3·π=$\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi^{(6}}{1}=\frac{5\pi}{6}+\frac{18\pi}{6}=\frac{23\pi}{6}$

$$\arcsin(\cos(\arcsin(\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}))))=\arcsin(\cos(\arcsin(\frac{1}{2}\cdot 1)))=\arcsin(\cos(\arcsin\frac{1}{2}))=\arcsin(\cos\frac{\pi}{6})=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

Тема 8. Решение простейших тригонометрических уравнений

Запомни!

Уравнение	*Общее решение*	*Частные случаи*		
		$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\sin x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$	$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$
$\cos x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$	$x=\pm\arccos a + 2\pi n$	$x=\pi+2\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\operatorname{arctg} a+\pi n$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\operatorname{arcctg} a+\pi n$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$

Практическая работа

1. Решите уравнения:

$\mathbf{\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\mathbf{\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\mathbf{\sin x = \frac{1}{2}}$

$\mathbf{\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\mathbf{\sin x = 0}$

$\mathbf{\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\mathbf{\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\mathbf{\cos x = \frac{1}{2}}$

---

cos x = 1

---

sin $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

---

tg $\frac{x}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

---

tg x = $\sqrt{3}$

---

ctg $\frac{x}{4} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

---

ctg x = 0

---

cos $\frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Самостоятельная работа

Задание 1. Решите тригонометрические уравнения:
cos x = 0

---

cos x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

---

sin x = 1

---

sin x = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

---

sin x = $-\frac{1}{2}$

---

tg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

---

tg x = $-\sqrt{3}$

<u>Домашняя работа</u>

Задание 1. Решите тригонометрические уравнения:

$\mathbf{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$.
$\mathrm{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$.
$\mathbf{cos}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\mathbf{sin}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задание 2 (сложный уровень). Решите тригонометрические уравнения, применив формулы приведения:

$\mathbf{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{3}$

$\mathbf{sin}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}$.

$\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-1$

$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$

Тема 9. Решение тригонометрических неравенств

<u>Запомни!</u>

Вид неравенства	Множество решений неравенства
sinx > a (|a|<1)	**x (arcsin a + 2πn, π - arcsin a + 2πn), nZ**
sin x < a (|a|<1)	**x (-π - arcsin a + 2πn, arcsin a + 2πn), nZ**
cos x > a (|a|<1)	**x (-arccos a + 2πn, arccos a + 2πn), nZ**
cos x < a (|a|<1)	**x (arccos a + 2πn, 2π - arccos a + 2πn), nZ**
tg x > a	**x (arctg a + πn, π/2 + πn), nZ**
tg x < a	**x (-π/2 + πn, arctg a + πn), nZ**
ctg x > a	**x (πn, arcctg a + πn), nZ**
ctg x < a	**x (arcctg a + πn, π + πn), nZ**

Тригонометрические неравенства могут быть решены по следующему **общему правилу**.

1. Найти область допустимых значений неизвестной (ОДЗ).
2. Записать соответствующее уравнение, заменив знак неравенства знаком равенства.
3. Решить уравнение, полученное в предыдущем пункте.
4. На числовой оси отметить ОДЗ, корнями уравнения разбить ОДЗ на промежутки.
5. На каждом интервале выбрать одну пробную точку и подставить ее в исходное неравенство. Если неравенство выполняется, то данный интервал необходимо включить в ответ. Если неравенство не выполняется, то интервал следует исключить из рассмотрения.
6. Сделать отбор характерных для неравенства точек – корней уравнения и концов промежутков ОДЗ. Если исходное неравенство нестрогое, то корни уравнения следует записать в ответ, в противном случае – отбросить. Концы промежутков ОДЗ проверить подстановкой в исходное неравенство. Подходящие из них включить в ответ.

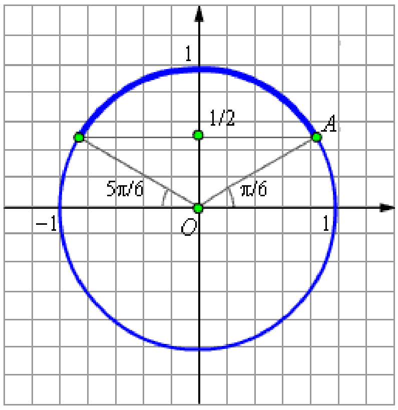
<u>Практическая работа</u>

Пример 1:Решить тригонометрическое неравенство:

$$\sin x \geq \frac{1}{2}.$$

Решение

Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на ней точки, для которых ордината превосходит $\frac{1}{2}$.

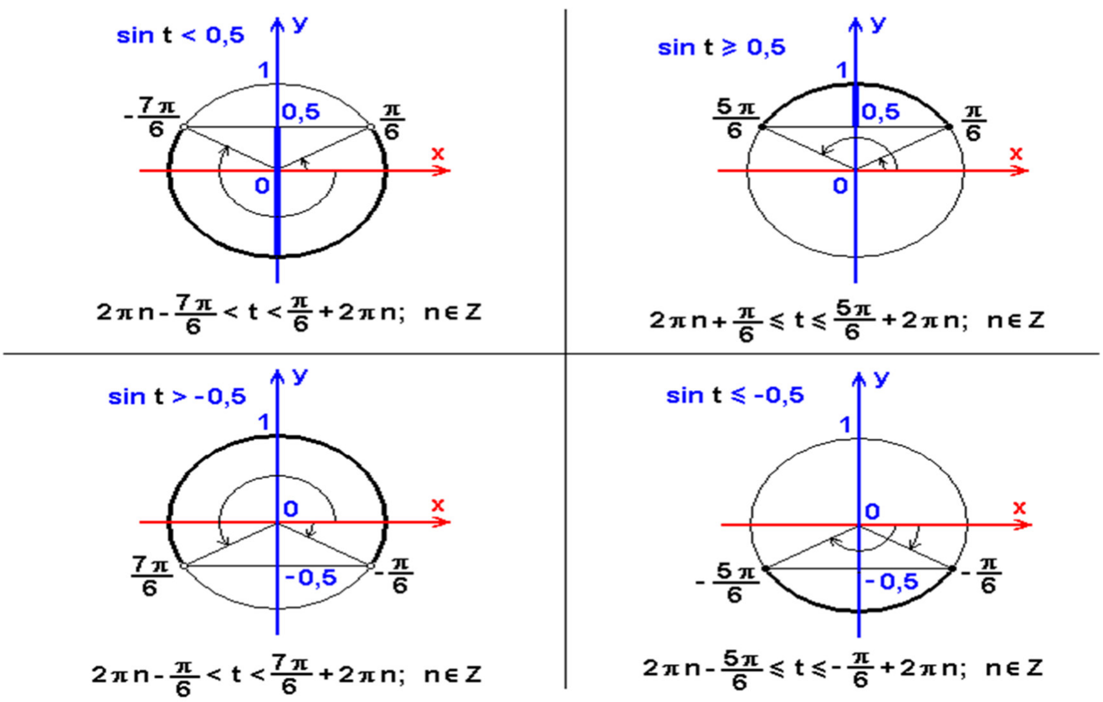


Для $x \in [0; 2\pi]$ решением данного неравенства будут $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Ясно также, что если некоторое число x будет отличаться от какого-нибудь числа из указанного интервала на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то sin x также будет не меньше $\frac{1}{2}$. Следовательно, к концам найденного отрезка решения нужно просто добавить $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Окончательно, получаем, что решениями исходного неравенства будут все $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

*Ответ***.** $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Тригонометрические неравенства



Задание 1: Решить тригонометрические неравенства:

$-2\sin x < \sqrt{3}$

$-2\cos x < \sqrt{2}$

$\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos t < -\frac{1}{2}$

$\cos t > \frac{\pi}{3}$

$\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tgt \geq \sqrt{3}$

$tgt < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$tgt < -1$

$sint < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Самостоятельная работа

Задание 1: Решить тригонометрические неравенства:

$sin\frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg5x > 1$

$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \geq 1$

$2\cos(4x - \frac{\pi}{6}) > \sqrt{3}$

$\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>**Домашняя работа**</u>

Задание 1. Решите неравенства:

$\mathrm{tg}\left(\pi + \frac{x}{3}\right) + 1 \geq 0.$

$\sin x \geq -\frac{1}{2}$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2sin^2(\frac{x}{2}) \leq \frac{1}{2}$

Тема 10. Сложные тригонометрические уравнения, неравенства, системы

Запомни!

Вид уравнения	Способ решения
$asin^2x + bsinx + c = 0$, $atg^2x + btgx + c = 0$ или $acos^2x + bcosx + c = 0$	Замена переменной на $sinx = t$ $\operatorname{tg} x = t$ или $\cos x = t$, дальше решаем как стандартное квадратное уравнение
$atgx + bctgx + c = 0$	$ctgx = \frac{1}{tgx}$
$asinx + bcosx = 0$	Делим обе части уравнения на $sinx$ или $cos\,x$, получим $atgx + b = 0$
$asin^2x + bsinxcosx + ccos^2x = 0$	Делим обе части уравнения на sin^2x или $cos^2\,x$, получим $atg^2x + btgx + c = 0$ или $actg^2x + bctgx + c = 0$
Остальные уравнения решаются с помощью тригонометрических формул	

Практическая работа

1. Решите уравнения:

$2sin^2x + sinx - 1 = 0$

___

___

$4cos^2x + 8cosx + 3 = 0$

___

___

2. Найдите ошибку и решите до конца уравнение:

$tg^2x - 10tgx + 21 = 0$

Решение: решаем квадратное уравнение относительно функции tgx.

Пусть $tgx = t$, тогда

$t^2 - 10t + 21 = 0$

$D = 100 - 84 = 16$

$t_{1,2} = \dfrac{10 \pm 4}{2}; \quad t_1 = 7; \;\; t_2 = 3$

---

3. Решить уравнения:

$sin^2 x + 2sinx = 0$

$2cos^2 x - 3cosx = 0$

$2sin^2 x - 3sinx - 2 = 0$

$sin2x + 2cos2x = 0$

<u>Самостоятельная работа</u>

Вариант 1

Решите уравнение, упростив его левую часть:

sin x·cos 2x + cos x·sin 2x = 0 .

Решите уравнение, сделав подстановку:

$\mathbf{2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0}$.

Решите уравнение, используя однородность:

$\mathbf{7\sin^2 x - 8\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0}$.

Вариант 2

Решите уравнение, упростив его левую часть:

$\mathbf{\cos 6x \cdot \cos 2x + \sin 6x \cdot \sin 2x = 1}$

Решите уравнение, сделав подстановку:

$\mathbf{tg^2 x - 3tg\, x + 2 = 0}$

Решите уравнение, используя однородность:

$\mathbf{\cos^2 x - 7\sin x \cdot \cos x + 6\sin^2 x = 0}$

Домашняя работа

1. Решите неравенства:

$2sin^2x + 3cosx = 0$
$2cos^2x + sinx + 1 = 0$
$cos^2x + 3sinx = 3$
$4cosx = 4 - sin^2x$
$3tg^2x + 2tgx - 1 = 0$
$2tg^2x + 3tgx - 2 = 0$

$-7cos^2x + 9sinxcosx - 2sin^2x = 0$
$-cos^2x - sinxcosx + 2sin^2x = 0$
$sin2x + 4cos^2x - 1 = 0$
$sin2x - cosx = 0$

Тема 11. Понятие непрерывности.

Приращение функции. Производная функции

<u>Запомни!</u>

Геометрический смысл производной

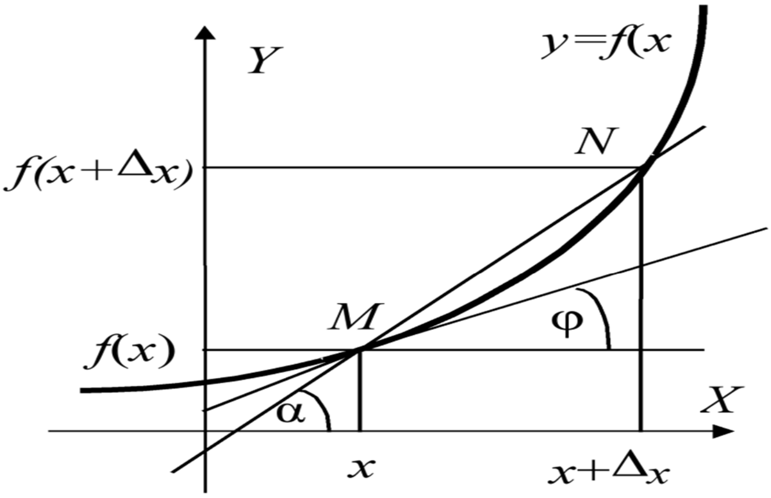


Рис. 1

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^{α}	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования.

1. $(u + v)' = u' + v'$;

2. $(uv)' = u'v + uv'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

4. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Практическая работа

Задание 1. Найдите производные:

$4'$ =_____; $(-15)'$ =______; $(7{,}81)'$ _____; $(\sqrt{2})'$=____; $9'$= ____; $(\sqrt{8})'$= ____; $(5/7)'$ =___;

$(13x)'$= ___; $(x)'$= __; $(-\frac{1}{4}x)'$ = ___; $(\sqrt{2}x)'$ = ___; $(101x)'$ = ___; $(-56x)'$ = ___; $(\frac{7}{8}x)'$ = ___

$(x^6)'$= _____ $(3x^4)'$ = ___; $(x^{21})'$ = ____; $(10x^4)'$ = ___; $(-\frac{1}{3}x^3)'$ = _____; $(x^{1/2})'$ = ___;

$(3x+5)'$= ______; $(5x^2+8x-10)'$= _______ $(x^4-x^9)'$= ______; $(3x^2 - 6x)'$ = _____;

$(x^3+ 4x^{100}-1)'$ = __________; $(3x^4+7x^3+2x^2+1)'$=________________;

$(x(x+3))'$ = ___________;

$((x^2-x)(5x-8))'$= ____

$((x+5)(x+7))'$=____

$((x^2-2)(x^7+4))'$=____

$(x^2/(x+3))'$= ____

$((3x)/(2x-1))'$=____

$((6x-9)/(-11x+7))'$= ____

Самостоятельная работа

Оценка знаний «3»	Оценка знаний «4»	Оценка знаний «5»
$(4x^2 - 3x)'$= $(2x^3-3x^2+5x+15)'$= $(2x(x^2+6))'$=	$(12x^3 -6x^2)'$= $(5x^4+3x^3-4x^2+x8)'$= $((7x+3)(8x4))'$=	$(\frac{1}{4}x^4+\sqrt{3}x^2+x)'$= $(\frac{7}{8}x^8+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x8)'$= $((3x^2-5x+1)(2x+9))'$

$((3x+5)/(8x4))'=$	$((3x^3-8)/(2x+4))'=$	$((7x^2-3x+4)/(5x+3))'=$

Производные тригонометрических функций

$(2\sin x)'=$ ______________; $(x+2\cos x)'=$ __________________________;

$(1/2\mathrm{tg}x)'=$ _____________________; $(\cos x-\mathrm{tg}x)'=$ ______________________________

$(2\mathrm{tg}x-\sin x)'=$ _______________________; $(\mathrm{tg}x+11)'=$ ___________________

$(\cos x-\sin x)'=$___________________________; $(5\sin x+2x)'=$ _______________________

$(\mathrm{ctg}x+2x^3)'=$ ______________________; $(2\sin x+\cos x-3)'=$ _______________________

$(\mathrm{tg}x+3\cos x)'=$ _______________________; $(-\sin x+x^3)'=$ _________________

$(2\cos x-5x^4+2x+1)'=$ ___________________

Установи соответствие

$(2\sin x+3)'$	$-\sqrt{3}\sin x-5x^4+0{,}3$
$(4\cos x+x^2)'$	$1/3\cos^2 x$
$(\mathrm{tg}x+7)'$	$-3\sin x+15$
$(\mathrm{ctg}x+3x^2+8)'$	$-1/\sin^2 x+6x$
$(7\sin x-1/7)'$	$1/2\sin x\,^2x+6$
$(\mathrm{tg}x+2\sin x)'$	$-4\sin x+2x$
$((\mathrm{tg}x)/3)'$	$1/\cos^2 x$
$(\sqrt{3}\cos x-x^5+0{,}3x)'$	$3\cos x$
$(3\cos x+15x)'$	$2/\cos^2 x+6$
$(\sin x/\cos x)'$	

Домашняя работа

Вариант 1

1.Найдите производную функций:

1) $f(x)=9x^8$; 2) $f(x)=\frac{1}{3}x^{-9}$; 3) $f(x)=8\cdot\frac{1}{x}$; 4) $f(x)=-18\sqrt{x}$;

5) $f(x)=-54$;

6) $f(x)=x^{14}-x^{12}+3x^9+x^3-9x^2+5x$;

7) $f(x)=2\mathrm{tg}\,x+\cos x-\sin x$;

8) $f(x)=\mathrm{ctg}\,x+x^5-\sqrt{5}$; 9) $f(x)=\sin x+\frac{3}{x}-4x$; 10) $f(x)=x^{10}\cdot(7x+15)$;

11) $f(x)=(13x-8)(8+7x)$; 12) $f(x)=(\cos x-x)\cdot 6x$;

13) $f(x)=\frac{1-7x}{5x+4}$;

14) f(x)=$\frac{2x^4-x^3-x}{\operatorname{tg} x}$; 15) f(x)=$\frac{3x^5-1}{\sqrt{x}}$; 16) f(x)=$(8x + 6)^7$;

17) f(x)=$\sqrt{x^{15}+2x^2+3}$; 18) f(x)=$\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; 19)f(x)= sin5x;

20) f(x)=$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$; 21) f(x)=$10x^2$ - $\frac{1}{x^3-2x}$.

2. Дана функция f(x)=$-3x^4 + 2x^2 + 13$.

Найдите f′(-4), f′$\left(\frac{1}{2}\right)$.

Вариант 2

1. Найдите производную функций:

1) f(x)=$7x^6$; 2) f(x)=$-\frac{1}{5}x^{-11}$; 3) f(x)=$6\cdot\frac{1}{x}$; 4) f(x)=$16\sqrt{x}$;

5) f(x)= $\frac{9}{20}$; 6) f(x)=$3x^{12} - x^{10} + 4x^7 + x^5 - x^2 +\sqrt{3}\,x$;

7) f(x)=ctg x + 2tg x - sin x; 8) f(x)=cos x + x^7 – 0,5;

9) f(x)=tg x + $\frac{5}{x}$ - 6x; 10) f(x)=$x^8\cdot(6 + 4x)$;

11) f(x)=(5x - 8)(5 + 9x); 12) f(x)=(x – ctgx)· 3x;

13) f(x)=$\frac{8x-3}{2+5x}$; 14) f(x)=$\frac{4x^6-x^5+x}{\sin x}$; 15)f(x)=$\frac{x^7-5}{3\sqrt{x}}$;

16) f(x)=$(10 - 9x)^9$; 17) f(x)=$\sqrt{x^{17}-3x^3+9}$;

18)f(x)=$\frac{1}{\cos x}$; 19) f(x)=tg 7x; 20)f(x)=$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+4x\right)$;

21) f(x)=$\sqrt{15x^2+3x}$ - $9x^3$.

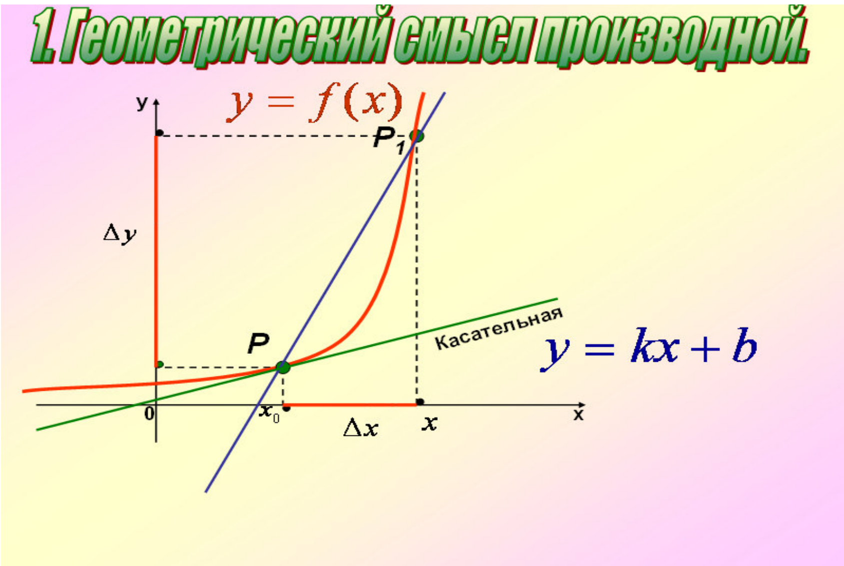
2. Дана функция f(x)= $-5x^4 + 4x^2 + 15$.

Найдите f′(4), f′$\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Тема 12. Касательная к графику функции.

Приближенные вычисления

<u>Запомни!</u>



Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функций y=f(x) в этой точке.

К = угловой коэффициент, равный тангенсу угла прямой с осью ОХ

К= $f'(x_0)$= tgα.

$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$ - уравнение касательной

Если точка движется вдоль оси Ох и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки $V(t)=x'(t)$

$V=S'(t)$, а ускорение $a(t)= V'(t)=x''(t)= S''(t)$

<u>Практическая работа</u>

1. Найдем угловой коэффициент касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой (x_0):

Решение: $f(x)=x^2$, $x_0=-4$

К= $f'(x_0)$; $f'(x)=2x$; $f'(x_0)= f'(-4)=2\cdot(-4)=-8$, т.е. к=-8

1. $f(x)=1/x$, в $x_0=-1/3$ ____

____

2. $f(x)=\sin x$, в $x_0=\pi/3$ ____

3. $f(x)=3x^3-2x+1$, в $x_0=1$

2. Найдем тангенс угла касательной к кривой $y=1/2\,x^2$ с осью Ох, в точке $x_0=1$.

Решение: $tg\alpha=y'(x_0)$; $y'(x)=(1/2\,x^2)'=x$; $y'(x_0)=y'(1)=1$, т.е. $tg\alpha=1$; $\alpha=\pi/4$

1. $y=x^2$ при $x_0=\sqrt{3}/2$

2. $f(x)=1/3\,x^3$, $x_0=1$

3. Найдем уравнение касательной к графику функции $y=1/3\,x^2-2$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение: Находим уравнение касательной $y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$

$y(x_0)=y(3)=1/3\cdot 3^2-2=1$; $y'(x)=(1/3\,x^2-2)'=2/3\,x$; $y'(x_0)=y'(3)=2/3\cdot 3=2$ $y=1+2(x-3)=1+2x-6=2x-5$;

т.е. $y=2x-5$ – уравнение касательной

А. $f(x)=3x^2-5x+4$, в $x_0=1$

Б. $y=1/2\,x^2+1$, в $x_0=2$

4. Тело движется по закону $S(t)=3t^2-5t+8$. Найдем скорость и ускорение движения тела, и вычислить их значения при $t=1$.
Решение: $V(t)=S'(t)=6t-5$;

$V(1)=6\cdot 1-5=1$ $a=V'(t)=(6t-5)'=6$

Ответ: $V=1$, $a=6$

5. Определить скорость и ускорение тела, движущегося по закону $S(t)=t^2+2$ в момент времени $t=5$:

6. Определить скорость и ускорение тела, движущегося по закону $S(t)=0{,}5t^3+2t^2-7t+11$ в момент времени $t=2$:

Самостоятельная работа

Материальная точка движется по закону $s(t)=\frac{9}{2}t^2-7t+6$ (м). В какой момент времени скорость точки будет равна 12,8 м/с?

Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y=\frac{5}{6}x^3-3x^2+x-2$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.

Материальная точка движется по закону $s(t)=\frac{13}{2}t^2-4t+1$ (м). Чему равна скорость в момент времени 4с?

Укажите абсциссу точки графика функции $y=\frac{1}{4}x^2+2x-2$, в которой угловой коэффициент касательной, проведённой к этому графику, равен -2.

<u>Домашняя работа</u>

Найдите производную функции: $y=x^{18}-6x^5+4x+24$.

Материальная точка движется по закону $s(t)=\frac{5}{2}t^2-4t+1$ (м). В какой момент времени скорость точки будет равна 13,5 м/с?

Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y=-\frac{5}{27}x^4+3x^2+5x-2$ в точке с абсциссой $x_0=-3$.

Найдите производную функции: $y=x^{18}+4x^6-7{,}3x+2$.

Материальная точка движется по закону $s(t)=\frac{7}{12}t^3-6t+11$ (м). Чему равна скорость в момент времени $t=2$ с?

Укажите абсциссу точки графика функции $y = \frac{3}{4}x^2 + 5x - 2$, в которой угловой коэффициент касательной, проведённой к этому графику, равен - 4.

Тема 13. Производная сложной функции

<u>Запомни!</u>

Если функция f имеет производную в точке x, а функция g имеет производную в точке y=f(x), то сложная функция h(x)=g(f(x)) также имеет производную в точке x:

$$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

<u>Практическая работа</u>

Найдем производную сложной функции:

1. $((2x+3)^{100})'=2\cdot 100(2x+3)^{99}=200(2x+3)^{99}$

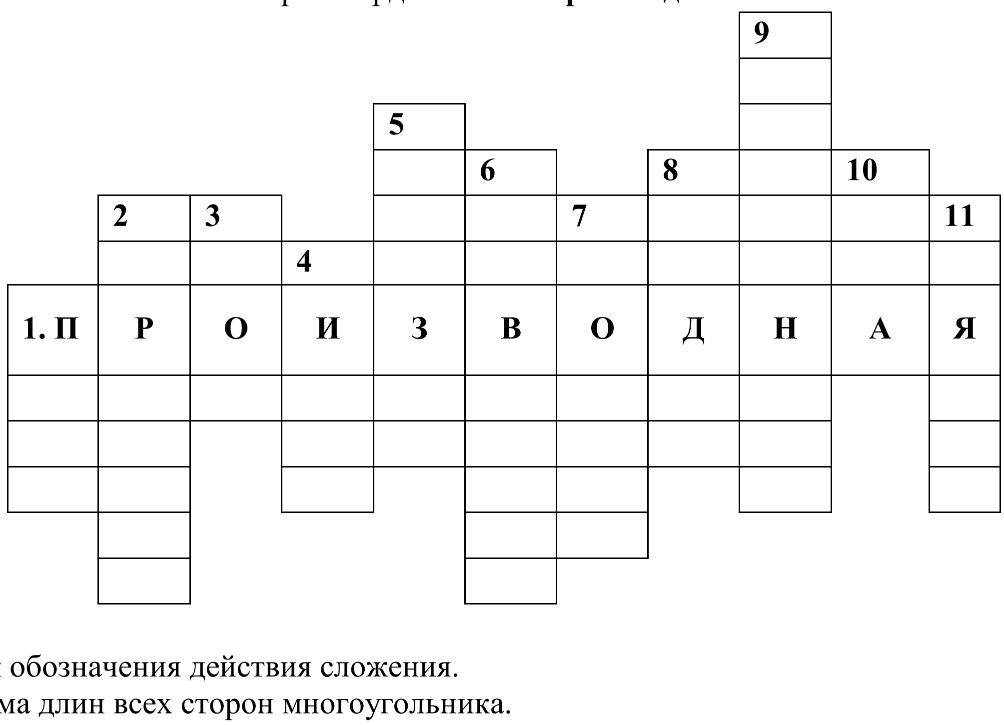
$y = (4x-9)^7$ ____

$y = (x^3 +2)^{12}$ ____

$y = (7-24x)^{10}$ ____

$y = \cos x(5x-9)$ ____

$y= \sin x(7-2x)$ ____

Кроссворд по теме **«Производная»**

1) Знак обозначения действия сложения.
2) Сумма длин всех сторон многоугольника.
3) Геометрическая фигура, состоящая из двух лучей.
4) Тригонометрическая функция.
5) Часть прямой, заключенная между двумя точками.
6) Равенство, содержащее переменную.
7) Сотая часть числа.
8) Единица измерения угла.

9) Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла.
10) Часть окружности, заключенная между двумя точками.
11) Одно из основных неопределяемых понятий стереометрии.

Самостоятельная работа

Найдите производные:

$y=x^3+\sqrt{2}$

$y=3x^4-7x^3-x+1$

$y=7x^3-5x$

$y=x-x^3+7$

$y=(5x-2)\cdot(4x-1)$

$y=(5x+2)\square(4x-1)$

$y=(7x+5)\cdot(8x-4)$

$y=(3x^2-8)/(2x-4)$

$y=3\cos x$

$y=\sin 2x$

$y=1/2\ \sin x-x^5$

$y=5\mathrm{tg}x$

$y=\mathrm{tg}3x$

$y=3\cos x+2$

$y=2x^5-3\cos x$

Найти угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x_0:

$y=7x^3-21x^2+18$, при $x_0=1$

$y=x^3-2x^2+3x-6$, при $x_0=-1$

$y=\sin x+\cos x$, при $x_0=1\square$

$y=x^2\square+x$, при $x_0=1$

Пусть S, пройденный телом за время t, выражается формулой. Определить скорость тела V. Вычислить значение скорости при определенном значении t.

$S(t)=2x^3-5x^2+11x-3$, при $t=2$

$S(t)=5,5t^2-8t+11$, при $t=2$

$S(t)=t^2+2$, при $t=10$

Найти угол, образованный касательной к графику функции в точке x_0:

$y=x^6-4x$, при $x_0=1$

$f(x)= -x^5-2x^2+2$, при $x_0=-1$

$f(x)=10-\cos x$, при $x_0=3\pi/2$

Найти уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 $y=-1/3\ x^2+4$, при $x_0=3$

$y=1/6\ x^2+x-3$, при $x_0=3$

$y=x^3-6x^2+5$, при $x_0=1$

$y=x-x^2+3$, при $x_0=2$

<u>**Домашняя работа**</u>

Запишите уравнение касательной, проведённой к графику функции $f(x)=\sqrt{x+3}$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.

К графику функции $f(x)=2\sin\frac{x}{2}$ в точке с абсциссой $x_0=-\pi$ проведена касательная.

Запишите её уравнение.

Тема 14. Применение производной.

Приближенные вычисления

Запомни!

Для вычисления приближенного значения функции в точке x_0 используются формулы:

$$y \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x, \text{где } \Delta x = x - x_0$$
$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$$
$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$$

Пусть, например, требуется вычислить приближенное значение функции

$$f(x) = x^7 - 2x^6 + 3x^2 - x + 3$$

в точке $x = 2{,}02$. Значение f в близкой к 2,02 точке $x_0 = 2$ находится легко: $f(2) = 13$. График f в окрестности точки 2 близок к прямой $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — касательной к нему в точке с абсциссой 2. Поэтому $f(2{,}02) \approx y(2{,}02)$. Имеем $f'(x) = 7x^6 - 12x^5 + 6x - 1$, $f'(x_0) = f'(2) = 75$ и $f(x) \approx y(x) = 13 + 75 \cdot 0{,}02 = 14{,}5$.

Вычисления на калькуляторе дают результат $f(2{,}02) \approx 14{,}57995$.

<u>Практическая работа</u>

Задание 1. Вычислите с помощью формул приближенные значения функции f в точках x_1 и x_2:

$f(x) = x^4 + 2x, x_1 = 2.016, x_2 = 0.97$

$f(x) = x^5 - x^2, x_1 = 1.995, x_2 = 0.96$

$f(x) = x^3 - x, x_1 = 3.02, x_2 = 0.92$

$f(x) = x^2 + 3x, x_1 = 5.04, x_2 = 1.98$

Самостоятельная работа

Задание 1. Вычислите с помощью формул приближенных вычислений:

$tg\ 44^0$

$cos\ 61^0$

$sin\ 31^0$

$ctg\ 47^0$

$\cos(\frac{\pi}{6} + 0.04)$

$\sin(\frac{\pi}{3} - 0.02)$

$\sin(\frac{\pi}{6} + 0.03)$

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + 0.05)$

Домашняя работа

Вычислить:

$1{,}002^{100}$

$0{,}995^6$

$1{,}03^{200}$

$0{,}998^{20}$

$\sqrt{1{,}004}$

$\sqrt{25{,}012}$

$\sqrt{0{,}997}$

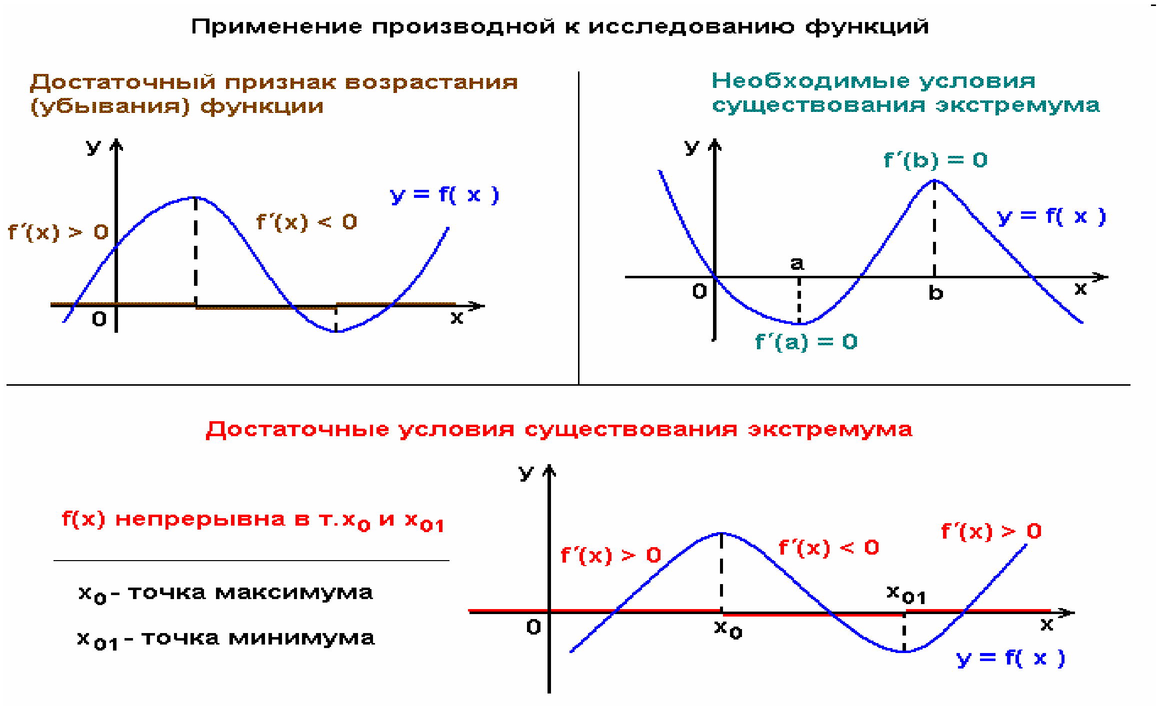
$\sqrt{4{,}0016}$

Тема 15. Исследование функций с помощью производной

__Запомни!__

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4. Исследовать функцию на монотонность, то есть найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции;
6. Построить график функции.



<u>Практическая работа</u>

$y = x^3 - 3x^2$

1. Д(y) = R,т.к. многочлен.

2. $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

3.

$f'(x) = 0$: $\quad$ $f'(x)$не существует:

$3x^2 - 6x = 0$, $\quad$ таких x нет.

$3x(x - 2) = 0$,

$3x = 0, x - 2 = 0$,

$x = 0, x = 2$.

4. $f'(x)$ $\quad +\quad 0 \quad - \quad 2 \quad + \quad x$

5. $f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3 + 6 = 9 \ +$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3 \ -$

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 \ +$

6. $f'(x) > 0$, т.е. $+$ $\nearrow$

$f'(x) < 0$, т.е. $-$ $\searrow$

Ответ. Возрастает на $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Убывает на $(0;2)$.

Задание 1. Найдите промежутки возрастания и убывания функций:

$f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

___

___

___

$f(x) = -x^2 + 2x - 3$

___

___

___

$f(x) = 4x - 5$

___

___

___

$f(x) = 5x^2 - 3x + 1$

___

___

___

Задание 2. Найдите критические точки функции:

$f(x) = 4 - 2x + 7x^2$

$f(x) = 1 + cos2x$

$f(x) = x - 2sinx$

$f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$

Самостоятельная работа

Задание 1. Найти промежутки возрастания и убывания функций:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

$f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$

$f(x) = 4x^3 - 1.5x^4$

$f(x) = x^4 - 2x^2$

Задание 2. Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, а какие – точками минимума:

$f(x) = 5 + 12x - x^2$

$f(x) = 9 + 8x^2 - x^4$

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$

Задание 3. Исследуйте функцию и постройте ее график

$f(x) = x^2 - 2x + 8$

$f(x) = -x^2 + 5x + 4$

$f(x) = 2x - 3$

$f(x) = x + 2$

Домашняя работа

Задание 1. Исследуйте функцию на возрастание, убывание и экстремумы. Постройте график функции:

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$

$f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^3$

$f(x) = 4x^2 - x^4$

$f(x) = 5x^3 - 3x^6$

Тема 16. Первообразная

Запомни!

Первообразной функции f(x) называется функция F(x), для которой выполняется тождество $F'(x) = f(x)$

Таблица первообразных

Функция	Первообразные	Функция	Первообразные
a	$ax + C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
x^p, $p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{x}$, $x > 0$	$\ln x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{x}$, $x < 0$	$\ln(-x) + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

Практическая работа

1. Найдите первообразную для следующих функций:

А) f(x) = $\sqrt{3}$ ____

Б) f(x) = x^8 ____

В) f(x) = $\frac{1}{x^5}$ ____

Г) f(x) = 2 - $x^4 + 3x^7$ ____

Д) f(x) = $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{3}$ ____

Е) f(x) = $(4x - 5)^2$ ____

Ж) f(x) = $\sin(\frac{\pi}{2} - 6x)$ ____

А) f(x) =$\frac{1}{7}$ ____

Б) f(x) = x^9 ____

В) f(x) = $\frac{1}{x^6}$ ____

Г) f(x) = $x^5 + 8x^3 - \sqrt{5}$ ____

Д) f(x) = 4 + $\sin x$ ____

Е) f(x) = $(2 - 7x)^4$ ____

Ж) f(x) = $\frac{1}{\sin^2(4x - \frac{\pi}{3})}$ ____

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку М:

А) f(x) = $3x^2$ - $8x^3$ +5, М(-2; 10) ______________________________

____

____

Б) f(x) = -8 $\cos x$, М($\frac{\pi}{6}$; 5) ______________________________

____

____

В) f(x) = $4x^3$ + 10x -9, М(3; 15) ______________________________

____

____

Г) f(x) = $\frac{6}{\cos^2 x}$, М($\frac{\pi}{4}$; -7) ______________________________

____

____

Самостоятельная работа

Задание 1. Найдите первообразную следующих функций:

а) f(x) = 3x – 1; б) f(x) = x^5 + cos x; в) f(x) = $\frac{1}{5}x^4$ + 5.

____

____

____

Задание 2. Найдите первообразную функции f(x) = $3x^2$ + 2x – 1, проходящую через точку А(-1;10).

____

____

____

Задание 3. Найдите первообразную следующих функций:

а) f(x) = 2 - x ; б) f(x) = x^4 - sin x; в) f(x) = $\frac{1}{3}x^5$ - 7.

____

____

____

Задание 4. Найдите первообразную функции f(x) = $4x^3$ - $3x^2$ – 1, проходящую через точку А(2;-8).

____

____

Задание 5. Найдите первообразные следующих функций:

$f(x) = 5x^2 - 4x + 8$ ____________________

$f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} - \sin x$; ____________________

$f(x) = (7x-1)^{10}$ ____________________

Задание 6. Найдите первообразные следующих функций:

$f(x) = 6x^3 - 2x + 1$ ____________________

$f(x) = \cos x + \frac{2}{\sin^2 x}$ ____________________

$f(x) = \sin(3x - \pi)$ ____________________

Задание 7. Найдите первообразную для функции f(x), проходящую через точку М: $f(x) = 4x - 6x^2 - 1$, M(3;-8)

____

____

____

Задание 8. Найдите первообразную для функции f(x), проходящую через точку М: $f(x) = 3x^2 - 8x + 7$, M(-2;9)

____

____

____

Домашняя работа

Вариант 1	Вариант 2
Задание 1. Найдите первообразную для следующих функций: А) $f(x) = -0{,}45$; Б) $f(x) = x^{10}$; В) $f(x) = \frac{1}{x^7}$; Г) $f(x) = 4 + 2x^6 + x^2$; Д) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \sqrt{7}$; Е) $f(x) = (5x-6)^3$; Ж) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{6} - 5x)$.	**Задание 1.** Найдите первообразную для следующих функций: А) $f(x) = 132$; Б) $f(x) = x^{11}$; В) $f(x) = \frac{1}{x^8}$; Г) $f(x) = -2x + 6x^9 - 0{,}5$; Д) $f(x) = \frac{2}{5} + \cos x$; Е) $f(x) = (\sqrt{2} - 6x)^5$; Ж) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(3x+\pi)}$.

Вариант 3	**Вариант 4**
Задание 1. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку М: А) f(x) = x - 9x^2 + 4, М(-4; -20); Б) f(x) = 4 $\sin x$, М($\frac{\pi}{3}$; 7).	**Задание 1.** Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку М: А) f(x) = 7 - 6x^2 + 12x^3 , М(2; -25); Б) f(x) =$\frac{1}{\sin^2 x}$, М($\frac{3\pi}{4}$; -5).

____

____

____

____

____

____

____

____

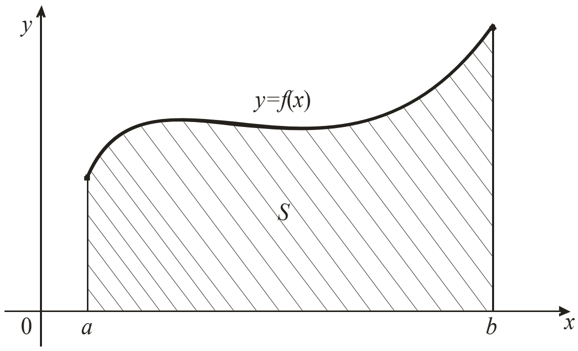
Тема 17. Площадь криволинейной трапеции.

Формула Ньютона-Лейбница

Запомни!

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная сверху графиком функции y = f(x), снизу – осью Ох, слева и справа – прямыми x = a и x = b.

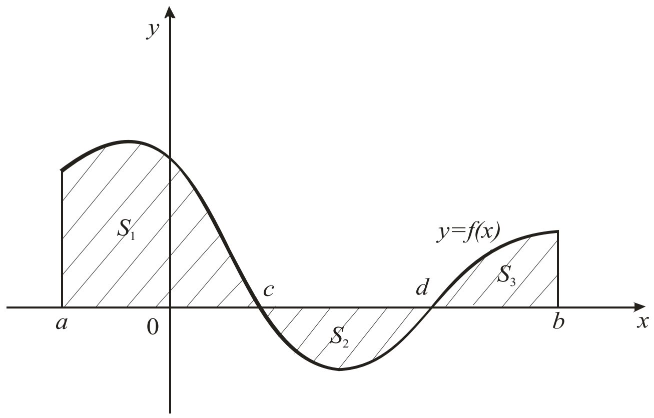


Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции $y = f(x)$ с геометрической точки зрения численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси Ох.

Формула Ньютона–Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, Разность $F(b) - F(a)$ принято записывать следующим образом: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, где символ $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки.

Таким образом, формулу можно записать в виде: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Если функция $y = f(x)$ не положительна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу графиком данной функции, сверху – осью Ox, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле $S = -\int_a^b f(x)dx$. В случае если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и меняет знак в конечном числе точек, то площадь заштрихованной фигуры равна алгебраической сумме соответствующих определенных интегралов: $S = S_1 + S_2 + S_3 = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_c^d f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx$



<u>Практическая работа</u>

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^3 x^2 dx$.

Решение. Для подынтегральной функции $f(x) = x^2$ произвольная первообразная имеет вид $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Тогда $\int\limits_1^3 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \dfrac{3^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = 9 - \dfrac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$

Задание 1. Вычислите:

А) $\int\limits_{-1}^{2} (3 - 2x)dx$

Б) $\int\limits_{-1}^{3} 6dx$

В) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} Cosxdx$

Г) $\int\limits_{-1}^{2} x^4 dx$

Д) $\int\limits_{0}^{2} \left(2x^3 - x - 1\right) dx$

Е) $\int\limits_{0}^{3} \left(x^2 + 2x\right) dx$

Ж) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^2 x}$

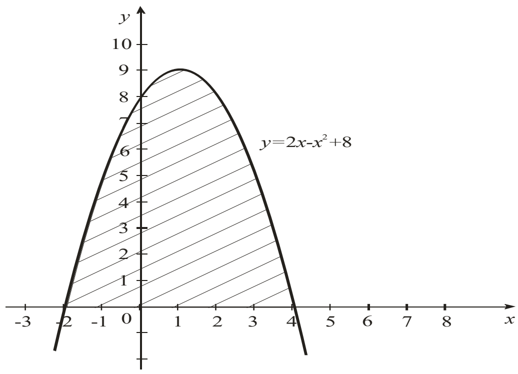
З) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5dx}{Sin^2 x}$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = 2x - x^2 + 8$ и осью Ox.

Решение. Графиком функции $y = 2x - x^2 + 8$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Построим ее (рис.). Чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения линии (параболы) с осью Ox (прямой $y = 0$). Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 + 8, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получаем: $2x - x^2 + 8 = 0$, решая через дискриминант, получим, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$; следовательно, $a = -2$, $b = 4$.



Площадь фигуры находим по формуле

$$S=\int_{-2}^{4}(2x-x^2+8)dx=2\int_{-2}^{4}x\,dx-\int_{-2}^{4}x^2dx+8\int_{-2}^{4}dx=x^2\Big|_{-2}^{4}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{4}+8x\Big|_{-2}^{4}=$$

$$=\left(4^2-(-2)^2\right)-\left(\frac{4^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}\right)+\left(8\cdot 4-8\cdot(-2)\right)=(16-4)-\left(\frac{64}{3}+\frac{8}{3}\right)+(32+16)==12-24+48=36$$

(кв. ед.).

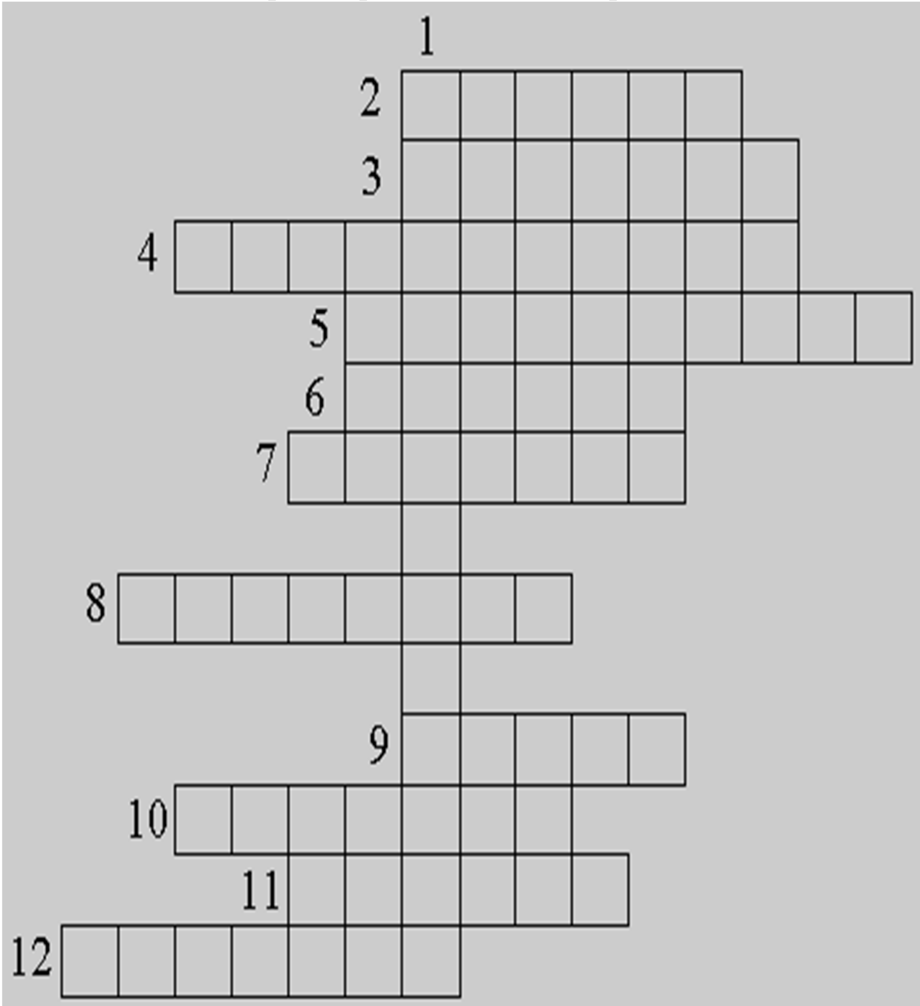
Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y=x^2-2x$ при $x\in[0,3]$.

Задание 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями *y=cosx, y=0, x=0,* $x=\frac{\pi}{4}$.

Задание 4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, *x+y=6, y=0.*

Самостоятельная работа

Кроссворд по теме «Интеграл»



1. Как называется функция F(x)?

2. Что является графиком функции y = ax+b?

3. Самая низкая школьная оценка.

4. Какой урок обычно проходит перед зачётом?

5. Синоним слова дюжина?

6. Есть в каждом слове, у растения и может быть у уравнения.

7. Что можно вычислить при помощи интеграла?

8. Одно из важнейших понятий математики.

9. Форма урока, на котором проводится проверка знаний.

10. Немецкий ученый, в честь которого названа формула,
связывающая площадь криволинейной трапеции и интеграл.

11. Множество точек плоскости с координатами (x, f(x)), где x пробегает область определения функции f.

12. Соответствие между множествами X и Y, при котором каждому значению множества X

поставлено в соответствие единственное значение из множества Y, носит название ....

Задание 1: отметить знаком «+» верные вычисления, знаком « - » неверные вычисления.

а) $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ ______________________________

б) $\int_0^5 x^2 dx = 2\frac{1}{3}$ ______________________________

в) $\int_2^4 x^2 dx = 2x$ ______________________________

г) $\int_0^3 5dx = \frac{5x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{5}{2}(3^2 - 0^2) = \frac{45}{2}$ ______________________________

д) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$ ______________________________

Задание 2. Вычислите:

а) $\int_{-1}^{3} \left(1 + 6x - 3x^2\right) dx$; = ______________________________

____

б) $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} \sin x dx$; = ______________________________

____

в) $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx$; = ______________________________

____

г) $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^3}\right) dx$ ______________________________

____

д) $\int_0^{\pi} (1 + sin^2 x)\, dx$ ______________________________

____

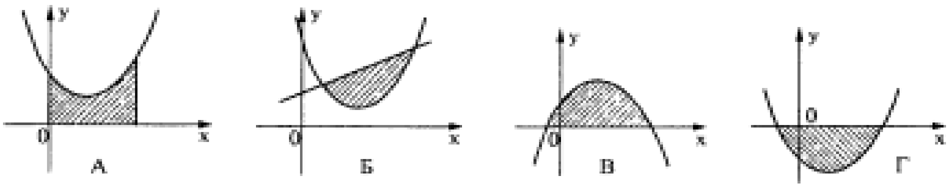
ж) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{cos^2 3x}$ ______________________________

____

<u>Домашняя работа</u>

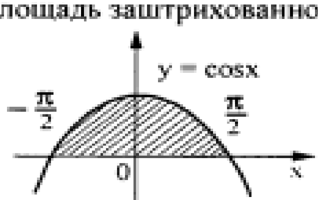
Задание: Проверьте свои знания, через выполнение тестового задания. Верный ответ подчеркните.

1. На каком рисунке изображена фигура, не являющаяся криволинейной трапецией?



2. С помощью формулы Ньютона-Лейбница вычисляют:
А. Первообразную функции;
Б. Площадь криволинейной трапеции;
В. Интеграл;
Г. Производную.

3. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



А. 0. Б. –2. В. 1. Г. 2.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой $y = 9 - x^2$.

А. 18. Б. 36. В. 72. Г. Нельзя вычислить.

Тема 18. Понятие степени. Иррациональные уравнения.

Степень с рациональным показателем

Запомни!

1. Степень с натуральным и целым показателем	
$a^1 = a$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ $a \in R, n \in N\ (n \geqslant 2)$
$a^0 = 1$ $a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0,\ n \in N$
2. Степень с дробным показателем	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $a \geqslant 0$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a > 0, n \in N\ (n \geqslant 2), m \in Z$
3. Свойства степеней	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Свойства корней

1⁰. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

2⁰. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$.

3⁰. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(k > 0)$.

4⁰. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ $(k > 0)$.

5⁰. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (если $k \leqslant 0$, то $a \neq 0$).

Практическая работа

Задание 1. Устный счет по карточке:

8	$\left(\sqrt{32}\right)^{\frac{2}{5}}$	$4^{-\frac{3}{2}}$	$64^{\frac{5}{6}}$	$32^{-\frac{3}{5}}$	$\left(\sqrt{27}\right)^{\frac{2}{3}}$	$32^{\frac{4}{5}}$	$\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}$	$16^{-\frac{3}{4}}$
7	$4^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$125^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$16^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$81^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
6	$16^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$32^{\frac{1}{5}}$	$27^{\frac{1}{3}}$	$81^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{3}}$	$25^{\frac{1}{2}}$
5	$(\sqrt{7})^2$	$(\sqrt{2})^8$	$(\sqrt{5})^4$	$(\sqrt{2})^{10}$	$(\sqrt{6})^4$	$(\sqrt{2})^6$	$(\sqrt{3})^4$	$(\sqrt{5})^0$
4	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$
3	6^{-2}	2^{-4}	3^{-3}	5^{-1}	3^{-4}	2^{-3}	7^{-2}	4^{-1}
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$
1	3^4	4^3	2^4	5^3	2^5	3^3	5^0	2^3
	a	b	c	d	e	f	g	h

Задание 2. Проверьте правильность вычислений:

670. а) $\sqrt[3]{\frac{64\cdot 27}{125}}=\frac{\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{4\cdot 3}{5}=\frac{12}{5}$.

б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16\cdot 625}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{625}}=\frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{5^4}}=\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$.

в) $\sqrt[5]{\frac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{3^{10}}\cdot\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{\left(3^2\right)^5}\cdot\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{\left(7^2\right)^5}}=\frac{3^2\cdot 5}{7^2}=\frac{45}{49}$.

г) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}=\frac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}}=\frac{\sqrt[6]{\left(3^2\right)^{3\cdot 3}}}{\sqrt[6]{\left(2^2\right)^6}\cdot\sqrt[6]{5^6}}=\frac{3^3}{2^2\cdot 5}=\frac{27}{20}=1\frac{7}{20}$.

Задание 3. Решите уравнения

$\sqrt{x^2-5}=2$

$\sqrt{x}=x-2$

$\sqrt{x-6}=\sqrt{4-x}$

$\sqrt{x-2} = x - 8$

$\sqrt{x^2 - 6x + 7} = -1$

Самостоятельная работа:

I вариант

а) $\sqrt{x^2-5}$ =2;

б) $\sqrt{x}$ =x-2;

в) $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{x}$;

г) $\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$;

II вариант

а) $\sqrt{x^2+1} = 2$;

б) $\sqrt{x} = x+2$;

в) $\sqrt{x^2+2} = \sqrt{x}$;

г) $\sqrt{x+6} = \sqrt{4+x}$;

Домашняя работа

Решение примеров:

Первый уровень

1. $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$;

2. $\sqrt{17+2x-3x^2}$ =x+1;

3. $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$;

4. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$;

5. $\sqrt{x+1}\sqrt{x+6}=6$;

6. $\sqrt{x}\sqrt{2-x}=2x$;

7. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$;

8. $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$;

9. $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$;

Второй уровень

1. $\sqrt{225+x^2}=x^2-47$;

2. $\sqrt{x^2+36}=x^2-54$

3. $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$

4. $x=\sqrt[3]{x^3+x^2-6x+8}$

5. $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}$

$6\sqrt{x-3} = 1+\sqrt{x-4}$

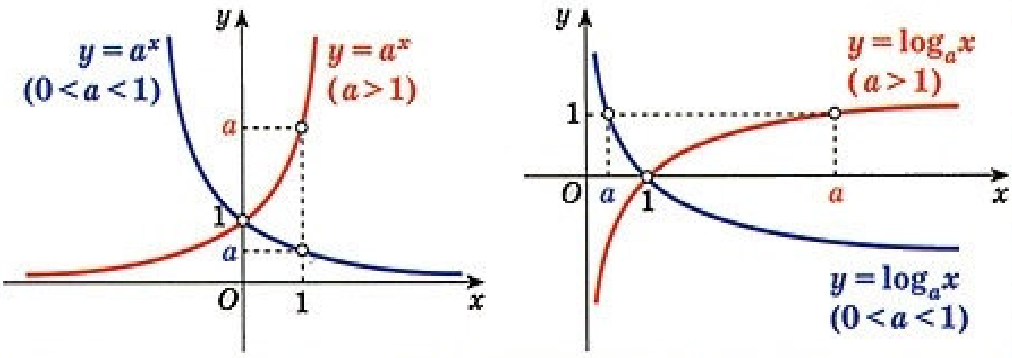
Тема 19. Показательная функция.

Логарифмическая функция.

Понятие об обратной функции. Степенная функция

<u>Запомни!</u>

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ($y = a^x$) и ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ($y = \log_a x$) ФУНКЦИИ ($a > 0$, $a \neq 1$)



СВОЙСТВА	$y = a^x$	$y = \log_a x$
1. Область определения	$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$
2. Область значений	$(0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
3. Промежутки, на которых $y > 0$	$\mathbb{R}$	$(1; +\infty)$
Промежутки, на которых $y < 0$	—	$(0; 1)$
4. Функция возрастает	$a > 1$	$a > 1$
Функция убывает	$0 < a < 1$	$0 < a < 1$
5. Нули	—	$x_0 = 1$
6. Общие точки всех графиков	$(0; 1)$	$(1; 0)$
7. Частные случаи	$y = e^x$	$y = \log_{10} x = \lg x$ $y = \log_e x = \ln x$

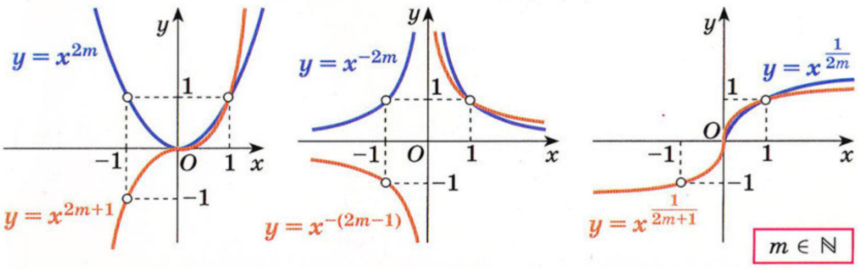
СВЯЗЬ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЙ

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$


11. ПОНЯТИЕ ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ
АЛГЕБРА и НАЧАЛА АНАЛИЗА 11 класс
ПОНЯТИЕ ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ
Функция $g(x)$ называется обратной к функции $f(x)$, если для всех x из области значений $f(x)$ выполняется $f(g(x)) = x$.
Если g – обратная к f, то f – обратная к g: f и g взаимно обратны.
Свойство:
y
$y = x$
$y = f(x)$
0
x
$y = g(x)$
Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$
Теорема об обратной функции:
Если $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке I, то она обратима и обратная к ней функция $y = g(x)$ также является возрастающей (убывающей)
спектр

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ $y = x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$



СВОЙСТВА	$n = 2m$	$n = 2m+1$	$n = -2m$	$n = -(2m-1)$
1. Область определения	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
2. Область значений	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
3. Чётность	чётная	нечётная	чётная	нечётная
4. Промежутки, на которых а) $y > 0$ б) $y < 0$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ —	$(0; +\infty)$ $(-\infty; 0)$	$\mathbb{R}$ —	$(0; +\infty)$ $(-\infty; 0)$
5. Промежутки а) возрастания б) убывания	$[0; +\infty)$ $(-\infty; 0]$	$\mathbb{R}$ —	$(-\infty; 0)$ $(0; +\infty)$	— $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
6. Общие точки всех графиков	$(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$	$(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$	$(-1; 1)$, $(1; 1)$	$(-1; -1)$, $(1; 1)$

СВОЙСТВА	$n = \frac{1}{2m}$	$n = \frac{1}{2m+1}$
1. Область определения	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
2. Область значений	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
3. Чётность	чётная	нечётная
4. Промежутки, на которых $y > 0$ Промежутки, на которых $y < 0$	$(0; +\infty)$ —	$(0; +\infty)$ $(-\infty; 0)$
5. Промежутки возрастания Промежутки убывания	$[0; +\infty)$ —	$\mathbb{R}$ —
6. Общие точки всех графиков	$(0; 0)$, $(1; 1)$	$(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$

<u>Практическая работа</u>

Задание 1. Изобразить схематически график функции:

$$y = 3^x$$

$$y = 3^{-x}$$

$y = log_2(3x)$

$y = log_2(-3x)$

$y = x^{\frac{2}{3}}$

$y = x^{-\frac{2}{3}}$

Задание 2. Построить графики функции $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

Составим таблицы:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Схематично построим графики:

Задание 3. Построить графики функции $y=2^x$, $y=(\frac{1}{2})^x$

Составим таблицы:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Схематично построим графики:

Самостоятельная работа

$$y = -3 * 2^x$$

$$y = 2^x$$

$$y = log_3(4 - 5x)$$

$$y = x^{\sqrt{3}}$$

$$y = x^{-\sqrt{5}}$$

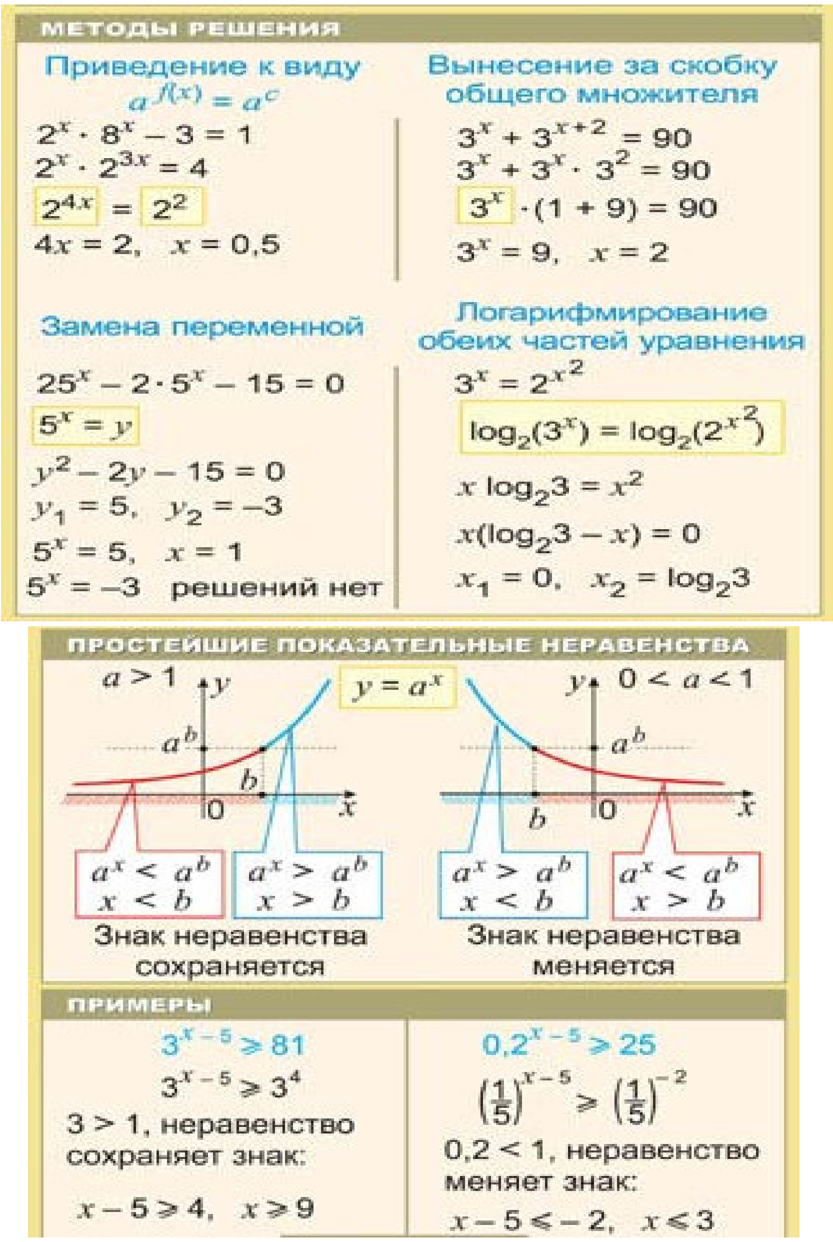
<u>Домашняя работа</u>

Задание 1. Найти область определения, промежутки возрастания и убывания, область значений функции $f(x) = 0{,}3^x - 1$. Постройте ее график.

Задание 2. Построить графики обратных тригонометрических функций

Тема 20. Решение показательных уравнений и неравенств

Запомни!



Практическая работа

Решите уравнение:

$7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$

____

____

____

$5^{x^2-2x-1} = 25$

____

Решите неравенства:

$0{,}5^{7-3x} < 4$

$(\frac{1}{9})^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$

$6^{x^2+2x} > 6^3$

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases}$$

<u>Самостоятельная работа</u>

Решите уравнения и неравенства:

$2^x = 8\sqrt{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{28}$$

$3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{2x-2} = 1$

$9 \cdot 4^{2x} - 5 \cdot 4^{x} - 4 = 0$

$4 \cdot 3^{x} - 6 = 2 \cdot 9^{x} - 12$

<u>Домашняя работа</u>

Решите системы:

а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-y} = 27, \\ 5^{3x-y} = \frac{1}{25} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 64^{x-3y} = 8, \\ 12x + y = 2 \end{cases}$

Тема 21. Логарифмы и их свойства

Запомни!

Основные свойства логарифмов

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется такой показатель степени c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ*)

- Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, $b > 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- Логарифм произведения: $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$
- Логарифм частного: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$, $\frac{x}{y} > 0$
- Логарифм степени: $\log_a x^p = p \log_a |x|$, $x^p > 0$

  $\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q} \log_a |x|$, $x^p > 0$
- Логарифм корня: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$, $x > 0$
- Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ где } b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ где } b > 0,\ b \neq 1$$

*) Во всех приведенных формулах $a > 0$, $a \neq 1$

Практическая работа

Задание 1. Вычислите:

А) $2^{2+\log_2 5}$ ____

____

____

Б) $49^{\log_7 \sqrt{5}}$ ____

____

____

Г) $2\log_6 2 + \log_6 9$ ____

Д) $5^{\log_5 16 - 1}$

Е) $8^{\log_2 10}$

Ж) $\log_{\frac{1}{8}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 2$

З) $\log_5 100$ - $2\log_5 2$

И) $3^{1+\log_3 8}$

К) $81^{\log_3 \sqrt{2}}$

Л) $\log_2 15 - \log_2 30$

М) $4\log_{12} 2 + \log_{12} 9$

Задание 2. Найдите область определения функции y = $\log_6(4x - 1)$.

Найдите область определения функции y = $\log_{\frac{1}{9}}(7 - 2x)$.

Найдите область определения функции y = $\log_9(8x + 9)$.

Задание 3. Найдите х:

$\log_3 x = 3;\ \log_5 x = -1;\ \log_4 x = -2;\ \log_{0.1} x = -2.$

Задание 4. Дорешать, используя формулы:

1) $\log_{12}2 + \log_{12}72 = \log_{12}(2 \cdot 72) = \log_{12} \ldots = \ldots$
2) $\log_{\frac{1}{5}}75 - \log_{\frac{1}{5}}3 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{75}{3}\right) = \ldots$
3) $\log_2 12 - \log_2 15 + \log_2 20 = \log_2\left(\frac{12}{15} \cdot \ldots\right) = \ldots$

Самостоятельная работа

Задание 1. Вычислите:

$36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$

Задание 2. Упростите выражение $A = 9^{3-\log_3 54} + 7^{-\log_7 2}$.

Задание 3. Упростить:

$3\log_5 a + 6\log_5 в - 2\log_5 c$

$4\log_5 a - 5\log_5 в + 7\log_5 c$

$\log_5 в + 8\log_5 c + 2\log_5 a$ ____

____

Задание 4. Вычислить:

1) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$ ____

____

2) $16^{1+\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$ ____

____

3) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$ ____

____

<u>Домашняя работа</u>

Задание 1. Вычислите:

А) $4^{\log_4 48 - 2}$ ____

____

Б) $25^{\log_5 0,7}$ ____

____

В) $\lg 25 + \lg 4$; ____

____

Г) $\log_{11} 484$ - $2\log_{11} 2$. ____

____

Задание 2. Найдите область определения функции y = $\log_{0,3}(2 - 5x)$.

____

____

Тема 22. Логарифмические уравнения и неравенства

Запомни!

$$\overleftarrow{\quad\quad}$$
$$log_a x = b$$
$$\overrightarrow{\quad\quad}$$
$$a^b = x$$

$x = a^b$ решение логарифмического уравнения

Основные типы логарифмических неравенств:

1). $\log_a f(x) > g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

2). $\log_a f(x) < g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

3). $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

4). $c_0 \log^2_a x + c_1 \log_a x + c_2 > 0$, $c_0 \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

5). $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

Решение указанных неравенств основано на следующих утверждениях:

Теорема. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) > g(x)$, $a > 1$равносильно неравенству $f(x) > a^{g(x)}$, при $0 < a < 1$ – системе

$$\begin{cases} f(x) > a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) < g(x)$, $a > 1$равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases},$$

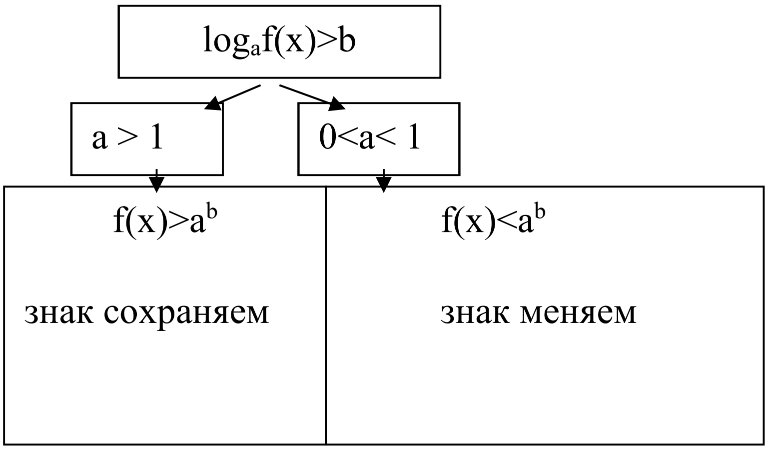
при $0 < a < 1$ – неравенству $f(x) < a^{g(x)}$.

Теорема. Пусть $a>0$, $a\neq1$, $x_1>0$, $x_2>0$ Если $\log_a x_1>\log_a x_2$, то

1) при $a>1$ $x_1>x_2$ (знак сохраняем)

2) при $0<a<1$ $x_1<x_2$ (знак меняем)

Иначе:



Практическая работа

Решите логарифмические уравнения:

А) $\log_{\frac{1}{6}}(12 - 2x) = -2;$

Б) $\log_4(x^2 + 3x) = \log_4(x^2 + 3)$

В) $lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0.$

А) $\log_{\frac{1}{4}}(12 - 4x) = -3$;

Б) $\log_9(x^2 + 5x) = \log_9(x^2 + 1)$

В) $2lg^2 x - 5\lg x - 7 = 0$.

А) $\log_{\frac{1}{3}}(6 - 5x) = -4$;

Б) $\log_6(x^2 + 4x) = \log_6(x^2 + 11)$;

В) $3lg^2 x - 5\lg x + 2 = 0$.

А) $\log_{\frac{1}{2}}(6 - x) = -5$;

Б) $\log_8(x^2 + 2x) = \log_8(x^2 - 8)$

В) $5lg^2 x + 4\lg x - 1 = 0$.

Решите логарифмические неравенства:

А) $\log_7(5x - 4) \geq 2$;

Б) $\log_{0,4}(12\mathrm{x} + 2) < \log_{0,4}(10\mathrm{x} + 16)$

А) $\log_{0,5}(x - 4) > 1$;

Б) $\log_2(5\mathrm{x} - 9) \leq \log_2(3\mathrm{x} + 1)$.

А) $\log_2(3x - 4) \leq 3$;

Б) $\log_{\frac{1}{3}}(8 - \mathrm{x}) > \log_{\frac{1}{3}}(4 - 2\mathrm{x})$.

А) $\log_{\frac{1}{4}}(x - 3) < -1$;

Б) $\log_{2,5}(6 - x) \geq \log_{2,5}(4 - 3x)$

Самостоятельная работа

Решить логарифмические уравнения:

$\log_6(3x+15)=2$

$\log_4(2x-6)=3$

$\log_{\frac{1}{2}}(8x-12)=-2$

$\log_3(3x-2)=0$

$\log_3(5x-1)=2$

$\log_5(3x+1)=2$

$\log_3(x^2-6x+17)=2$

$\log_5(x^2-11x+43)=2$

$(\log_2 x)^2+8\log_2 x-9=0$

$(\log_3 x)^2-5\log_3 x+4=0$

Решить логарифмические неравенства:

$\log_2(3x-4)>5$

$\log_5(8x-3)>1$

$\log_{1/5}(9-3x)<-2$

Домашняя работа

Решить логарифмические уравнения и неравенства:

$\log_3(x^2+2x-6)=2$

$\log_5(x^2+2x+17)=2$

$\log_2(x^2-3x+4)=3$

$(\log_8 x)^2-3\log_8 x+2=0$

$(\log_2 x)^2+5\log_2 x-6=0$

$(\log_4 x)^2-5\log_4 x+6=0$

$\log_3(x-1)\leq 2$

$\log_{0,2}(2-x)>-1$

$\log_{0,3}(2x+5)\geq \log_{0,3}(x+1)$

$\log_3(x^2+7x-5)> 1$

$\lg(x^2+2x+2)<1$

Тема 23. Производная показательной и логарифмической функции. Число е

Запомни!

1) Функция $y = e^x$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $y' = (e^x)' = e^x$

2) Функция $y = a^x$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $(a^x)' = a^x \ln a$ ($\ln x = \log_e x$ – натуральный логарифм)

$$(a^x)' = ((e^{\ln a})^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

3) Первообразная функции $y = a^x$ на $\mathbb{R}$ – функция $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Практическая работа

Найдите по таблицам натуральных логарифмов (или с помощью калькулятора):

а) $\ln 3$, $\ln 5{,}6$, $\ln 1{,}7$; б) $\ln 8$; $\ln 17$; $\ln 1{,}3$;

в) $\ln 2$, $\ln 35$, $\ln 1{,}4$; г) $\ln 7$, $\ln 23$, $\ln 1{,}5$.

Найдите производную каждой из функций (538—539).

а) $y = 4e^x + 5$; б) $y = 2x + 3e^{-x}$;

в) $y = 3 - \frac{1}{2} e^x$; г) $y = 5e^{-x} - x^2$.

а) $y = e^x \cos x$; б) $y = 3e^x + 2^x$;

в) $y = 3^x - 3x^2$; г) $y = x^2 e^x$.

Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = 1$.

Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=5e^x$; б) $f(x)=2\cdot 3^x$; в) $f(x)=4^x$; г) $f(x)=\frac{1}{2}e^x+1$.

Вычислите интеграл:

а) $\int_0^1 0{,}5^x dx$; б) $\int_0^1 e^{2x} dx$; в) $\int_{-2}^1 2^x dx$; г) $\int_{-\frac{1}{2}}^2 3^x dx$.

Найдите производную каждой из функций (549—550).

а) $y=\ln(2+3x)$; б) $y=\log_{0,3} x+\sin x$;

в) $y=\ln(1+5x)$; г) $y=\lg x-\cos x$.

а) $y=x^2\log_2 x$; б) $y=\frac{\ln x}{x}$;

в) $y=x\ln x$; г) $y=\frac{x}{\ln x}$.

Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\frac{3}{7x+1}$; б) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+5}$;

в) $f(x)=\frac{1}{x+2}$, г) $f(x)=\frac{4}{x}$.

Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

а) $f(x)=\ln(x+1)$, $x_0=0$; б) $f(x)=\lg x+2$, $x_0=1$;

в) $f(x)=2\ln x$, $x_0=e$; г) $f(x)=\log_2(x-1)$, $x_0=2$.

Вычислите интеграл:

а) $\int_1^7 \frac{2dx}{x}$; б) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$; в) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; г) $\int_0^3 \frac{dx}{3x+1}$.

<u>Самостоятельная работа</u>

Найдите производную функции:

$а)\ y=5+e^{-x}$; $б)\ y=2^x-\frac{2}{x}$; $в)\ y=\ln x+e^{3x}$; $г)\ y=3\log_2 x-e^2$

Найдите значение производной функции $y=4x\cdot e^x$ в точке $x_0=1$.

Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=3\ln x-2x$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Найдите производную функции:

$а)\ y = 2e^{-x} + x^3;$ $б)\ y = 3^x + \frac{3}{x};$ $в)\ y = \ln\frac{x}{2} - e^x;$ $г)\ y = e^3 - 8\log_5 x$

Найдите производную функции:

$а)\ y = 5^x + \sin x;$ $б)\ y = -x \cdot e^{2x};$ $в)\ y = 10^x + e^{-x}$

Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4e^{-x} - 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Домашняя работа

1 вариант

1. а) Дана функция $f(x)=e^x\cos x$. Найдите $f'(x), f'(0)$.

б) Дана функция $f(x)=\frac{1}{6}\ln(-2x)$. Найдите $f'(x)$, $f'(-\frac{1}{8})$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $y = 1$, $x = 2$.

3. Исследуйте функцию $f(x)= 2x\ln x$.

2 вариант

1. а) Дана функция $f(x)=e^x\sin x$. Найдите $f'(x), f'(0)$.

б) Дана функция $f(x)=\frac{1}{6}\ln(-3x)$. Найдите $f'(x)$, $f'(-\frac{1}{9})$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = 4$.

3. Исследуйте функцию $f(x)= xe^x$.

3 вариант

1. а) Дана функция f(x)=$e^x + x^{2,5}$. Найдите f'(x),f'(0).

б) Дана функция f(x)= $\ln(x^2 + 1) - 4^x$. Найдите f'(x), f'($\frac{1}{2}$).

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями y=$\sqrt{x}$, y = 1, x = 9.

3. Исследуйте функцию f(x)= $x^2 e^{2x}$.

Список литературы

1. Алгебра 10-11 класс. А.Г.Мордкович, Издательство: Мнемозина, 2013 – 405 с.
2. Дьяченко О.В. Рабочая тетрадь по математике. – Брянск.: Издательство Брянский ГАУ, 2015.-160 с.
3. Дьяченко О.В. Конспект лекций по математике. – Брянск.: Издательство Брянский ГАУ, 2015.-108с.

Учебное издание

Дьяченко О.В.

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

по математике

для аудиторной и самостоятельной работы студентов первого курса

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 07.09.2017 г. Формат 60х84. 1/16.
Бумага офсетная. Усл. п. л. 6,33. Тираж 20 экз. Изд. № 5357.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365, Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ