

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

ФГОУ ВПО Брянская государственная сельскохозяйственная академия

Н.М. Прыгов, О.Е. Широбокова

**ПРАКТИКУМ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**Методическое пособие
к решению задач по теоретическим основам электротехники
для выполнения самостоятельных работ студентам специальности
«Электрификация и автоматизация сельского хозяйства»**

Часть 2

Брянск 2014

УДК 621.3.(076.5)

ББК 31.1

П 85(5)

Прыгов Н.М. Практикум по теоретическим основам электротехники/ Н.М.Прыгов, О.Е. Широбокова, Л.М. Маркарянц. Методическое пособие к решению задач по теоретическим основам электротехники и выполнению самостоятельной работы студентов-бакалавров, обучающихся по направлению 140400 «Электроэнергетика и электротехника». – Брянск. Издательство Брянской ГСХА, 2014– 81 с.

В практикуме рассмотрены примеры решения задач по теоретическим основам электротехники. Приведен набор задач для выполнения самостоятельной работы студентов при изучении лекционного материала.

Разработали: Прыгов Н.М., канд. техн. наук, доц.
Широбокова О.Е., канд. техн. наук, доц.
Маркарянц Л.М., д.т.н., проф.

Рецензент: к.т.н., доцент Брянской ГИТА Швачко С.И.

Рекомендовано к изданию методической комиссией факультета энергетики и природопользования БГСХА, Протокол №_6_от 26.08.2014 г.

© Брянская ГСХА, 2014 г.

© Прыгов Н.М., 2014 г.

© Широбокова О.Е., 2014 г.

© Маркарянц Л.М., 2014 г.

Предисловие

Подготовленный практикум по курсу «Электротехника и электроника» (часть 2) соответствует программе и включает краткий теоретический материал и набор задач по расчёту электрических цепей трехфазного тока и переходных процессов в линейных электрических цепях.

В практикуме дается значительное количество материала и задач, которые можно использовать при подготовке и выполнении курсовой работы, при сдаче зачёта и экзамена по дисциплине.

Большая часть предложенных задач в практикуме дается с подробными решениями, а другую часть задач студенты должны решить самостоятельно для форматирования навыков решения и усвоения теоретического материала по курсу.

ГЛАВА 1. Трехфазные электрические цепи

1.1 Основные формулы и уравнения

Трехфазная система электрических токов (ЭДС и напряжений) – это совокупность трех синусоидальных электрических токов (ЭДС и напряжений) одной частоты и сдвинутых по фазе друг относительно друга на 120° . При равенстве амплитуд токов (ЭДС и напряжений) во всех фазах систему называют симметричной.

Часть этой системы, где проходит один из трех токов называют фазой трехфазной системы.

Простейший трехфазный генератор – устройство аналогичное однофазному генератору, но имеющие отличия от последнего. Три однофазные обмотки (фазы) на якоре, начала и концы которых обозначают соответственно А, В, С и x, y, z. Эти обмотки сдвинуты в пространстве относительно друг друга на углы $\frac{2\pi}{3}$ (120°).

При вращении якоря в обмотках генератора индуцируются ЭДС одной частоты и равной амплитуды, сдвинутые по фазе на 120° друг относительно друга (смотри рисунок 1.1).

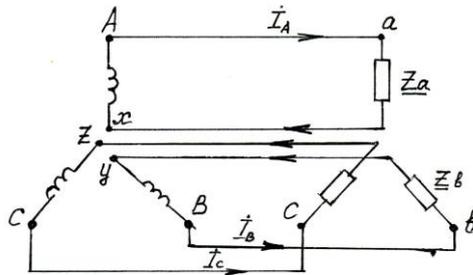


Рисунок 1.1 – Фазы генератора несвязанной трехфазной системы

Если отдельные фазы генератора и приемника соединены между собой (рис. 1.2), то такую систему называют связанной трехфазной системой, в которой фазы могут быть соединены в «звезду» и «треугольник».

1.2 Соединение обмоток генератора и приемника в «звезду»

Звезда – это такое соединение, когда к началам обмоток генератора А, В, С присоединяют три линейных провода, идущих к приемнику, а концы обмоток x, y, z соединены в узел, который называют нейтральной или нулевой точкой N-n (рисунок 1.2).

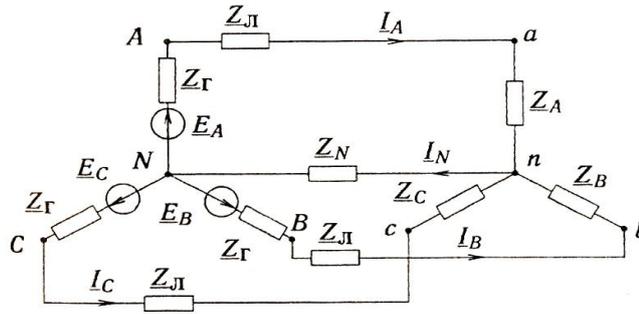


Рисунок 1.2 – Соединение связанной трехфазной цепи по схеме «звезда»

В четырехпроводной системе к этой точке присоединен нейтральный провод (рисунок 1.2), а в трехпроводной системе он отсутствует.

Напряжение между началами и концами фаз генератора или между линейными проводами и нейтральным проводом называют фазным напряжением. Напряжение между двумя линейными проводами называют линейным напряжением.

Токи, проходящие по линейным проводам, называют линейными и обозначают I_A, I_B, I_C, I_L . Токи, проходящие в фазах, называют фазными токами и обозначают I_a, I_b, I_c, I_ϕ .

При соединении обмоток в «звезду» линейные токи равны соответствующим фазным токам

$$I_L = I_\phi \quad (1.1)$$

Линейное напряжение равно геометрической разности соответствующих фазных напряжений.

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A \end{cases} \quad (1.2)$$

Для симметричной системы напряжений ($z_A = z_B = z_C$) имеем

$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_\phi \quad (1.3)$$

В этом случае векторная сумма линейных напряжений равна нулю.

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0 \quad (1.4)$$

Действующее значение токов в фазах приемника

$$\begin{cases} I_a = \frac{U_a}{Z_a}; \\ I_b = \frac{U_b}{Z_b}; \\ I_c = \frac{U_c}{Z_c}; \end{cases} \quad (1.5)$$

В четырехпроводной системе ток в нулевом проводе равен векторной сумме токов отдельных фаз

$$\dot{I}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c \quad (1.6)$$

Если в четырехпроводной трехфазной цепи $z_A = z_B = z_C$, то ток в нулевом проводе равен нулю.

Активная мощность всей цепи при неравномерной нагрузке равна сумме активных мощностей отдельных фаз

$$P = P_a + P_b + P_c, \quad (1.7)$$

где P_a, P_b, P_c - активные мощности отдельных фаз приемника.

$$\begin{cases} P_a = U_a \cdot I_a \cos \varphi_a \\ P_b = U_b \cdot I_b \cos \varphi_b , \\ P_c = U_c \cdot I_c \cos \varphi_c \end{cases} \quad (1.8)$$

Реактивная мощность всей цепи при неравномерной нагрузке равна алгебраической сумме реактивных мощностей отдельных фаз.

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c, \quad (1.9)$$

где Q_a, Q_b, Q_c - реактивные мощности отдельных фаз приемника.

$$\begin{cases} Q_a = U_a \cdot I_a \sin \varphi_a \\ Q_b = U_b \cdot I_b \sin \varphi_b , \\ Q_c = U_c \cdot I_c \sin \varphi_c \end{cases} \quad (1.10)$$

Полная потребляемая мощность цепи при неравномерной нагрузке

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (1.11)$$

где P – активная мощность всей цепи, Вт;

Q - реактивная мощность всей цепи, вар.

При симметричной нагрузке мощность всей цепи:

$$\text{- активная } P = 3U_\phi \cdot I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_L \cdot I_L \cos \varphi ;$$

$$\text{- реактивная } Q = 3U_\phi \cdot I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3}U_L \cdot I_L \sin \varphi ;$$

$$\text{- полная } S = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \quad (1.12-1.14)$$

1.3 Соединение обмоток приемника по схеме «треугольник»

При соединении обмоток по схеме «треугольник» конец обмотки ab соединяется с началом обмотки bc , а конец обмотки bc соединяется с началом обмотки ca , а ее коней в свою очередь соединяется с началом обмотки ab (рисунок 1.3 и 1.4)

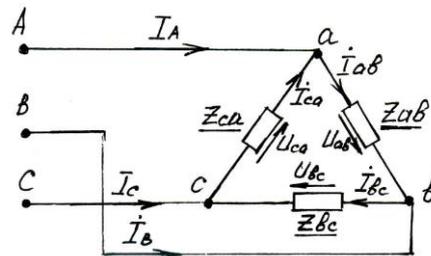


Рисунок 1.3 - Соединение обмоток по схеме «треугольник»

При соединении обмоток по схеме «треугольник» линейные и фазные напряжения равны, т.е. $U_L = U_\phi$, а линейные и фазные токи отличаются в $\sqrt{3}$ раз, т.е.

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_\phi, \quad (1.15)$$

Линейные токи равны геометрической разности векторов соответствующих фазных токов

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} , \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \end{cases} \quad (1.16)$$

Векторные диаграммы линейных и фазных токов показаны на рисунке 1.4б.

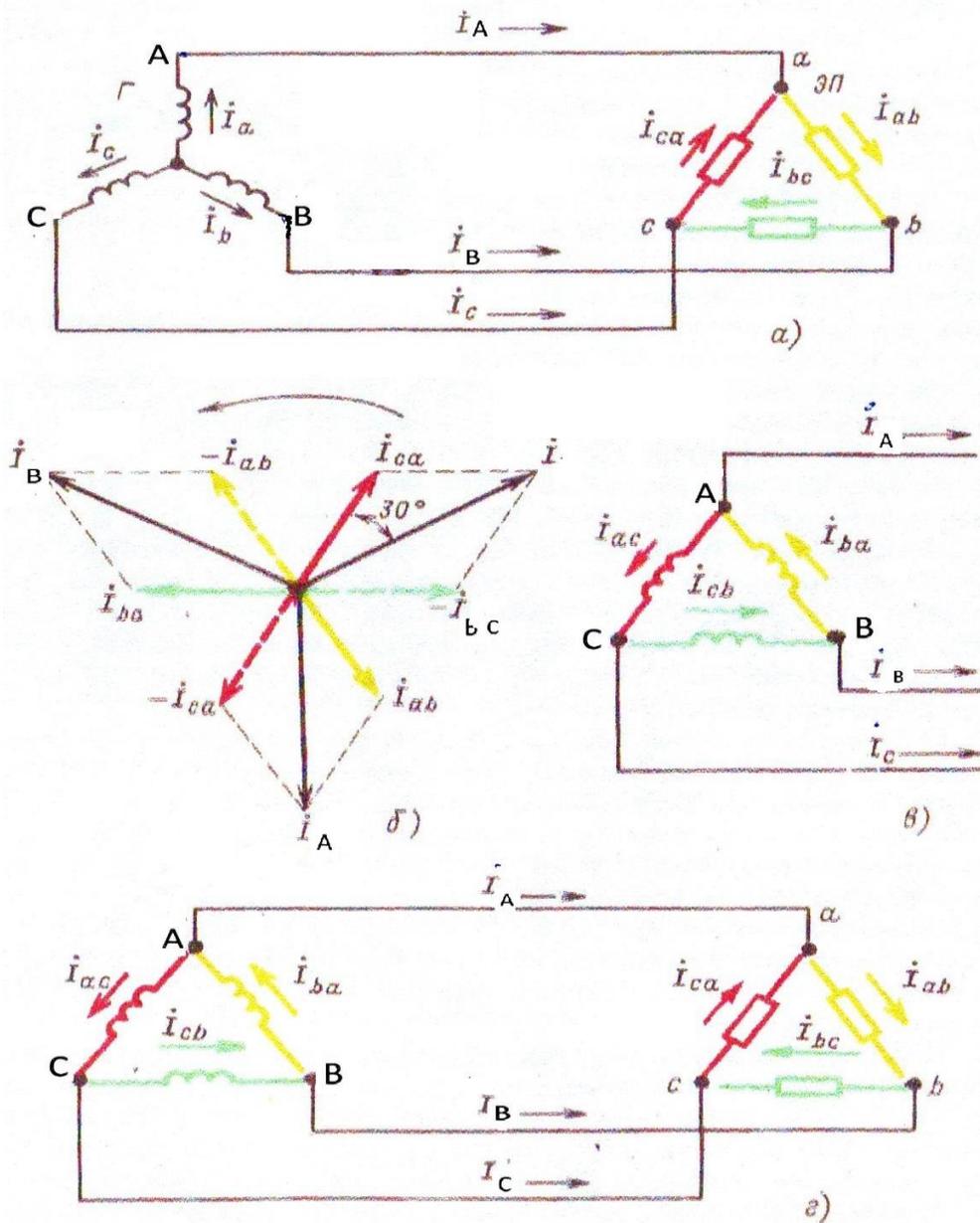


Рисунок 1.4 - Определение линейных токов при соединении в треугольник

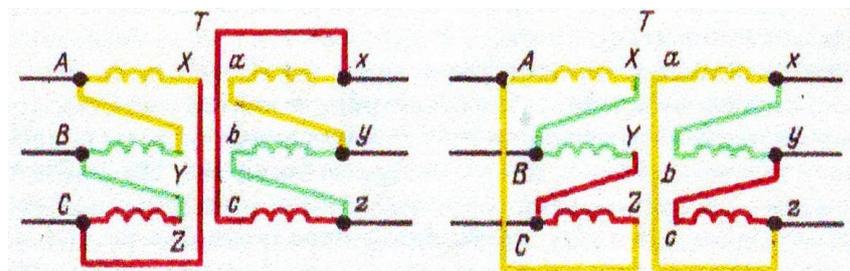


Рисунок 1.5 - Соединение в треугольник обмоток трансформатора

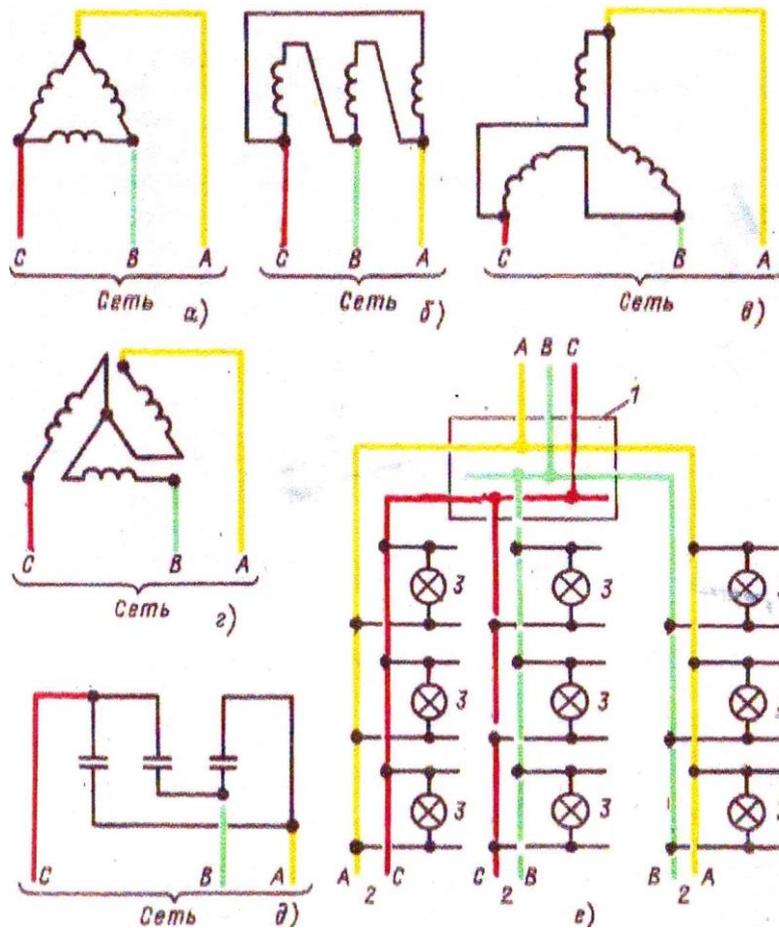


Рисунок 1.6 - Соединение в треугольник электроприемников

Если сопротивление линейных проводов не равно нулю (рис. 1.7а), то из-за падения напряжения в них треугольник не обеспечивает независимой работы фаз. Изменение напряжения, сопротивления в линейных проводах А и В, вызовет изменение фазного тока I_{ab} , а следовательно и линейных токов I_A, I_B . При этом изменяются падения напряжения в линейных проводах А и В, что при неизменных линейных напряжениях на зажимах генератора вызовет изменение напряжений на всех трех фазах приемника. При этом должны изменяться фазные токи I_{bc}, I_{ca} тех фаз, сопротивление которых осталось неизменным.

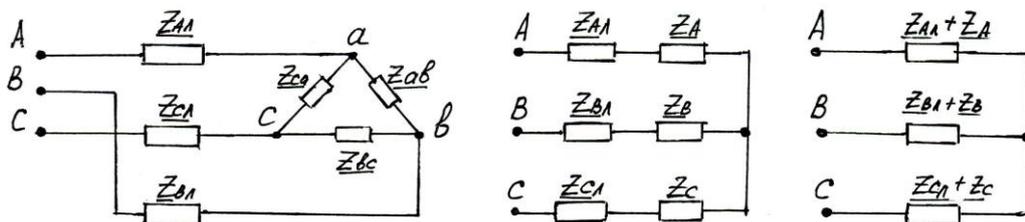


Рисунок 1.7 - Схема преобразования треугольника в эквивалентную звезду

Для расчёта цепи (рисунок 1.7а) при заданных линейных напряжениях, помимо методов уравнений Кирхгофа, наложения, контурных токов при отсутствии взаимной индукции можно применить метод преобразования. Треугольник сопротивлений z_{ab}, z_{bc}, z_{ca} преобразуют в эквивалентную звезду с сопротивлениями z_a, z_b, z_c по формулам

$$\begin{cases} z_a = \frac{z_{ab} \cdot z_{ca}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}} \\ z_b = \frac{z_{ab} \cdot z_{bc}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}}; \\ z_c = \frac{z_{bc} \cdot z_{ca}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}} \end{cases} \quad (1.17)$$

Объединяя, в каждой фазе сопротивление линии и приемника приводят схему к звезде (рис. 1.7 в) после определения токов, которой возвращаются к цепи (рис. 1.7 б). Находят фазные токи и линейные напряжения на звезде z_a, z_b, z_c . Затем переходят к исходному треугольнику (рис. 1.7 а) и находят его фазные токи.

Приведенные выше выражения для расчёта соединения треугольником справедливы для общего случая несимметричной системы напряжений генератора.

Определение полной, активной и реактивной мощностей при равномерной и неравномерной нагрузках производится по формулам 1.7...1.14.

1.4 Смещение нейтрали нагрузки

Смещение нейтрали нагрузки может возникнуть при следующих режимах работы трехфазной сети:

- обрыв фазы приемника или линейного провода (рис. 1.8 в)
- короткое замыкание на нагрузке на одной из фаз (рис. 1.8 б);
- заземление фазы (рис. 1.8 а);
- неравномерность нагрузки фаз приемника (рис. 1.9)

При однородной нагрузке (лампы, печи, индуктивной или емкостной), но неравномерной нагрузке фаз нейтраль из точки N переходит в точку n (рис. 1.9) при этом направление смещения и его величина зависит от соотношения нагрузки фаз. Но так или иначе отрезок Nn в определенном масштабе изображает напряжение между нейтралью трансформатора N и нейтралью нагрузки n .

Именно это напряжение создает ток в нейтральном проводе, если соединены нейтрали:

- между нагрузкой и вторичной обмоткой трансформатора;
- между первичной обмоткой повышающего трансформатора и генератора.

Если нейтрали не соединены, то в трансформаторе нарушается магнитное равновесие.

Особенно значительно нейтраль нагрузки смещается при неоднородной нагрузке, даже если по модулю нагрузка всех фаз приемника одинакова.

Рассмотрим случай, когда к фазам В и С присоединены лампочки (активная нагрузка рис. 1.9 б), а в фазе А - конденсатор С. Нейтраль при этом сместится и одна из ламп будет гореть тускло (50Вт), а другая ярко (190Вт).

Аналогичная картина наблюдается при замене конденсатора катушкой индуктивности L (рис. 1.9 в) при этом ярко будет гореть другая лампа. Объясняется это тем, что в конденсаторе ток опережает, а в индуктивности отстает от напряжения своей фазы.

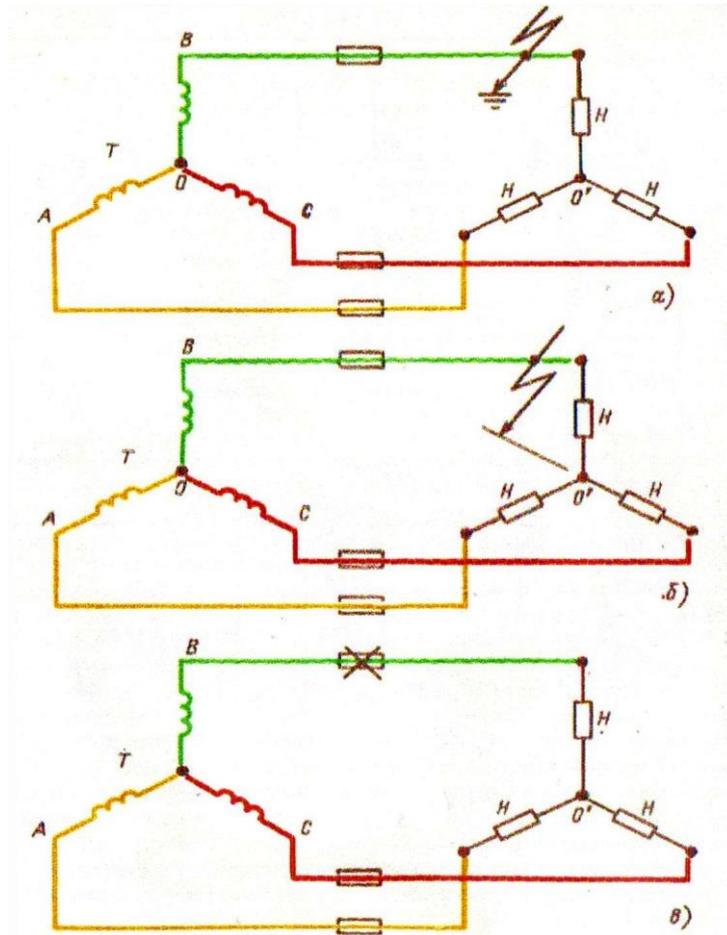


Рисунок 1.8 - Смещение нейтрали в сети с изолированной нейтралью при аварийных режимах (а) заземление фазы; б) короткое замыкание на нагрузке одной из фаз; в) обрыв фазы.)

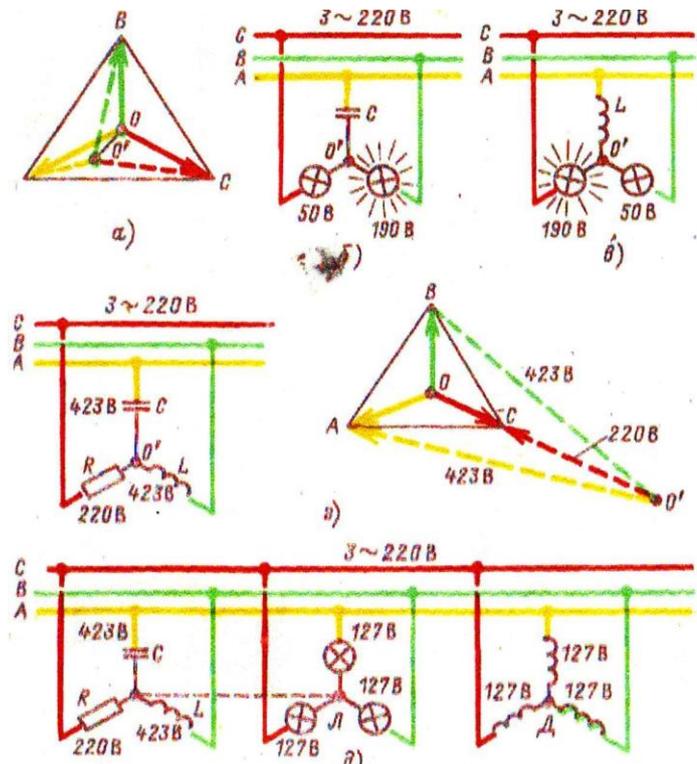


Рисунок 1.9 - Смещение нейтрали при различных видах нагрузки

Еще более значительное смещение нейтрали показано на рисунке 1.9, где присоединены : к фазе А – конденсатор, к фазе В – индуктивность, к фазе С – активная нагрузка, при этом нулевая точка n выйдет за пределы треугольника, а напряжение на нагрузке будет равно: 432 и 220В, что во много раз превысит фазные напряжения в 127В.

1.5 Соединение в «звезду» осветительной нагрузки

Осветительная нагрузка домов, улиц является рассредоточенной нагрузкой (рис. 10). Здесь от вводного ящика 1 по лестничным клеткам расходятся стояки 2, от которых в свою очередь сделаны ответвления 3 в квартиры. Надо отметить, что осветительная сеть не на всех участках является трехфазной.

Так, до вводного ящика идут четные питающие провода: А, В, С и N . Эта настоящая трехфазная сеть, а в ней по нейтральному проводу проходит только ток дебаланса всего дома. Это связано с неравномерностью нагрузки фаз.

Что же касается стояков 2 (рис.1.10), то в каждом из них проходит одна фаза и нуль, а также ответвления в квартиры, которые хоть и питаются от трехфазной сети, но представляют собой однофазную нагрузку. Так ток проходит по фазному и нейтральному проводам, поэтому сечение нейтрального провода берётся одинаковым с фазным.

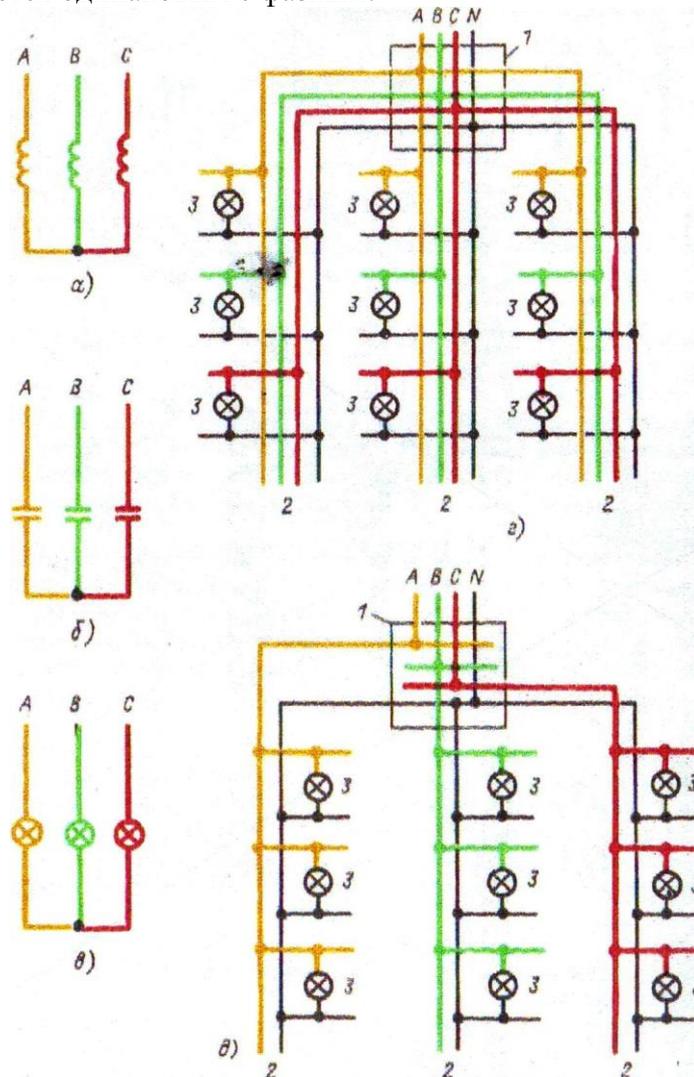


Рисунок 1.10 - Соединение в звезду электроприемников

При равномерной нагрузке (рис. 1.10 а-в) применяется трехпроводная схема, а при неравномерной (рис. 1.10 г, д) - четырёхпроводная.

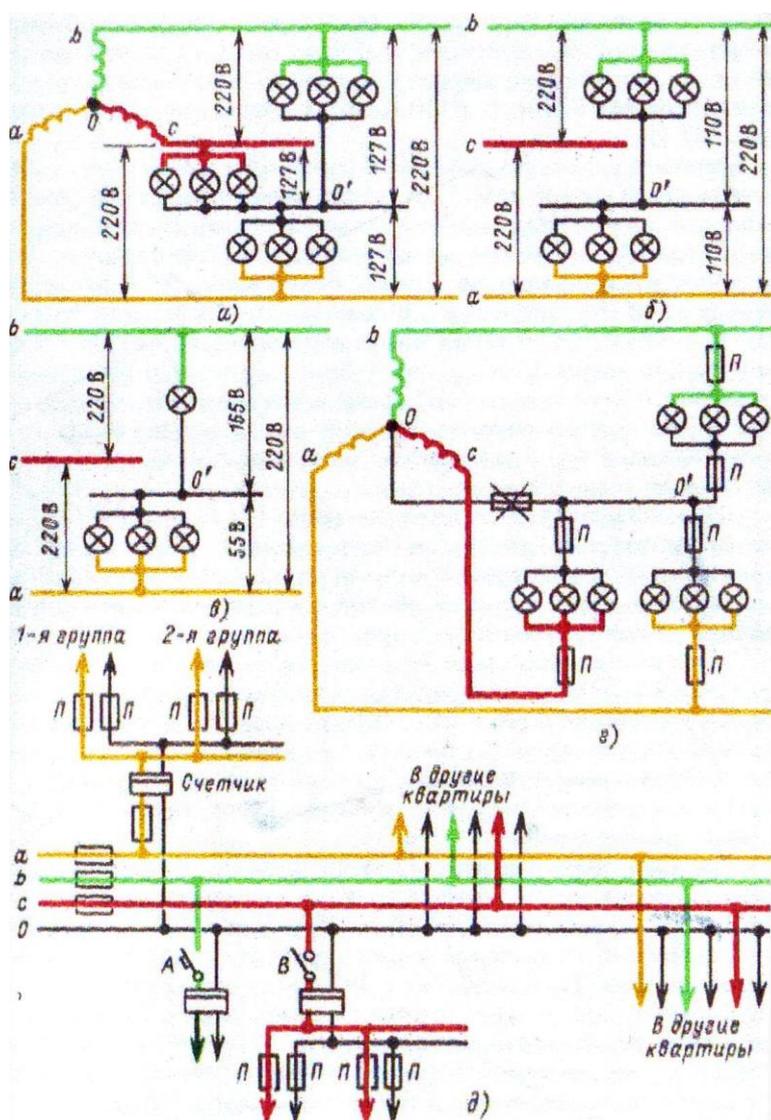


Рисунок 1.11- Особенности соединений в звезду осветительной нагрузки

Для пояснения этого положения обратимся к рисунку 1.11, где показаны три группы одинаковых ламп на напряжение 127В. Все лампы горят нормальным накалом, но одновременно включение ламп может постоянно меняться от питания потребителей.

Если одна из фаз будет отключена, то другие две фазы в этом случае подключатся последовательно (рис. 1.11б). Тогда линейные напряжения разделятся между двумя фазами поровну ($220/2=110\text{В}$) и лампы будут гореть с недостаточным накалом.

При четырехпроводной схеме (рис. 17 г) неравномерность нагрузки фаз не сказывается столь сильно на накале ламп.

Всегда стремятся равномерно нагрузить фазы, то есть подключить к каждой из них одинаковую мощность. С лампами накаливания это выполнить не сложно.

При люминесцентном освещении надо выполнить еще одно условие, а именно, присоединить лампы, расположенные рядом, к разным фазам. Объясняется это тем, что люминесцентные лампы зажигаются и гаснут 100 раз в секунду, а переменный ток изменяется с частотой 50Гц и сто раз в секунду проходит через нуль.

Электропитание люминесцентных ламп осуществляется от четырехпроводной системы. В этих условиях даже при равномерной нагрузке по нейтральному проводу проходит ток высших гармоник, в основном третьей. Ток нулевой последовательности бывает настолько велик, что сечение нейтрального провода оказывается недостаточным.

На рисунке 1.12 а показан синусоидальный ток (кривая 1) в фазе А при нагрузке лампами накаливания.

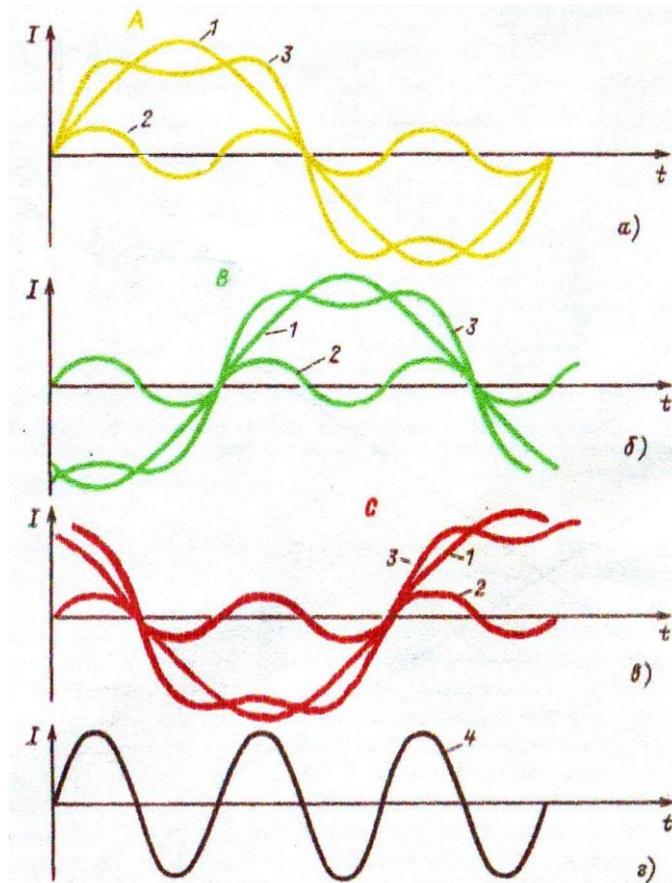


Рисунок 1.12 - В нулевом проводе четырехпроводной трехфазной сети, питающей люминесцентные лампы, токи третьих гармоник всех трех фаз алгебраически суммируются, поэтому сечение нулевого провода должно быть увеличено

При люминесцентной нагрузке ток третьей гармоники (кривая 2) складывается с кривой 1, давая кривую 3, которая показывает, что ток в фазе А несинусоидальный.

На рисунке 1.12 а, б, в, видно, что токи нулевой последовательности совпадают по фазе суммарную кривую 4 тройной частоты.

Необходимо иметь в виду, что ток в нейтральном проводе при использовании люминесцентных ламп может превышать ток в фазном проводе.

1.6 Типовые задачи с решением

Задача 1. Трехфазный асинхронный электродвигатель с номинальной мощностью 10кВт, и $\cos \varphi = 0.87$; $\eta = 82\%$ подключен к трёхфазной сети с линейным напряжением 220В.

Необходимо определить:

- ток в проводах, к которым подключен двигатель;
- сопротивление фаз обмоток электродвигателя при соединении фаз обмоток статора треугольником (рис. 1ю13);
- построить векторную диаграмму токов и напряжений двигателя.

Решение:

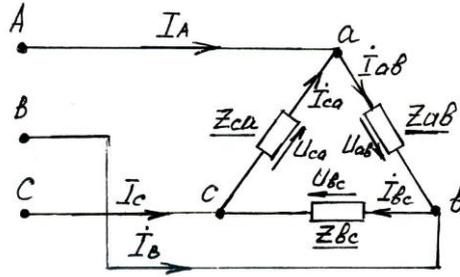


Рисунок 1.13 - Схема приемника

1. Потребляемая мощность электродвигателя из сети:

$$P_1 = \frac{P_H}{\eta} = \frac{10 \cdot 10^3}{0.82} = 12.2 \text{ кВт}$$

2. Линейные токи электродвигателя

$$I_A = I_B = I_C = I_{\text{л}} = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot \cos \varphi} = \frac{12.2 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.87} \cong 37 \text{ А}$$

3. Мощность одной фазы двигателя

$$P_{\phi} = \frac{P_1}{3} = \frac{12.2 \cdot 10^3}{3} = 4070 \text{ Вт} = 4,07 \text{ кВт}$$

4. Активное сопротивление фазы двигателя

$$R_{\phi} = \frac{P_{\phi}}{I_{\phi}^2} = \frac{4,07 \cdot 10^3}{\left(\frac{37}{\sqrt{3}}\right)^2} = 8,9 \text{ Ом}$$

где I_{ϕ} - фазный ток приемника при соединении обмотки по схеме треугольник

$$I_{\phi\Delta} = \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{37}{\sqrt{3}} = 21,39 \text{ А}$$

5. Индуктивное сопротивление обмотки приемника

$$X_{\phi} = z_{\phi} \cdot \sin \varphi = 10,3 \cdot 0,87 = 5,07 \text{ Ом}$$

где z_{ϕ} - полное сопротивление одной фазы двигателя

$$z_{\phi} = \frac{U_{\phi}}{I_{\phi}} = \frac{220}{\frac{37}{\sqrt{3}}} = 10,3 \text{ Ом}$$

6. Запишем фазное напряжение двигателя в комплексной форме

$$\dot{U}_{ab} = 220 \text{ В}$$

$$\dot{U}_{bc} = 220 e^{-j120^{\circ}} \text{ В}$$

$$\dot{U}_{ca} = 220 e^{j120^{\circ}} \text{ В}$$

7. Фазные токи приемника в комплексной форме при условии $\cos \varphi = 0,87$ ($\varphi = 29,6^{\circ}$)

$$\dot{I}_{ab} = I_{\phi} \cdot e^{-j29,6^{\circ}} = 21,3 \cdot e^{-j29,6^{\circ}} \text{ А}$$

$$\dot{I}_{bc} = I_{\phi} \cdot e^{-j149,8^{\circ}} = 21,3 \cdot e^{-j149,8^{\circ}} \text{ А}$$

$$\dot{I}_{ca} = I_{\phi} \cdot e^{j90,4^{\circ}} = 21,3 \cdot e^{j90,4^{\circ}} \text{ А}$$

8. Строим векторную диаграмму токов и напряжений в масштабе на комплексной плоскости.

$$\text{Примем масштаб: } m_U = \frac{50 \text{ В}}{1 \text{ мм}}; m_I = \frac{5 \text{ А}}{1 \text{ мм}}$$

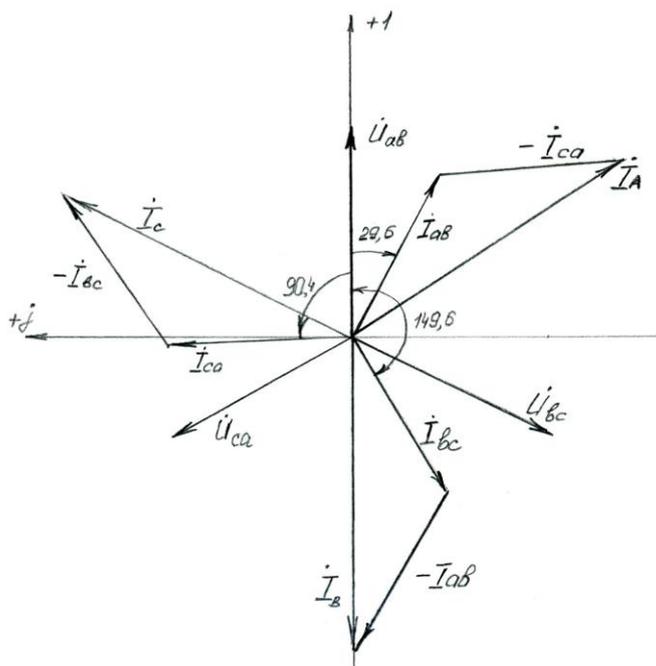


Рисунок 1.14 – Векторная диаграмма токов и напряжений двигателя.

Задача 2. Трёхфазный двигатель мощностью 7 кВт, напряжением 127/220В работает с коэффициентом мощности 0,78 и КПД равным 87%. Необходимо определить:

- токи в проводах, с помощью которых двигатель присоединяется к сети;
- сопротивление фаз обмоток двигателя;
- построить векторную диаграмму токов и напряжений электродвигателя.

Решение

1. Потребляемая мощность электродвигателя из сети:

$$P_1 = \frac{P_H}{\eta} = \frac{7 \cdot 10^3}{0.87} = 8,05 \text{ кВт}$$

2. Токи в подводящих проводах

- при соединении обмоток по схеме звезда

$$I_{Л_Y} = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_{Л_Y} \cdot \cos \varphi} = \frac{8,05 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,78} \cong 27,1 \text{ А}$$

- при соединении фаз обмоток по схеме треугольник

$$I_{Л_\Delta} = \frac{P_1}{\sqrt{3} \cdot U_{Л_\Delta} \cdot \cos \varphi} = \frac{8,05 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 127 \cdot 0,78} \cong 47 \text{ А}$$

3. Сопротивление фаз обмоток

- активное сопротивление фазы

$$R_\phi = \frac{P_\phi}{I_{\phi_Y}^2} = \frac{P_1/3}{I_{\phi_Y}^2} = \frac{8,05/3 \cdot 10^3}{27,1^2} = 3,65 \text{ Ом}$$

- полное сопротивление фазы

$$z_\phi = \frac{U_{\phi_Y}}{I_{\phi_Y}} = \frac{127}{27,1} = 4,7 \text{ Ом}$$

- индуктивное сопротивление фазы

$$X_\phi = \sqrt{z_\phi^2 - R_\phi^2} = \sqrt{4,7^2 - 3,65^2} = 2,96 \text{ Ом}$$

4. Запишем комплексы фазных напряжений при соединении обмоток по схеме «звезда»

$$\dot{U}_a = U_{\phi_Y} \cdot e^{j\varphi} = 127 \cdot e^{j0^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_b = U_{\phi_Y} \cdot e^{-j120^\circ} = 127 e^{-j120^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_c = U_{\phi_Y} \cdot e^{j120^\circ} = 127 e^{j120^\circ} \text{ В}$$

5. Комплексы фазных токов при соединении обмоток по схеме «звезда»

$$\dot{I}_a = I_{\phi_Y} \cdot e^{-j39^\circ} = 21.3 \cdot e^{-j39^\circ} \text{ А}$$

$$\dot{I}_b = I_{\phi_Y} \cdot e^{-j159^\circ} = 27.1 \cdot e^{-j159^\circ} \text{ А}$$

$$\dot{I}_c = I_{\phi_Y} \cdot e^{j81^\circ} = 27.1 \cdot e^{j81^\circ} \text{ А}$$

6. Векторная диаграмма токов и напряжений приемника представлена на рисунке 1.15.

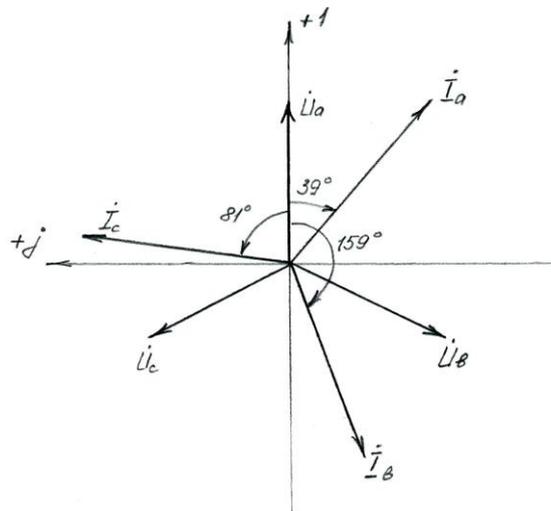


Рисунок 1.15 – Векторная диаграмма токов и напряжений приемника

Задача 3. Приёмник электрической энергии включен в трехфазную четырехпроводную сеть с действующим значением фазного напряжения $U_\phi = 127 \text{ В}$ и частотой $f = 50 \text{ Гц}$. В фазу А включен резистор сопротивлением $R_a = 181.4 \text{ Ом}$, в фазу В – конденсатор емкостью $17,5 \text{ мкФ}$. Определить характер (емкостной, индуктивный, активный) нагрузки, включенной в фазу С, её полное, активной и реактивное сопротивления, необходимые для того, чтобы ток в нейтральном проводе был равен нулю.

Решение.

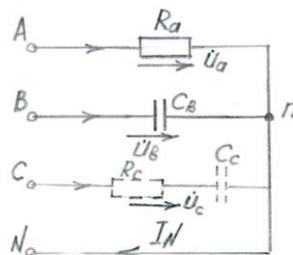


Рисунок 1.16 – Расчётная схема

1. Ёмкостное сопротивление фазы В (рисунок 1.16)

$$X_{CB} = \frac{1}{\omega C_B} = \frac{1}{2\pi f \cdot C_B} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 17.5 \cdot 10^{-6}} \cong 182 \text{ Ом}$$

2. Комплексы фазных напряжений

$$\dot{U}_a = U_{\Phi_Y} \cdot e^{j\varphi} = 127 \cdot e^{j0^\circ} B$$

$$\dot{U}_b = U_{\Phi_Y} \cdot e^{-j120^\circ} = 127 e^{-j120^\circ} B$$

$$\dot{U}_c = U_{\Phi_Y} \cdot e^{j120^\circ} = 127 e^{j120^\circ} B$$

На рисунке 1.17 представлена векторная диаграмма напряжений приемника.

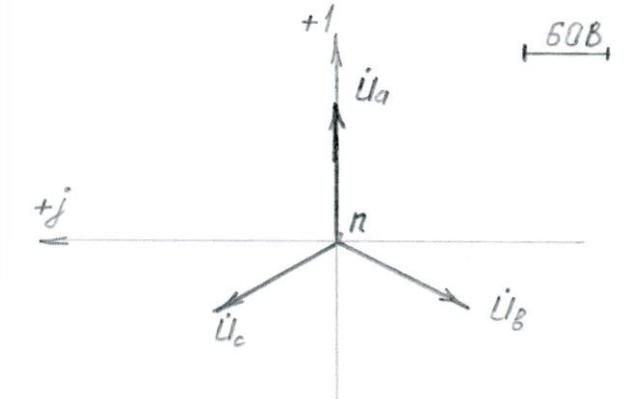


Рисунок 1.17 - Векторная диаграмма напряжений приемника

3. Фазные токи приемника

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{R_a} = \frac{127}{181.4} = 0.7 A$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{X_{CB}} = \frac{127 e^{-j120^\circ}}{182 \cdot e^{-j90^\circ}} = 0.7 e^{-j30^\circ} = (0.6 - j0.35) A$$

4. Ток в фазе С определяем из условия, что

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

отсюда $\dot{I}_C = -\dot{I}_A - \dot{I}_B = -0.7 - (0.6 - j0.35) = -1.3 + j0.35 = 1.346 e^{j165^\circ}$

5. Полное сопротивление фазы С

$$\underline{z}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{127 e^{j120^\circ}}{1.346 e^{j165^\circ}} = 94.35 e^{-j45^\circ} = (66.5 - j66.5) \Omega$$

6. Отсюда, чтобы ток в нейтральном проводе был бы равен нулю, необходимо в фазу С включить резистор сопротивлением $R_C = 66.5 \Omega$, и последовательно с ним включить емкость

$$7. C_C = \frac{1}{\omega |x_{Cc}|} = \frac{1}{314 \cdot 66.5 \cdot 10^{-6}} = 47,89 \mu\text{кФ}.$$

где x_{Cc} - ёмкостное сопротивление фазы С, Ом, $x_{Cc} = -66,5 \Omega$

8. Строим векторную диаграмму токов и напряжений в масштабе на комплексной плоскости.

$$\text{Примем масштаб: } m_U = \frac{60 B}{1 \text{ мм}}; m_I = \frac{0,85 A}{1 \text{ мм}} \text{ (рис. 1.18)}$$

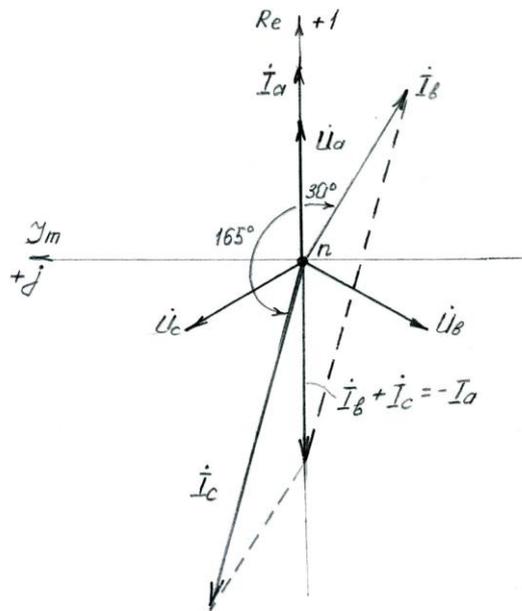


Рисунок 1.18 - Векторную диаграмму токов и напряжений приемника

8. Проверка $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = I_N = 0.7 + (0.6 - j0.35) + (-1.3 + j0.35) = 0$, что соответствует условию $I_N = 0$.

Задача 4. Потребляемая активная мощность трехфазного приемника, обмотки которого соединены по схеме «треугольник», равна 3000 Вт. В каждую фазу (рис. 1.19) включены последовательно резистор сопротивлением $R_K = 30 \text{ Ом}$ и катушка индуктивности с индуктивностью $L_K = 0.24 \text{ Гн}$, а параллельно им подключен конденсатор емкостью $C = 120 \text{ мкФ}$. Необходимо определить:

- комплексы действующих значений тока и напряжения в каждой фазе;
- комплексы линейных токов;
- полную потребляемую мощность;
- коэффициент мощности приемника;
- построить векторную диаграмму токов и напряжений приемника.

Решение

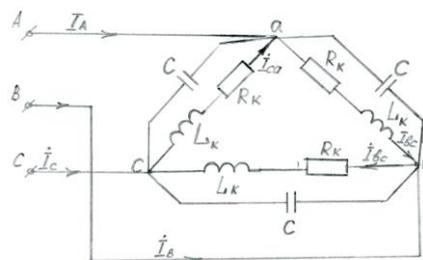


Рисунок 1.19 – Расчётная схема

1. Индуктивное сопротивление катушки

$$X_{CB} = 2\pi f \cdot L_K = 2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 0.24 \approx 75.4 \text{ Ом}$$

2. Комплекс сопротивления катушки

$$\underline{z}_K = R_K + jX_K = 30 + j75.4 = 81.1e^{j68^\circ} \text{ Ом}$$

3. Ёмкостное сопротивление конденсатора

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 120 \cdot 10^{-6}} \cong 26.6 \text{ Ом}$$

4. Комплекс сопротивлений фазы приемника

$$\underline{z}_\phi = \frac{z_K \cdot (-jX_C)}{z_K - jX_C} = \frac{81.1e^{j68^\circ} \cdot 26.6e^{-j90^\circ}}{(30 + j75.4) - j26.6} = \frac{2152.4e^{-j22^\circ}}{30 + j49.8} = \frac{2152.4e^{-j22^\circ}}{58.2e^{j59^\circ}} e^{-j22^\circ} = 37e^{-j81^\circ} = (5.8 - j36.6) \text{ Ом}$$

5. Отсюда имеем:

$$R_\phi = 5.8 \text{ Ом}$$

$$X_\phi = -36.6 \text{ Ом}$$

С учетом найденных значений R_ϕ, X_ϕ расчётная схема (рис. 1.19) может быть представлена схемой, рис.1.20.

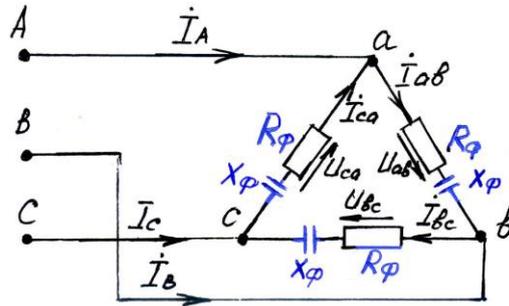


Рисунок 1.20 – Упрощенная расчётная схема

6. Ток в фазе приемника по величине

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_\phi = \sqrt{\frac{P_\phi}{R_\phi}} = \sqrt{\frac{3000}{5.8}} \cong 13.1 \text{ А}$$

7. Комплексы фазных токов приемника

$$\dot{I}_{ab} = I_\phi \cdot e^{-j\phi_{ab}} = 13.1 \cdot e^{j0^\circ} = 13.1 \text{ А}$$

$$\dot{I}_{bc} = I_\phi \cdot e^{-j120^\circ} = 13.1 \cdot e^{-j120^\circ} = (-6.55 - j11.35) \text{ А}$$

$$\dot{I}_{ca} = I_\phi \cdot e^{j120^\circ} = 13.1 \cdot e^{j120^\circ} = (-6.55 + j11.35) \text{ А}$$

8. Линейные токи приемника

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = 13.1 - (-6.5 + j11.35) = 19.6 - j11.35 = 22.65e^{-j30^\circ} \text{ А}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = (-6.55 + j11.35) - 13.1 = (-19.65 - j11.35) = 22.65e^{j210^\circ} \text{ А}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = (-6.55 + j11.35) - (-j11.35) = j22.7 = 22.7e^{j90^\circ} \text{ А}$$

9. Комплексы фазных напряжений

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_{ab} \cdot \underline{z}_\phi = 13.1 \cdot 37e^{-j81^\circ} = 487e^{-j81^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{I}_{bc} \cdot \underline{z}_\phi = 13.1e^{-j120^\circ} \cdot 37e^{-j81^\circ} = 487e^{-j201^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{I}_{ca} \cdot \underline{z}_\phi = 13.1e^{j120^\circ} \cdot 37e^{-j81^\circ} = 487e^{j39^\circ} \text{ В}$$

10. Векторная диаграмма фазных напряжений, фазных и линейных токов представлена на рисунке 1.21.

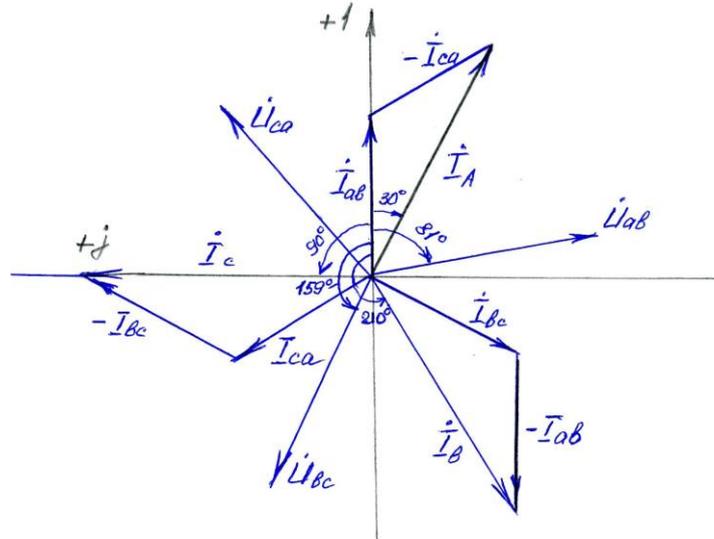


Рисунок 1.21 – Векторная диаграмма фазных и линейных токов приемника

11. Комплексы полных фазных мощностей приемника

$$\dot{S}_{ab} = \dot{U}_{ab} \cdot I'_{ab} = 487e^{-j81^\circ} \cdot 13.1 = 6380e^{-j81^\circ} = 998.1 - j6301.5 \text{ VA}$$

$$P_{ab} = 998.1 \text{ Вт} \approx 1 \text{ кВт}$$

$$Q_{ab} = -6301.5 \text{ вар}$$

$$\dot{S}_{bc} = \dot{U}_{bc} \cdot I'_{bc} = 487e^{-j201^\circ} \cdot 13.1e^{j120^\circ} = 6380e^{j120^\circ} = 998.1 - j6301.5 \text{ VA}$$

$$P_{bc} = 998.1 \text{ Вт} \approx 1 \text{ кВт}$$

$$Q_{bc} = -6301.5 \text{ вар}$$

$$\dot{S}_{ca} = \dot{U}_{ca} \cdot I'_{ca} = 487e^{j39^\circ} \cdot 13.1e^{-j120^\circ} = 6380e^{j81^\circ} = 998.1 - j6301.5 \text{ VA}$$

$$P_{ca} = 998.1 \text{ Вт} \approx 1 \text{ кВт}$$

$$Q_{ca} = -6301.5 \text{ вар}$$

11. Полная мощность приемника

$$\dot{S} = \dot{S}_{ab} + \dot{S}_{bc} + \dot{S}_{ca} = (998.1 - j6301.5) + (998.1 - j6301.5) + (998.1 - j6301.5) = 2994.3 - j18904.5 \text{ VA}$$

$$P = 2994.3 \text{ Вт} \approx 3 \text{ кВт}$$

$$Q_{ca} = -18904.5 \text{ вар}$$

$$S_{ca} = 19140 \text{ ВА}$$

12. Полная мощность приемника

$$S = 3U_\phi \cdot I_\phi = 3 \cdot 487 \cdot 13.1 \cong 19140 \text{ ВА}$$

13. Коэффициент мощности приемника

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{2994.3}{19140} = 0.156$$

Задача 5. К трёхфазной четырехпроводной сети с действующим значением линейного напряжения $U_L = 380 \text{ В}$ подключены три группы ламп накаливания по пять ламп параллельно мощностью $P_L = 60 \text{ Вт}$ каждая (рис. 1.22). $P_L = 60 \text{ Вт}$

Необходимо определить:

- Линейные и фазные токи;
- Ток в нейтральном проводе;
- Сопротивление каждой фазы;

- Напряжение каждой фазы при обрыве нейтрального провода;
- Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

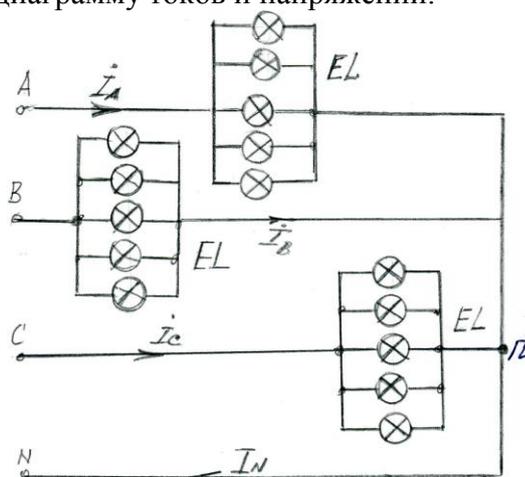


Рисунок 1.22 – Расчётная схема к задаче 5.

Решение

1. Мощность ламп в одной фазе

$$P_a = P_b = P_c = 60 \cdot 5 = 300 \text{ Вт}$$

2. Фазное напряжение

$$U_\phi = \frac{U_{\text{Л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}$$

3. Линейные токи приемника

$$I_A = I_B = I_C = I_\phi = \frac{P_\phi}{U_\phi} = \frac{300}{220} = 1,36 \text{ А};$$

4. Ток одной лампочки

$$I_{\text{Л}} = \frac{I_{\text{Л}}}{n} = \frac{1,38}{5} = 0,27 \text{ А}$$

5. Сопротивление одной фазы ламп

$$R_\phi = \frac{U_\phi}{I_\phi} = \frac{220}{1,36} = 161,8 \text{ Ом};$$

6. Сопротивление одной лампы

$$R_{\text{Л}} = \frac{P_{\text{Л}}}{I_{\text{Л}}^2} = \frac{60}{0,27^2} = 823 \text{ Ом};$$

7. Фазные токи в комплексной форме

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{\phi_a} = I_{\phi_a} \cdot e^{j0^\circ} = 1,36 \cdot e^{j0^\circ} = 1,36 \text{ А}$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_{\phi_b} = I_{\phi_b} \cdot e^{-j120^\circ} = 1,36 \cdot e^{-j120^\circ} = (-0,68 - j1,18) \text{ А}$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_{\phi_c} = I_{\phi_c} \cdot e^{j120^\circ} = 1,36 \cdot e^{j120^\circ} = (-0,68 + j1,18) \text{ А}$$

8. Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = I_N = 1,36 + (-0,68 - j1,18) + (-0,68 + j1,18) = 0;$$

9. Напряжение смещения при обрыве нейтрального провода будет равно нулю, так как нагрузка симметричная $R_{\phi a} = R_{\phi b} = R_{\phi c} = 161,8 \text{ Ом}$ и напряжение на лампах будут равны 220В, то есть не меняются;

10. Векторные диаграммы токов и напряжений представлены на рисунке 1.23.

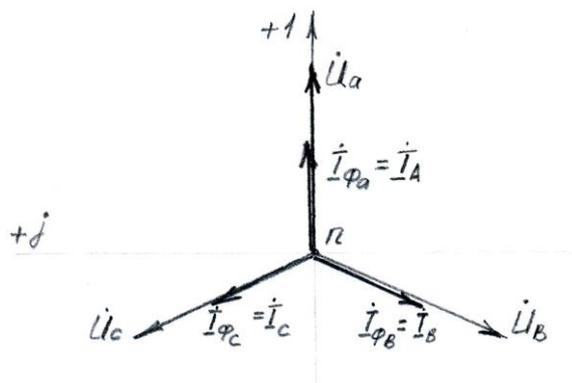


Рисунок 1.23 – Векторная диаграмма токов и напряжений приемника

Задача 6. Приемник, обмотки которого соединены в “звезду” без нулевого провода, питается от сети напряжением 208 В. Известны сопротивления фаз обмоток приемника:

$$\underline{Z}_A = (8 + j6) \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_B = (8 - j6) \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_C = 25 \text{ Ом}.$$

Требуется определить:

- фазные и линейные токи приемника;
- активную, реактивную и полную мощности приемника;
- коэффициент мощности приемника;
- построить векторные диаграммы токов и напряжений;
- рассчитать параметры цепи при обрыве провода C , построить векторные диаграммы токов и напряжений;
- рассчитать параметры цепи и построить векторные диаграммы токов и напряжений при коротком замыкании фазы A (рис.1.24)

Нормальный режим работы

Комплексы напряжений фаз генератора

$$\dot{U}_A = \frac{\dot{U}_L}{\sqrt{3}} \cdot e^{j0} = \frac{208}{\sqrt{3}} \cdot 1 = 120 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = \frac{\dot{U}_L}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j120} = 120 \cdot e^{-j120} = (-60 - j104) \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{U}_L}{\sqrt{3}} \cdot e^{j120} = (-60 + j104) \text{ В}.$$

Комплексы проводимостей фаз генератора

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{(8 + j6)} = \frac{1}{10 \cdot e^{j36^\circ 50'}} = 0,1 \cdot e^{-j36^\circ 50'} = (0,08 - j0,06) \text{ См};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{(8 - j6)} = 0,1 \cdot e^{j36^\circ 50'} = (0,08 + j0,06) \text{ См};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{25} = 0,04 \text{ См}.$$

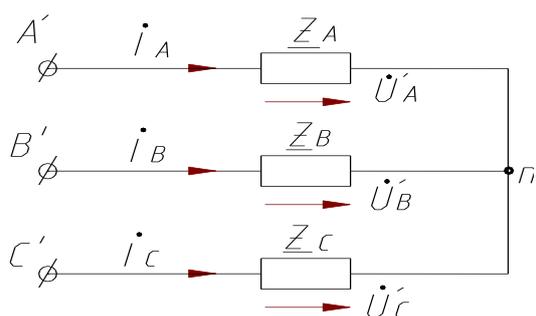


Рисунок 1.24 – Схема соединения приемника в «звезду»

$$\begin{aligned} \dot{U}_{Nn} &= \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\ &= \frac{120(0,08 - j0,06) + (-60 - j104)(0,08 + j0,06) + (-60 + j104)0,04}{(0,08 - j0,06) + (0,08 + j0,06) + 0,04} = \\ &= \frac{8,64 - j14,96}{0,2} = (43,2 - j74,8) = 86,4 \cdot e^{-j60} \text{ В.} \end{aligned}$$

Комплексы фазных напряжений приемника.

$$\begin{aligned} \dot{U}'_A &= \dot{U}_A - \dot{U}_{Nn} = 120 - (43,2 - j74,8) = \\ &= (76,8 + j74,8) = 107,2 \cdot e^{j44^\circ 15'} \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\dot{U}'_B = \dot{U}_B - \dot{U}_{Nn} = (-60 - j104) - (43,2 - j74,8) = (-103,2 - j29,2) = 107,2 \cdot e^{-j163^\circ 45'} = 107,2 \cdot e^{j196^\circ 15'} \text{ В;}$$

$$\dot{U}'_C = \dot{U}_C - \dot{U}_{Nn} = (-60 + j104) - (43,2 - j74,8) = (-103,2 + j178,8) = 206,5 \cdot e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Комплексы токов приемника

$$\dot{I}'_A = \dot{I}_A = \dot{U}'_A \cdot \underline{Y}_A = 107,2 \cdot e^{j44^\circ 15'} \cdot 0,1 \cdot e^{-j36^\circ 50'} = 10,72 \cdot e^{j7^\circ 25'} = (10,63 + j1,38) \text{ А;}$$

$$\dot{I}'_B = \dot{I}_B = \dot{U}'_B \cdot \underline{Y}_B = 107,2 \cdot e^{j196^\circ 15'} \cdot 0,1 \cdot e^{j36^\circ 50'} = 10,72 \cdot e^{j233^\circ 5'} = (-6,5 - j8,53) \text{ А;}$$

$$\dot{I}'_C = \dot{I}_C = \dot{U}'_C \cdot \underline{Y}_C = 206,5 \cdot e^{j120^\circ} \cdot 0,04 = 8,26 \cdot e^{j120^\circ} = (-4,13 + j7,15) \text{ А.}$$

Проверка: $\dot{I}'_A + \dot{I}'_B + \dot{I}'_C = 0$

$$(10,63 + j1,38) + (-6,5 - j8,53) + (-4,13 + j7,15) = 0 + j0 = 0.$$

Строим векторную диаграмму токов и напряжений (рис.1.25), приняв масштабы для тока $m_I = 0,2 \text{ А / мм}$ и напряжения $m_U = 2 \text{ В / мм}$.

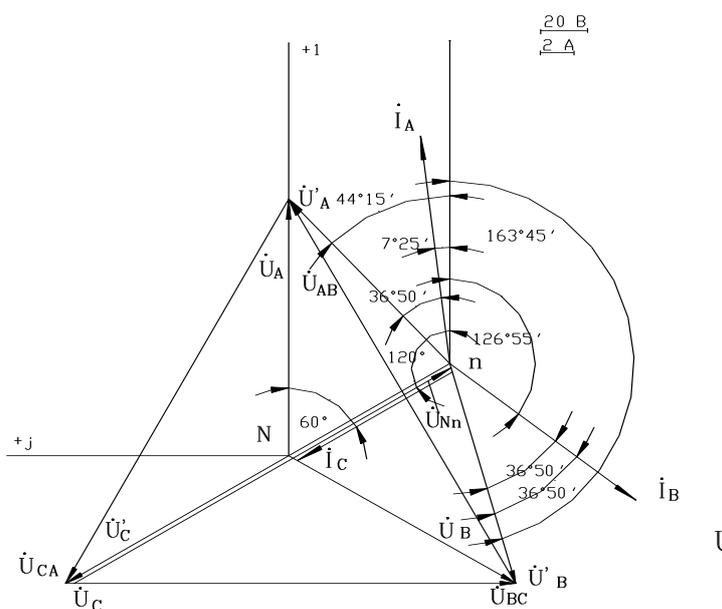


Рисунок 1.25 – Векторная диаграмма токов и напряжений при нормальном режиме работы приемников

Обрыв провода C

При обрыве провода C имеем $Y_C = 0$; $I_C = 0$.

Комплекс напряжения смещения

$$\begin{aligned} \dot{U}_{Nn} &= \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B} = \\ &= \frac{120(0,08 - j0,06) + (-60 - j104)(0,08 + j0,06)}{(0,08 - j0,06) + (0,08 + j0,06)} = \frac{11,04 - j19,12}{0,16} = (69 - j119,5) = 138 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Комплексы фазных напряжений приемника

$$\dot{U}'_A = \dot{U}_A - \dot{U}_{Nn} = 120 - (69 - j119,5) = (51 + j119,5) = 129,9 \cdot e^{j66^\circ 50'} \text{ В;}$$

$$\dot{U}'_B = \dot{U}_B - \dot{U}_{Nn} = (-60 - j104) - (69 - j119,5) = (-129 + j15,5) = 129,9 \cdot e^{j173^\circ 10'} \text{ В;}$$

$$\dot{U}'_C = \dot{I}'_C \underline{Z}_C = 0 \cdot 25 = 0.$$

Комплексы фазных токов приемника

$$\dot{I}'_A = \dot{I}_A = \dot{U}'_A \cdot \underline{Y}_A = 129,9 \cdot e^{j66^\circ 50'} \cdot 0,1 e^{-j36^\circ 50'} = 12,99 \cdot e^{j30^\circ} = (11,23 + j6,5) \text{ А;}$$

$$\dot{I}'_B = \dot{I}_B = \dot{U}'_B \cdot \underline{Y}_B = 129,9 \cdot e^{j173^\circ 10'} \cdot 0,1 e^{j36^\circ 50'} = 12,99 \cdot e^{j210^\circ} = (-11,23 - j6,5) \text{ А;}$$

$$\dot{I}'_C = \dot{I}_C = 0.$$

Строим векторную диаграмму токов и напряжений. Принимаем масштаб токов $m_I = 0,4$ А/мм и напряжения $m_U = 5$ В/мм (рис.1.26).

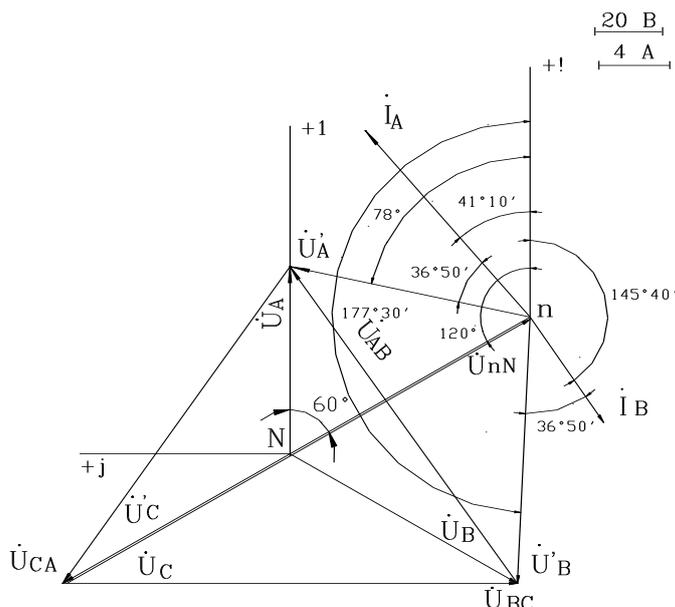


Рисунок 1.26 – Векторная диаграмма токов и напряжений при обрыве провода С

Короткое замыкание фазы А

При коротком замыкании фазы А проводимость этой фазы $Y_A = \infty$.

$$\dot{U}_{Nn} = \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{Y}_A \left(\dot{U}_A \cdot 1 + \dot{U}_B \frac{\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A} + \dot{U}_C \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A} \right)}{\underline{Y}_A \left(1 + \frac{\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A} + \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A} \right)} = \dot{U}_A = 120 \text{ В.}$$

Комплексы фазных напряжений приемника

$$\dot{U}'_A = \dot{U}_A - \dot{U}_{Nn} = 120 - 120 = 0;$$

$$\dot{U}'_B = \dot{U}_B - \dot{U}_{Nn} = (-60 - j104) - 120 = (-180 - j104) = 207,9 \cdot e^{j210^\circ} = 207,9 \cdot e^{-j150^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}'_C = \dot{U}_C - \dot{U}_{Nn} = (-60 + j104) - 120 = (-180 + j104) = 207,9 \cdot e^{j150^\circ} \text{ В.}$$

Комплексы фазных токов приемника

$$\dot{I}'_B = \dot{I}_B = \dot{U}'_B \cdot \underline{Y}_B = 207,9 \cdot e^{-j150^\circ} \cdot 0,1 \cdot e^{j36^\circ 50'} = 207,9 \cdot e^{-j113^\circ 10'} = (-8,11 - j19,14) \text{ А;}$$

$$\dot{I}'_C = \dot{I}_C = \dot{U}'_C \cdot \underline{Y}_C = 207,9 \cdot e^{j150^\circ} \cdot 0,04 = 8,32 \cdot e^{j150^\circ} = (-7,21 + j4,16) \text{ А;}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}'_A &= -(\dot{I}'_B + \dot{I}'_C) = [(-8,11 - j19,14) + (-7,21 + j4,16)] = -(-15,32 - j14,98) = \\ &= (15,32 + j14,92) = 21,5 \cdot e^{j44^\circ 20'} \text{ А.} \end{aligned}$$

Строим векторную диаграмму токов и напряжений при коротком замыкании фазы А приемника (рис.1.27). Принимаем масштаб токов $m_I = 0,2 \text{ А/мм}$ и напряжения $m_U = 2 \text{ В/мм}$.

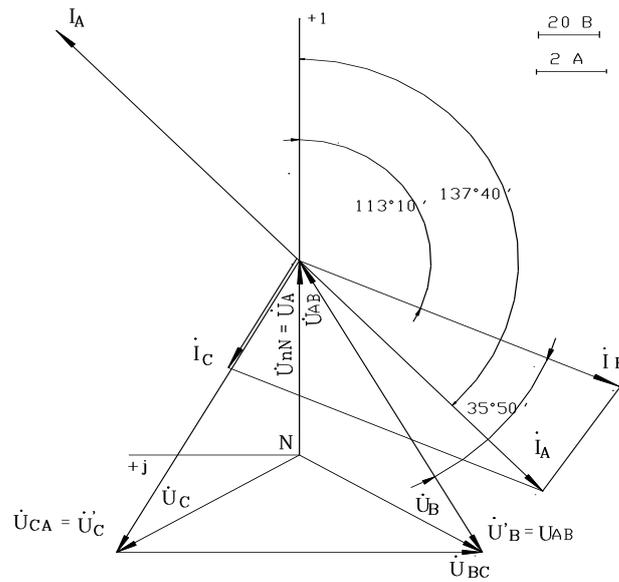


Рисунок 1.27 – Векторная диаграмма токов и напряжений при коротком замыкании фазы А приемника

Комплексы полной мощности фаз приемника при нормальной работе

$$\dot{S}_A = \dot{U}'_A \cdot I_A^* = 107,2 \cdot e^{j44^\circ 15'} \cdot 10,72 \cdot e^{-j7^\circ 25'} = 1149,18 \cdot e^{j36^\circ 50'} = (919 + j690) \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$P_A = 919 \text{ Вт}; Q_A = 690 \text{ вар.}$$

$$\dot{S}_B = \dot{U}'_B \cdot I_B^* = 107,2 \cdot e^{j196^\circ 15'} \cdot 10,72 \cdot e^{-j233^\circ 5'} = 1149,18 \cdot e^{-j36^\circ 50'} = (919 - j690) \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$P_B = 919 \text{ Вт}; Q_B = -690 \text{ вар.}$$

$$\dot{S}_C = \dot{U}'_C \cdot I_C^* = 206,5 \cdot e^{j120^\circ} \cdot 8,26 \cdot e^{-j120^\circ} = 1705,7 \text{ В}\cdot\text{А};$$

$$P_C = 1705,7 \text{ Вт}; Q_C = 0$$

$$S = \sqrt{\sum P^2 + \sum Q^2} = \sqrt{3543,7^2 + 0} = 3543,7 \text{ В}\cdot\text{А}.$$

В нашем примере реактивная мощность приемника равна 0 ($Q_{np} = 0$), а полная мощность является активной мощностью приемника, т.е. $S_{np} = P_{np}$. и $\cos \varphi_{np} = 1$

$$\cos \varphi_{np} = \frac{P_{np}}{S_{np}} = \frac{P_A + P_B + P_C}{S_{np}} = \frac{3543,7}{3543,7} = 1.$$

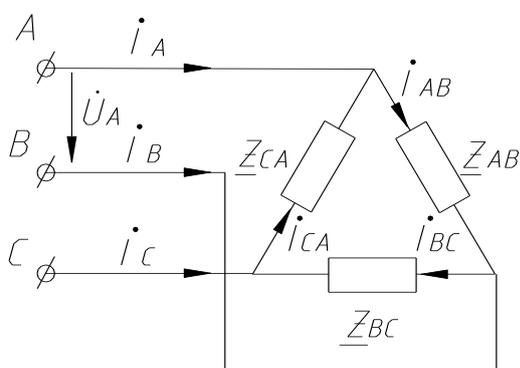


Рисунок 1.28 - Соединение приемника в “треугольник”

Требуется определить:

- фазные и линейные токи;
- построить векторные диаграммы токов и на напряжений при:
 - а) нормальном режиме работы приемника;
 - б) обрыве фазы CA ;
 - с) обрыве провода фазы B .

Нормальный режим работы приемника

Комплексы фазных напряжений

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= 220e^{j0^\circ} = 220 \text{ В}; \\ \dot{U}_{BC} &= 220e^{-j120^\circ} = (-110 - j190) \text{ В}; \\ \dot{U}_{CA} &= 220e^{j120^\circ} = (-110 + j190) \text{ В}.\end{aligned}$$

Комплексы фазных токов приемника

$$\dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{220}{4 + j3} = \frac{220}{5e^{j36^\circ 50'}} = 44e^{-j36^\circ 50'} = (35,2 - j26,4) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{10e^{j36^\circ 50'}} = 22e^{-j156^\circ 50'} = (-20,2 - j8,64) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{220e^{j120^\circ}}{10} = 22e^{j120^\circ} = (-11 + j19) \text{ А};$$

Комплексы линейных токов

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = (35,2 - j26,4) - (-11 + j19) = (46,2 - j45,4) = 64,8e^{-j44^\circ 30'} \text{ А}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = (-20,2 - j8,64) - (35,2 - j26,4) = (-55,4 + j17,16) = 58e^{j162^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = (-11 + j19) - (-20,2 - j8,64) = (9,2 + j27,64) = 29,2e^{j73^\circ} \text{ А};\end{aligned}$$

Задача 7. В трехфазную сеть с линейным напряжением 220 В включен приемник (рис. 1.28), фазы которого имеют сопротивления: $\underline{Z}_{AB} = (4 + j3) \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{BC} = (8 + j6) \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{CA} = 10 \text{ Ом}$. Обмотки приемника соединены в “треугольник”

Проверка: $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$;

$$(46,2 - j45,4) + (-55,4 + j17,16) + (9,2 + j27,64) = 0.$$

Строим векторную диаграмму токов и напряжений (рис. 1.29). Примем масштабы напряжений $m_U = 4 \text{ В/мм}$ и токов $m_I = 1 \text{ А/мм}$.

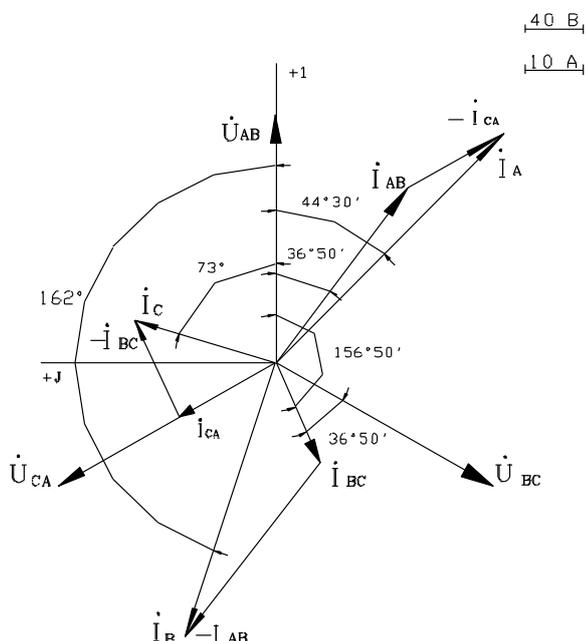


Рисунок 1.29 – Векторная диаграмма токов и напряжений при нормальном режиме работы

Обрыв фазы СА приемника

При обрыве фазы СА схема (рис. 1.30) преобразуется в схему (рис. 1.31), по которой и произведем дальнейший расчет.

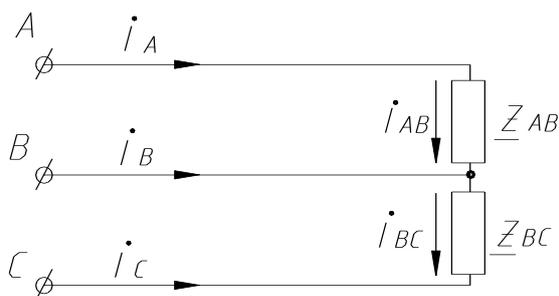


Рисунок 1.30 - Расчетная схема

При обрыве фазы СА схема (рис. 1.30) преобразуется в схему (рис. 1.31), по которой и произведем дальнейший расчет.

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} = (35,2 - j26,4) = 44e^{-j36^\circ 50'} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_{BC} = -(20,2 - j8,64) = (20,2 + j8,64) = 22e^{j23^\circ 10'} \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = (-20,2 - j8,64) - (35,2 - j26,4) = \\ &= (-55,4 + j17,16) = 58e^{j162^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{BC} = -\dot{I}_C = 22e^{-j156^\circ 50'} = (-20,2 - j8,64) \text{ А};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{I}_{BC} \cdot \underline{Z}_{BC} = 22e^{-j156^\circ 50'} \cdot 10e^{j36^\circ 50'} = 220e^{-j120^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{AB} = \dot{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_{AB} = 44e^{-j36^\circ 50'} \cdot 5e^{j36^\circ 50'} = 220 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = (-\dot{U}_{BC} + \dot{U}_{AB}) = -[(-110 - j190) + 220] = (-110 + j190) = 220e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Строим векторную диаграмму токов и напряжений (рис. 1.31). Примем масштабы напряжений $m_U = 4 \text{ В/мм}$ и токов $m_I = 1 \text{ А/мм}$.

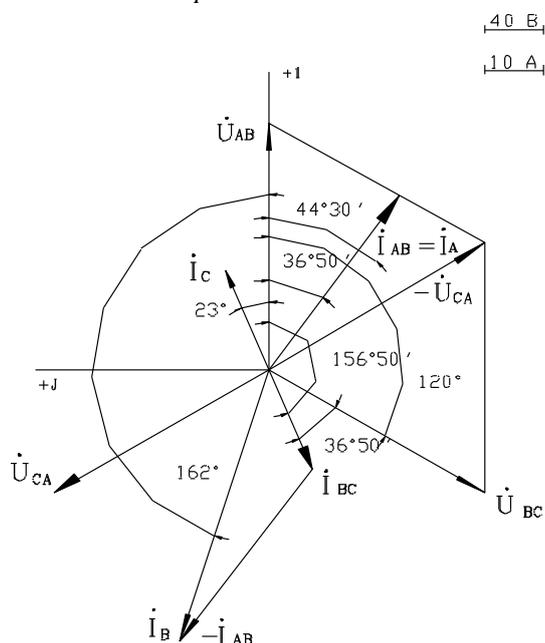
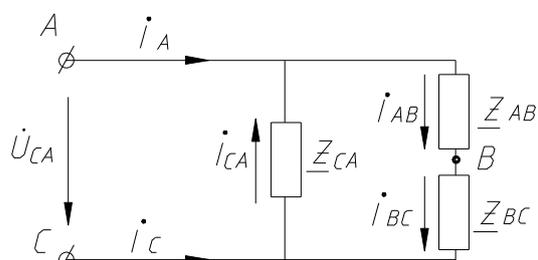


Рисунок 1.31 – Векторная диаграмма токов и напряжений при обрыве фазы СА

Обрыв провода В



При обрыве провода в фазе В исходная схема (рис. 1.32) преобразуется в однофазную цепь переменного тока (рис 1.33).

Рисунок 1.32 - Расчетная схема

Комплексы токов

$$\dot{I}_{AB} = \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC}} = \frac{220e^{j120^\circ}}{(4 + j3) + (8 + j6)} = \frac{220}{15e^{j36^\circ 50'}} = 14,67e^{j83^\circ 10'} = (1,79 + j14,52) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{220e^{j120^\circ}}{10} = 22e^{-j120^\circ} = (-11 + j19,14) \text{ А};$$

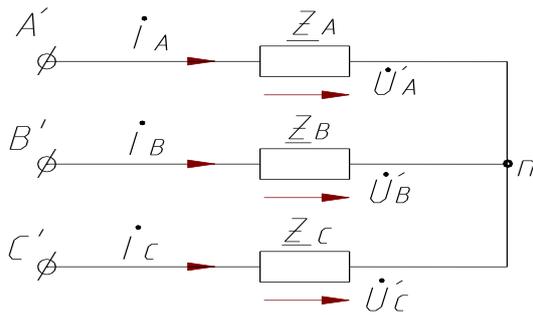
$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = (1,79 + j14,52) - (-11 + j19,14) = (12,79 - j4,62) = 13,3e^{-j16^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_A = -(12,79 - j4,62) = (-12,79 + j4,62) = 13,3e^{j164^\circ} \text{ А}.$$

Комплексы напряжений

$$\dot{U}_{AB} = \dot{I}_{AB} \cdot \underline{Z}_{AB} = 14,67e^{j83^\circ 10'} \cdot 5e^{j36^\circ 50'} = 73,35e^{j120^\circ} = (-36,67 + j63,52) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{I}_{BC} \cdot \underline{Z}_{BC} = 14,67e^{j83^\circ 10'} \cdot 10e^{j36^\circ 50'} = 146,7e^{j120^\circ} = (-73,35 + j127) \text{ В}.$$



Решение

Так как произошел обрыв нейтрального провода, то в цепи появится напряжение смещения нейтрали приемника \dot{U}_{nN} , которое равно:

Рисунок 1.34 – Расчётная схема

$$\begin{aligned}\dot{U}_{nN} &= \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_a + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_b + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{220 \cdot \frac{1}{48} + 220e^{-j120^\circ} \cdot \frac{1}{85.7} + 220e^{j120^\circ} \cdot \frac{1}{250}}{\frac{1}{48} + \frac{1}{85.7} + \frac{1}{250}} = \\ &= \frac{220 \cdot 0.0208 + (-110 - j190) \cdot 0.0117 + (-110 + j190)}{0.0208 + 0.0117 + 0.004} = \\ &= \frac{4.62 - 1.287 - 0.44 - j2.223 + 0.76}{0.0367} = \frac{2.893 - j1.483}{0.0367} = (78.83 - j39.9) = 88.4e^{-j27^\circ} \text{ В}\end{aligned}$$

где $\dot{U}_A = \dot{U}_B = \dot{U}_C = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}$, фазные напряжения генератора по модулю, В.

2. Напряжение в фазе А приемника

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN} = 220 - (78.83 - j39.9) = 141.17 + j39.9 = 146.7e^{j16^\circ} \text{ В}$$

3. Токи в фазах приемника

$$I_a = \frac{U_a}{R_a} = \frac{146.7}{48} = 3.05 \text{ А}$$

$$I_b = \frac{U_b}{R_b} = \frac{240}{85.7} = 2.8 \text{ А}$$

$$I_c = \frac{U_c}{R_c} = \frac{300}{250} = 1.2 \text{ А}$$

4. Строим векторную диаграмму токов и напряжений (рисунок 1.35).

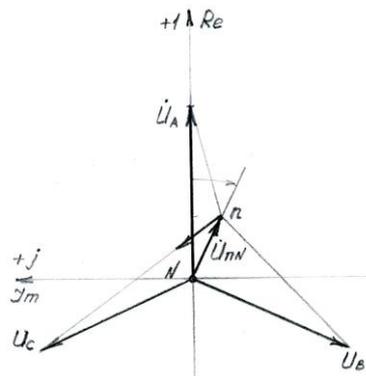


Рисунок 1.35 – Векторная диаграмма фазных токов и напряжений приемника

1.7 Задачи для самостоятельной работы.

Задача 1. Приёмник электрической энергии, соединенный по схеме «звезда» подключен к трёхфазной четырёхпроводной сети с линейным напряжением $U_{л} = 220В$ и имеет в каждой фазе сопротивление $R_{\phi} = 100Ом$. Определить значение токов в линии и в нейтральном проводе. Построить векторные диаграммы токов и напряжений.

Задача 2. К трёхфазной четырёхпроводной сети (рис. 1.36) с линейным напряжением $U_{л} = 380В$ и частотой $f = 50Гц$ подключена нагрузка, соединённая по схеме «звезда» с сопротивлением фаз $R_c = x_a = x_b = 176Ом$.

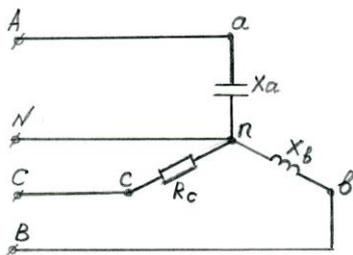


Рисунок 1.36- Исходная схема

Определить:

- полную потребляемую мощность нагрузки;
- ток в нейтральном проводе;
- значение ёмкости и индуктивности в фазах А и В;
- характер полного сопротивления фазы В (ёмкостной, индуктивный, активный), которое необходимо включить в фазу В, чтобы ток в нейтральном проводе был бы равен нулю.

Задача 3. Полная мощность, потребляемая равномерной нагрузкой, соединённой по схеме «звезда», состоящей из конденсатора, ёмкостью $C = 80\mu\text{Ф}$ и последовательно включённого с ним резистора сопротивлением $R = 51Ом$ в каждой фазе, составляет $561В \cdot А$.

Определить:

- действующие значения линейного и фазного напряжений приёмника;
- действующие значения линейных и фазных токов;
- активную и реактивную мощность;
- построить векторные диаграммы токов и напряжений приёмника.

Задача 4. В трёхфазную сеть с линейным напряжением $U_{л} = 220В$ включена равномерная активная нагрузка по схеме «звезда» с сопротивлением в каждой фазе $R_{\phi} = 20Ом$.

Определит:

- напряжения в фазах приёмника до и после обрыва фазы В;
- фазные токи приёмника до и после обрыва фазы В;
- построить векторные диаграммы токов и напряжений до и после обрыва фазы В.

Задача 5. Три группы ламп накаливания, соединённые по схеме «треугольник» (940 ламп параллельно в каждой фазе), ток потребляемый каждой лампой ($I_{\text{лампа}} = 0,4А$), подключены к источнику трёхфазного тока с линейным напряжением $127В$.

Определит:

- фазные напряжения приёмника;
- линейный ток приемника;

- сопротивление каждой фазы ламп;
- построить векторные диаграммы токов и напряжений приёмника.

Задача 6. В трёхфазную сеть с линейным напряжением $U_{л} = 120В$ включены лампы накаливания, соединённые по схеме «треугольник» с равномерной нагрузкой. Потребляемая мощность ламп $P = 3.6кВт$, а мощность одной лампы $P_a = 40Вт$.

Определит:

- число ламп в каждой фазе;
- фазные и линейные токи приёмника;
- ток одной лампы;
- построить векторные диаграммы токов и напряжений приёмника.

Задача 7. Полная мощность приёмника трёхфазной сети 14кВА; реактивная мощность 9,5квар.

Определить:

- коэффициент мощности приёмника;
- активную мощность приёмника;
- построить векторную диаграмму мощностей приёмника.

Задача 8. Приёмник, соединённый по «треугольник» подключен к трёхфазной сети с линейным напряжением $U_{л} = 220В$. Известно, что ток в фазе bc равен $I_{bc} = 3.5e^{-j45^\circ} А$, в фазе CA $I_{ca} = 5А$, и линейный ток в проводе А равен $I_A = 9e^{j10^\circ} А$.

Определить:

- линейные токи в проводах В и С;
- фазный ток в фазе ab;
- построить векторную диаграмму токов.

1.8 Использование метода симметричных составляющих для расчёта трёхфазных цепей

Любую несимметричную трёхфазную ЭДС, напряжений или токов можно разложить в виде суммы трёх симметричных трёхфазных систем: нулевой (E_0), прямой (E_1) и обратной (E_2) последовательности, которые называются симметричными составляющими чередования фаз данной несимметричной системы.

$$\begin{cases} \dot{E}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C) \\ \dot{E}_1 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{E}_A + a\dot{E}_B + a^2\dot{E}_C) \\ \dot{E}_2 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{E}_A + a^2\dot{E}_B + a\dot{E}_C) \end{cases} \quad (1.18)$$

Формулы 1.18 служат для нахождения симметричных составляющих $E_0; E_1; E_2$ по известной ЭДС $\dot{E}_A; \dot{E}_B; \dot{E}_C$ несимметричной системы.

Если известны симметричные составляющие чередования последовательности фаз $E_0; E_1; E_2$, то можно найти несимметричную систему ЭДС $\dot{E}_A; \dot{E}_B; \dot{E}_C$ по формулам

$$\begin{cases} \dot{E}_A = \dot{E}_0 + \dot{E}_1 + \dot{E}_2 \\ \dot{E}_B = \dot{E}_0 + a^2 \dot{E}_1 + a \dot{E}_2 ; \\ \dot{E}_C = \dot{E}_0 + a \dot{E}_1 + a^2 \dot{E}_2 \end{cases} \quad (1.19)$$

Здесь $a = e^{j120^\circ}$ и $a^2 = e^{j240^\circ}$ - поворотные множители.

$$\begin{cases} a = e^{j120^\circ} = (-0.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ a = e^{j240^\circ} = (-0.5 - j \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases} ; \quad (1.20)$$

Для расчёта несимметричных режимов в линейных трёхфазных цепях может быть использован метод симметричных составляющих, так как он сводит сложную задачу при наличии несимметрии ЭДС, токов и напряжений к нескольким более простым задачам расчёта той же цепи при симметричных режимах. Особенно этот метод ценен при различном значении сопротивлений симметричных составляющих, т. е. $\underline{Z}_0 \neq \underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2$.

Здесь $\underline{Z}_0; \underline{Z}_1; \underline{Z}_2$ - комплексные сопротивления некоторого элемента цепи для нулевой, прямой и обратной составляющих. Расчёт этих составляющих производится по конструктивным параметрам электрических машин.

Токи прямой последовательности создают вращающий момент, совпадающий с направлением вращения ротора.

Токи же обратной последовательности создают вращающий момент, направленный навстречу вращению ротора, то есть создают тормозной момент и отрицательно сказываются на работе электрических машин.

Токи нулевой последовательности не создают вращающегося магнитного поля.

Наибольшее распространение метод симметричных составляющих получил при расчёте токов при коротком замыкании в электрических системах.

Важно отметить, что если электрическая цепь симметрична, т.е. отдельно для каждой симметричной составляющей сопротивления всех фаз одинаковы, то токи нулевой последовательности определяются только ЭДС нулевой последовательности, токи прямой последовательности - только ЭДС прямой последовательности и токи обратной последовательности - только ЭДС обратной последовательности.

Рассмотрим простой случай, когда симметричный генератор с обмотками, соединённый в «звезду», имеет нейтральную точку, соединённую землёй через сопротивление \underline{Z}_{N_0} , причём в последнее включается и сопротивление протекания тока в земле \underline{Z}_{N_0} (рис. 1.37).

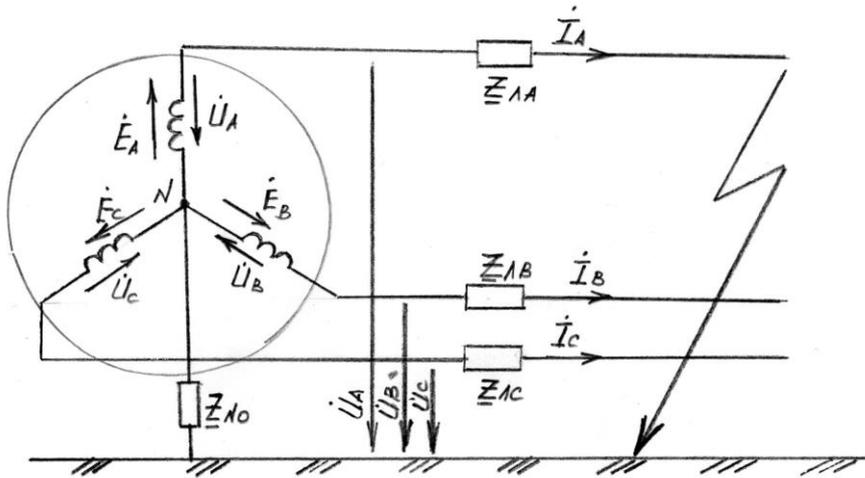


Рисунок 1.37 – Соединение обмоток генератора по схеме «звезда».

Система фазных ЭДС генератора $\dot{E}_A; \dot{E}_B; \dot{E}_C$ вследствие симметрии его устройства содержит только одну симметричную составляющую прямой последовательности, т. Е.

$$\dot{E}_0 = 0; \dot{E}_1 = \dot{E}; \dot{E}_2 = 0; \quad (1.21)$$

Цепь, включая обмотки генератора, до места короткого замыкания симметрична и имеет эквивалентные сопротивления $\underline{Z}_0; \underline{Z}_1; \underline{Z}_2$, для составляющих нулевой (\underline{Z}_0), прямой (\underline{Z}_1) и обратной (\underline{Z}_2) последовательностей чередования фаз, причём, как правило $\underline{Z}_0 \neq \underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2$.

У места короткого замыкания (рис.1.36) система фазных напряжений генератора $\dot{U}_A; \dot{U}_B; \dot{U}_C$ относительно земли, а также токи $\dot{I}_A; \dot{I}_B; \dot{I}_C$ при коротком замыкании несимметричны. Разложив их на симметричные составляющие $\dot{U}_0; \dot{U}_1; \dot{U}_2$ и $\dot{I}_0; \dot{I}_1; \dot{I}_2$ можно написать

$$\begin{cases} \dot{I}_0 \cdot \underline{Z}_0 + \dot{U}_0 = \dot{E}_0 = 0 \\ \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_1 \\ \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \dot{U}_2 = \dot{E}_2 = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Уравнения 1.22 служат для расчёта токов короткого замыкания при любом характере несимметричного короткого замыкания: одной фазы на землю, между двумя фазами или двух фаз на землю.

Рассмотрим случай однофазного замыкания фазы А на землю (рис. 1.37).

Пренебрегая токами нормальной нагрузки по сравнению с токами короткого замыкания, имеем

$$\dot{U}_A = 0; \dot{I}_B = 0; \dot{I}_C = 0;$$

Учитывая, что $\dot{U}_A = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2$, то, суммируя уравнения (1.22), получим

$$\dot{E} = \dot{I}_0 \underline{Z}_0 + \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2; \quad (1.23)$$

Отсюда при $\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0$ симметричные составляющие токов будут равны:

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_A}{3}; \quad (1.24)$$

$$\begin{cases} \dot{E} = \frac{1}{3} \dot{I}_A \cdot (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ \dot{I}_A = \frac{3\dot{E}}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{cases} \quad (1.25)$$

Для симметричных составляющих системы напряжений в месте короткого замыкания из уравнений находим

$$\begin{cases} \dot{U}_0 = \frac{\dot{I}_A \underline{Z}_0}{3} = \frac{\dot{E} \cdot \underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \dot{U}_1 = \dot{E} - \frac{\dot{I}_A \underline{Z}_1}{3} = \frac{\dot{E} \cdot (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} ; \\ \dot{U}_2 = \frac{\dot{I}_A \underline{Z}_2}{3} = \frac{\dot{E} \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{cases} \quad (1.26)$$

Затем из уравнения 1.19 находят напряжение $\dot{U}_B; \dot{U}_C$.

$$\begin{cases} \dot{U}_B = \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 ; \\ \dot{U}_C = \dot{U}_0 + a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 ; \end{cases} \quad (1.27)$$

1.9 Краткие выводы первой главы

1. Трёхфазной системой электрических цепей называют совокупность трёх синусоидальных токов, ЭДС или напряжений одной частоты и сдвинутых по фазе друг относительно друга на некоторые углы, сумма которых равна 360° .

Если углы сдвига фаз между ними составляют $\frac{2\pi}{3}$ (120°) и они имеют равные амплитуды и частоту, то такую трёхфазную систему называют симметричной.

Вырабатывают трёхфазную ЭДС синхронные генераторы на электростанциях.

2. Часть трёхфазной системы, где протекает один из трёх токов, называют фазой. Начало фаз обозначают А, В и С, а их концы – x, y, z.

3. Если отдельные фазы генератора и приёмника не соединены между собой, то такую систему называют несвязной (*рис. 1*), а соединены – связной (*(рис. 2)*).

4. Обмотки генератора и приёмника могут соединяться по схеме «звезда» или «треугольник».

5. При соединении обмоток генератора или приёмника по схеме «звезда» при симметричной нагрузке линейные (I_L) и фазные токи (I_ϕ) равны между собой, а фазные напряжения (U_ϕ) в $\sqrt{3}$ раз меньше линейных напряжений (U_L), то есть

$$\begin{cases} I_L = I_\phi \\ U_L = \sqrt{3} \cdot U_\phi \end{cases} ; \quad (1.28)$$

6. При соединении обмоток приёмника по схеме «треугольник» при симметричной нагрузке линейные напряжения (U_L) и фазные напряжения (U_ϕ) равны между собой, а линейные токи (I_L) в $\sqrt{3}$ больше фазных (I_ϕ), т.е.

$$\begin{cases} U_L = U_\phi \\ I_L = \sqrt{3} \cdot I_\phi \end{cases} ; \quad (1.29)$$

7. При соединении обмоток приёмника или генератора в звезду при симметричной нагрузке линейные напряжения ($U_{AB}; U_{BC}; U_{CA};$) равны векторным разностям соответствующих фазных напряжений $\dot{U}_A; \dot{U}_B; \dot{U}_C;$

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C ; \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A \end{cases} \quad (1.30)$$

8. При соединении обмоток приёмника по схеме «треугольник» при симметричной нагрузке линейные токи $(\dot{I}_A; \dot{I}_B; \dot{I}_C)$ равны векторным разностям соответствующих фазных токов $\dot{I}_{ab}; \dot{I}_{bc}; \dot{I}_{ca}$

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} ; \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \end{cases} \quad (1.31)$$

9. Полная, активная и реактивная мощности приёмника при симметричной нагрузке независимо от схем соединения фаз по схеме «звезда» или «треугольник» определяются по формулам

$$\begin{cases} P = \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \cos \varphi = 3 \cdot U_{\phi} \cdot I_{\phi} \cos \varphi \\ Q = \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \sin \varphi = 3 \cdot U_{\phi} \cdot I_{\phi} \sin \varphi ; \\ S = \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} = 3 \cdot U_{\phi} \cdot I_{\phi} \end{cases}$$

или $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$,

(1.32)

10. При несимметричной нагрузке приёмника $(\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c)$ или $(\underline{Z}_{ab} \neq \underline{Z}_{bc} \neq \underline{Z}_{ca})$ происходит смещение нейтрали приёмника и появляется напряжение смещения \dot{U}_{nN}

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{E}_A \cdot \underline{Y}_a + \dot{E}_B \cdot \underline{Y}_b + \dot{E}_C \cdot \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} ; \quad (1.33)$$

11. В трёхфазной трёхпроводной цепи сумма мгновенных значений линейных токов $(i_A; i_B; i_C)$ равны нулю независимо от рода и схем включения нагрузки, т. е.

$$i_A + i_B + i_C = 0 ; \quad (1.34)$$

12. При расчёте трёхпроводной трёхфазной цепи и симметричной нагрузке схема может быть представлена однолинейной.

13. В четырёхпроводной цепи фазные напряжения приёмников считаются равными фазным напряжениям источников питания

14. При соединении несимметричных приёмников звездой нужен нейтральный провод.

15. Соединение несимметричных приёмников по схеме «звезда» без нейтрального провода приводит к искажению фазных напряжений этих приёмников.

16. Включение предохранителей и выключателей в нейтральный провод недопустимо.

17. При включении в качестве освещения люминесцентных ламп необходимо соблюдать условие, чтобы лампы, расположенные рядом, были подключены к разным фазам. Это связано с тем, что эти лампы гаснут и зажигаются 100 раз в секунду, а переменный ток изменяется с частотой 50Гц и 100 раз в секунду проходит через нуль.

При питании люминесцентных ламп даже от четырёхпроводной сети по нейтральному проводу проходят токи высших гармоник, в основном третьей, т. е. токов нулевой последовательности. Эти токи совпадают по фазе, создают суммарный ток нулевой последовательности тройной частоты .

Необходимо помнить, что ток в нейтральном проводе при использовании люминесцентных ламп может превышать ток в фазном проводе, поэтому сечение нейтрального провода должно быть увеличено.

18. Для расчёта несимметричных режимов в линейных трёхфазных цепях может быть использован метод симметричных составляющих нулевой (\dot{E}_0), прямой (\dot{E}_1) и обратной (\dot{E}_2) последовательности чередования фаз приёмника.

$$\begin{cases} \dot{E}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C) \\ \dot{E}_1 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{E}_A + a\dot{E}_B + a^2\dot{E}_C) ; \\ \dot{E}_2 = \frac{1}{3} \cdot (\dot{E}_A + a^2\dot{E}_B + a\dot{E}_C) \end{cases} \quad (1.35)$$

При этом отдельно определяются токи от действия каждой ЭДС $\dot{E}_0; \dot{E}_1; \dot{E}_2$, т.е. токи нулевой (\dot{I}_0), прямой (\dot{I}_1) и обратной (\dot{I}_2) последовательностей фаз приемника. Затем эти токи складываются и находят фактические токи и напряжения фаз приёмника.

$$\begin{cases} \dot{E}_A = \dot{E}_0 + \dot{E}_1 + \dot{E}_2 \\ \dot{E}_B = \dot{E}_0 + a^2\dot{E}_1 + a\dot{E}_2 ; \\ \dot{E}_C = \dot{E}_0 + a\dot{E}_1 + a^2\dot{E}_2 \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ \dot{I}_B = \dot{I}_0 + a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2 ; \\ \dot{I}_C = \dot{I}_0 + a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 \end{cases} \quad (1.37)$$

18. Для расчётов короткого замыкания при любом характере несимметричного короткого замыкания (одной фазы на землю, между двумя фазами и двух фаз на землю) используют зависимости

$$\begin{cases} \dot{E}_0 = \dot{I}_0 \cdot \underline{Z}_0 + \dot{U}_0 = 0 \\ \dot{E}_1 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \dot{U}_1 \quad ; \\ \dot{E}_2 = \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \dot{U}_2 = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

где $\dot{I}_0; \dot{I}_1; \dot{I}_2$ - соответственно токи нулевой, прямой и обратной последовательности чередования фаз;

$\underline{Z}_0; \underline{Z}_1; \underline{Z}_2$ - соответственно комплексные сопротивления нулевой, прямой и обратной последовательности фаз приёмника.

Глава 2. Переходные процессы в линейных электрических цепях

2.1 Основные сведения о расчёте переходных процессов электрических цепей

Переходные процессы возникают в электрических цепях при переходе от одного установившегося режима работы к другому установившемуся режиму (рис.1). Смена режимов происходит в результате коммутаций (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и др.).

Переходной процесс протекает в течение определенного времени, которое зависит от запасов энергии в реактивных элементах цепи. Продолжительность переходного процесса может быть весьма незначительной, от долей секунды до долей микросекунды. При этом токи и напряжения в переходных процессах могут существенно превышать токи и напряжения в стационарных режимах, что может привести к разрушению различных элементов электрических и электронных схем.

В то же время при разумном ограничении напряжений и токов при переходных процессах их можно использовать для формирования различных электрических сигналов. Поэтому расчет переходных режимов в электрических цепях является очень важным для решения проблемы повышения надежности различных электрических и электронных устройств.

Момент внезапного изменения режима работы электрической цепи принимают за начальный (нулевой) момент времени, относительно которого характеризуют состояние цепи и описывают сам переходной процесс. Переходные токи, напряжения, ЭДС и другие значения обозначают малыми буквами, а их конкретные значения отмечают моментом времени, предшествующим изменению режима. Например, ток в момент времени, предшествующий изменению режима работы цепи, обозначают $i(0_-)$, в первый момент времени после изменения режима - $i(0_+)$, а в заданный момент времени t - $i(t)$. Установившееся значение тока, равное после завершения переходного процесса I_2 , обозначают $i(\infty) = I_2$.

Для переходного процесса, рассматриваемого на рис.1, имеем

$$i(0_-) = i(0_+) = I_1; i(\infty) = I_2.$$

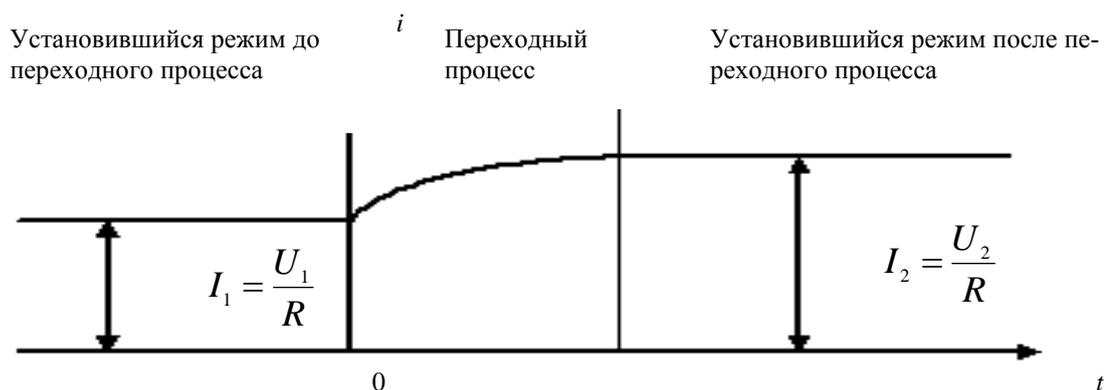


Рисунок - 2.1. Временные изменения тока в цепи при переходном процессе

Переходный процесс базируется на двух законах коммутации.

Первый закон. В любой ветви с индуктивностью ток и магнитный поток в момент коммутации сохраняют те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, а дальше начинает изменяться именно с этих значений, т.е.

$$i(0_-) = i(0_+) \text{ и } \Phi(0_-) = \Phi(0_+).$$

Второй закон. В любой ветви с конденсатором напряжение и заряд сохраняют в момент коммутации те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и в дальнейшем изменяются, начиная именно с этих значений, т.е.

$$u(0_-) = u(0_+) \text{ и } Q(0_-) = Q(0_+).$$

В цепях с индуктивностью или емкостью переходной процесс можно рассматривать как результат наложения двух процессов – принужденного и свободного. Ток и напряжение в цепи в течение переходного процесса можно представить в виде суммы принужденных и свободных значений токов и напряжений, т.е.

$$i_{nep}(t) = i_{прин}(t) + i_{св}(t).$$

Для расчета и анализа переходных процессов в электрических цепях применяются следующие методы : классический ; операторный ; частотный (спектральный) ; с помощью интеграла Дюамеля ; переменных состояний.

Классический метод заключается в решении дифференциальных уравнений цепи, составленных по первому и второму законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений. Решение состоит в определении: корней характеристического уравнения, свободных составляющих переходного процесса, постоянных интегрирования и, наконец, переходных токов и напряжений.

Особенность классического метода состоит в том, при решении задачи имеют дело с реальными величинами и с реальным временем. Результаты расчета обычно иллюстрируют графиками. Однако эти расчеты сложны и требуют применения вычислительной техники.

Операторный метод состоит в том, что реальная функция времени, называемая *оригиналом*, заменяется другой функцией - *изображением*. Эта замена осуществляется с помощью прямых преобразований Лапласа и Карсона-Хевисайда.

Изображение является функцией не времени t , а комплексной переменной или оператора p . Его невозможно представить графически. Это означает, что расчет операторным методом проводится не в реальном масштабе времени. Однако данный недостаток компенсируется тем преимуществом перед классическим методом, что операции дифференцирования и интегрирования по времени сводятся к простым алгебраическим операциям умножения и деления. В результате решения системы уравнений получается изображение искомой функции, от которого переходят к ее оригиналу. Благодаря этим преимуществам операторный метод широко применяется в инженерных расчетах.

Частотный (спектральный) метод расчета очень похож по сути на операторный метод. Преимущество его по сравнению с операторным методом состоит в том, что при приближенных расчетах можно использовать экспериментальные характеристики входных сопротивлений или проводимости цепи.

Частотный метод широко используется для анализа и синтеза линейных систем автоматического регулирования (САР) для оценки качества переходных процессов в системе (устойчивость, быстродействие, перерегулирования, запаздывание по фазе и др.).

Частотный метод основан на использовании преобразования Фурье. В уравнении Фурье при этом используется только мнимая часть комплексной частоты или оператора $p = \delta + j\omega_0$, т.е. $p = j\omega_0$ ($\delta = 0$).

Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля целесообразно применять только при нулевых начальных условиях, если напряжение на входе пассивного двухполюсника изменяется по сложному закону, включая разрывы. Суть метода заключается в том, что переходный ток определяется в результате действия токов от бесконечно малых импульсов входного напряжения.

Метод переменных состояния целесообразно применять в сложных цепях, которые описываются дифференциальными уравнениями n -го порядка. При этом уравнения n -го порядка заменяются n уравнениями первого порядка.

При этом под *переменными состояниями* понимают токи в индуктивностях и напряжения на емкостях, так как через них можно определить любые другие напряжения и токи в цепи.

Совокупность дифференциальных уравнений для первых производных переменных состояния цепи обычно называют уравнениями состояния. Решение системы дифференциальных уравнений состояния электрических цепей можно выполнять аналитическими или численными методами.

2. Классический метод расчета переходных процессов.

Рассматриваемый метод относится к линейным цепям с сосредоточенными параметрами. Расчет переходных процессов классическим методом сводится к выполнению следующих операций:

1. На схеме цепи после коммутации указывают положительные направления токов в ветвях.
2. Составляют дифференциальные уравнения для мгновенных значений токов и напряжений по законам Кирхгофа для переходного режима.

Так как падение напряжения на активном сопротивлении R , индуктивности L и емкости C определяют по формулам: $u_R = i \cdot R$; $u_L = L \frac{di}{dt}$ и $u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$, то по законам Кирхгофа будет составлена система интегрально-дифференциальных уравнений заданной цепи.

3. Полученную систему уравнений решают относительно искомой функции (тока или напряжения). В результате получают неоднородное линейное дифференциальное уравнение, порядок которого равен числу независимых мест накопления энергии. В случае двух независимых мест накопления в схеме линейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$a \frac{d^2 t}{dt^2} + b \frac{di}{dt} + ci = f(u),$$

где a, b, c - коэффициенты, зависящие от параметров цепи;

$f(u)$ - неоднородный член уравнения, зависящий от величины и формы приложенного к цепи напряжения.

4. Решают неоднородное линейное дифференциальное уравнение, в результате чего находят искомый ток или напряжение переходного процесса.

Решение дифференциального уравнения складывается из общего решения однородной части этого уравнения (правая часть равна нулю) и частного решения неоднородного уравнения, определяемого видом $f(u)$.

Частное решение выражает принужденный режим, задаваемый источниками энергии, а общее решение - свободный режим. Таким образом, ток переходного процесса равен $i = i_{np} + i_{св}$, а напряжение $u = u_{np} + u_{св}$.

5. Находят принужденную составляющую путем расчета цепи после коммутации.

6. Записывается характеристическое уравнение цепи типа $ap^2 + bp + c = 0$ и определяются его корни.

7. Находят свободную составляющую, которая зависит от характера цепи, т.е. определяется видом корней характеристического уравнения p_K .

Общее решение для свободной составляющей ищут в виде

$$i_{св} = A_K \cdot e^{p_K \cdot t},$$

где A_K - постоянная интегрированная;

p_K - корни характеристического уравнения.

При этом, если:

а) корни вещественные, отрицательные и разные ($p_1 < 0; p_2 < 0$), переходной режим будет *апериодическим* и свободная составляющая тока запишется в виде

$$i_{cв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

б) корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные ($p_1 = -\delta + j\omega_0; p_2 = -\delta - j\omega_0$), то в цепи будет периодический (колебательный) режим и свободная составляющая тока выражается зависимостью

$$i_{cв} = A e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma),$$

где δ - коэффициент затухания переходного режима;

ω_0 - угловая частота свободных колебаний тока (напряжения);

γ - начальная фаза переходного тока (напряжения).

в) корни характеристического уравнения равные, отрицательные ($p_1 = p_2 = p < 0$), то свободная составляющая определяется

$$i_{cв} = (A_1 + A_2 t) e^{p t}.$$

8. Определяют постоянные интегрирования $A_1; A_2$ и угол γ по начальным условиям, исходя из законов коммутации в момент времени $t = 0$. Для этого сначала определяют начальные значения тока на участках цепи с индуктивностью и напряжения на участках с емкостью

$$i(0_-) = i(0) = i(0_+);$$

$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+).$$

Подставляя эти значения в исходные дифференциальные уравнения при $t = 0$, определяют начальные значения токов в остальных ветвях.

Производная от тока в индуктивности находится непосредственно из уравнения, написанного для контура, в который входит ветвь с индуктивностью.

Производные от токов в других ветвях схемы определяются из уравнения, в котором нет ветви с индуктивностью после его дифференцирования и перехода к $t = 0$. При этом напряжение на конденсаторе нужно писать в форме интеграла

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt,$$

что дает
$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i_C(0)}{C}.$$

В некоторых случаях нужно использовать и первый закон Кирхгофа для производных токов

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}.$$

Если характеристическое уравнение представляет собой уравнение *первого порядка*, то $i_{cв} = A e^{p t}$ и тогда $A = i_{cв}(0_+)$.

Если характеристическое уравнение *второго порядка*, то $i_{cв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$ и тогда

$$A_1 = \frac{i'_{cв}(0_+) - p_2 \cdot i_{cв}(0_+)}{p_1 - p_2};$$

$$A_2 = i_{cв}(0_+) - A_1.$$

Если корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные, то $i_{св} = Ae^{-\delta} \cdot \sin(\omega_0 t - \gamma)$, тогда значения A и γ находят из совместного решения двух уравнений

$$\begin{cases} i_{св}(0_+) = A \sin \gamma; \\ i'_{св}(0_+) = -A \delta \sin \gamma + A \omega_0 \cos \gamma. \end{cases}$$

9. Характеристическое уравнение находится из входного сопротивления схемы в операторной форме.

3. Операторный метод расчета переходных процессов.

В операторном методе функцию вещественного переменного времени t , называемую *оригиналом*, заменяют соответствующей функцией комплексного переменного, зависящей от оператора p и называемой *изображением*.

В этом методе действия дифференцирования и интегрирования данной функции – оригинала заменены более простыми алгебраическими действиями над изображением этой функции.

При этом дифференциальные уравнения для оригиналов электрических величин тока и напряжения преобразуются в более простые алгебраические уравнения для изображений тех же величин.

В простейших случаях при составлении алгебраических уравнений, в которые входят изображения искомых функций, операция дифференцирования оригинала может быть заменена умножением изображения искомой функции на оператор p .

В результате решения полученной системы алгебраических уравнений находят изображения искомых электрических величин (токов и напряжений). Путем обратного преобразования полученных изображений находят соответствующие им оригиналы, т.е. искомые функции времени.

В этом методе отпадает необходимость определять постоянные интегрирования по начальным условиям, так как начальные условия учитываются при составлении алгебраических уравнений для изображений искомых электрических величин.

Для преобразования заданной функции $f(t)$ - оригинала в соответствующую функцию $F(p)$ - изображение можно применить прямое преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{или} \quad F(p) \doteq f(p),$$

где p - комплексная переменная или оператор $p = \delta + j\omega_0$,

где δ - вещественная часть оператора, характеризует затухание переходного процесса;

ω_0 - мнимая часть того же оператора, характеризует угловую частоту свободных колебаний.

Прямое преобразование Лапласа условно обозначают

$$F(p) \doteq L[f(t)].$$

Переход от изображения $F(p)$ к оригиналу $f(t)$ может быть осуществлен при помощи обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(p)e^{pt} dt \quad \text{или сокращенно} \quad f(t) = L^{-1}[F(p)].$$

Постоянное напряжение U будет записываться в операторной форме как $\frac{U}{p}$, т.е.

$$U(p) = \frac{U}{p}.$$

Изображение гармонического напряжения $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$ будет

$$u(p) = U_m \cdot \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}.$$

Пользуясь комплексными числами, гармоническое напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ можно представить как мнимую часть полного комплекса $U_m e^{j(\omega t + \psi)}$, т.е. $u = \text{Im}[U_m e^{j(\omega t + \psi)}]$.

В этом случае изображение гармонического напряжения значительно упрощается и имеет вид

$$u(p) = \frac{U_m e^{j\psi}}{p - j\omega}.$$

Операторные сопротивления цепей записываются так же, как и сопротивления для тех же цепей в комплексной форме, в которых $j\omega$ заменено на p . Так для цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов R, L и C , операторное сопротивление

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{Cp}.$$

Напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости в операторной форме имеют вид:

$$u_R(p) = R \cdot I(p);$$

$$u_L(p) = pLI(p) - Li(0);$$

$$u_C(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p},$$

где $i(0)$ и $u_C(0)$ - начальные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости.

Уравнения для изображений тока и напряжения любой цепи могут быть получены по законам Ома и Кирхгофа, написанных для операторных схем замещения.

$$\text{Закон Ома в операторной форме - } I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{Z(p)};$$

Закон Кирхгофа в операторной форме

$$\sum_1^n I_K(p) = 0;$$

$$\sum_1^n I_K(p) \cdot Z(p) = \sum_1^n \left[E_K(p) + L_K i_K(0) - \frac{u_{CK}(0)}{p} \right].$$

Полученную систему уравнений в операторной форме решают относительно изображения искомого тока или напряжения. В общем случае выражения для тока в любой ветви в операторной форме имеет вид

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)},$$

где $F_1(p)$ и $F_2(p)$ - алгебраические многочлены степени которых соответственно m и n , причем $m < n$.

Переход от изображения к оригиналу осуществляется при помощи теоремы разложения

$$i(t) = \sum_1^n \frac{F_1(p_K)}{F_2'(p_K)} \cdot e^{p_K t},$$

где p_K - корни уравнения $F_2(p) = 0$;

n - число корней;

$F_1(p_K)$ - значение функции $F_1(p)$ при $p = p_K$;

$F_2'(p_K)$ - значение производной функции $F_2(p)$ при $p = p_K$.

При подключении источника постоянного или гармонического напряжения к пассивной цепи с входным операторным сопротивлением $Z(p)$ на основании теоремы разложения получены простые расчетные формулы, называемые формулами **включения**

$$i(t) = \frac{U}{Z(0)} + \sum \frac{U}{p_K Z'(p_K)} \cdot e^{p_K t},$$

где p_K - корни уравнения $Z(p) = 0$.

При включении цепи на синусоидальные напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ величина тока

$$i(t) = \text{Im} \left[\frac{U_m e^{(j\omega t + \psi)}}{Z(j\omega)} + \sum \frac{U_m e^{j\psi}}{(p_K + j\omega) \cdot Z'(p_K)} \cdot e^{p_K t} \right],$$

где U_m - амплитуда приложенного напряжения;

ψ - начальная фаза приложенного напряжения;

$Z(j\omega)$ - полное сопротивление в комплексной форме;

$Z'(p_K)$ - производная операторного сопротивления при $p = p_K$.

Знак Im означает, что от полученного комплексного уравнения берется коэффициент при мнимой части.

При расчете переходных процессов операторным методом в электротехнике часто применяют также прямое преобразование Карсона-Хевисайда, которое записывается

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

В преобразовании Карсона-Хевисайда в отличие от преобразования Лапласа перед интегралом имеется множитель p . Это дает возможность иметь одну и ту же размерность для оригинала и изображения, а изображение постоянной равно самой постоянной, т.е. $U(p) = U$.

Операторные изображения простейших функций времени, часто встречающихся при расчетах переходных процессов, приведены в приложении 1.

5. Примеры расчёта переходных процессов классическим методом

Пример 1. В схеме на рис. 2.2 по заданным значениям ЭДС $E = 120\text{В}$ и параметров цепи $R_1 = R_2 = 10\text{Ом}$, $L = 10\text{мГн}$ определить ток в цепи после замыкания ключа K . Построить график зависимости $i = f(t)$.

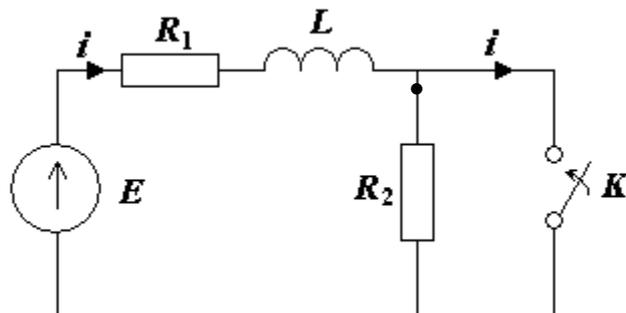


Рисунок 2.2 - Схема цепи для расчета переходного процесса

Решение.

1. Выбираем положительное направление тока, как показано на рис. 2.2 стрелкой.
2. Записываем дифференциальное уравнение цепи после коммутации на основании 2 закона Кирхгофа

$$R_1 i + L \frac{di}{dt} = E.$$

3. Представляем искомый ток в виде суммы свободной и принуждённой составляющей $i = i_{np} + i_{св}$.

4. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$R_1 + pL = 0.$$

$$p = -\frac{R_1}{L} = -\frac{10}{10 \cdot 10^{-3}} = -10^3 \text{ c}^{-1}.$$

5. Решение для свободного тока ищем в виде

$$i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-1000t}.$$

6. Находим принуждённую составляющую тока переходного процесса

$$i_{np} = \frac{E}{R_1} = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}.$$

7. Находим значение тока до коммутации, который на основании первого закона коммутации равен току переходного процесса в момент $t = 0$

$$i(0) = i(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{10 + 10} = 6 \text{ A}.$$

8. Определяем постоянную интегрирования A :

$$i(0) = 12 + A = 6, A = -6.$$

9. Записываем окончательно уравнение переходного тока цепи

$$i(t) = 12 - 6e^{-1000t}$$

и строим графики.

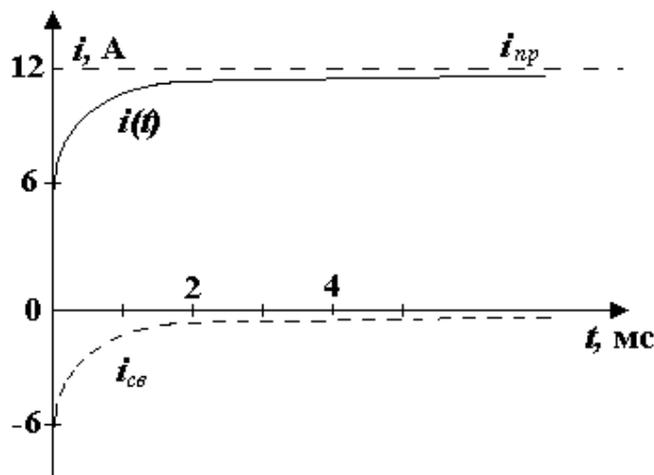


Рисунок 2.3- Графики переходного, принужденного и свободного токов цепи

Пример 2. Рассчитать ток в цепи конденсатора и напряжение на конденсаторе через время $t = 0.04$ секунды после размыкания ключа K (рис. 4.3), если $E = 200\text{В}$, $C = 2\text{мкФ}$, $R_1 = R_2 = 10\text{кОм}$.

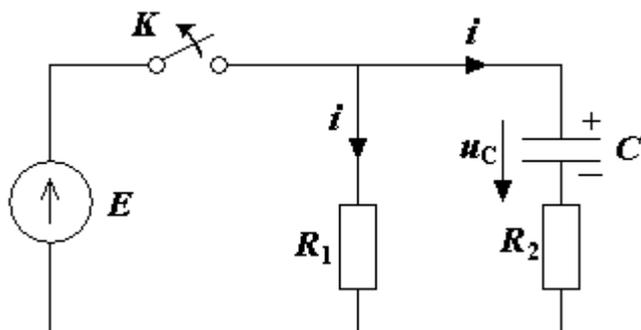


Рисунок 2.4 – Исходная схема

Решение.

1. Записываем дифференциальное уравнение на основании закона Кирхгофа для цепи после коммутации

$$i(R_1 + R_2) + u_C = 0, \text{ но } i = C \frac{du_C}{dt},$$

$$\text{поэтому } (R_1 + R_2)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

2. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни

$$p(R_1 + R_2)C + 1 = 0$$

$$p = -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} = -\frac{1}{2 \cdot 10^{-6} (10 + 10) \cdot 10^3} = -25\text{с}^{-1}.$$

3. Представляем напряжение на конденсаторе в виде свободной и принуждённой составляющих $u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр}$.

4. Ищем свободную составляющую напряжения на конденсаторе в виде

$$u_{Cсв} = Ae^{pt} = Ae^{-25t}.$$

5. Находим принуждённую составляющую напряжения на конденсаторе $u_{Cпр} = 0$.

6. Находим значение u_C переходного процесса в момент $t = 0$ на основании второго закона коммутации

$$u_C(0) = u_C(0_-) = E = 200\text{В}.$$

7. Определим постоянную интегрирования A

$$u_C(0) = 0 + A = 200\text{В}, A = 200\text{В}.$$

8. Теперь напряжение на конденсаторе равно

$$u_C = 200e^{-25t}.$$

9. Ток в цепи конденсатора равен

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -2 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 25e^{-25t} = -0.01e^{-25t}.$$

10. Напряжение на конденсаторе через время $t = 0.04$ секунды равно:

$$u_C(0.04) = 200e^{-25 \cdot 0.04} = 200/e = 73.6 \text{ В.}$$

11. По полученным уравнениям для тока и напряжения на конденсаторе строим графики $i(t)$ и $u_C(t)$ (рис. 2.5).

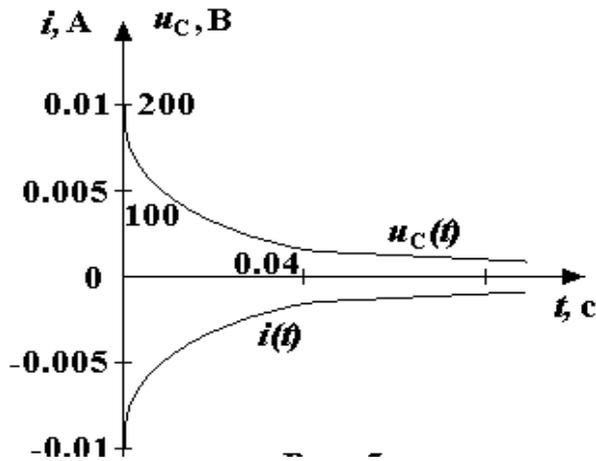


Рисунок 2.5 - Графики зависимости $i(t)$ и $u_C(t)$

Пример 3. Найти токи в электрической цепи (рис. 2.6) после коммутации, если $E = 60 \text{ В}$, $R_1 = 400 \text{ Ом}$, $R_2 = 800 \text{ Ом}$, $L = 0.2 \text{ Гн}$, $C = 2.5 \text{ мкФ}$, $u_C(0_-) = 20 \text{ В}$.

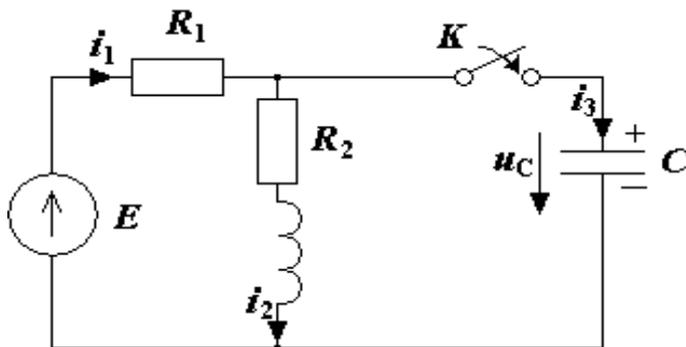


Рисунок 2.6 – Исходная схема электрической цепи

Решение.

1. Выбираем условно положительные направления для всех токов и напряжения на конденсаторе (обозначаем их стрелками).
2. Представляем токи переходного процесса в виде двух составляющих – принуждённой и свободной $i = i_{np} + i_{св}$.
3. Находим принуждённые составляющие токов и напряжения на конденсаторе

Рисунок 2.6 - Исходная электрическая схема

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{60}{400 + 800} = 0.05 \text{ A},$$

$$i_{3np} = 0, \quad u_{Cnn} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = 0.05 \cdot 800 = 400 \text{ В}.$$

4. Находим корни характеристического уравнения из условия $Z(p) = 0$

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + pL) \frac{1}{pC}}{R_2 + pL + \frac{1}{pC}},$$

$$LCR_1 p^2 + (L + CR_1 R_2) p + R_1 + R_2 = 0,$$

$$2 \cdot 10^{-4} p^2 + p + 1200 = 0,$$

$$p_1 = -2000 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = -3000 \text{ с}^{-1}.$$

5. Решение для свободных составляющих токов переходного процесса ищем в виде $i_{cс} = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$.

6. Находим значения всех токов переходного процесса в момент $t = 0$.
На основании первого закона коммутации имеем

$$i_2(0) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{60}{400 + 800} = 0.05 \text{ A}.$$

На основании второго закона коммутации имеем

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 20 \text{ В}.$$

Из рис. 4.5 находим на основании закона Кирхгофа $i_1(0)$, $i_3(0)$

$$i_1(0) = \frac{E - u_C(0)}{R_1} = \frac{60 - 20}{400} = 0.1 \text{ A},$$

$$i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 0.1 - 0.05 = 0.05 \text{ A}.$$

7. Находим значения первых производных всех токов переходного процесса **в момент времени** $t = 0$. Для этого записываем систему уравнений для рисунка 2.6

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2 R_2 + L \frac{di_2}{dt} - u_C = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 R_1 + u_C = E & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3 = \frac{1}{C} \frac{du_C}{dt} & (4) \end{cases}$$

Из уравнения (2)

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_C(0) - i_2(0)R_2}{L} = \frac{20 - 0.05 \cdot 800}{0.2} = -100 \text{ Ас}^{-1}.$$

С учётом уравнения (4), продифференцировав (3), получим

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{i_3(0)}{CR_1} = -\frac{0.05 \cdot 10^6}{2.5 \cdot 400} = -50 \text{ Ас}^{-1}.$$

Продифференцировав уравнение (1), найдём

$$\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = -50 + 100 = 50 \text{ Ас}^{-1}.$$

9. Определяем постоянные интегрирования для тока i_1

$$i_{1c\phi} = A_1 e^{p_1 t} + B_1 e^{p_2 t}.$$

При $t = 0$ $i_{c\phi}(0) = i(0) - i_{np} = A_1 + B_1 = 0.1 - 0.05 = 0.05,$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = p_1 A_1 + p_2 B_1 = -50$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + B_1 = 0.05 \\ -2000A_1 - 3000B_1 = -50 \end{array} \right\}$$

$$A_1 = 0.1 \text{ А}, \quad B_1 = -0.05 \text{ А}.$$

Аналогично для тока i_2

$$\left. \begin{array}{l} A_2 + B_2 = 0 \\ -2000A_2 - 3000B_2 = 100 \end{array} \right\}$$

$$A_2 = -0.1 \text{ А}, \quad B_2 = 0.1 \text{ А}.$$

Для тока i_3

$$\left. \begin{array}{l} A_3 + B_3 = 0.05 \\ -2000A_3 - 3000B_3 = 50 \end{array} \right\}$$

$$A_3 = 0.2 \text{ А}, \quad B_3 = -0.15 \text{ А}.$$

9. Записываем выражения для искоемых токов

$$i_1 = 0.05 + 0.1e^{-2000t} - 0.05e^{-3000t};$$

$$i_2 = 0.05 - 0.1e^{-2000t} + 0.1e^{-3000t};$$

$$i_3 = 0.2e^{-2000t} - 0.15e^{-3000t}.$$

11. Проверка правильности решения может быть осуществлена из условия

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

Можно убедиться, что при $t \geq 0$ всегда это равенство выполняется

$$0.05 + 0.1e^{-2000t} - 0.05e^{-3000t} - 0.05 + 0.1e^{-2000t} - 0.1e^{-3000t} - 0.2e^{-2000t} + 0.15e^{-3000t} = 0$$

Пример 4. Найти токи переходного процесса в электрической цепи (рис. 2.7), если $E = 100\text{В}$, $L = 0.125\text{Гн}$, $R_1 = R_2 = 50\text{Ом}$, $C = 180\text{мкФ}$.

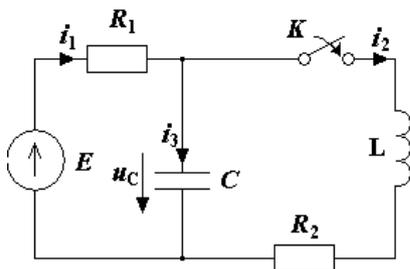


Рисунок 2.7 – Исходная электрическая схема

Решение.

1. Выбираем произвольно положительные направления для всех токов и напряжения на конденсаторе.
2. Представляем токи переходного процесса в виде двух составляющих – принуждённой и свободной, т.е.

$$i(t) = i_{np}(t) + i_{cs}(t).$$

3. Находим корни характеристического уравнения $Z(p) = 0$

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + pL) \frac{1}{pC}}{R_2 + pL + \frac{1}{pC}} = 0,$$

$$LCR_1 p^2 + (L + CR_1 R_2) p + R_1 + R_2 = 0,$$

$$p^2 + 510p + 8.88 \cdot 10^4 = 0,$$

$$p_{1,2} = -225 \pm j155c^{-1} = -\beta \pm j\omega_0.$$

4. Решение уравнения для токов переходного процесса ищем в виде

$$i(t) = i_{np} + Ae^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \psi) \quad (5).$$

5. Находим принуждённые составляющие токов и напряжения на конденсаторе

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{50 + 50} = 1\text{А},$$

$$i_{3np} = 0, \quad u_{Cnn} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = 50\text{В}.$$

6. Находим значения всех токов переходного процесса в момент времени $t = 0$ на основании законов коммутации

$$u_C(0_-) = u_C(0) = E = 100\text{В},$$

$$i_2(0_-) = i_2(0) = 0,$$

$$i_1(0) = \frac{E - u_C(0)}{R_1} = \frac{100 - 100}{50} = 0,$$

$$i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 0 - 0 = 0.$$

7. Находим первые производные всех токов в момент времени $t = 0$, для чего составим систему уравнений

$$\begin{cases} i_1 R_1 + u_C = E, & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 = u_C, & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3 = C \frac{du_C}{dt}. & (9) \end{cases}$$

Продифференцируем уравнение (7)

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_C(0) - i_2(0)R_2}{L} = \frac{100 - 0 \cdot 50}{0.125} = 800 \text{ Ас}^{-1}.$$

Продифференцируем уравнение (6) и учтём уравнение (9)

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = - \frac{1}{R_1} \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_3(0)}{R_1 C} = 0.$$

Продифференцируем уравнение (8)

$$\left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = 0 - 800 = -800 \text{ Ас}^{-1}.$$

8. Рассчитаем постоянные интегрирования, используя уравнение (5) при $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} i(0) &= i_{np}(0) + A \sin \psi \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{di_{np}}{dt} \right|_{t=0} + A \omega_0 \cos \psi - A \beta \sin \psi \end{aligned} \right\}$$

Так как $\left. \frac{di_{np}}{dt} \right|_{t=0} = 0$, то $\psi = \arctg \frac{\omega_0 [i(0) - i_{np}(0)]}{\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + \beta [i(0) - i_{np}(0)]}$, $A = \frac{i(0) - i_{np}(0)}{\sin \psi}$.

Для токов i_1, i_2, i_3 найдём соответственно

$$\psi_1 = \arctg \frac{155(0-1)}{0 + 225(0-1)} = 34.6^\circ, \quad \psi_2 = \arctg \frac{155(0-1)}{800 + 225(0-1)} = -15^\circ,$$

$$\psi_3 = \arctg \frac{155(0-0)}{-800 + 225(0-0)} = 0^\circ,$$

$$A_1 = \frac{0-1}{\sin 34.6^\circ} = -1.761 \text{ А}, \quad A_2 = \frac{0-1}{\sin(-15^\circ)} = 3.864 \text{ А},$$

$$A_3 = \frac{-800}{155 \cos 0^\circ - 225 \sin 0^\circ} = -5.161 \text{ А}.$$

9. Выражения для переходного процесса имеют вид

$$i_1(t) = 1 - 1.761e^{-225t} \sin(155t + 34.6^\circ),$$

$$i_2(t) = 1 + 3.864e^{-225t} \sin(155t - 15^\circ),$$

$$i_3(t) = -5.161e^{-225t} \sin 155t.$$

10. Проверка решения

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0.$$

$$\text{Для } t = 0 \quad 1 - 7.161 \sin 34.6^\circ - 1 + 3.864 \sin 15^\circ = 0.$$

$$\text{Для } t = \infty \quad 1 - 1 = 0.$$

Пример 5. Найти ток через сопротивление R (рис. 2.8) после коммутации. Дано: $E = 100\text{В}$, $R = 5\text{Ом}$, $L = 5 \cdot 10^{-3}\text{Гн}$, $C = 5 \cdot 10^{-5}\text{Ф}$.

Решение.

1. Принимаем положительные направления токов, как указано на рисунке 2.8.

2. Записываем искомый ток в виде суммы двух составляющих – принужденной и свободной

$$i = i_{np} + i_{св}.$$

3. Составляем характеристическое уравнение и находим его

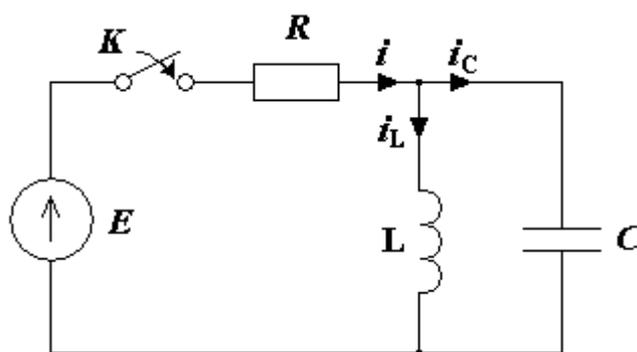


Рисунок 2.8 – Исходная электрическая схема

$$\text{корни } Z(p) = R + \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = R + \frac{pL}{1 + p^2 LC} = 0,$$

$$LCR \left(p^2 + \frac{1}{CR} p + \frac{1}{LC} \right) = 0,$$

$$p_{1,2} = -2 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}.$$

4. Решение для тока i ищем в следующем виде

$$i = i_{np} + (A_1 + A_2 t) e^{1,2t}. \quad (10)$$

5. Рассчитываем принуждённую составляющую тока i

$$i_{np} = \frac{E}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ А}.$$

6. Находим значение тока переходного процесса i в момент времени $t = 0$

$$i(0)R + u_C(0) = E.$$

Согласно второму закону коммутации имеем

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 0,$$

$$i(0) = \frac{E}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ А}.$$

7. Определяем значение первой производной тока i в момент времени $t = 0$

$$\left. \frac{di}{dt} R \right|_{t=0} + \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dE}{dt} \right|_{t=0}.$$

Учтём при этом $i(0) = i_L(0) + i_C(0)$ и $i_C = C \frac{du_C}{dt}$.

Согласно первому закону коммутации запишем

$$i_L(0) = i_L(0_-) = 0, \text{ тогда } i_C(0) = i(0) = 20 \text{ А,}$$

$$R \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + \frac{i_C(0)}{CR} = 0,$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{i_C(0)}{CR} = -\frac{20}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 5} = -8 \cdot 10^4 \text{ А/с.}$$

8. Находим постоянные интегрирования из уравнения (10) при $t = 0$

$$\begin{cases} i(0) = i_{i\ddot{0}}(0) + A_1 \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{i\ddot{0}}}{dt} \right|_{t=0} + A_1 p_{1,2} + A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = 20 + A_1 \\ -8 \cdot 10^4 = -2 \cdot 10^3 A_1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 0, A_2 = -8 \cdot 10^4 \text{ А/с.}$$

9. Записываем выражение для искомого тока переходного процесса

$$i(t) = 20 - 8 \cdot 10^4 t e^{-2000t}.$$

10. Проверка правильности решения.

В момент $t = 0$ $i(0) = 20 \text{ А.}$

В момент $t = \infty$ $i(\infty) = 20 \text{ А.}$

Пример 6. В электрической цепи (рис. 2.9) сопротивление $R_0 = R = 50 \text{ Ом}$, индуктивность $L = 0.25 \text{ Гн}$, ёмкость $C = 50 \text{ мкФ}$. Постоянное напряжение источника $U = 100 \text{ В}$. Определить закон изменения переходного тока на неразветвлённом участке цепи и построить его график.

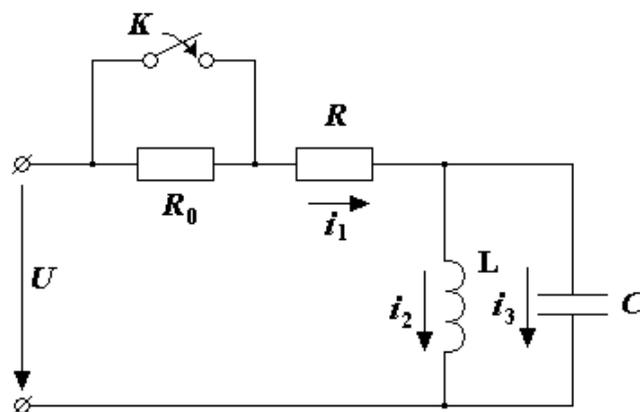


Рисунок 2.9 – Исходная электрическая схема

Решение.

1. Расчёт режима до коммутации (контакты разомкнуты). Токи в ветвях цепи

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{U}{R_0 + R} = 1 \text{ А; } i_3(0_-) = 0,$$

напряжение на конденсаторе $u_C(0_-) = 0$.

По первому закону коммутации $i_2(0) = i_2(0_-) = 1 \text{ А;}$

по второму закону коммутации $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$.

2. Расчёт принуждённого режима после коммутации (контакты замкнуты). Токи в ветвях

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{U}{R} = 2 \text{ А}; \quad i_{3np} = 0.$$

3. Расчёт искомого тока и его производной для момента коммутации ($t = 0$).

По законам Кирхгофа составляем уравнения для схемы после коммутации

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad (11)$$

$$U = Ri_1 + L \frac{di_2}{dt}; \quad (12)$$

$$U = Ri_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt. \quad (13)$$

Используя уравнение (13) для момента $t = 0$ с учётом того, что $u_C(0) = 0$, найдём $i_1(0) = \frac{U}{R} = 2 \text{ А}$. Из уравнения (11) при $t = 0$ вычислим $i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 1 \text{ А}$.

Найдём производную искомого тока. Для этого продифференцируем уравнение (13)

$$0 = R \frac{di_1}{dt} + \frac{i_3}{C}.$$

Откуда
$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{i_3}{RC}.$$

Следовательно,
$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{i_3(0)}{RC} = -400 \text{ А/с}.$$

4. Определение корней характеристического уравнения. Входное сопротивление для схемы после коммутации в операторной форме приравняем к нулю

$$Z(p) = R + \frac{Lp \frac{1}{Cp}}{Lp + \frac{1}{Cp}} = R + \frac{Lp}{LCp^2 + 1} = \frac{RLCp^2 + R + Lp}{LCp^2 + 1} = 0.$$

Характеристическое уравнение $RLCp^2 + Lp + R = 0$, или

$$p^2 + \frac{1}{RC} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0$$

имеем два корня

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

После подстановки численных значений заданных величин получим

$$p_1 = -200 + j200;$$

$$p_2 = -200 - j200.$$

Так как корни характеристического уравнения получились сопряжёнными комплексными числами, то переходный процесс в электрической цепи будет иметь колебательный характер.

5. Определение постоянных интегрирования и закона изменения во времени искомого тока. Переходный ток на неразветвлённом участке цепи

$$i_1 = i_{1np} + i_{1св} = i_{1np} + Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \gamma),$$

а его производная

$$\frac{di_1}{dt} = -\delta Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \gamma) + A\omega_1 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \gamma).$$

Находим значения тока и его производной для момента времени $t = 0$

$$i_1(0) = i_{1i\delta} + A \sin \gamma;$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\delta A \sin \gamma + A\omega_1 \cos \gamma.$$

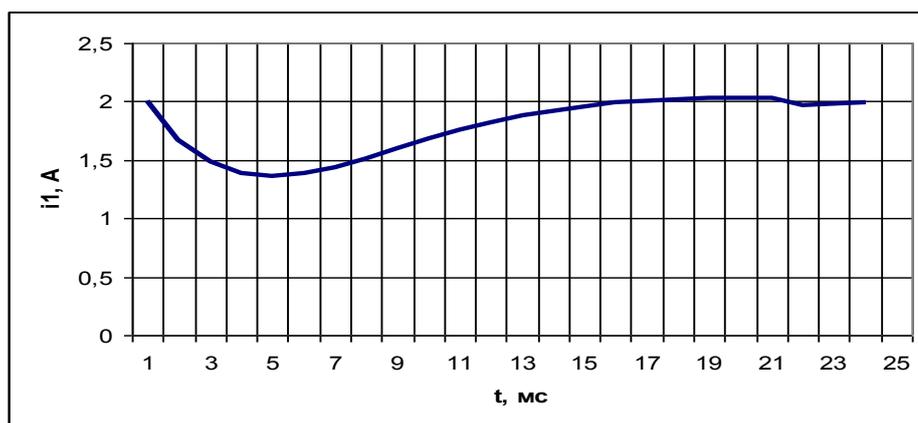
После подстановки численных значений получим систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2 &= 2 + A \sin \gamma \\ -400 &= -200A \sin \gamma + A200 \cos \gamma \end{aligned} \right\}$$

Совместное решение этих уравнений даёт $A = -2$, $\gamma = 0$. Следовательно, искомый ток $i_1 = 2 - 2e^{-200t} \sin 200t$.

Для построения графика $i_1(t)$ вычислим мгновенные значения тока для различных моментов времени, начиная от нуля, через каждую миллисекунду. Результаты расчёта сведём в табл. 2.1. График тока $i_1(t)$ построен на рис. 2.10.

Таблица 2.1 – Значения мгновенных токов для различных моментов времени

Рисунок 2.10 - График тока $i_1(t)$

Пример 7. Для электрической цепи (рис.2.11) требуется найти токи во всех ветвях и напряжения на ёмкости C и индуктивности L после замыкания ключа K , построить зависимости токов и напряжений от времени, если $E = 180\text{В}$, $C = 10\text{мкФ}$, $L = 0.1\text{Гн}$, $R_1 = 20\text{Ом}$, $R_2 = 40\text{Ом}$.

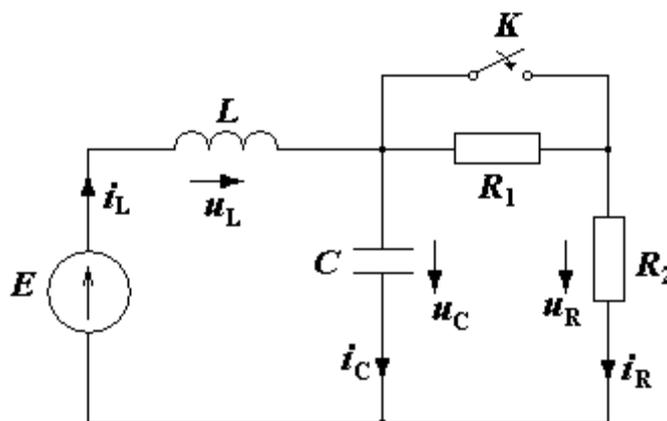


Рисунок 2.11 – Исходная электрическая схема

Решение.

1. Выбираем направления токов в ветвях и обозначаем их.
2. Значения токов в ветвях *до замыкания* ключа K

$$i_L(0_-) = i_R(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{180}{20 + 40} = 3\text{А},$$

$$i_C(0_-) = 0.$$

3. Напряжение на индуктивности и ёмкости до замыкания цепи

$$u_L(0_-) = 0; \quad u_C(0_-) = E = 180\text{В}.$$

4. Составим уравнения цепи после замыкания по 2-му закону Кирхгофа

$$u_C + u_L = E = 180\text{В}.$$

$$i_L = i_C + i_R = i_C + \frac{u_C}{R_2} = i_C + 4.5 = 3; \quad i_C = -1.5\text{А},$$

$$\text{но } u_C = u_{R_2}; \quad i_R = \frac{u_C}{R_2} = \frac{180}{40} = 4.5\text{А}.$$

$$u_C = u_{R_2} = 180\text{В}.$$

5. Составим дифференциальное уравнение для напряжения u_C , пользуясь 2-м законом Кирхгофа

$$u_C + u_L = u_C + L \frac{di_L}{dt} = E \quad (14)$$

Заменим здесь ток i_L на $i_C + i_R$, тогда

$$i_L = i_C + i_R = C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R_2} \quad (15)$$

Получаем дифференциальное уравнение для напряжения u_C

$$u_C + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{L}{R_2} \frac{du_C}{dt} = E \quad (16)$$

Разделим почленно на LC

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{R_2C} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC} \quad (17)$$

6. Решение (17) ищем в виде

$$u_C = u_{Cnn} + u_{Ccc} \quad (18)$$

где u_{Cnn} – принуждённая составляющая напряжения на ёмкости.

$$u_{Cnn} = E = 180\text{В.}$$

7. Запишем дифференциальное уравнение для свободной составляющей напряжения

$$\frac{d^2u_{Ccc}}{dt^2} + \frac{1}{R_2C} \frac{du_{Ccc}}{dt} + \frac{1}{LC} u_{Ccc} = 0 \quad (19)$$

где u_{Ccc} – свободная составляющая напряжения на ёмкости.

$$u_{Ccc} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (20)$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования;

p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения, полученные из (19)

$$p^2 + \frac{1}{R_2C} p + \frac{1}{LC} = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{1}{2R_2C} \pm \sqrt{\frac{1}{(2R_2C)^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{1}{2 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\frac{1}{(2 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 10^{-6})^2} - \frac{1}{0.1 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= -\frac{10^6}{2 \cdot 40 \cdot 10} \pm \sqrt{\left(\frac{10^4}{8}\right)^2 - 10^6} = -1250 \pm \sqrt{1562500 - 1000000} = -1250 \pm 750 \end{aligned}$$

$$p_1 = -2000\text{с}^{-1}; \quad p_2 = -500\text{с}^{-1}.$$

10. Поскольку корни характеристического уравнения отрицательные, вещественные и разные, то переходный процесс в цепи апериодический и напряжение на ёмкости в переходный период

$$u_C = u_{Cnn} + u_{Ccc} = 180 + A_1 e^{-2000t} + A_2 e^{-500t} \quad (22)$$

9. Определяем постоянные интегрирования A_1 и A_2 из начальных условий (при $t = 0$). Для этого нужно составить два уравнения, используя законы коммутации.

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = E = 180 \text{ В.}$$

$$\text{Из (9) при } t = 0 \text{ имеем: } 180 = 180 + A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 0 \quad (23)$$

10. Для составления второго уравнения найдём ток $i_C(0_+)$

$$i_C(0_+) = i_L(0_+) - i_R(0_+) = 3 - \frac{180}{40} = -1.5 \text{ А,}$$

то есть ток в ёмкости мгновенно уменьшается от 0 до -1.5 А и противоположен выбранному.

11. Ток в ёмкости после коммутации

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}) = -1.5 \text{ А} \quad (24)$$

12. При $t = 0$ имеем из (11)

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{1.5}{10 \cdot 10^{-6}} = \frac{1.5 \cdot 10^6}{10} = 1.5 \cdot 10^5$$

Второе уравнение

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 = 1.5 \cdot 10^5 \quad (25)$$

13.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = 1.5 \cdot 10^5 \end{cases}$$

$$\text{Отсюда имеем: } A_1 = -A_2 = 100 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 100 \\ A_2 = -100 \end{cases}$$

14. Значение напряжения на ёмкости u_C

$$u_C = 180 + 100e^{-2000t} - 100e^{-500t} \quad (26)$$

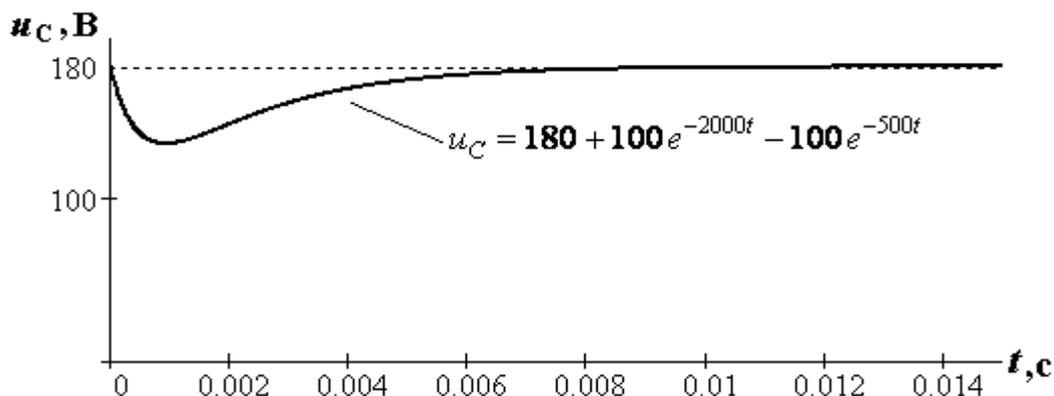


Рисунок 2.12 – Изменение напряжения на емкости во времени

15. Ток в ёмкости i_C

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = (100(-2000)e^{-2000t} - 100(-500)e^{-500t}) \cdot 10 \cdot 10^{-6} = -2e^{-2000t} + 0.5e^{-500t} \text{ A} \quad (27)$$

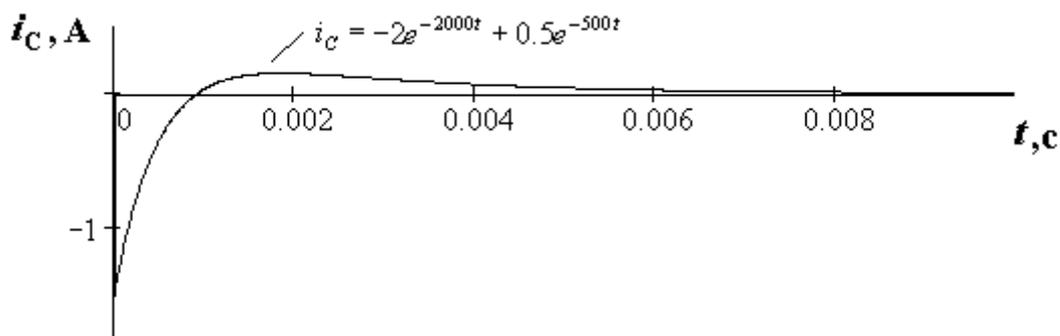


Рисунок 2.13 – Изменение тока на емкости во времени

16. Ток в индуктивности i_L

$$i_L = i_C + i_R = 4.5 - 2e^{-2000t} + 0.5e^{-500t} \quad (28)$$

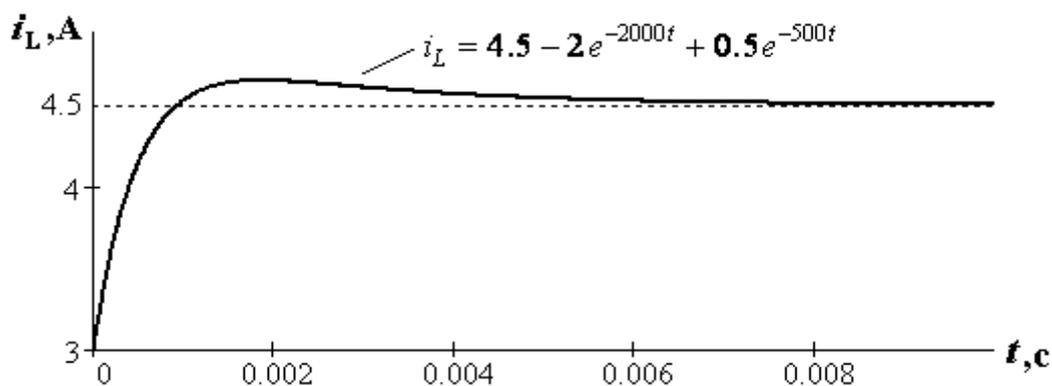


Рисунок 2.14 – Изменение тока на индуктивности

17. Ток в резисторе R_2

$$i_R = \frac{u_R}{R_2} = \frac{u_C}{R_2} = \frac{180 + 100e^{-2000t} - 100e^{-500t}}{40} = 4.5 + 2.5e^{-2000t} - 2.5e^{-500t} \text{ A} \quad (29)$$

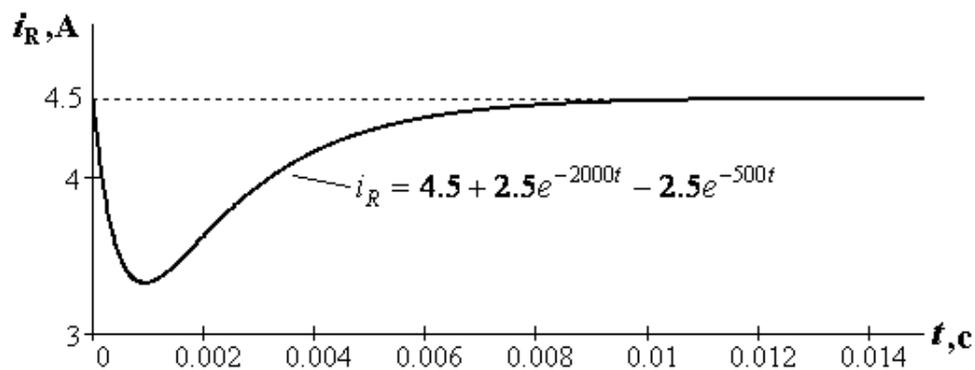


Рисунок 2.14 – Изменение силы тока во времени

Пример 8. Определить ток переходного процесса в электрической цепи (рис.2.15) после размыкания ключа K , если $u(t) = 100\sin(1000t + \pi/4)$, $R = 10\text{Ом}$, $C = 100\text{мкФ}$, $L = 10\text{мГн}$.

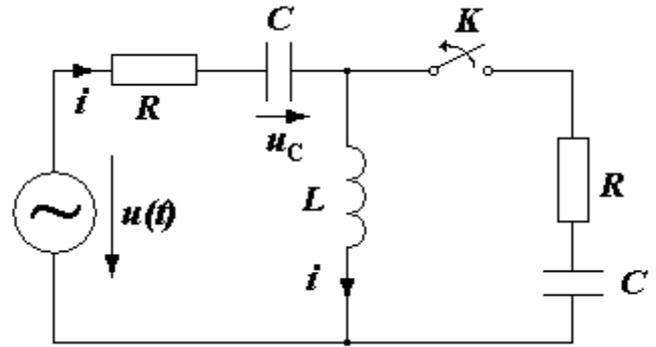


Рисунок 2.15 – Исходная схема

Решение.

1. Выбираем произвольно положительные направления для токов и напряжения на конденсаторе, как показано на рисунке.

2. Записываем дифференциальное уравнение на основании закона Кирхгофа для моментов времени после коммутации

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u(t)$$

3. Представляем искомый ток в виде суммы принуждённой и свободной составляющих

$$i = i_{np} + i_{ce}$$

4. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0,$$

$$p^2 + 10^3 p + 10^6 = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{-10^3 \pm \sqrt{10^6 - 4 \cdot 10^6}}{2} = -500 \pm j500\sqrt{3} = -\beta \pm j\omega_0.$$

5. Таким образом, решение для свободного тока ищем в виде

$$i_{\bar{n}\bar{a}} = Ae^{-500t} \sin(500\sqrt{3}t + \nu).$$

6. Находим принуждённую составляющую тока переходного процесса, воспользовавшись комплексным методом

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{100e^{j45^\circ}}{10 + j10^3 \cdot 10^{-2} - j \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-4}}} = 10e^{j45^\circ}$$

$$i_{\bar{i}\bar{o}} = 10\sin(100t + \pi/4),$$

$$i_{\bar{i}\bar{o}}(0) = 10\sin \pi/4 = 5\sqrt{2} \text{ А}$$

7. Рассчитываем ток переходного процесса и переходное напряжение на конденсаторе в момент времени $t = 0$ на основании законов коммутации. Для этого найдём их значения **до коммутации** (рис. 2.16).

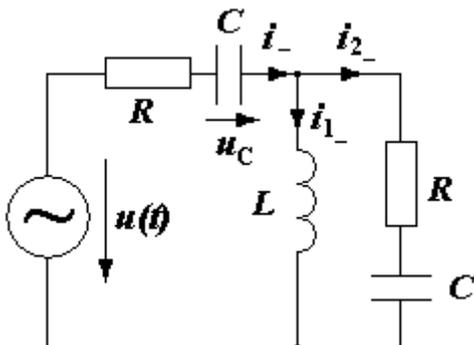


Рисунок 2.16 – Исходная схема

$$\underline{Z}_{\dot{Y}_-} = 10 - j10 + \frac{j10(10 - j10)}{j10 + (10 - j10)} = 20 - 0j = 20 \text{ Ом},$$

$$\dot{I}_{m_-} = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}_{\dot{Y}_-}} = \frac{100e^{j45^\circ}}{20} = 5e^{j45^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{1m_-} = \frac{100e^{j45^\circ} - 5e^{j45^\circ}(10 - j10)}{j10} = 5\sqrt{2} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{Cm_-} = \dot{I}_{m_-} \frac{1}{j\omega C} = -5e^{j45^\circ} j10 = 50e^{-j45^\circ}.$$

Мгновенное значение $i_{1-} = 5\sqrt{2} \sin 1000t$, $u_{C-} = 50 \sin(1000t - \pi/4)$.

При $t_+ = 0$ $i(0) = i_{1-}(0) = 0$,

и в момент коммутации $u_C(0) = -50 \sin \frac{\pi}{4} = -25\sqrt{2} \text{ В}$.

8. Находим значение первой производной тока переходного процесса в момент времени $t = 0$

$$Ri(0) + u_C(0) + L \frac{di}{dt} = u(0),$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u(0) - u_C(0) - Ri(0)}{L} = \frac{100 \sin 45^\circ + 25\sqrt{2} - 0}{10 \cdot 10^{-3}} = 75\sqrt{2} \cdot 10^2 \text{ А/с}.$$

9. Определяем постоянные интегрирования из уравнений

$$i_{i\delta} + i_{\bar{n}a} = 10 \sin(1000t + \pi/4) + Ae^{-500t} \sin(500\sqrt{3}t + \nu),$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 10 \cdot 10^3 \cos(1000t + \pi/4) + A500\sqrt{3}e^{-500t} \cos(500\sqrt{3}t + \nu) -$$

$$- A500e^{-500t} \sin(500\sqrt{3}t + \nu),$$

которые в момент $t = 0$ имеют вид

$$\begin{cases} 5\sqrt{2} + A \sin \nu = 0 \\ 5 \cdot 10^3 \sqrt{2} + A500\sqrt{3} \cos \nu - A500 \sin \nu = 75 \cdot 10^2 \sqrt{2} \end{cases}$$

Решение этих уравнений даёт $\nu = \pm \frac{\pi}{2}$, $A = \mp 5\sqrt{2}$.

10. Записываем окончательное выражение для тока переходного процесса

$$i = 10 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) - 5\sqrt{2}e^{-500t} \cos(500\sqrt{3}t),$$

так как при $\nu = \frac{\pi}{2}$ è $A = -5\sqrt{2}$, $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$,

а при $\nu = -\frac{\pi}{2}$ è $A = 5\sqrt{2}$, $\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \omega t$.

5. Примеры расчета переходных процессов операторным методом.

Пример 1. В схеме, показанной на рис. 2.17 замыкается рубильник K , который включает конденсатор C , предварительно заряженный до напряжения $u_C(0_-)$. Найти напряжение для токов при переходном процессе, если $E = 60\text{В}$, $R_1 = 400\text{Ом}$, $i_L(0_-) = 0.05\text{А}$, $R_2 = 800\text{Ом}$, $L = 0,2\text{Гн}$, $C = 2,5\text{мкФ}$, $u_C(0_-) = 20\text{В}$.

Решение.

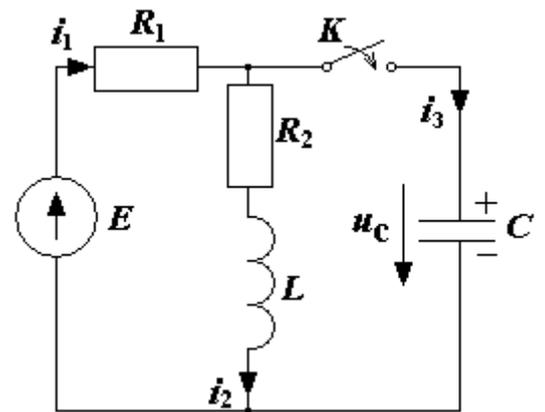
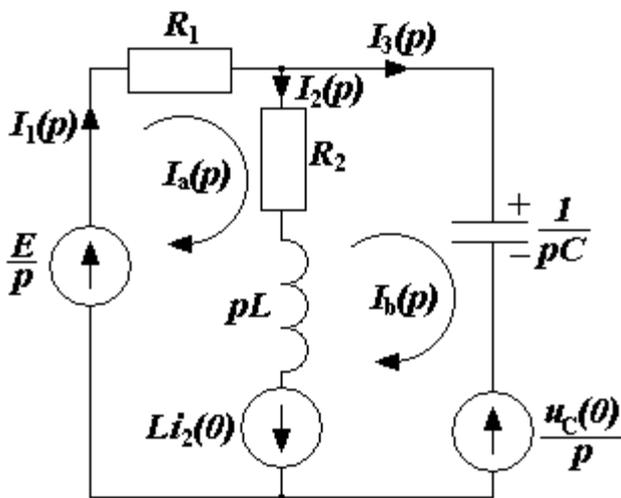


Рисунок 2.17 – Исходная схема



1. Выбираем положительные направления токов, как указано на схеме.

2. Составляем операторную схему замещения (рис. 2.18), найдя для напряжения на каждом элементе электрической цепи, соответствующее изображение по Лапласу.

3. Рассчитываем электрическую цепь любым способом, например, методом контурных токов.

Рисунок 2.18 – Операторная схема замещения

$$\begin{cases} I_a(p)(R_1 + R_2 + pL) - I_b(p)(R_2 + pL) = \frac{E}{p} + Li_2(0) \\ -I_a(p)(R_2 + pL) + I_b(p)\left(R_2 + pL + \frac{1}{pC}\right) = -Li_2(0) - \frac{u_C(0)}{p} \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, определяем

$$I_a(p) = \frac{(ELC - Lu_c(0)C)p^2 + (ER_2C + Li_2(0) - R_2u_c(0)C)p + E}{p[LCR_1p^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2]} = \frac{F_a(p)}{pF(p)},$$

$$I_b(p) = \frac{-C[(R_1Li_2(0) + Lu_c(0) - EL)p + u_c(0)(R_1 + R_2) - ER_2]}{LCR_1p^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2} = \frac{F_b(p)}{F(p)}.$$

4. Используя теорему разложения, находим искомые токи

$$i_1(t) = i_a(t) = \frac{F_a(0)}{F(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_a(p_k)(p - p_k)}{p_k F(p_k)} e^{p_k t},$$

$$i_3(t) = i_b(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_b(p_k)(p - p_k)}{F(p_k)} e^{p_k t}.$$

Находим нули функции $F(p)$

$$F(p) = 2 \cdot 10^{-4} p^2 + p + 1200 = 0,$$

$$p_1 = -2000c^{-1}, p_2 = -3000c^{-1}.$$

$$F_a(0) = 60, \quad F(0) = 1200,$$

Далее вычисляем $F_a(p_1) = -40, \quad F_a(p_2) = -30,$

$$F_b(p_1) = 0.04, \quad F_b(p_2) = 0.03.$$

$$i(t) = \frac{60}{1200} + \frac{-400e^{-2000t}}{-2000 \cdot 2 \cdot 10^{-4} (-2000 + 3000)} + \frac{-30e^{-3000t}}{-3000 \cdot 2 \cdot 10^{-4} (-3000 + 2000)} =$$

$$= 0,05 + 0,1e^{-2000t} - 0,05e^{-3000t},$$

$$i_3(t) = \frac{0,04e^{-2000t}}{(-2000 + 3000) \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,03e^{-3000t}}{(-3000 + 2000) \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 0,2e^{-2000t} - 0,15e^{-3000t},$$

$$i_2(t) = i_1 - i_3 = 0,05 - 0,1e^{-2000t} + 0,1e^{-3000t}.$$

Пример 2. Для электрической цепи изображенной на рис. 2.19 найти закон изменения тока $i_1(t)$ и построить его график после замыкания ключа К, если $U = 200B$,
 $R_1 = 1000\Omega$, $R_2 = 4000\Omega$, $C = 5\text{мкФ}$.

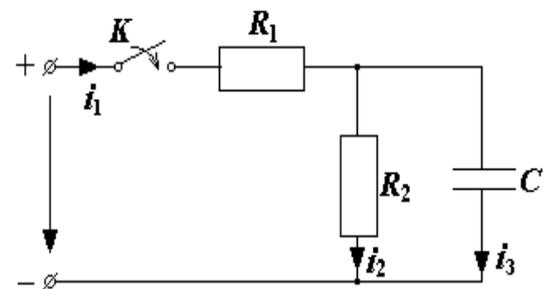
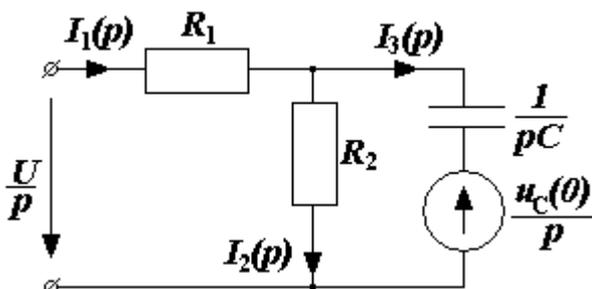


Рисунок 2.19 – Исходная схема

Решение.



1. Выбираем положительное направление токов в цепи.
2. Чертим операторную схему замещения расчетной цепи после коммутации (рис. 2.20).
3. Определяем операторное сопротивление цепи

Рисунок 2.20 – Операторная схема замещения расчетной цепи

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = 100 + \frac{400 \cdot \frac{1}{p \cdot 5 \cdot 10^{-6}}}{400 + \frac{1}{p \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} = \frac{0.2p + 500}{2 \cdot 10^{-3} + 1}.$$

4. Изображение тока $I_1(p)$ по закону Ома

$$I_1(p) = \frac{U(p) - \frac{u_C(0)}{p}}{Z(p)} = \frac{\frac{U}{p} - \frac{u_C(0)}{p}}{\frac{0.2p + 500}{2 \cdot 10^{-3} + 1}} = \frac{(200 - 0)(2 \cdot 10^{-3} + 1)}{p(0.2p + 500)} = \frac{0.4p + 200}{p(0.2p + 500)},$$

где $u_C(0) = 0$ - значение внутренней ЭДС в цепи при $t = 0$, так как конденсатор был не заряжен.

5. Находим оригинал $i(t)$ по таблице приложения 1 и по формуле разложения.

а) **Первый способ** – по таблице операторных изображений функций времени. Для этого изображение тока $I_1(p)$ представляем в виде двух слагаемых

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{0.4p + 200}{p(0.2p + 500)} = \frac{0.4p}{p(0.2p + 500)} + \frac{200}{p(0.2p + 500)} = \\ &= 0.4 \cdot \frac{5}{p + 2500} + 200 \cdot \frac{2500}{p(p + 2500)} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{p + 2500} + 0.4 \cdot \frac{2500}{p(p + 2500)}. \end{aligned}$$

По таблице находим, что $\frac{1}{p + 2500} \doteq e^{-2500\alpha}$,

$$\frac{2500}{p(p + 2500)} \doteq 1 - e^{-2500\alpha}.$$

Тогда имеем $i_1(t) = 2 \cdot e^{-2500\alpha} + 0.4(1 - e^{-2500\alpha}) = 0.4 + 1.6e^{-2500\alpha}$ А.

б) **Второй способ** – по формуле разложения

$$f(t) = \sum \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} = 0.4e^{-2500\alpha} + 1.6e^{-2500\alpha} \text{ А.},$$

где $F_1(p_k) = 0.4p + 200$.

$$F_2(p_k) = p(0.2p + 500) = 0.2p^2 + 500p;$$

$$F_2'(p_k) = (p_k) + 0.4 + 500.$$

Находим корни уравнения из $F_2(p_k) = 0$

$$p(0.2p + 500) = 0.$$

Отсюда $p_1 = 0$; $p_2 = -2500$.

Тогда $F_1(p_1) = 0.4 \cdot 0 + 200 = 200$;

$$F_1(p_2) = 0.4 \cdot (-2500) + 200 = -800;$$

$$F_2'(p_1) = 0.4 \cdot 0 + 500 = 500;$$

$$F_2'(p_2) = 0.4 \cdot (-2500) + 500 = -500;$$

$$\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} = \frac{200}{500} = 0.4;$$

$$\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} = \frac{-800}{-500} = 1.6.$$

Окончательно имеем

$$i_1(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{-2500t} = 0.4 + 1.6e^{-2500t} \text{ А.}$$

6. Строим график зависимости $i_1(t)$ (рис. 5.5). Расчёт значений $i_1(t)$ сведён в табл. 2.

Таблица 2.

Формула	Время t , с						
	0	0.0005	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
e^{-2500t}	1	0.882	0.082	0.0017	0.00055	0.00004	0.0000037
$1.6 \cdot e^{-2500t}$	1.6	1.4119	0.131	0.0108	0.0009	0.00007	0.000006
$i(t) = 0.4 + 1.6e^{-2500t}$	2	1.8119	0.531	0.40108	0.0009	0.00007	0.000006

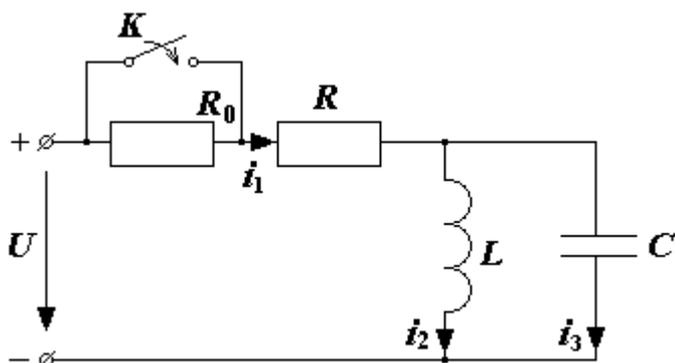
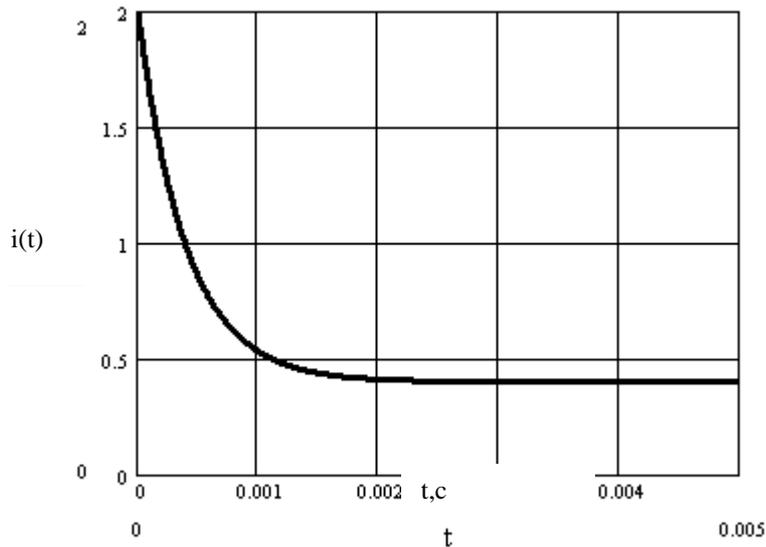


Рис. 5.6

Пример 3. В электрической цепи (рис. 5.6) определить закон изменения переходного тока на неразветвлённом участке цепи операторным методом, если $U = 100 \text{ В}$, $R_0 = R = 50 \text{ Ом}$, $L = 0.25 \text{ Гн}$, $C = 50 \text{ мкФ}$.

Решение.

1. Токи в ветвях цепи до коммутации:

$$i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{U}{R_0 + R} = \frac{100}{100} = 1 \text{ А.}$$

$$i_3(0_-) = 0$$

2. Напряжение на конденсаторе до коммутации

$$u_C(0_-) = 0.$$

3. Составим операторную схему замещения цепи (рис. 5.7).

4. Составим систему уравнений по закону Кирхгофа

$$\begin{cases} I_1(p) = I_2(p) + I_3(p); \\ RI_1(p) + LpI_2(p) = \frac{U}{p} + Li_2(0); \\ RI_1(p) + \frac{1}{Cp}I_3(p) = \frac{U}{p} - \frac{u_C(0)}{p} = 0 \end{cases}$$

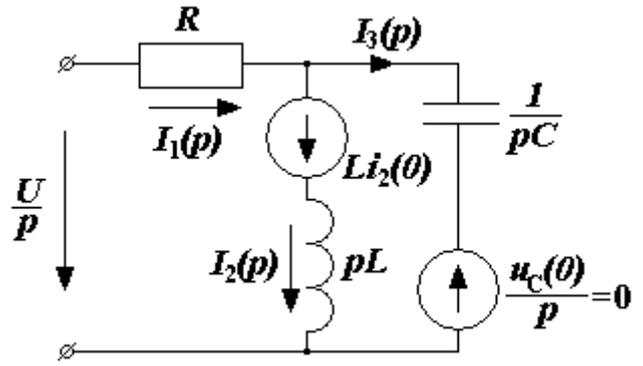


Рис. 5.7

5. Решив эту систему относительно тока $I_1(p)$, получим

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{LCUp^2 + Li_2(0)p + U}{LCRp^3 + Lp^2 + Rp} = \frac{0.25 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 0.25 \cdot 1 \cdot p + 100}{p^3 \cdot 0.25 \cdot 50 \cdot 10^{-6} + 0.25 \cdot p^2 + 50 \cdot p} = \\ &= \frac{0.00125p^2 + 0.25p + 100}{0.000025p^3 + 0.25p^2 + 50p} = \frac{2p^2 + 400p + 160000}{p^3 + 400p^2 + 80000p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \end{aligned}$$

6. Для нахождения оригинала определим корни знаменателя, для чего приравняем его к нулю

$$p^3 + 400p^2 + 80000p = 0 \text{ или } p(p^2 + 400p + 80000) = 0.$$

$$p_1 = 0; p_2 = -200 + j200; p_3 = -200 - j200.$$

7. Так как знаменатель имеет три корня, то сумма в формуле разложения состоит из трёх слагаемых

$$i_1(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t}.$$

8. Найдём числители слагаемых

$$F_1(p_1) = 16 \cdot 10^4; F_1(p_2) = (8 - j8) \cdot 10^4; F_1(p_3) = (8 + j8) \cdot 10^4.$$

9. Производная знаменателя

$$F_2'(p) = 3p^2 + 800p + 80000.$$

10. Подставим вместо p соответствующие корни и получим знаменатели слагаемых

$$F_2'(p_1) = 80000; F_2'(p_2) = (-8 - j8) \cdot 10^4; F_2'(p_3) = (-8 + j8) \cdot 10^4.$$

11. Полученные значения подставим в формулу теоремы разложения

$$i_1(t) = \frac{16 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^4} e^{0 \cdot t} + \frac{(8 - j8) \cdot 10^4}{(-8 - j8) \cdot 10^4} e^{(-200 + j200) \cdot t} + \frac{(8 + j8) \cdot 10^4}{(-8 + j8) \cdot 10^4} e^{(-200 - j200) \cdot t} =$$

$$= 2 - e^{-200t} \left[e^{j(200t-90^\circ)} + e^{-j(200t-90^\circ)} \right].$$

Избавляясь от комплексной формы, получим

$$i_1(t) = 2 - 2e^{-200t} \sin 200t.$$

Пример 4. Электрическая цепь (рис. 5.8) с сопротивлением $r = 50 \text{ Ом}$, индуктивностью $L = 300 \text{ мГн}$ и ёмкостью $C = 100 \text{ мкФ}$ включается в синусоидальное напряжение $u = 1000 \cdot \sin(314t) \text{ В}$. Найти закон изменения переходного тока $i_1(t)$.

Решение.

1. Операторное сопротивление цепи

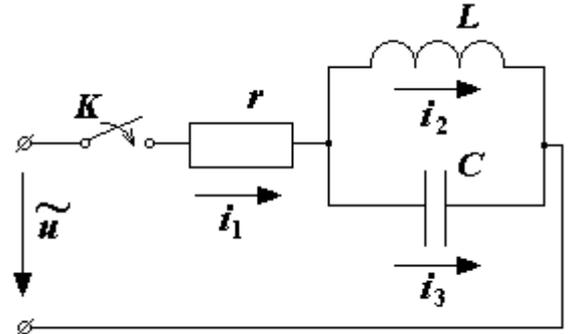


Рис. 5.8

$$Z(p) = r + \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = r + \frac{pL}{p^2 LC + 1} = \frac{p^2 r LC + pL + r}{p^2 LC + 1}.$$

2. Корни уравнения $Z(p) = 0$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2rC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2rC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right)^2 - \frac{1}{300 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = -100 \pm j152 \text{ с}^{-1}.$$

3. При наличии двух корней оригинал тока по формуле включения для синусоидального напряжения источника

$$i_1(t) = I_m \left[\frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi)}}{Z(j\omega)} + \frac{U_m e^{j\varphi}}{(p_1 - j\omega)Z'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{U_m e^{j\varphi}}{(p_2 - j\omega)Z'(p_2)} e^{p_2 t} \right].$$

4. Сопротивление цепи в комплексной форме

$$Z(j\omega) = r + \frac{j\omega L \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L - j \frac{1}{\omega C}} = 50 + \frac{j \cdot 314 \cdot 300 \cdot 10^{-3} \left(-j \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right)}{j \cdot 314 \cdot 300 \cdot 10^{-3} - j \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = 69.3 e^{-j43.83^\circ} \text{ Ом}.$$

Значения $p_k - j\omega$ при $p_k = p_1$, $p_k = p_2$ будут

$$p_1 - j\omega = -100 + j152 - j314 = 190 e^{-j121.7^\circ};$$

$$p_2 - j\omega = -100 - j152 - j134 = 476 e^{-j102.12^\circ}.$$

5. Производная операторного сопротивления

$$Z'(p) = \frac{-p^2 L^2 C + L}{(p^2 LC + 1)^2}.$$

$$\text{При } p = p_1 = -100 + j152 \quad Z'(p_1) = 0.416e^{j145.29^\circ};$$

$$\text{при } p = p_2 = -100 - j152 \quad Z'(p_2) = 0.416e^{-j145.29^\circ}.$$

6. Полученные значения подставим в выражение тока

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_m \left[\frac{1000e^{j314t}}{69.3e^{-j43.83^\circ}} + \frac{1000e^{(-100+j152)t}}{190e^{-j121.7^\circ} \cdot 0.416e^{j145.29^\circ}} + \frac{1000e^{(-100-j152)t}}{476e^{-j102.12^\circ} \cdot 0.416e^{-j145.29^\circ}} \right] = \\ &= I_m \left[14.4e^{j(314t+43.83^\circ)} + 12.65e^{-100t} e^{j(152t-23.59^\circ)} + 5.05e^{-100t} e^{-j(152t+112.88^\circ)} \right] = \\ &= 14.4 \sin(314t + 43.83^\circ) + 12.65e^{-100t} \sin(152t - 23.59^\circ) - 5.05e^{-100t} \sin(152t + 112.88^\circ). \end{aligned}$$

После преобразования получим

$$i_1(t) = 14.4 \sin(314t + 43.83^\circ) + 16.64e^{-100t} \sin(152t - 35.62^\circ)$$

Пример 5. Пользуясь операторным методом, определить ток переходного процесса в цепи (рис. 5.9), после размыкания ключа K . Дано: $L = 10^{-2}$ Гн, $C = 10^{-4}$ Ф, $R = 10$ Ом, $u_C(0) = -25\sqrt{2}$ В, $u(t) = 100 \sin\left(10^3 t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

1. Выбираем произвольно положительное направление тока переходного процесса $i(t)$, как показано на рис. 5.9.

2. Записываем выражение для синусоидального напряжения источника в операторной форме, воспользовавшись преобразованиями

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \rightarrow U_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi}$$

$$U_m e^{j\omega t} e^{j\psi} \frac{\dot{U}_m}{p - j\omega} = \frac{U_m e^{j\psi}}{p - j\omega},$$

где $U_m = 100$ В, $\psi = \frac{\pi}{4}$, $\omega = 10^3$ с⁻¹.

3. Записываем выражение для искомого тока в операторной форме на основании закона Ома

$$\begin{aligned} \dot{i}_m(p) &= \frac{\frac{U_m e^{j\psi}}{p - j\omega} - j \frac{u_C(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{pU_m e^{j\psi} - ju_C(0)(p - j\omega)}{(p - j\omega) \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} = \\ &= \frac{p \cdot 100 e^{j\frac{\pi}{4}} + j25\sqrt{2}(p - j10^3)}{(p - j10^3) \left(p^2 \cdot 10^{-2} + 10p + \frac{1}{10^{-4}} \right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \end{aligned}$$

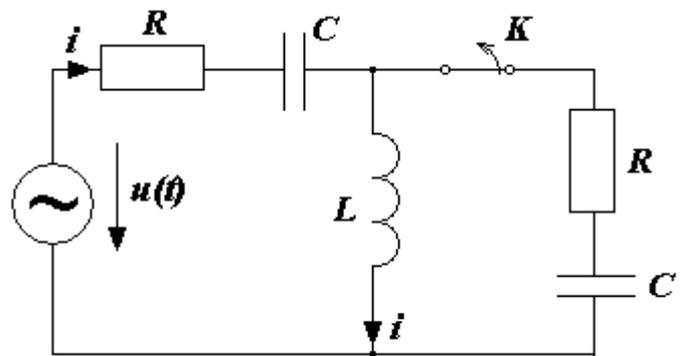


Рис. 5.9

4. Записываем уравнение для искомого тока на основании теоремы разложения и находим его элементы

$$i_m = \sum_{k=1}^3 \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Здесь $p_1 = 10^3 j$, $p_{2,3} = -500 \mp j500\sqrt{3}$ – нули уравнения $F_2(p) = 0$.

Находим

$$F_1(p_1) = j10^5 e^{j\frac{\pi}{4}},$$

$$F_1(p_2) = 125 \cdot 10^2 \sqrt{6} [3 - j(2 + \sqrt{3})],$$

$$F_1(p_3) = 50\sqrt{2}(1+j)(-500)(1-j\sqrt{3}) + j25\sqrt{2}[(-500)(1-j\sqrt{3}) - j10^3] = \\ = -12500\sqrt{6} [3 - j(2 - \sqrt{3})],$$

$$F_2'(p) = p^2 L + pR + \frac{1}{C} + (2p + R)(p - j\omega),$$

$$F_2'(p_1) = j10^4,$$

$$F_2'(p_2) = 5000\sqrt{3}j[1 + j(2 + \sqrt{3})],$$

$$F_2'(p_3) = (10j\sqrt{3})(-500)(1 - j\sqrt{3} + j2) = -5000\sqrt{3}j[1 + j(2 - \sqrt{3})].$$

5. Записываем искомый ток переходного процесса в комплексной форме

$$i(t) = \frac{j10^5 e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j10^3 t}}{j10^4} + \frac{125 \cdot 10^2 \sqrt{6} [3 - j(2 + \sqrt{3})]}{5000\sqrt{3}j[1 + (2 + \sqrt{3})]} e^{(-500 - j500\sqrt{3})t} + \\ + \frac{-125 \cdot 10^2 \sqrt{6} [3 - j(2 - \sqrt{3})]}{-5000\sqrt{3}j[1 + (2 - \sqrt{3})]} e^{(-500 + j500\sqrt{3})t} = \\ = 10e^{j(10^3 t + \frac{\pi}{4})} - j2.5\sqrt{2} \frac{3 - j(2 + \sqrt{3})}{1 + j(2 + \sqrt{3})} e^{-500(1 + j\sqrt{3})t} + j2.5\sqrt{2} \frac{3 - j(2 - \sqrt{3})}{1 + j(2 - \sqrt{3})} e^{-500(1 - j\sqrt{3})t}.$$

6. Беря мнимую часть от полученного уравнения в комплексной форме, найдём окончательное выражение для искомого тока в функции времени

$$\text{Имеем } i = 10 \sin\left(10^3 t + \frac{\pi}{4}\right) - 5\sqrt{2} e^{-500t} \cos(500\sqrt{3}t).$$

6. Задачи для самостоятельного решения.

Все задачи по расчёту переходных процессов в электрических цепях сгруппированы по порядку характеристических уравнений, который зависит от числа реактивных элементов и способа их включения. Расчёт переходных процессов в цепях (рис. 6.1...6.20) выполнять с помощью классического и операторного методов.

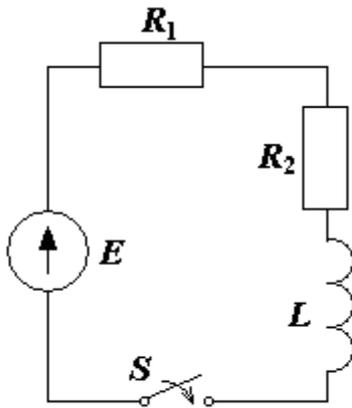


Рис. 6.1

ных зависимостей после
параметры элементов схе-
 $R_1 = R_2 = 500\text{Ом}$;
 $E = 50\text{В}$.

Задача 3.

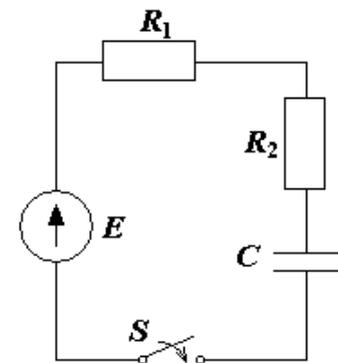


Рис. 6.2

напряжения
 $u_C(t)$ после замы-
ключения S и постро-
ки их временных
стей. Параметры
схемы имеют сле-
дующие значения:

$R_1 = R_2 = 1\text{кОм}$; $C = 1\text{ мкФ}$. Напряжение источника
 $E = 100\text{В}$.

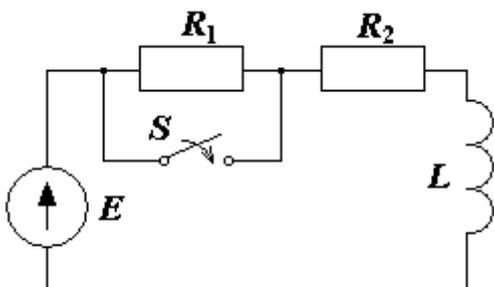


Рис. 6.4

Задача 1.

Рассчитать переходный процесс в цепи с
стью L (рис. 6.1) и определить мгновенное значение напряжения
 $u_L(t)$ и тока $i(t)$ после замыкания ключа S . Параметры элементов
схемы имеют значения: $R_1 = R_2 = 100\text{Ом}$; $L = 0.1\text{Гн}$. Напряжение
источника $E = 100\text{В}$. Построить графики временных зависимостей
напряжения и тока.

Задача 2.

Рассчитать мгновенные значения
напряжений $u_{R_1}(t)$ и $u_C(t)$ в цепи с ёмко-
стью C и построить графики их времен-
замыкания ключа S в схеме рис. 6.2. Па-
мы имеют следующие значения:
 $C = 2\text{ мкФ}$. Напряжение источника

В схеме рис. 6.3 происходит замыка-
ние ключа S . Требуется рассчитать
 $u_{R_1}(t)$ и
кания
ить граffi-
зависимо-
элементов
дующие

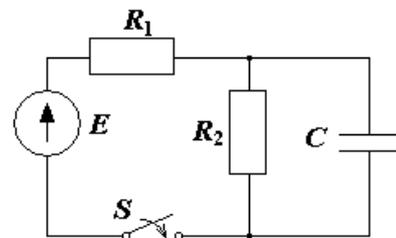


Рис. 6.3

Задача 4.

В схеме рис. 6.4 замыкается ключ S . Требуется рассчи-
тать мгновенные значения тока в цепи $i(t)$ и напряжения на
индуктивности $u_L(t)$, если $R_1 = R_2 = 50\text{Ом}$; $L = 50\text{ мГн}$.
Напряжение источника $E = 100\text{В}$. Построить графики вре-
менных зависимостей $i(t)$ и $u_L(t)$.

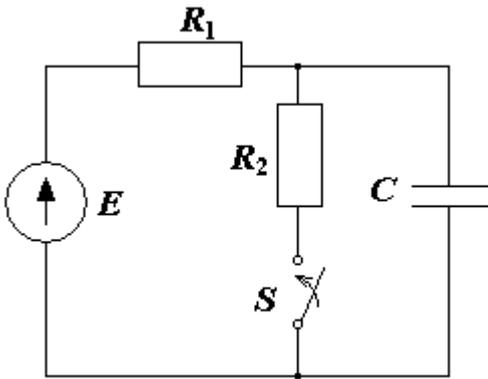


Рис. 6.5

вях $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = 1 \text{ кОм}; C = 5 \text{ мкФ}; E = 200 \text{ В}.$

Задача 5.
В схеме рис. 6.5 замыкается ключ S . Требуется рассчитать и построить график изменения напряжения $u_C(t)$ на ёмкости после замыкания ключа. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = 400 \text{ Ом}; C = 0.1 \text{ мкФ}; E = 50 \text{ В}.$

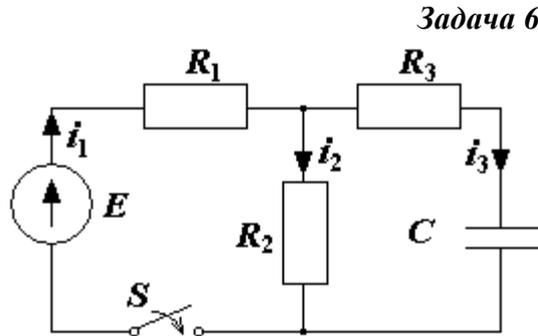


Рис. 6.6

Задача 6.
Для схемы рис. 6.6 требуется рассчитать и построить графики токов в ветках $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_2 = R_3 = 2 \text{ кОм};$

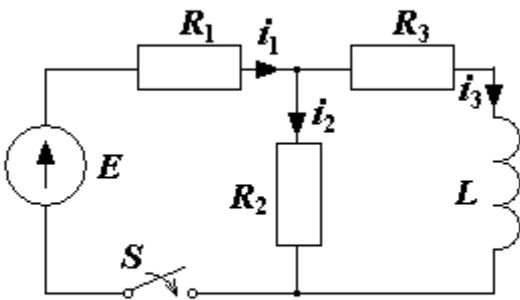


Рис. 6.7

Задача 7.
Рассчитать мгновенные значения токов $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ в цепи (рис. 6.7) после замыкания ключа S . Построить графики их временных зависимостей. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}; L = 0.1 \text{ Гн}; E = 150 \text{ В}.$

Задача 8.
В схеме рис. 6.8 требуется рассчитать и построить графики напряжений на сопротивлении $u_{R_1}(t)$ и индуктивности $u_L(t)$ после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = R_2 = 200 \text{ Ом}; L = 10 \text{ мГн}; E = 120 \text{ В}.$

Параметры элементов цепи

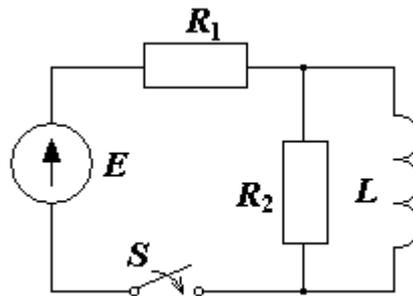


Рис. 6.8

рассчитать и построить графики напряжений на сопротивлении $u_{R_1}(t)$ и индуктивности $u_L(t)$ после замыкания ключа S . Параметры элементов схемы имеют значения: $R_1 = R_2 = 200 \text{ Ом}; L = 10 \text{ мГн}; E = 120 \text{ В}.$

пи.

ТАБЛИЦА

2.7 Краткие выводы второй главы

1. Переходные процессы в электрической цепи возникают при переходе от одного установившегося режима работы к другому режиму, который отличается от первого.

Смена режимов происходит в результате коммутаций (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и др.)

2. Первый Закон коммутации.

В любой ветви с индуктивностью ток и магнитный поток в момент коммутации сохраняет те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, т.е.

$$\begin{cases} i(0_-) = i(0_+) \\ \Phi(0_-) = \Phi(0_+) \end{cases}; \quad (2.30)$$

3. Второй закон коммутации.

В любой ветви с конденсатором напряжение и заряд сохраняют в момент коммутации те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, т.е.

$$\begin{cases} U_C(0_-) = U_C(0_+) \\ q(0_-) = q(0_+) \end{cases}; \quad (2.31)$$

4. В цепях с индуктивностью и емкостью переходный процесс рассматривается как результат наложения двух процессов – принуждённого и свободного

$$\begin{cases} i_L(t) = i_{Lnp} + i_{Lcs} \\ u_C(t) = u_{Cnp} + u_{Ccs} \end{cases}; \quad (2.32)$$

5. Для расчёта переходных процессов в электрических цепях применяют следующие методы расчёта: классический, операторный, частотный (спектральный); с помощью интеграла Дюамеля и метод переменных состояний.

6. Классический метод расчёта и анализа переходных процессов относятся к линейным цепям с сосредоточенными параметрами и сводятся к составлению и решению дифференциальных уравнений, составленных по первому и второму Законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений. Решение состоит в определении: корней характеристического уравнения, свободных составляющих переходного процесса, постоянных интегрирования и постоянных токов и напряжений.

Особенность классического метода состоит в решении задачи с реальными величинами и реальным временем. Результаты расчёта обычно иллюстрируются графиками. Однако эти расчёты сложны и требуют применения вычислительной техники.

7. Операторный метод расчёта переходных процессов состоит в том, что реальная функция времени (оригинал) заменяется другой функцией с изображением. Эта замена осуществляется с помощью прямых преобразований Лапласа и Карсона-Хевисайда

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt; \quad (2.33)$$

или

$$F(p) \square L[f(t)]; \quad (2.34)$$

8. Переход от изображения к функции времени осуществляют при помощи преобразования Лапласа или формулы разложения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt} dt; \quad (2.35)$$

Или

$$f(t) = L^{-1}[F(p)]; \quad (2.36)$$

Можно воспользоваться формулой разложения

$$f(t) = \sum_1^n \frac{F_1(P_k)}{F_2'(P_k)} \cdot e^{P_k t}; \quad (2.37)$$

где P_k - корни уравнения $F_2(p) = 0$;

n - число корней;

$F_1(P_k)$ - значение функции $F_1(p)$, при $P = P_k$;

$F_2'(P_k)$ - значение производной функции $F_2(P)$, при $P = P_k$;

9. Закон Ома в операторной форме

$$I(P) = \frac{E(P) + L \cdot i(0) - \frac{U_C(0)}{P}}{Z(P)}; \quad (2.38)$$

10. Второй закон Кирхгофа в операторной форме

$$\sum_1^n I_k(P) \cdot Z(P) = \sum_1^n [E_k(P) + L_k \cdot i_k(0) - \frac{U_{Ck}(0)}{P}]; \quad (2.39)$$

Содержание.

	стр
Предисловие	
Глава 1. Трёхфазные электрические цепи	
1.1 Основные формулы и уравнения	
1.1.1 Источник трёхфазного напряжения	
1.1.2 Соединение обмоток генератора и приемника в звезду	
1.1.3 Соединение обмоток приемника по схеме треугольник	
1.1.4 Смещение нейтрали приёмника	
1.1.5 Соединение в звезду осветительной нагрузки	
1.2 Типовые задачи с решениями	
1.3 Задачи для самостоятельного решения	
1.4 О использовании метода симметричных составляющих для расчёта трёхфазных цепей	
1.5 Краткие выводы первой главы	
Глава 2 Переходные процессы в линейных электрических цепях	
2.1 Основные сведения о расчёте переходных процессов электрических цепей	
2.2 Классический метод расчёта переходных процессов	
2.3 Операторный метод расчёта переходных процессов	
2.4 Типовые примеры расчёта переходных процессов классическим методом	
2.5 Типовые примеры расчёта переходных процессов операторным методом	
2.6 Задачи для самостоятельного решения	
2.7 Краткие выводы второй главы	
Приложение	
Список используемой литературы	

Приложения

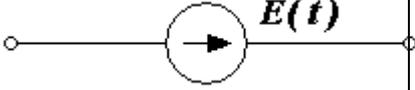
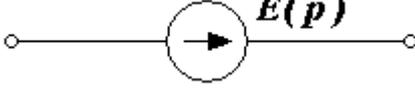
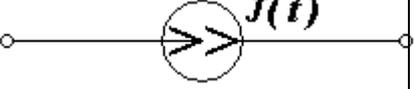
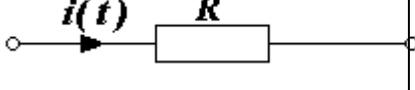
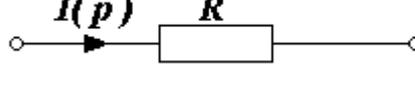
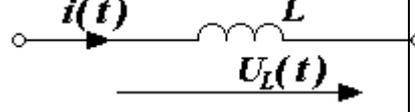
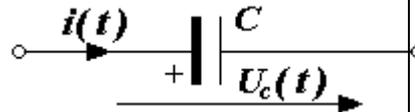
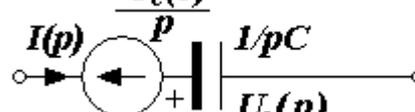
Операторные изображения простейших функций времени

$$f(t) \doteq F(p)$$

п/п	Функция времени – $f(t)$	Изображение по Лапласу – $F(p)$	Изображение по Карсону-Хевисайду – $F(p)$
	$e(t)$	$E(p) = \frac{E}{p}$	$E(p) = E$
	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{p}{p-a}$
	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{p}{p+a}$
	$e^{j\omega t}$	$\frac{1}{1-j\omega}$	$\frac{p}{1-j\omega}$
	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{a}{p+a}$
	at	$\frac{a}{p^2}$	$\frac{a}{p}$
	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$
	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$
	$e^{-at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{p\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
0	$e^{-at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{p(p+a)}{(p+a)^2 + \omega^2}$
1	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{2p^2\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
2	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{p(p^2 - \omega^2)}{(p^2 + \omega^2)^2}$
3	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$	$pF(p) - pf(0)$
4	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - p^2 f(0)$	$p^2 F(p) - p^2 f(0) - pf''(0)$
5	$\int_0^{\infty} f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$ при $f(0) = 0$	$F(p)$ при $f(0) = 0$

6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p^2}{p^2 + \omega^2}$
7	$\sin \omega t$	$\frac{p\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p^2\omega}{p^2 + \omega^2}$
8	$\dot{I}_m e^{j\omega t}$	$I_m \frac{1}{p - j\omega}$	$I_m \frac{p}{p - j\omega}$
9	$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$	$I_m \cdot e^{-j\varphi} \cdot \frac{1}{p - j\omega}$	$I_m \cdot e^{-j\varphi} \cdot \frac{p}{p - j\omega}$
0	$I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$I_m \cdot e^{j\varphi} \cdot \frac{1}{p - j\omega}$	$I_m \cdot e^{j\varphi} \cdot \frac{p}{p - j\omega}$
1	$\frac{1}{c} \int i dt$	$\frac{I(p)}{cp} + \frac{U_c(0)}{p}$	$\frac{I(p)}{cp} - U_c(0)$
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	1
3	$L \frac{di}{dt}$	$LpI(p) - Lf(0)$	$LpI(p) - Lpf(0)$

Операторные схемы замещения элементов электрической цепи.

Элемент цепи	Оригинальная схема	Операторная схема замещения по Лапласу
Источник напряжения		
Источник тока		
Сопротивление		
Индуктивность		
Ёмкость		

Список использованной литературы.

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник – М.: «Гайдарика», 1999.
2. Быков А.П., Сапков Г.Н. Теоретические основы электротехники. Расчёт переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами операторным методом: Учебное пособие, изд. 2-ое, исправленное и дополненное. – М.: ВЗИИЖДТ, 1973.
3. Горбунов А.Н., Кабанов И.Д., Кравцов А.В., Редько И.Я. Теоретические основы электротехники: – М., 1998.
4. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов. 5-е изд. В 2-х томах. СПб., Питер. – 2009.
5. Евдокимов Ф.С. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1999.
6. Потапов Л.А. Краткий курс теоретических основ электротехники: Учебное пособие. – Брянск: БГТУ, 2001. – Ч.1.
7. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: Практическое пособие. – С.-Пб.: Корона принт, 2003.
8. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. Под ред. П.А. Ионкина. – М.: Энергоатомиздат, 1982.

Учебное пособие

Николай Михайлович Прыгов
Ольга Евгеньевна Широбокова
Лариса Михайловна Маркарянц

Практикум по теоретическим основам электротехники

ЧАСТЬ 2

Редактор: Павлютина И.П.

Лицензия №	от	Подписано в печать 04.09.2014г.
Формат А4	Бумага типографическая	Офсетная печать.
Усл. п. л. 4.70.	Уч.- изд. л.	Тираж 50 экз. Изд. № 2813.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365, Брянская область, Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА