Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Трубчевский аграрный колледж - филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Брянский государственный аграрный университет"

Саликова Т.С.

Методическое пособие по изучению дисциплины «Техническая механика» для обучающихся специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

Брянская область, 2019 г.

УДК 531.8 (07)
ББК 30.12
С 16

Саликова, Т. С. Методическое пособие по изучению дисциплины «Техническая механика» специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования / Т. С. Саликова. - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2019. – 157 с.

Составитель:

Саликова Т.С. - преподаватель информационных систем Трубчевского филиала ФГБОУ ВО Брянский ГАУ, высшей квалификационной категории

Методическое пособие по дисциплине «Техническая механика» подготовлено на основе требований к результатам освоения программы подготовки специалистов среднего звена.

Методическое пособие для дисциплины предусматривает конспект лекций по изучению дисциплины по разделам: теоретическая механика (статика, кинематика, динамика) и сопротивление материалов.

Учебное пособие предназначено для обучающихся учреждений среднего профессионального образования.

Методическое пособие печатаются по решению методического совета филиала, протокол №3 от 04.02.2019 г.

Рецензент:

Лопаткин В.В. – заместитель директора по воспитательной работе, председатель цикловой методической комиссии, преподаватель Трубчевского филиала высшей квалификационной категории, Почетный работник среднего профессионального образования Российской Федерации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Что такое Техническая механика?

Механика - это наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел.

Техническая механика является одним из разделов Механики, в котором изучаются законы движения тел и общие свойства этих движений.

На основе этих закономерностей разработаны методы и приемы технической механики, позволяющие конструировать сооружения, механизмы и машины, а также производить практические расчеты различных технических и строительных конструкций на прочность, устойчивость, жесткость, т. е. - на работоспособность в заданном интервале нагрузок.

Учебная дисциплина "Техническая механика", изучаемая студентами Трубчевского аграрного колледжа - филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Брянский государственный аграрный университет" в пределах рабочих программ для технических специальностей, включает следующие разделы:

- ***Теоретическая механика***
- ***Сопротивление материалов***
- ***Детали и механизмы машин***

Изучение каждого последующего раздела Технической механики для техникумов предполагает знание обучающимся предыдущих разделов, а также базовые знания по общеобразовательным дисциплинам - математике, геометрии, физике.

Теоретическая механика

Раздел "Теоретическая механика" состоит из подразделов:

- Статика
- Кинематика
- Динамика

"Статика" является частью Теоретической механики, изучающей условия, при которых тело находится в равновесии. При этом равновесием считается такое состояние тела, когда оно находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.

Методы и приемы, применяемые для решения задач Статики, позволяют определить внешние силовые факторы, благодаря которым тело находится в состоянии равновесия, т. е. по известным значениям внешних сил или моментов, приложенных к телу, осуществить расчет неизвестных силовых факторов (сил, моментов), воздействующих на данное тело.

Выполнение таких расчетов необходимо для осуществления оценки работоспособности конструкций различных сооружений или механизмов при помощи методов и приемов, применяемых в науке "Сопротивление материалов".

"Кинематика" является частью Теоретической механики, и изучает законы движения материальных тел без учета силовых факторов, вызывающих это движение, т. е. с геометрической точки зрения. Задачи Кинематики сводятся к определению положения тела в пространстве относительно какой-либо системы отсчета в определенный момент времени или через временной промежуток.

Методы и приемы, применяемые при решении задач Кинематики, позволяют производить кинематические расчеты сложных механизмов машин, в которых отдельные детали и узлы совершают относительные перемещения при работе.

"Динамика", в отличие от Кинематики, изучает законы движения материальных тел с учетом силовых факторов, вызывающих это движение.

Методы и приемы, применяемые в Динамике, позволяют производить расчеты движения и перемещения деталей, узлов и механизмов машин, вызываемых приложенными нагрузками и реакциями.

1. Теоретическая механика

1.1 Статика

Статика *- часть теоретической механики, изучающая условия, при которых тело находится в равновесии. При этом равновесием считается такое состояние тела, когда оно находится в покое (т. е. без движения) или движется прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью).*

Основные понятия и определения статики

Абсолютно твердое *(или абсолютно жесткое)* ***тело*** *- это такое тело, расстояние между любыми его точками не меняется в результате действия на него других тел.*

Абсолютно твердых тел в природе не существует, но во многих случаях изменение размеров и формы*(деформация)* тел настолько незначительны, что ими можно пренебречь. В теоретической механике *(в т. ч. и в статике)* при решении многих задач тела предполагаются абсолютно твердыми, и их физико-механические свойства не учитываются *(за исключением расчетов, связанных с силами трения)*.

Материальная точка *- это такая точка в пространстве, которая обладает некоторой массой и практически не имеет размеров (т. е. размеры материальной точки при расчетах не учитываются).*

В статике и теоретической механике при решении задач многие тела рассматриваются, как материальные точки, т. е. их размерами пренебрегают. Это позволяет значительно упростить расчеты при минимальной погрешности, вызываемой подобными условностями. Например, в астрономии, звезды рассматриваются, как материальные точки, несмотря на то, что они имеют колоссальные *(по нашим меркам)* размеры. При этом перемещение звезд в пространстве может быть рассчитано с высокой степенью точности.

Следует отметить, что одни и те же тела при решении задач технической механики *(в зависимости от постановки задачи)* могут рассматриваться либо, как материальная точка, либо, как тело, размеры которого необходимо учитывать. Всякое тело можно считать взаимосвязанной системой *(совокупностью)* материальных точек. При этом абсолютно твердое тело представляет собой неизменяемую систему материальных точек.

Тела в природе различным образом взаимодействуют между собой или окружающей средой. Механическое взаимодействие тел, влияющее на их состояние покоя или движения *(механическое состояние)*, характеризуется силой.

Сила *- это мера механического взаимодействия тел между собой.*

Сила характеризуется тремя элементами: числовым значением *(модулем)*, направлением и точкой приложения, т. е. сила - величина векторная. При этом числовое значение силы называют модулем вектора силы.

Направлением силы считается направление, в котором перемещалось бы изначально покоящееся *(неподвижное)* тело, под действием этой силы. Прямая линия, вдоль которой направлен вектор силы, называется ***линией действия силы***.

Точкой приложения называют условную точку материального тела, к которой непосредственно приложена сила. Во многих расчетах по технической механике точка приложения оказывает решающее значение на результат силового воздействия - от нее будет зависеть характер движения тела - прямолинейное, по сложной траектории, либо тело будет просто вращаться вокруг центра тяжести. Есть задачи, в которых точка приложения силы не столь существенна, при этом силу разрешается даже перемещать вдоль линии ее действия, не вызывая изменения механического состояния материального тела.

Графически силу определяют отрезком прямой со стрелкой, при этом начало отрезка совпадает с точкой приложения силы, а его длина в определенном масштабе равна модулю вектора силы.

В соответствии с Международной системой единиц (*СИ*) в качестве единицы силы принят ***ньютон***(*Н*). Ньютон - сила сообщающая телу массой *1 кг* ускорение *1 м/сек*^{2} в направлении действия силы.

Совокупность тел *(в т. ч. и материальных точек)* взаимодействующих между собой, называется ***системой тел***. Силы взаимодействия между телами одной системы называют ***внутренними силами***, а силы, воздействующие на систему со стороны других тел или других систем - ***внешними силами***. Следует отметить, что деление сил на внешние и внутренние является условным, и зависит от постановки задачи и даже метода ее решения.

Если данную систему сил рассечь на части и рассматривать равновесие каждой из частей в отдельности, то многие внутренние силы цельной системы станут для отдельных ее частей внешними.

Условное *(мысленное)* расчленение системы тел *(или точек)* на отдельные составляющие части называют ***методом сечений***. Этот метод широко используется при решении многих задач технической механики, и позволяет определить внутренние силы, действующие в системе.

Статика при решении задач условия равновесия тел или материальных точек оперирует понятиями свободных и несвободных тел.

Свободным называется тело, если никакие другие тела не препятствуют его перемещению в любом направлении *(прямо- и криволинейном движении, вращении, кувыркании и т. п.)*.

Примером свободного тела может быть, например, летящий самолет, поскольку он может перемещаться в любом пространственном направлении - вверх, в стороны, вниз и т. п., не встречая преград в виде других тел на пути.

Если же тело из-за противодействия со стороны другого тела *(или системы тел)* не может перемещаться в одном или нескольких направлениях, то такое тело называют ***несвободным*** или ***связанным***.

Простейшим примером связанного *(несвободного)* тела является лежащая на столе книга *(или какой-либо другой предмет)* - ее можно перемещать в любом направлении, кроме одного - вниз, поскольку этому противодействует связь со стороны столешницы.

Понятие абсолютно свободного тела также абстрактно, как и понятие абсолютно жесткого или абсолютно покоящегося *(неподвижного)* тела. В природе не существует абсолютно свободных тел, поскольку все тела и материальные точки, имеющие массу, подвержены силовому взаимодействию между собой. Даже самая ничтожная пылинка на краю Вселенной оказывает силовое воздействие на пылинку, витающую близ поверхности Земли, тем самым связывая ее. Летящий в небе самолет нельзя назвать абсолютно свободным - на его перемещение оказывают влияние сопротивление атмосферы, силы притяжения Земли, силы инерции, электромагнитные воздействия со стороны нашей планеты и т. п.

Тем не менее, при решении практических задач статики или других разделов технической механики несущественные связи между телами и материальными точками не учитываются, что приводит к ничтожно малым погрешностям в расчетах. Очевидно, что возникшая на пути летящего самолета твердая преграда окажет связующее влияние несравненно большее, чем воздушный поток. Поэтому в статике свободным считается тело, которое не испытывает ощутимых препятствий своему перемещению или движению в любом направлении.

Аксиомы статики

Как мы уже знаем, статика изучает условия, при которых тело или материальная точка находятся в равновесии.

При решении задач статики принимают без доказательств некоторые положения, подтвержденные опытным путем, которые называют аксиомами статики. Основные аксиомы статики были сформулированы английским ученым **И. Ньютоном** (1642-1727), и поэтому названы его именем.

Исаак Ньютон (Isaac Newton) - английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда "Математические начала натуральной философии", в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики.

И. Ньютон заложил фундамент теории цвета и физической оптики, разработал дифференциальное и интегральное исчисления, создал многие другие математические и физические теории, не потерявшие актуальность и в настоящее время. Сложно переоценить вклад этого гения в развитие естественных наук.

Аксиома I *(аксиома инерции, или первый закон Ньютона)*: ***всякое тело сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока какие-нибудь силы не выведут тело из этого состояния.***

Способность материальных тел сохранять движение при отсутствии действующих сил или постепенно изменять это движение, когда на тело начинают действовать силы, называют ***инертностью*** или ***инерцией***. Инертность - одно из основных свойств материи. На основании этой аксиомы можно считать, что состояние равновесия - это такое состояние, когда тело находится в состоянии полного покоя или движется по инерции.

Аксиома II *(аксиома взаимодействия или третий закон Ньютона)*: ***Силы взаимодействия между двумя телами всегда равны по модулю и направлены по соединяющей их прямой в противоположные стороны.***

Часто употребляют упрощенную формулировку этого закона - действие всегда равно противодействию.

Из третьего закона Ньютона следует, что в природе все силы являются парными, поскольку одностороннего механического воздействия одного тела на другое не существует.

Совокупность сил, приложенных к данному телу (или системе тел) называется системой сил. Следует отметить, что силовое воздействие какого-либо тела на другое тело и вызванное этим противодействие не являются системой сил, поскольку приложены к разным телам.

Если какая-нибудь система сил обладает таким свойством, что после приложения к свободному телу она не изменяет его механическое состояние (покоя или движения), то такая система сил называется уравновешенной.

Аксиома III *(условие равновесия двух сил)*: ***для равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали по одной прямой в противоположные стороны.***

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является необходимым для равновесия двух сил. Это значит, что если система двух сил находится в равновесии, то эти силы должны быть равны по модулю и действовать по одной прямой в противоположные стороны.

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является достаточным для равновесия двух сил. Это значит, что справедлива и обратная формулировка аксиомы: если две силы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны, то такая система сил обязательно находится в равновесии.

Аксиома IV: ***равновесие*** *(как и любое другое механическое состояние)* ***твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить уравновешенную систему сил.***

Из третьей и четвертой аксиом статики вытекает следствие: *механическое состояние твердого тела не нарушится, если какую-либо из сил, воздействующих на него, перенести вдоль линии действия этой силы.*

Это следствие легко доказывается, поскольку мы можем приложить вдоль линии действия любой силы (назовем ее исходной силой) две уравновешивающие друг друга силы, каждая из которых равна по модулю исходной силе. При этом механическое состояние тела не изменится. После этого мы можем отнять от тела уравновешенную систему сил, среди которых одна будет являться исходной силой, а вторая принадлежать введенной уравновешенной системе двух сил. При этом, опять же, механическое состояние тела не изменится, несмотря на то, что сила, оставшаяся на линии действия исходной силы, будет приложена уже к другой точке.

Прикладывая таким образом произвольное количество уравновешенных сил вдоль линии действия исходной силы, убедимся, что исходную силу можно перемещать в любую точку на линии ее действия, и механическое состояние тела при этом не изменится.

Следует отметить, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если тело рассматривается, как абсолютно твердое.

Две различные системы сил называют ***эквивалентными***, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела. Опять же - если рассматриваемое тело не является абсолютно твердым, то эквивалентные системы сил могут вызывать различную деформацию этого тела, что необходимо учитывать при расчетах.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется ***равнодействующей***, а силы этой системы - составляющими этой равнодействующей.

Сила, которая уравновешивает данную систему сил, называется ***уравновешивающей*** для этой системы.

Очевидно, что равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря - уравновешенная система сила эквивалентна нулю.

Аксиома V *(аксиома параллелограмма)*: ***равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.***

Построение диагонали параллелограмма, сторонами которого являются заданные векторы, называется ***векторным*** или ***геометрическим сложением***. Таким образом, можно сказать, что равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме и приложена в той же точке. Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил треугольник сил, при этом порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет.

Модуль и направление равнодействующей двух сил можно найти и ***аналитическим способом***, применив к треугольнику сил теоремы косинусов и синусов.

Можно рассмотреть частные случаи сложения двух сил, если угол между их векторами равен φ:

- $\varphi = 0^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в одну сторону: равнодействующая этих сил будет равна их сумме.
- $\varphi = 180^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны: равнодействующая этих сил будет равна их разности.
- $\varphi = 90^\circ$, т. е. силы направлены под прямым углом друг к другу: равнодействующая может быть определена при помощи теоремы Пифагора.

Принцип отвердевания

Принцип отвердевания формулируется так: ***механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.***

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в состоянии равновесия, то оно не нарушится и после замерзания жидкости.

Еще один пример: гибкая нить, находящаяся в равновесии под действием двух растягивающих сил останется в равновесии, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа отвердевания в общем случае несправедлива, т. е. если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может выйти из состояния равновесия. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела, и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тела или характер воспринимаемых телом нагрузок.

Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию.

Аксиома IV: ***равновесие*** *(как и любое другое механическое состояние)* ***твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить уравновешенную систему сил.***

Из третьей и четвертой аксиом статики вытекает следствие: *механическое состояние твердого тела не нарушится, если какую-либо из сил, воздействующих на него, перенести вдоль линии действия этой силы.*

Это следствие легко доказывается, поскольку мы можем приложить вдоль линии действия любой силы (назовем ее исходной силой) две уравновешивающие друг друга силы, каждая из которых равна по модулю исходной силе. При этом механическое состояние тела не изменится. После этого мы можем отнять от тела уравновешенную систему сил, среди которых одна будет являться исходной силой, а вторая принадлежать введенной уравновешенной системе двух сил. При этом, опять же, механическое состояние тела не изменится, несмотря на то, что сила, оставшаяся на линии действия исходной силы, будет приложена уже к другой точке.

Прикладывая таким образом произвольное количество уравновешенных сил вдоль линии действия исходной силы, убедимся, что исходную силу можно перемещать в любую точку на линии ее действия, и механическое состояние тела при этом не изменится.

Следует отметить, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если тело рассматривается, как абсолютно твердое.

Две различные системы сил называют ***эквивалентными***, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела. Опять же - если рассматриваемое тело не является абсолютно твердым, то эквивалентные системы сил могут вызывать различную деформацию этого тела, что необходимо учитывать при расчетах.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется ***равнодействующей***, а силы этой системы - составляющими этой равнодействующей.

Сила, которая уравновешивает данную систему сил, называется ***уравновешивающей*** для этой системы.

Очевидно, что равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря - уравновешенная система сила эквивалентна нулю.

Аксиома V *(аксиома параллелограмма)*: ***равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.***

Построение диагонали параллелограмма, сторонами которого являются заданные векторы, называется ***векторным*** или ***геометрическим сложением***. Таким образом, можно сказать, что равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме и приложена в той же точке. Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил треугольник сил, при этом порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет.

Модуль и направление равнодействующей двух сил можно найти и ***аналитическим способом***, применив к треугольнику сил теоремы косинусов и синусов.

Можно рассмотреть частные случаи сложения двух сил, если угол между их векторами равен φ:

- $\varphi = 0^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в одну сторону: равнодействующая этих сил будет равна их сумме.
- $\varphi = 180^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны: равнодействующая этих сил будет равна их разности.
- $\varphi = 90^\circ$, т. е. силы направлены под прямым углом друг к другу: равнодействующая может быть определена при помощи теоремы Пифагора.

Принцип отвердевания

Принцип отвердевания формулируется так: ***механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.***

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в состоянии равновесия, то оно не нарушится и после замерзания жидкости.

Еще один пример: гибкая нить, находящаяся в равновесии под действием двух растягивающих сил останется в равновесии, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа отвердевания в общем случае несправедлива, т. е. если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может выйти из состояния равновесия. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела, и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тела или характер воспринимаемых телом нагрузок.

Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию.

Аксиома IV: ***равновесие*** *(как и любое другое механическое состояние)* ***твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить уравновешенную систему сил.***

Из третьей и четвертой аксиом статики вытекает следствие: *механическое состояние твердого тела не нарушится, если какую-либо из сил, воздействующих на него, перенести вдоль линии действия этой силы.*

Это следствие легко доказывается, поскольку мы можем приложить вдоль линии действия любой силы (назовем ее исходной силой) две уравновешивающие друг друга силы, каждая из которых равна по модулю исходной силе. При этом механическое состояние тела не изменится. После этого мы можем отнять от тела уравновешенную систему сил, среди которых одна будет являться исходной силой, а вторая принадлежать введенной уравновешенной системе двух сил. При этом, опять же, механическое состояние тела не изменится, несмотря на то, что сила, оставшаяся на линии действия исходной силы, будет приложена уже к другой точке.

Прикладывая таким образом произвольное количество уравновешенных сил вдоль линии действия исходной силы, убедимся, что исходную силу можно перемещать в любую точку на линии ее действия, и механическое состояние тела при этом не изменится.

Следует отметить, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если тело рассматривается, как абсолютно твердое.

Две различные системы сил называют ***эквивалентными***, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела. Опять же - если рассматриваемое тело не является абсолютно твердым, то эквивалентные системы сил могут вызывать различную деформацию этого тела, что необходимо учитывать при расчетах.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется ***равнодействующей***, а силы этой системы - составляющими этой равнодействующей.

Сила, которая уравновешивает данную систему сил, называется ***уравновешивающей*** для этой системы.

Очевидно, что равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря - уравновешенная система сила эквивалентна нулю.

Аксиома V *(аксиома параллелограмма)*: ***равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.***

Построение диагонали параллелограмма, сторонами которого являются заданные векторы, называется ***векторным*** или ***геометрическим сложением***. Таким образом, можно сказать, что равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме и приложена в той же точке. Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил треугольник сил, при этом порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет.

Модуль и направление равнодействующей двух сил можно найти и ***аналитическим способом***, применив к треугольнику сил теоремы косинусов и синусов.

Можно рассмотреть частные случаи сложения двух сил, если угол между их векторами равен φ:

- $\varphi = 0^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в одну сторону: равнодействующая этих сил будет равна их сумме.
- $\varphi = 180^\circ$, т. е. силы направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны: равнодействующая этих сил будет равна их разности.
- $\varphi = 90^\circ$, т. е. силы направлены под прямым углом друг к другу: равнодействующая может быть определена при помощи теоремы Пифагора.

Принцип отвердевания

Принцип отвердевания формулируется так: ***механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.***

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в состоянии равновесия, то оно не нарушится и после замерзания жидкости.

Еще один пример: гибкая нить, находящаяся в равновесии под действием двух растягивающих сил останется в равновесии, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа отвердевания в общем случае несправедлива, т. е. если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может выйти из состояния равновесия. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела, и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тела или характер воспринимаемых телом нагрузок.

Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию.

Распределенные нагрузки

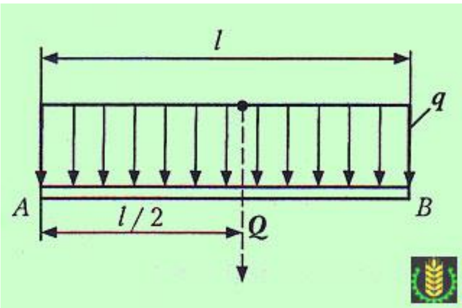
Как мы уже знаем, любая сила характеризуется тремя свойствами: модулем (скалярной размерностью), вектором (направлением в пространстве) и точкой приложения.

В действительности сила не может быть приложена к точке, поскольку точка - безразмерная, бесконечно малая единица пространства, поэтому фактически силы воздействуют на очень малую площадку, размерами которой пренебрегают. Такие силы (приложенные к ничтожно малой площадке тела) называют ***сосредоточенными***.

В реальности часто встречаются силы, приложенные не к точке, а к объему или поверхности тела, например сила тяжести, давления ветра, воды и т. п., т. е. нагрузку воспринимает не бесконечно малая площадка, а значительная площадь или объем тела. Такие силы называют ***распределенными***. Примером распределенной силы (обычно употребляют выражение "распределенная нагрузка") может послужить выпавший на крышу дома снег. Сила тяжести снежного покрова давит на всю поверхность крыши, нагружая одинаково каждую единицу ее площади, а не какую-либо точку.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью, обычно обозначаемой латинской буквой q. Интенсивность есть сила, приходящаяся на единицу длины нагруженного участка. Интенсивность в системе единиц СИ выражается в ньютонах на метр *(Н/м)*.

Распределенная нагрузка, имеющая постоянную интенсивность по всей длине участка называется ***равномерно распределенной*** *(см. рисунок)*.



При решении задач статики распределенную нагрузку заменяют ее равнодействующей. Модуль равнодействующей равномерно распределенной нагрузки равен $Q = ql$ *(см. рисунок)*.

Равнодействующая Q прикладывается в середине отрезка AB.

Распределенная нагрузка, имеющая переменную интенсивность, называется ***неравномерно распределенной***.

Примером такой нагрузки может служить меняющееся по высоте давление воды на плотину или снег, лежащий на крыше неровным слоем.

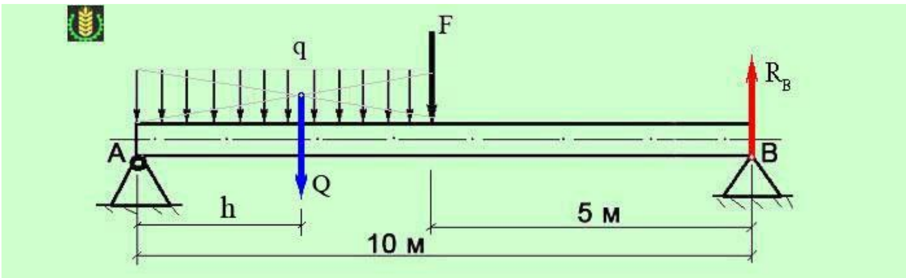
Определение точки приложения равнодействующей неравномерно распределенной нагрузки производится путем геометрических расчетов и построений.

Нагрузки, распределенные по поверхности (по площади), характеризуются давлением, т. е. силой, приходящейся на единицу площади. В системе единиц СИ давление выражается в паскалях *(Па)* или ньютонах на квадратный метр *(Н/м²)*.

Пример решения задачи с распределенной нагрузкой

Задача: Балка находится в равновесии под действием сосредоточенной силы F = 100 *Н* и равномерно распределенной нагрузки q = 60 *Н/м* *(см. схему)*.

Необходимо определить реакцию R_B опоры B.



Решение. Поскольку по условию задачи необходимо определить реакцию опоры B, составим уравнение моментов сил относительно опоры A, учитывая, что равномерно распределенную нагрузку можно заменить сосредоточенной силой:

$Q = ql$, *где l = (10 - 5) метров - часть балки, к которой приложена распределенная нагрузка*.

Точка приложения сосредоточенной силы Q расположена в середине той части балки, к которой приложена распределенная нагрузка; плечо этой силы относительно опоры A будет равно: h = (10 - 5)/2 = 2,5 *м*.

Составляем уравнение моментов сил относительно опоры A из условия, что балка находится в состоянии равновесия *(уравнение равновесия)*.

Учитываем знаки:

- *сила R_B создает относительно точки A положительный момент, плечо которого равно 10м;*
- *сила F создает относительно точки A отрицательный момент, плечо которого равно 5 м;*
- *распределенная нагрузка q создает (посредством силы Q и плеча h) относительно точки A отрицательный момент.*

Получаем уравнение равновесия балки, в котором лишь одна неизвестная величина *(R_B)*:

$$\Sigma M = 10R_B - qlh - 5F = 10R_B - q(10-5)(10-5)/2 - 5F = 0,$$

откуда находим искомую реакцию опоры R_B:

$$R_B = \{q(10-5)(10-5)/2 + 5F\}/10 = 125\ H$$

Задача решена.

Плоская система сходящихся сил

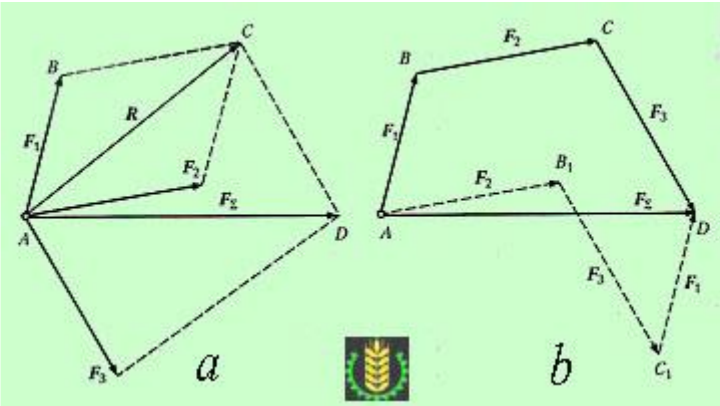
Геометрический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и все пересекаются в одной точке, называется ***плоской системой сходящихся сил***.

Теорема

Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих.

Пусть дана плоская система трех сил F_1, F_2 и F_3, линии действия которых сходятся в точке A *(см. рисунок* ***а****)*.



На основании следствия из аксиом ***III*** и ***IV*** перенесем эти силы вдоль линий их действия в точку A. Сложив первые две силы F_1 и F_2по правилу параллелограмма, получим их равнодействующую R *(см. рисунок* ***а****)*: $R = F_1 + F_2$.

Пользуясь той же аксиомой параллелограмма, сложим равнодействующую R с силой F_3:

$$F_\Sigma = R + F_3 = F_1 + F_2 + F_3,$$

где F_Σ – равнодействующая данной системы трех сил.

Аналогичные рассуждения можно провести для любого количества сходящихся сил, в результате чего получим:

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n.$$

Сокращенно это равенство можно записать так:

$F_\Sigma = \Sigma F_i$, где i – все целые числа от единицы до n.

Очевидно, что построения, выполненные на *рисунке **a***, можно заменить более простым, как показано на *рисунке **b***. Многоугольник $ABCD$ называют ***силовым многоугольником***. Сторона AD, соединяющая начало первого с концом последнего вектора, называется *замыкающей стороной*.

Необходимо помнить, что стрелки векторов слагаемых сил образуют определенное направление обхода по контуру силового многоугольника, а замыкающая сторона, определяющая модуль и направление равнодействующей, имеет стрелку, направленную против обхода *(см. рисунок **b**)*.

Если определить равнодействующую из силового многоугольника с помощью геометрии и тригонометрии, то такой способ будет называться ***геометрическим***.

Если сделать чертеж силового многоугольника в определенном масштабе, то равнодействующая определится простым измерением замыкающей стороны с последующим умножением на масштаб. Такой способ нахождения равнодействующей называется ***графическим***.

Порядок сложения векторов при построении силового многоугольника на величину равнодействующей не влияет, так как векторная сумма от перемены мест слагаемых не меняется.

Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сил

Пусть дана плоская система сходящихся сил $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots F_n$. Равнодействующая этой системы $F_\Sigma = \Sigma F_i$.

В плоскости действия данной системы сил выберем ось координат и спроецируем данные силы и их равнодействующую на эту ось. Из математики известно свойство проекции векторной суммы, на основании которого можно утверждать, что проекция равнодействующей на ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось, т. е. $F_{\Sigma x} = \Sigma F_{ix}$. Правую часть этого равенства можно представить упрощенно: $F_{\Sigma x} = \Sigma X$.

Для того чтобы определить равнодействующую любой плоской системы сходящихся сил, спроецируем их на оси координат x и y, алгебраически сложим проекции всех сил и найдем таким образом проекции равнодействующей:

$$F_{\Sigma x} = \Sigma X; \quad F_{\Sigma y} = \Sigma Y.$$

Зная проекции, определим модуль и направление равнодействующей:

Модуль равнодействующей:

$$F_\Sigma = \sqrt{(F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2)}$$ *(здесь и далее √ - знак корня);*

Направляющий тангенс угла между вектором F_Σ и осью x:

$$tg\,(F_\Sigma, x) = F_{\Sigma y} / F_{\Sigma x}.$$

Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.

Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Если данная плоская система сходящихся сил находится в равновесии, то равнодействующая такой системы, а значит и проекции равнодействующей на оси координат равны нулю. Математически это выражение можно записать так:

$$F_{\Sigma} = 0; F_x = 0; F_y = 0.$$

Учитывая, что $F_{\Sigma x} = \Sigma X; \quad F_{\Sigma y} = \Sigma Y$, получаем равенства, выражающие аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0.$$

Формулируется это условие следующим образом: ***для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей равнялась нулю.***

С помощью уравнений равновесия можно определить два неизвестных элемента данной системы сил, например, модуль и направление одной силы или модули двух сил, направления которых известны и т. п.

Выведенные условия равновесия справедливы для любой системы координат, но для упрощения расчетов рекомендуется оси координат по возможности выбирать перпендикулярными неизвестным силам, чтобы каждое уравнение равновесия содержало одно неизвестное.

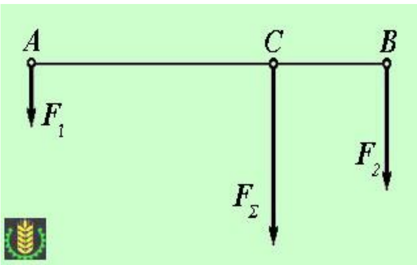
Когда направление искомой силы неизвестно, ее можно разложить на две составляющие по заданным направлениям, обычно по направлениям координатных осей; по найденным двум составляющим легко определяется неизвестная сила.

Если при решении задач аналитическим способом искомая реакция получается отрицательной, то это означает, что действительное ее направление противоположно направлению, принятому при расчетах.

Плоская система параллельных сил

Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и не пересекаются, называются ***системой параллельных сил***.



При этом силы, линии действия которых параллельны, но векторы направлены в противоположные стороны, называют ***антипараллельными***.

Из физики известно, что ***две параллельные силы, направленные в одну сторону, эквивалентны равнодействующей, которая равна сумме этих сил, параллельна им и направлена в ту же сторону; линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения данных сил на части, обратно пропорциональные модулям этих сил:***

$$F_\Sigma = F_1 + F_2; \qquad F_1/F_2 = BC/AC.$$

Применяя производную пропорцию, можно записать:

$$F_1/BC = F_2/AC = (F_1 + F_2)/(BC + AC)$$

тогда:

$$F_1/BC = F_2/AC = F_\Sigma/AB.$$

Разложение данной силы на две параллельные составляющие производится с помощью формул сложения двух параллельных сил.

Разложение силы на две параллельные составляющие есть задача неопределенная, имеющая бесчисленное множество решений. Для того чтобы задача имела определенное решение, необходимо иметь два дополнительных условия, например, модуль одной составляющей и длину одного плеча, длины двух плеч и т. п.

***

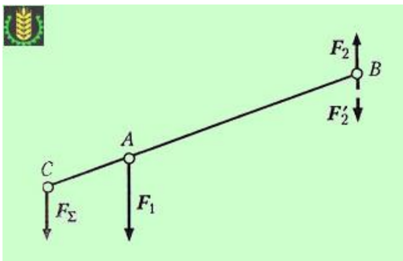
Сложение двух неравных антипараллельных сил

Рассмотрим случай сложения двух не равных по модулю антипараллельных сил *(случай, когда такие силы равны по модулю особый, мы его рассмотрим на следующей странице)*.

Теорема

Две неравные антипараллельные силы эквивалентны равнодействующей, которая равна разности данных сил, параллельна им и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения сил на части, обратно пропорциональные величине этих сил.

Рассмотрим две антипараллельные силы F_1 и F_2, причем $F_1 > F_2$.



Разложим силу F_1 на две параллельные составляющие F_Σ и F_2' так, чтобы составляющая F_2' была приложена в точке B и равнялась по модулю силе F_2. Тогда на основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, получим:

$$F_1 = F_\Sigma + F_2'; \qquad F_1/BC = F_2'/AC = F_\Sigma/AB,$$

Из этих равенств найдем модуль составляющей F_Σ и расстояние AC до точки ее приложения (известно, что $F_2' = F_2$). Данная система сил (F_1 и F_2) заменена системой трех сил:

$$(F_1, F_2) \equiv (F_\Sigma, F_2', F_2).$$

Отбросив на основании аксиомы IV две взаимно уравновешивающие силы F_2 и F_2', получим, что данная система эквивалентна одной силе, т. е. равнодействующей F_Σ. Модуль и точка приложения равнодействующей определяются по формулам:

$$F_\Sigma = F_1 - F_2; \qquad AC = (F_2/F_\Sigma)AB.$$

На основании можно сделать вывод, что равнодействующая двух параллельных сил равна их алгебраической сумме.

Если на тело действует n параллельных сил, то производя последовательное сложение сначала двух сил, затем их равнодействующей с третьей силой и т. д., найдем модуль и линию действия равнодействующей всей системы параллельных сил.

Очевидно, что равнодействующая системы параллельных сил определится в результате, как алгебраическая сумма всех сил данной системы.

Таким образом, ***равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме***:

$$F_\Sigma = \Sigma F_i$$

Момент силы

Говорят, что когда-то великий Архимед изрек фразу: "Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю". Современная физика утверждает, что с практической точки зрения, мудрый грек, конечно же, погорячился – даже сдвинуть на доли миллиметра такой массив, как планета с помощью мускульной силы человека – занятие не одного года, а уж перевернуть Землю... Тем не менее, с теоретической точки зрения Архимед прав – если найти соответствующую точку опоры, то с помощью рычага Землю сдвинуть с места может даже комар. Дело в том, что здесь играет роль не сила, как таковая, а ее момент.

Что же такое – момент силы? Следует сразу оговориться, что момент силы - понятие относительное, поскольку без указания того, относительно какой точки он рассматривается, понятие момента силы теряет смысл *(не путать с моментом пары сил, о котором речь пойдет в следующих статьях)*.

Рассмотрим гайку, которую затягивают гаечным ключом определенной длины, прикладывая к концу ключа мускульное усилие. Если взять более длинный ключ, то гайку можно завернуть значительно сильнее, прикладывая одинаковое усилие. Из этого следует, что одной и той же силой можно выполнить различное по эффективности вращающее действие на какое-либо тело. В этом и кроется понятие момента силы – это вращающее действие силы относительно какой-либо точки в пространстве.

Понятие момента силы относительно точки ввел гениальный итальянец Леонардо да Винчи *(1452-1519)*, который известен потомкам не только, как великий художник, но и видный ученый своего времени.

Итак, по определению, ***момент силы относительно точки – это произведение модуля силы на ее плечо***.

Плечом в данном случае называется кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки до линии действия силы, т. е. перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы *(см. рисунок **b**)*.

Математически это определение можно представить в виде формулы:

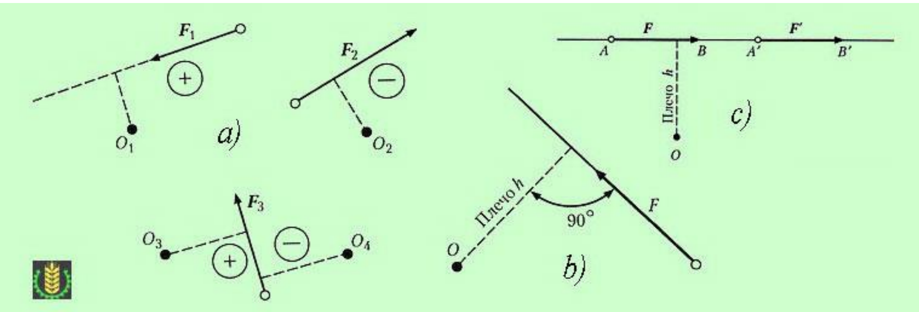
$$M_0(F) = Fh,$$ *где h – плечо силы относительно точки 0*.

Точка, относительно которой рассматривается момент силы, называется ***центром момента***.

Из приведенной выше формулы очевидно, что единицей измерения момента силы является ньютон × метр (*Нм*).

Теперь можно оценить справедливость высказывания Архимеда относительно возможности перевернуть Землю - при определенном плече силы, которую способны развить человеческие мускулы, это сделать теоретически возможно, но рука Архимеда должна была описать путь длиной в сотни тысяч километров для того, чтобы сдвинуть земной шар на доли миллиметра, поскольку потребовался бы огромной длины рычаг. Как вы понимаете, практически осуществить подобный подвиг нереально даже для такого уважаемого гения, как Архимед.

Впрочем, бытующее утверждение о трудностях, связанных с перемещением Земли человеческой рукой не совсем безгрешны. Ведь мы, как обыватели, привыкли рассматривать Землю, как весомый предмет, забывая что она, будучи в космическом пространстве, обладает совсем другими весовыми категориями. Поэтому справедливее будет рассматривать не расстояние, на которое мог бы сдвинуть земной шар Архимед, а ускорение, с которым он попытался бы сдвинуть планету со своего места, т. е. фактически - побороть силу инерции Земли, как тела. И тогда ему не потребовался бы рычаг непомерной длины - прикладывая незначительную силу, сдвинуть Землю можно было бы и двухметровой палкой, но здесь уже возник бы вопрос о времени, в течении которого необходимо было давить на рычаг, чтобы побороть инертность земного шара (как вы понимаете, мускульная сила человека не способна придать планете существенного ускорения). Опять же, возникает еще одна проблема - Архимеду потребовался бы надежный упор для ног, способный противостоять возмущению Земли на нахальную попытку Архимеда сдвинуть ее с места, а где его найти в открытом космосе?...



Осталось разобраться со знаками для момента силы, ведь он, как и сила, является векторной величиной, т. е. характеризуется не только модулем, но и направлением своего вращающего действия. При расчетах в технической механике условно считают, что если момент силы стремиться вращать свое плечо вокруг центра момента против часовой стрелки, то он является положительным, если по часовой стрелке - отрицательным *(см. рисунок **а**)*.

Одна и та же сила относительно разных точек может вызывать и положительный, и отрицательный момент *(см. рисунок **а**)*.

Отдельный случай, когда рассматриваемая точка (центр момента) лежит на линии действия силы. Очевидно, что в этом случае момент силы относительно этой точки будет равен нулю, поскольку плечо отсутствует *(расстояние от линии действия силы до точки равно нулю)*.

И еще одна важная деталь, которая следует из определения момента силы относительно точки:

если переносить силу вдоль линии ее действия, то момент силы относительно любой точки не изменится, поскольку не изменится и расстояние от этой точки до линии действия силы, т. е. плечо *(см. рисунок **с**)*.

Плоская система пар сил

Пара сил и момент пары

В предыдущей статье мы рассматривали сложение пары антипараллельных сил, не равных по модулю и пришли к выводу, что равнодействующая таких сил существует и ее величина равна алгебраической сумме сил; точка приложения равнодействующей пары антипараллельных сил находится в пропорциональной зависимости от соотношения между модулями сил пары.

Если пара антипараллельных сил состоит из одинаковых по модулю сил, то такая система сил называется ***парой сил*** или просто ***парой***.

Понятие пары сил введено в механику в начале XIX века французским ученым ***Л. Пуансо*** *(1777-1859)*, который разработал теорию пар.

Плоскость, в которой расположена пара, называется ***плоскостью действия пары***. Расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, называется ***плечом пары***.

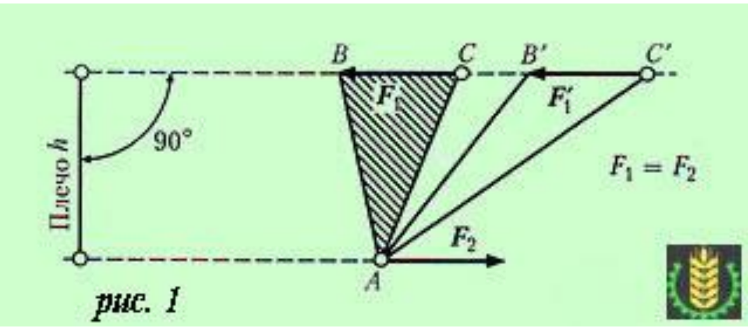
Эффект действия пары состоит в том, что она стремится вращать тело, к которому приложена. Ее вращающее действие определяется моментом пары.

Моментом пары называется произведение модуля одной из сил, составляющих пару, на плечо:

$$M(F_1, F_2) = F_1 h = F_2 h = m\ .$$

Момент пары и момент силы имеют одинаковую размерность - ньютон×метр *(Нм)*.

Правило знаков для моментов пары.



Условимся считать момент пары положительным, если она стремится вращать свое плечо против часовой стрелки, и наоборот.

Если сделать геометрические построения *(см. рисунок **1**)*, то можно сделать вывод, что момент пары численно равен удвоенной площади треугольника, у которого основанием является вектор одной из сил пары, а высотой – плечо пары *(как известно, площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту)*.

Очевидно, что перенос любой из сил пары вдоль линии ее действия не влияет на вращающее действие всей пары, т. е. не изменяет момент пары, поскольку и основание треугольника *(модуль силы)* и его высота *(плечо пары)* в этом случае не меняются *(перенос сил, составляющих пару вдоль линий их действия приводит к образованию равновеликих треугольников)*.

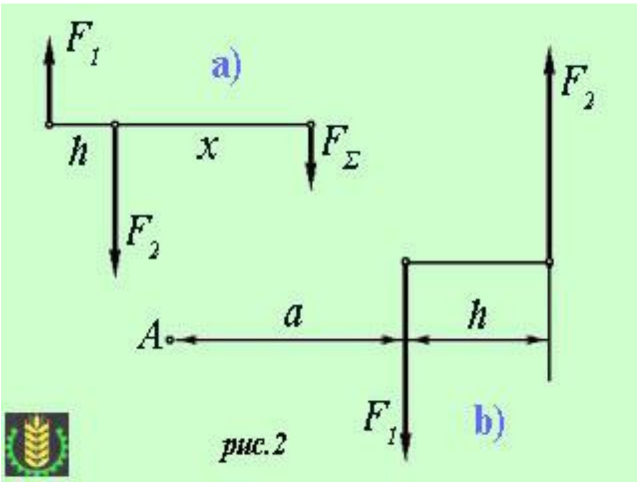
Основные свойства пары сил

Основные свойства пары сил характеризуются следующими тремя теоремами.

Теорема I. ***Пара сил не имеет равнодействующей***.

Дана пара сил (F_1, F_2) с плечом h. *(см. рисунок* ***2a****)*. Ранее мы доказали, что равнодействующая пары антипараллельных сил может быть определена, как алгебраическая сумма сил, составляющих такую пару, т. е., с учетом направленности векторов сил в разные стороны: $F_\Sigma = |F_1| - |F_2|$. Применим это утверждение к случаю, когда силы равны между собой по модулю, и получим, что равнодействующая будет равна нулю: $F_1 - F_2 = 0$. Из этого следует, что пара силы не имеет равнодействующей *(или равнодействующая пары равна нулю)*.

Теорема II. ***Алгебраическая сума моментов сил, составляющих пару, относительно любой точки плоскости действия пары есть величина постоянная, равная моменту пары.***



Дана пара сил (F_1, F_2) с плечом h. *(см. рисунок****2b****)*. Момент пары: $m = F_1h = F_2h.$

Выберем в плоскости действия пары произвольную точку A и примем ее за центр моментов:

$$M_A(F_1) = -F_1a; \qquad M_A(F_2) = F_2(a+h).$$

Сложим правые и левые части этих равенств *(не забываем, что $|F_1| = |F_2|$)*:

$$M_A(F_1) + M_A(F_2) = -F_1a + F_2(a+h) = -F_1a + F_2a + F_2h = F_2h = m\ .$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что ***при любом центре моментов пара сил войдет в уравнение моментов с одним и тем же знаком и одной и той же величиной***.

***

Теорема III. ***Алгебраическая сумма проекций сил пары на любую ось всегда равна нулю***

Дана пара сил (F_1, F_2) и ось z, лежащая в плоскости действия пары *(см. рисунок **3**)*. Из равенства заштрихованных треугольников видно, что $F_{1z} = F_{2z}$, при этом проекция одной из сил положительная, проекция другой силы – отрицательная, следовательно, сумма этих проекций равна нулю. Теорема доказана.

Из теорем ***I*** и ***III*** следует, что ***пара сил не может входить ни в уравнение сил, ни в уравнение проекций сил***, поскольку ее нельзя заменить ни равнодействующей, ни проекцией силы.

Эквивалентные пары

Две пары называют ***эквивалентными***, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Теорема об эквивалентных парах формулируется так: ***если моменты двух пар алгебраически равны, то эти пары эквивалентны***.

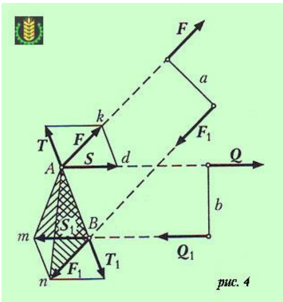


рис. 4

Пусть даны две пары (F_1, F_2) и (Q_1, Q_2), моменты которых алгебраически равны *(см. рисунок 4)*, т. е.:

$$M(F_1, F_2) = M(Q_1, Q_2), \quad \text{или} \quad Fa = Qh.$$

Продолжим линии действия сил пары до их взаимного пересечения в точках A и B. На основании следствия из ***III*** и ***IV*** аксиом статики перенесем силы F и F_1 вдоль линий их действия в точки A и B. Соединим эти точки прямой линией и разложим силы F и F_1 по направлению AB и вдоль линий действия сил Q и Q_1. Из равенства треугольников Akd и Bmn вытекет, что $T = T_1$ и $S = S_1$.

Силы T и T_1 представляют собой уравновешенную систему, так как они равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны. На основании аксиомы ***IV*** такую систему можно отбросить.

Силы S и S_1 представляют собой пару сил с плечом b. Таким образом, пара (F_1, F_2) ≡ паре (S_1, S_2).

Рассмотрим треугольники AmB и AnB. Они имеют общее основание AB, и высоты их равны, следовательно, площади тоже будут равны. Поскольку площадь треугольника AnB равна половине момента пары (F_1, F_2), а площадь треугольника AmB равна половине момента пары (S_1, S_2), то можно записать:

$$M(F, F_1) = M(S, S_1) \quad \text{или} \quad Fa = Sb.$$

По условиям теоремы $Fa = Qb$, следовательно $Sb = Qb$, отсюда $S = Q$, $S_1 = Q_1$.

Силы S и Q равны по модулю, действуют вдоль одной прямой в одном направлении, следовательно они эквивалентны друг другу; на этом же основании можно сделать вывод об эквивалентности сил S_1 и Q_1. Очевидно, что тогда пара (Q,O_1) ≡ паре (S,S_1).

Так как две пары порознь эквивалентны одной и той же третьей паре, то эти пары тоже будут эквивалентны между собой:

$$M(F, F_1) = M(Q, Q_1), \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

Из доказательства теоремы об эквивалентных парах вытекает четыре следствия:

- *не изменяя механического состояния тела, пару можно переносить как угодно в плоскости ее действия;*
- *не изменяя механического состояния тела, можно менять силы и плечо пары, но так, чтобы ее момент оставался неизменным;*
- *чтобы задать пару, достаточно задать ее момент, поэтому иногда слово "пара" заменяют словом "момент";*
- *условия равновесия плоской системы параллельных сил будут справедливы, если вместе с такой системой действуют и пары сил, так как их можно повернуть в плоскости действия и поставить силы пары параллельно другим силам системы.*

Теорема о сложении пар

Теорема: ***Всякая плоская система пар эквивалентна одной результирующей паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов данных пар.***

Пусть даны три пары с моментами m_1, m_2 и m_3, действующие в одной плоскости *(рис. **1а**)*.

На основании следствия из теоремы об эквивалентных парах преобразуем эти пары так, чтобы их плечи стали равными d, и перенесем к произвольно взятому на плоскости отрезку AB длиной d.

Тогда вместо заданной системы пар получим новую систему, эквивалентную данной, причем моменты данных и новых пар будут равны, т. е.

$$m_1 = -P_1 d\ ; \quad m_2 = F_1 d\ ; \quad m_3 = -Qd\ .$$

Сложив три силы в точке A, получим равнодействующую R_1, модуль которой $R_1 = P_1 + Q_1 - F_1$.

Сложив три силы в точке B *(рис. **4b**)* , получим равнодействующую R_2, модуль которой $R_2 = P_2 + Q_2 - F_2$, причем очевидно, что силы R_1 и R_2 равны по модулю, параллельны и противоположно направлены.

Значит, система (R_1, R_2) представляет собой пару с плечом d, эквивалентную данной системе пар.

Момент этой результирующей пары:

$$m = -R_1 d = -(\,P_1 + Q_1 - F_1)d = -P_1 d - Q_1 d + F_1 d, \quad \text{или}$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Аналогичное доказательство можно привести для любой плоской системы пар, т. е. в общем виде можно записать:

$$m = \Sigma m_i, \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

Условие равновесия плоской системы пар

Применяя доказанную ранее теорему о сложении пар к плоской системе пар, находящихся в равновесии, запишем:

$$m = \Sigma m_i = 0.$$

Следовательно, условие равновесия плоской системы пар в общем виде будет выглядеть так:

$$\Sigma m_i = 0,$$

а формулируется следующим образом: ***для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов данных пар равнялась нулю***.

Опоры и опорные реакции балок

Опоры балок по их устройству могут быть разделены на три основных типа *(см. рисунок **6**)*: шарнирно-подвижная (опора A), шарнирно-неподвижная (опора B) и жесткая заделка (опора C). На приведенном рисунке показаны два способа условного изображения шарнирно-неподвижной опоры (опора A).

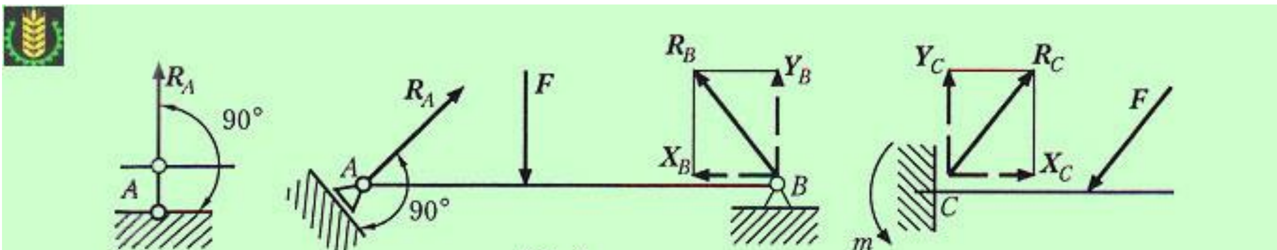


рис. 6

Применим правило для определения направления реакций связей и определим, какое направление могут иметь реакции представленных опор в зависимости от ограничений, накладываемых на балку.

Шарнирно-подвижная опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. Если пренебречь трением на опоре и в шарнире, то реакция такой связи будет направлена перпендикулярно опорной плоскости, и неизвестна только по модулю *(одно неизвестное)*.

Шарнирно-неподвижная опора допускает только поворот вокруг оси шарнира, и не допускает никаких линейных перемещений. Реакция такой опоры будет направлена перпендикулярно оси шарнира; модуль и направление ее заранее не известны *(два неизвестных)*.

Жесткая заделка (защемление) не допускает ни линейных перемещений, ни поворотов защемленного конца балки. Жесткую заделку заменяют реактивной силой, неизвестной по модулю и направлению, и реактивным моментом *(три неизвестных)*.

Реактивную силу, неизвестную по направлению, раскладывают на две взаимно-перпендикулярные составляющие. Если при решении задачи реактивная сила или реактивный момент получаются отрицательными, то их действительное направление противоположно принятому.

Кроме перечисленных выше трех основных типов опор балок в конструкциях нередко балка свободно опирается на плоскость (поверхность) или ребро призмы (угол). В этих случаях направление реакций определяют, как для аналогичных типов связей, рассмотренных здесь.

Пример решения задачи по определению реакций опор балки

Пусть горизонтальная балка длиной l *= 4 м* закреплена на опорах, как показано на *рисунке **7***, и нагружена парой сил с моментом m *= 420 Нм*.

Не учитывая силу тяжести балки, определим реакции R опор A и B.

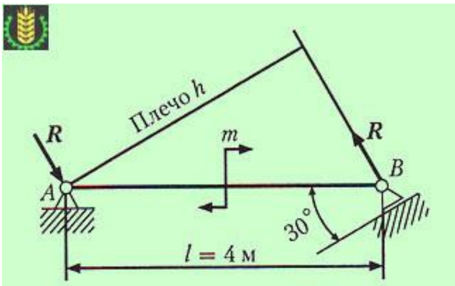


рис. 7

Решение.

Отбросим опоры, заменив их реакциями, и рассмотрим равновесие балки.

Так как пару сил можно уравновесить только парой, то реакции R опор A и B должны образовывать пару сил, причем реакция шарнирно подвижной опоры B перпендикулярна опорной плоскости.

Применим условие равновесия плоской системы пар и составим уравнение равновесия:

$$\Sigma m_i = 0;\ -m + Rh = 0, \quad \text{где } h = l\cos 30^\circ.$$

Подставив известные значения, получим: $R = m/h = m/(l\cos 30^\circ)$ *= 420/(4×0,866) ≈ 120 Н*.

Задача решена.

***

Пример решения задачи по определению реакции в жесткой заделке

Пусть консольная балка длиной l = *2 м* нагружена на свободном конце силой F = *3000 Н (рис. 8)*.

Не учитывая силу тяжести балки, определим реакцию заделки.

Решение

Отбросим заделку, заменив ее реакциями, и рассмотрим равновесие балки. Реакция заделки представляет собой реактивную силу R и реактивный момент m.

Так как реактивный момент m может быть уравновешен только парой сил, то нагрузка F и реакция R должны образовывать пару, следовательно:

$$R = F = 3000\ Н.$$

Далее применим условие равновесия плоской системы пар и составим уравнение равновесия: $\Sigma m_i = 0;\ m - F_1 - 0$, откуда получим:

$$m = Fl = 3000 \times 2 = 6000\ Нм.$$

Задача решена.

Пространственная система сил

Пространственная система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых расположены в различных плоскостях, называется ***пространственной системой сил***.

Пространственная система сил называется ***сходящейся***, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке.

Теорема: ***пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.***

Пусть дана пространственная система n сходящихся сил $(F_1, F_2, F_3, \dots F_n)$. На основании следствия из ***аксиом III и IV*** перенесем все силы системы вдоль линий действия в точку их пересечения. Затем на основании аксиомы параллелограмма последовательно сложим все силы и получим их равнодействующую:

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n, \quad \textit{или} \quad F_\Sigma = \Sigma F_i.$$

Силовой многоугольник пространственной системы сил не лежит в одной плоскости, поэтому геометрический и графический способы нахождения равнодействующей пространственной системы сходящихся сил неприемлемы, а применяется только аналитический способ *(метод проекций)*.

Проекция силы на ось в пространстве находится по проецирующим перпендикулярам, и может быть определена при помощи тригонометрических функций. При определении проекций сил пространственной системы потребуется система координат с осями X, Y, Z, поскольку силы системы не располагаются в одной плоскости.

Правило знаков для проекций будет таким же, как и для плоской системы сил – совпадающие по направлению с координатной осью силы считаются положительными, в противном случае – отрицательными. Если вектор силы параллелен какой-либо оси координат, то он проецируется на эту ось в натуральную величину, если же вектор перпендикулярен оси, его проекция на эту ось будет равна нулю.

Разложение силы по трем осям координат

Пусть дана сила F *(см. рисунок 1)*.

Возьмем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с началом вектора силы F (т. е. с точкой приложения силы). Из конца этого вектора опустим перпендикуляр на плоскость xy и разложим силу F на составляющие F_{xy} и F_z, а составляющую F_{xy} – на составляющие F_x и F_y. Тогда:

$$F = F_x + F_y + F_z.$$

Достроим полученное изображение до параллелепипеда, у которого составляющие F_x, F_yи F_z являются ребрами, а сила F – диагональю.

Из изложенного можно сделать вывод: ***равнодействующая трех взаимно-перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах***.

Из рисунка видно, что в случаях разложения силы F по трем взаимно-перпендикулярным направлениям x, y, z составляющие F_x, F_y и F_z равны по модулю проекциям силы F на эти оси.

Зная проекции силы на три взаимно-перпендикулярные оси координат, можно определить модуль и направление вектора силы по формулам:

модуль силы: $F = \sqrt{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)}$ *(здесь и далее √ - знак корня)*;

направляющие косинусы:

$$\cos(F,x) = Fx/F; \quad \cos(F,y) = Fy/F; \quad \cos(F,z) = Fz/F.$$

***

Аналитический способ определения равнодействующей пространственной системы сходящихся сил

Рассмотренный выше способ разложения силы F на три составляющие по направлению координатных осей x, y, z можно применить для каждой из сходящихся сил пространственной системы. Тогда вместо данной системы n сходящихся сил мы получим эквивалентную ей систему $3n$сил, из которых n сил действуют по оси x, n сил – по оси y, и n сил – по оси z.

Равнодействующая проекций сил системы на ось x равна их геометрической сумме, то же самое можно сказать и о равнодействующих проекций сил на оси y и z.

Таким образом, систему $3n$ сил можно заменить эквивалентной ей системой трех сил, каждая из которых представляет собой равнодействующую проекций сил данной системы на ту или иную ось координат.

Проекции силы на три взаимно-перпендикулярные оси и составляющие силы, направленные по этим осям, равны по модулю, следовательно, проекции равнодействующей равны:

$$F_{\Sigma x} = \Sigma X; \quad F_{\Sigma y} = \Sigma Y; \quad F_{\Sigma z} = \Sigma Z.$$

Очевидно, что равнодействующая трех взаимно перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, и по известным проекциям равнодействующей можно определить модуль и направление самой равнодействующей.

Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил

Известно, что пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей. Если такая система сил находится в равновесии, т. е. эквивалентна нулю, то можно сделать вывод, что равнодействующая этой системы равна нулю, а, следовательно, и проекции равнодействующей тоже равны нулю, причем эти проекции равны сумме проекций составляющих.

Отсюда вытекают условия равновесия пространственной системы сходящихся сил:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0.$$

Эти условия формируются следующим образом: ***для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую их трех координатных осей равнялась нулю.***

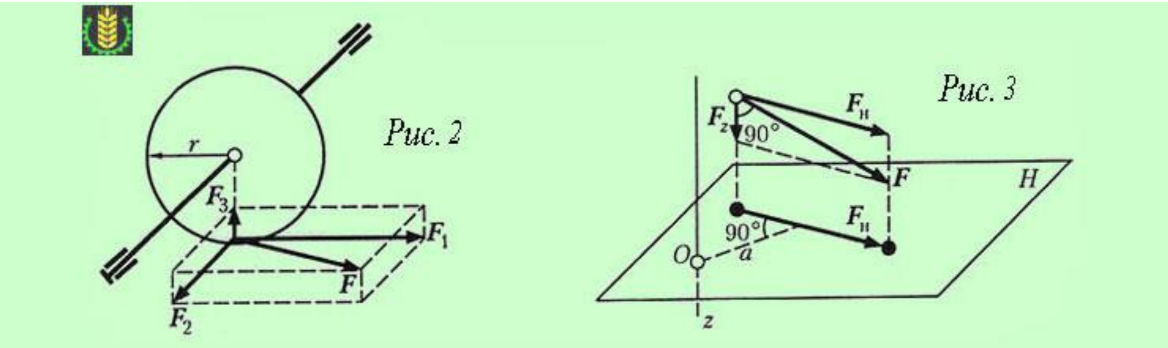
Момент силы относительно оси

Рассмотрим колесо червячной передачи, укрепленное на валу, вращающемся в подшипниках *(см. рисунок 2)*. Червяк передает червячному колесу силу F, не лежащую в плоскости, перпендикулярной оси.

Разложим силу F на три взаимно-перпендикулярные составляющие F_1, F_2 и F_3.

Составляющую F_1 назовем ***окружной силой***, составляющую F_2 – ***осевой силой***, а составляющую F_3– ***радиальной силой***.

Из рисунка видно, что составляющая F_1 вызывает вращательное действие, которое измеряется произведением силы F_1 на радиус колеса r; составляющая F_2 стремится сдвинуть червячное колесо вдоль оси, а составляющая F_3 стремится изогнуть ось колеса. Очевидно, что вращающее действие сил F_2 и F_3 относительно оси колеса равно нулю. Таким образом, если нужно найти момент силы относительно оси, то следует принимать в расчет только составляющую F_1, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси, и не пересекающую ось (иначе ее момент будет равен нулю).



Ранее было отмечено, что проекция вектора силы на ось есть скалярная алгебраическая величина. В отличие от проекции на ось проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как эта проекция характеризуется не только числовым значением, но и положением на плоскости, т. е. направлением.

Поэтому моменту силы относительно оси можно дать такое определение: ***моментом силы относительно оси называется величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.***

Это определение поясняет *рисунок 3*.

Момент силы относительно оси условимся записывать следующим образом:

$$M_z(F) = F_н a.$$

Условимся считать момент силы положительным, если смотреть с положительного конца оси и сила стремится вызвать вращение против часовой стрелки, если же сила стремится вызвать вращение по часовой стрелке, ее момент считаем отрицательным.

Момент силы относительно оси не меняется при перемещении силы вдоль оси ее действия.

Момент силы будет равен нулю в двух случаях (не считая случаев, когда сила равна нулю или направлена вдоль оси):

- если вектор силы параллелен оси, так как при этом проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю *(см. рисунок 3, сила* F_z*)*;
- если линия действия силы пересекает ось, так как при этом плечо равно нулю *(сила* F_3 *на рисунке 2)*.

Аналитические условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил

Пространственная система сил, в которой линии действия составляющих сил расположены произвольно, т. е. линии их действия могут не пересекаться и находиться в разных плоскостях, называется произвольно расположенной системой сил.

Для равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех осей координат была равна нулю, и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно каждой из этих осей была равна нулю.

Строгое обоснование приведенного выше условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил требует знания некоторых вопросов, не предусмотренных программами учреждений среднего профессионального образования, поэтому условие равновесия такой системы здесь приводится без доказательства.

Математически условие равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил можно записать в виде уравнений:

- $\Sigma X = 0; \quad \Sigma M_x(F_i) = 0;$
- $\Sigma Y = 0; \quad \Sigma M_y(F_i) = 0;$
- $\Sigma Z = 0; \quad \Sigma M_z(F_i) = 0.$

Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, а именно: возможность перемещаться в направлениях трех взаимно-перпендикулярных осей координат и возможность вращаться вокруг этих осей. Таким образом, шести степеням свободы тела в пространстве соответствуют шесть условий равновесия. Если система сил, приложенных к свободному телу, удовлетворяет всем шести условиям равновесия, то возможность трех перемещений и трех вращений тела под действием сил системы исключена, поэтому тело будет находится в равновесии.

Очевидно, что все выведенные ранее условия равновесия для различных систем сил являются частными случаями условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил. Так как условия равновесия пространственной системы сил справедливы для любых прямоугольных осей координат, то при решении данной задачи систему координат можно изменять, т. е. часть уравнений равновесия составить для одних осей координат, а часть – для измененных. В некоторых случаях этот прием упрощает решение задач.

Теорема о моменте равнодействующей относительно оси (теорема Вариньона)

Теорема: ***момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов, составляющих сил относительно этой же оси***.

Пусть даны пространственная система n произвольно расположенных сил, приложенных к телу, и равнодействующая этой системы сил F_{Σ} *(см. рисунок 4)*:

$$(F_1, F_2, F_3, \ldots F_n) \equiv F_{\Sigma}.$$

Приложим к телу другую систему сил, равнодействующая которой F'_{Σ} по модулю равна F_{Σ} и направлена по той же линии действия, но в противоположную сторону, т. е. является уравновешивающей данной системы сил. Тогда можно записать:

$$(F_1, F_2, F_3, \ldots F_n, F'_{\Sigma}) \equiv 0, \quad \text{или} \quad (F_{\Sigma}, F'_{\Sigma}) \equiv 0.$$

Так как обе записанные выше системы сил эквивалентны нулю, т. е. уравновешены, то к ним можно применить любое условие равновесия, например

$$\Sigma M_x(F_i) = 0.$$

Запишем это условие для обеих систем:

$$M_x(F_1) = M_x(F_2) + M_x(F_2) + \ldots + M_x(F_n) + M_x(F'_{\Sigma}) = 0;$$
$$M_{\Sigma}(F_{\Sigma}) + M_x(F'_{\Sigma}) = 0.$$

Так как правые части этих равенств равны, то будут равны и левые:

$$M_x(F_1) = M_x(F_2) + M_x(F_3) + \ldots + M_x(F_n) + M_x(F'_{\Sigma}) = M_x(F_{\Sigma}) + M_x(F'_{\Sigma}).$$

Сократив общее слагаемое $M_x(F'_{\Sigma})$, получим:

$$M_x(F_1) = M_x(F_2) + M_x(F_3) + \ldots + M_x(F_n) = M_x(F_{\Sigma} \text{ или } \Sigma M_x(F_i) + M_x(F_{\Sigma}).$$

Теорема доказана.

Трение - основные понятия, законы и зависимости

Понятие трения

Как известно, в природе не существует абсолютно гладких и абсолютно твердых тел, поэтому при перемещении одного тела по поверхности другого возникает сопротивление, которое называется трением.

Трение – явление сопротивления относительному перемещению, возникающее между двумя телами в зонах соприкасания поверхностей по касательной к ним.

Трение – явление чрезвычайно распространенное в природе и имеющее большое значение. При этом оно может выполнять и полезные, и вредные функции. На трении основана работа фрикционных и ременных передач, муфт, наклонных транспортеров, прокатных станов, тормозных устройств и т. п.

Трение обеспечивает сцепление тел с земной поверхностью и, следовательно, работу машин, тракторов и другой транспортной самоходной техники. При отсутствии трения мы не могли бы ходить по земле, поскольку наши ноги скользили бы и разъезжались в разные стороны, как у неумелого конькобежца на гладком льду.

Наряду с полезными свойствами, трение является во многих устройствах и механизмах вредным сопротивлением, которое отнимает львиную долю мощности и энергии у машин. Для уменьшения трения в механизмах конструкторам приходится применять различные приемы и способы, чтобы снизить непродуктивные потери энергии.

Трение классифицируют по характеру движения, в результате которого оно возникает. Различают ***трение покоя, трение скольжения, трение качения и трение качения с проскальзыванием***. Очевидно, что последний из перечисленных видов трения является комбинацией трения скольжения и трения качения.

Трением покоя называется трение двух тел при начальном (бесконечно малом) относительном перемещении в момент перехода от состояния покоя к состоянию относительного движения. Это явление можно объяснить шероховатостью поверхностей соприкасающихся тел, а также их деформацией, вызванной взаимным давлением друг на друга.

Кроме того, при таком взаимном давлении (контакте) между телами, на их поверхностях возникают силы молекулярного сцепления. Для того, чтобы начать взаимное перемещение тел, необходимо преодолеть все эти факторы, обуславливающие трение покоя.

Трением движения называется трение двух тел, находящихся в относительном движении. Рассмотрим основные виды трения в зависимости от характера относительного движения тел.

Трение скольжения

Трением скольжения называется трение движения, при котором скорости тел в точке касания различны по значению и (или) направлению.

Трение скольжения, как и трение покоя, обусловлено, прежде всего, шероховатостью и деформацией поверхностей, а также наличием молекулярного сцепления прижатых друг к другу тел. Трение скольжения сопровождается изнашиванием, т. е. отделением или остаточной деформацией материала, а также нагревом трущихся поверхностей тел (остаточной называется деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних сил).

Трение характеризуется силой трения.

Сила трения есть сила сопротивления относительному перемещению двух тел при трении.

Рассмотрим тело, лежащее на горизонтальной шероховатой плоскости *(см. рисунок 1)*.

Сила тяжести $\boldsymbol{G}$ уравновешивается нормальной реакцией плоской поверхности $\boldsymbol{N}$. Если к телу приложить небольшую движущую силу $\boldsymbol{P}$, то оно не придет в движение, так как эта сила будет уравновешиваться силой трения $\boldsymbol{F_{тр}}$, которая является, таким образом, составляющей реакции опорной плоскости, направленной вдоль плоскости в противоположную перемещению сторону.

Если постепенно увеличивать сдвигающую силу $\boldsymbol{P}$, то до определенного ее значения тело будет оставаться в покое, а затем придет в движение.

Очевидно, что сила трения в состоянии покоя может изменяться в зависимости от степени микросмещения может изменяться от нуля до какого-то максимального значения $\boldsymbol{F^{max}_{тр}}$, причем в промежутке между нулем и максимальным значением сила трения $\boldsymbol{F_{тр}}$ по модулю всегда равна сдвигающей силе $\boldsymbol{P}$.

Максимальное значение сила трения покоя имеет в момент начала относительного движения. Это значение называется наибольшей силой трения покоя или просто силой трения покоя.

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную направлению относительного движения тела.

В XVIII веке французские ученые ***Гийом Атонтон*** *(1663-1705)*, а затем ***Шарль Огюстен Кулон*** *(1736-1806)* провели фундаментальные исследования в области трения, и на основе их сформулировали три основных закона трения скольжения, которые обычно называют законами Кулона.

1-й закон Кулона

Сила трения не зависит от величины площади трущихся поверхностей.

Первый закон можно объяснить с помощью следующих умозаключений. Если площадь трущихся поверхностей увеличится, то увеличится и количество сцепляющихся неровностей, но уменьшится давление на опорную поверхность, которое обратно пропорционально площади контакта тел. Поэтому сопротивление относительному перемещению останется прежним.

***

2-й закон Кулона

Максимальная сила трения прямо пропорциональна нормальной составляющей внешних сил, действующих на поверхности тела.

Второй закон Кулона говорит о том, что если увеличится нормальная составляющая внешних сил, действующих на поверхности тела (иначе говоря, увеличится сила нормального давления или реакции), то во столько же раз возрастет максимальная сила трения.

Поскольку зависимость эта прямо пропорциональная, можно выделить коэффициент, характеризующий ее пропорциональность. Этот коэффициент называется ***коэффициентом трения скольжения***, и определяется он, как отношение силы трения $\boldsymbol{F_{тр}}$ к нормальной составляющей $\boldsymbol{N}$ внешних сил, действующих на поверхности тела. Обозначается коэффициент трения скольжения $\boldsymbol{f}$.

При наибольшей силе трения покоя коэффициент трения называют ***коэффициентом сцепления***.

Таким образом,

$$f = F_{тр}/N \quad \text{или} \quad F_{тр} = fN.$$

В результате второй закон трения скольжения можно сформулировать так: ***сила трения равна коэффициенту трения скольжения, умноженному на силу нормального давления или реакции.***

Очевидно, что коэффициент трения скольжения – величина безразмерная.

Нормальная реакция N опорной поверхности и сила трения $F_{тр}$ дают равнодействующую R, которая называется полной реакцией опорной поверхности *(см. рисунок 2)*.

$$R = N + F_{тр}.$$

Полная реакция R составляет с нормалью к опорной поверхности некоторый угол. Максимальное значение этого угла (достигает в момент начала относительного движения) называется ***углом трения*** и обозначается φ. Из *рисунка 2* очевидно, что

$$f = tg\varphi,$$

т. е. коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла трения.

Если коэффициент трения скольжения одинаков для всех направлений движения, то множество (геометрическое место) полных реакций образует круговой конус, который называется ***конусом трения*** *(см. рисунок 2)*.

Если для разных направлений движения коэффициент трения неодинаков (например, при скольжении по дереву вдоль волокон и поперек волокон), то конус трения будет некруговым (несимметричным).

Свойство конуса трения заключается в том, что для равновесия тела, лежащего на шероховатой поверхности, равнодействующая приложенных к нему активных сил должна проходить внутри конуса трения.

Действительно, если равнодействующую P активных сил, приложенных к телу, разложить на составляющие P_2 (движущая сила) и P_2 *(сила нормального давления)*, то

$$P_1 = P_2\, tg\alpha.$$

По второму закону трения скольжения

$$F_{тр} = fP_2 = P_2\, tg\varphi.$$

Следовательно, при $\alpha < \varphi$ будет $P_1 < F_{тр}$ и движение окажется невозможным.

***

3-й закон Кулона

Сила трения зависит от материала тел, состояния трущихся поверхностей и рода смазки.

Согласно третьему закону трения скольжения, коэффициент трения скольжения зависит от материалов трущихся тел, качества обработки их поверхности (степени шероховатости), рода и температуры смазки. В зависимости от наличия между сопрягаемыми поверхностями слоя смазки трение подразделяется на два вида: трение без смазочного материала (сухое трение) и трение в условиях смазки.

Коэффициент трения скольжения определяют опытным путем; значения его для различных условий приведены в справочниках. Примеры коэффициентов трения для некоторых материалов приведены ниже.

- Металл по металлу без смазки .... 0,15...0,30
- То же, со смазкой ....0,10...0,18
- Дерево по дереву без смазки .... 0,40...0,60
- Кожа по чугуну без смазки .... 0,30...0,50
- То же, со смазкой 0,15
- Сталь по льду 0,02

Коэффициент трения скольжения при движении обычно меньше, чем при покое, и в первом приближении не зависит от скорости относительного перемещения тел.

Методы решения задач статики при наличии трения остаются такими же, как и при отсутствии его, причем в уравнения равновесия обычно вводят максимальные значения сил трения.

***

Трение на наклонной поверхности

Рассмотрим тело, лежащее на шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью *(см. рисунок 3)*.

Разложим силу тяжести тела G на составляющие G_1 и G_2, параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости. Модули этих составляющих определим, используя тригонометрические зависимости:

$$G_1 = G\sin\alpha; \quad G_2 = G\cos\alpha.$$

Составляющая G_1 стремится сдвинуть тело вдоль наклонной плоскости. Полностью или частично эта составляющая уравновешивается силой трения; согласно второму закону трения скольжения, ее максимальное значение равно:

$F_{тр} = fN = fG\cos\alpha$, где f – коэффициент трения скольжения тела по наклонной плоскости.

Для того, чтобы тело, лежащее на наклонной плоскости, находилось в равновесии, движущая сила G_1 должна быть по модулю равна силе трения $F_{тр}$,т. е.

$$G\ sin\alpha = fG\ cos\alpha \quad \text{или} \quad tg\alpha = f = tg\varphi$$, откуда следует, что $\alpha = \varphi$.

Если угол, который наклонная плоскость составляет с горизонтом, будет равен углу трения, то тело, лежащее на наклонной плоскости ,будет под действием собственной силы тяжести либо равномерно скользить вниз, либо находиться в состоянии покоя (что, собственно, одно и то же).

Для того, чтобы тело, лежащее на наклонной плоскости, заведомо не скользило вниз под действием собственной силы тяжести, должно быть соблюдено условие $\alpha < \varphi$.

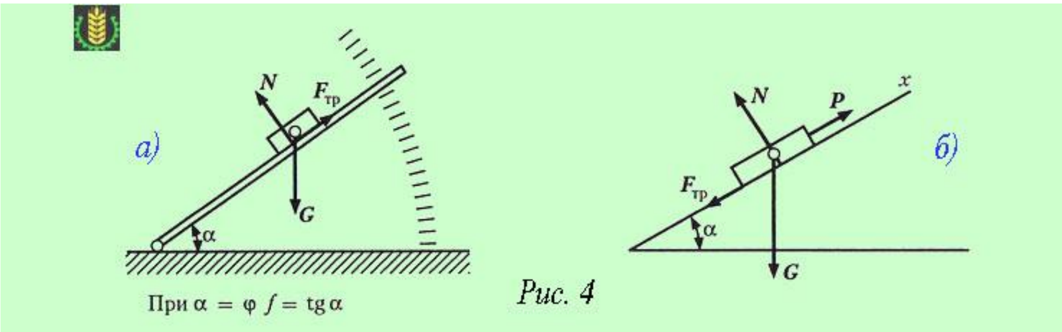


Рис. 4

Наклонной плоскостью с переменным углом наклона к горизонту пользуются для экспериментального определения угла трения φ и коэффициента трения f *(см. рисунок 4а)*.

Определим модуль силы P, параллельной наклонной плоскости, в случае равномерного перемещения тела вверх по шероховатой наклонной плоскости *(см. рисунок 4б)*. Спроецируем силы, действующие на тело, на ось x. Составим уравнение равновесия:

$$\Sigma X = 0; \quad P - G\ sin\alpha - F_{mp} = 0.$$

Так как $F_{mp} = fG\ cos\alpha$, то $P = G\ sin\alpha + fG\ cos\alpha$ или после преобразований: $P = G\ (tg\alpha + f)$.

Определим модуль горизонтальной силы Р, которую надо приложить к телу для равномерного перемещения его вверх по шероховатой наклонной плоскости (см. рисунок 5).

Применим геометрическое условие равновесия плоской системы сил (размерами тела пренебрегаем) и построим замкнутый силовой многоугольник, соответствующий уравнению равновесия:

$$G + P + N + F_{mp} = 0.$$

Из треугольника abc имеем: $P = Gtg(\alpha + \varphi)$.

Этот случай движения имеет место при взаимном перемещении винта и гайки с прямоугольной резьбой, так как резьбу винта можно рассматривать как наклонную плоскость, угол наклона которой равен углу подъема винтовой линии.

Трение в резьбе, имеющей треугольный или трапецеидальный профиль, подобно трению в клинчатом ползуне. Поэтому рассмотрим клинчатый ползун с углом заострения 2β, нагруженный вертикальной силой Q (см. рисунок 6). Определим силу P, необходимую для равномерного перемещения ползуна вдоль горизонтальных направляющих, если коэффициент трения скольжения равен f.

Составим два уравнения равновесия ползуна:

$$\Sigma X = 0; \quad P - 2F_{тр} = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 2N\sin\beta - Q = 0,$$

где $F_{тр}$ – сила трения на каждой грани ползуна; N – нормальная реакция направляющей.

Решая эту систему уравнений и учитывая, что $F_{тр} = fN$, получим:

$$P = (f/\sin\beta)\, Q = f'Q,$$

где $f' = f/\sin\beta$ – приведенный коэффициент трения.

Соответствующий этому приведенному коэффициенту угол трения обозначим φ' и назовем ***приведенным углом трения***, тогда:

$$f' = tg\varphi'.$$

Очевидно, что $f' > f$, следовательно, при прочих равных условиях трение в клинчатом ползуне больше трения на плоскости.

Понятие приведенного коэффициента трения условно, так как он изменяется в зависимости от угла заострения клинчатого ползуна.

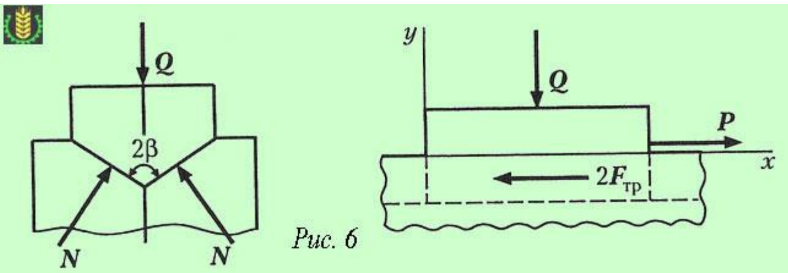


Рис. 6

По аналогии с движением тела вверх по наклонной плоскости под действием горизонтальной силы для равномерного перемещения клинчатого ползуна по направляющим, наклоненным к горизонту под углом α, нужно приложить горизонтальную силу равную

$$P = Q\, tg(\alpha + \varphi').$$

Трение в крепежной метрической резьбе подобно трению клинчатого ползуна с углом заострения $2\beta = 120^\circ$, для трапецеидальной резьбы угол $2\beta = 150^\circ$.

С трением связано понятие угла естественного откоса - наибольшим углом между наклонной плоскостью и горизонтом, при котором сыпучее тело удерживает свои частицы на поверхности, без их движения (осыпания) вниз. Угол естественного откоса сыпучего тела равен углу трения между его частицами. Этот угол приходится принимать во внимание, например, при различных земляных работах на уклонах и скатах.

Центр тяжести

Центр параллельных сил

Центром параллельных сил называется такая точка на линии действия равнодействующей системы параллельных сил, через которую проходит равнодействующая и в том случае, если все силы системы повернуть вокруг их точек приложения на один и тот же угол, сохраняя параллельность сил.

Покажем существование центра параллельных сил на системе двух сил F_1 и F_2 *(см. рисунок 1)*. На основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, определим равнодействующую этих сил и положение линии ее действия по формулам:

$$F_\Sigma = F_1 + F_2; \quad F_1/F_2 = BC/AC.$$

Нетрудно увидеть, что точка C, лежащая на линии AB, соединяющей точки приложения данных сил, является центром двух параллельных сил F_1 иF_2, так как при повороте их на один и тот же угол α отношение плеч BC и CA не изменится, и равнодействующая также пройдет через точку C.

Если дана система параллельных сил, то равнодействующую этой системы можно найти, последовательно попарно складывая все силы. На линии действия равнодействующей системы параллельных сил также будет существовать точка, обладающая свойствами центра параллельных сил, т. е. если все силы системы вращать вокруг этой точки, равнодействующая этих сил все равно останется приложенной к этой точке.

Выведем формулы для определения координат центра системы n параллельных сил.

Пусть даны пространственная система n параллельных сил и равнодействующая этой системы. Выберем систему осей координат и обозначим координаты точки приложения сил данной системы и координаты точки приложения равнодействующей *(см. рисунок 2)*.

Запишем моменты сил данной системы относительно оси y. Для того, чтобы легче представить, чему равен момент силы относительно оси, следует мысленно перенести силу вдоль линии ее действия до положения, когда точка приложения силы окажется в плоскости координатных осей *(см. рисунок 2, сила F_1')*:

$$My(F_1) = F_1x_1,$$

$$My(F_2) = F_2x_2,$$

$$M_y(F_n) = F_nx_n,$$

$$M_y(F_\Sigma) = F_\Sigma x_C.$$

Применим теорему о моменте равнодействующей относительно оси. Тогда:

$$F_\Sigma x_C = F_1x_1 + F_2x_2 + ... + F_nx_n, \quad \text{откуда}$$

$$x_C = (F_1x_1 + F_2x_2 + ... + F_nx_n)/F_\Sigma.$$

Записав моменты сил относительно оси x и вновь применив теорему о моменте равнодействующей, получим:

$$y_C = (F_1y_1 + F_2y_2 + ... + F_ny_n)/F_\Sigma.$$

Для определения координаты z_C повернем все силы системы вокруг их точек приложения в одну сторону так, чтобы силы стали параллельны оси y. При этом точка C не изменит своего положения, так как она является центром параллельных сил данной системы.

Запишем моменты всех сил относительно оси x и применим теорему о моменте равнодействующей, в результате получим:

$$z_C = (F_1z_1 + F_2z_2 + ... + F_nz_n)/F_\Sigma.$$

Равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме, т. е. $F_\Sigma = \Sigma F_i$. Применив сокращенную формулу записи, получим формулы для определения координат центра параллельных сил в следующем виде:

$$x_C = \Sigma(F_ix_i)/\Sigma F_i; \quad y_C = \Sigma(F_iy_i)/\Sigma F_i; \quad z_C = \Sigma(F_iz_i)/\Sigma F_i.$$

Заметим, что в полученных формулах силы и моменты сил берут со знаком согласно ранее установленным правилам (если вектор силы направлен по направлению координатной оси, сила считается положительной, и наоборот, а момент силы считается положительным, если его вращающее действие относительно точки направлено против часовой стрелки).

Определение положения центра тяжести

Уникальность центра системы параллельных сил заключается в том, что равнодействующая сил системы, приложенная в этом центре, не создает относительно него вращающего момента, поскольку плечо равнодействующей равно нулю. Полученные выше формулы для определения координат центра системы параллельных сил на практике чаще всего используют для нахождения центра тяжести различных тел и фигур.

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется силой тяжести. Элементарной частицей тела называется такая малая частица, положение которой в пространстве определяется координатами одной точки.

Рассмотрим тело, состоящее из большого количества элементарных частиц. Силы тяжести каждой частицы, направленные к центру Земли, образуют систему сходящихся сил, но для тел, размеры которых ничтожно малы по сравнению с размерами нашей планеты, с достаточной степенью точности можно считать эти силы системой параллельных сил.

Центром тяжести тела называется центр параллельных сил тяжести всех элементарных частиц этого тела.

Очевидно, что силы тяжести частиц тела образуют относительно центра тяжести систему параллельных сил, равнодействующая которой не имеет вращающего действия. Это свойство равнодействующей, проходящей через центр тяжести тела, используют, например, для балансировки колес, валов, при расчетах конструкций на устойчивость и т. п.

Центр тяжести является геометрической точкой, которая может лежать вне тела (например, кольцо, изогнутое тело и т. п.). Центр тяжести будем обозначать точкой C.

Координаты центра тяжести тела находят по тем же формулам, что и координаты центра параллельных сил:

$$x_C = \Sigma(G_i x_i)/\Sigma F_i; \quad y_C = \Sigma(G_i y_i)/\Sigma F_i; \quad z_C = \Sigma(G_i z_i)/\Sigma G_i,$$

где G_i - сила тяжести каждой элементарной частицы тела; x_i, y_i, z_i – координаты частицы; ΣG_i – сила тяжести всего тела.

В случае однородных тел по таким же формулам можно определять координаты центра тяжести объемов, площадей и линий, представив G_i, как произведение удельной массы (удельной силы тяжести) тела на его объем:

$G_i = \gamma V_i$, где γ – удельная сила тяжести (для однородного тела γ – величина постоянная). Если подставить эти зависимости в выведенные ранее формулы, и сократить на постоянный множитель γ, получим координаты центра тяжести для объема однородного тела:

$$x_C = \Sigma(V_i x_i)/\Sigma V_i; \quad y_C = \Sigma(V_i y_i)/\Sigma V_i; \quad z_C = \Sigma(V_i z_i)/\Sigma V_i.$$

При помощи аналогичных преобразований можно вывести формулы для нахождения координат центра тяжести плоской фигуры (пластины), имеющей одинаковую толщину h по всей площади: если $G_i = \gamma h A_i$, (здесь A_i – площадь элементарной площадки пластины), то

$$x_C = \Sigma(A_i x_i)/\Sigma A_i; \quad y_C = \Sigma(A_i y_i)/\Sigma A_i; \quad z_C = \Sigma(A_i z_i)/\Sigma A_i.$$

Если тело, например, представляет собой однородную проволоку, постоянного поперечного сечения A (т. е. линию), то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через длину l_i (после аналогичных математических преобразований) равна:

$$x_C = \Sigma(l_i x_i)/\Sigma l_i; \quad y_C = \Sigma(l_i y_i)/\Sigma l_i; \quad z_C = \Sigma(l_i z_i)/\Sigma l_i.$$

Центр тяжести

Методы нахождения центра тяжести

Наиболее часто для нахождения центра тяжести тела или фигуры применяют следующие методы:

- ***метод симметрии;***
- ***метод разбиения;***
- ***метод отрицательных масс.***

Рассмотрим приемы, применяемые в каждом из перечисленных методов.

***

Метод симметрии

Представим себе однородное тело, которое имеет плоскость симметрии. Выберем такую систему координат, чтобы оси x и z лежали в плоскости симметрии *(см. рисунок 1)*.

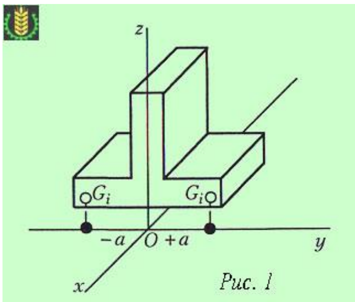


Рис. 1

В этом случае каждой элементарной частице силой тяжести G_i с абсциссой $y_i = +a$ соответствует такая же элементарная частица с абсциссой $y_i = -a$, тогда:

$$y_C = \Sigma(G_i x_i)/\Sigma G_i = 0.$$

Отсюда вывод: если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости.

Аналогично можно доказать и следующие положения:

- Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси;
- Если однородное тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести тела находится в точке их пересечения;
- Центр тяжести однородного тела вращения лежит на оси вращения.

Метод разбиения

Этот метод заключается в том, что тело разбивают на наименьшее число частей, силы тяжести и положение центров тяжести которых известны, после чего применяют приведенные ранее формулы для определения общего центра тяжести тела.

Допустим, что мы разбили тело силой тяжести G на три части G', G'', G''', абсциссы центров тяжести этих частей x'_C, x''_C, x'''_C известны.

Формула для определения абсциссы центра тяжести всего тела:

$$x_C = \Sigma(G_i x_i)/\Sigma G_i.$$

Перепишем ее в следующем виде:

$$x_C\Sigma G_i = \Sigma(G_i x_i) \quad \text{или} \quad Gx_C = \Sigma(G_i x_i).$$

Последнее равенство запишем для каждой из трех частей тела отдельно:

$$G'x'_C = \Sigma(G'x'_i), \quad G''x''_C = \Sigma(G''_i x''_i), \quad G'''x'''_C = \Sigma(G'''_i x'''_i).$$

Сложив левые и правые части этих трех равенств, получим:

$$G'x'_C + G''x''_C + G'''x'''_C = \Sigma(G'_i x'_i) + \Sigma(G''x''_i) + \Sigma(G'''_i x'''_i) = \Sigma(G_i x_i).$$

Но правая часть последнего равенства представляет собой произведение Gx_C, так как

$$Gx_C = \Sigma(G_i x_i),$$

Следовательно, $x_C = (G'x'_C + G''x''_C + G'''x'''_C)/G$, что и требовалось доказать. Аналогично определяются координаты центра тяжести на координатных осях y и z:

$$y_C = (G'y'_C + G''y''_C + G'''y'''_C)/G,$$

$$_C = (G'z'_C + G''z''_C + G'''z'''_C)/G.$$

Полученные формулы аналогичны формулам для определения координат цента тяжести, выведенные выше. Поэтому в исходные формулы можно подставлять не силы тяжести элементарных частиц G_i, а силы тяжести конечных частей; под координатами x_i, y_i, z_i понимают координаты центров тяжести частей, на которые разбито тело.

***

Метод отрицательных масс

Этот метод заключается в том, что тело, имеющее свободные полости, считают сплошным, а массу свободных полостей – отрицательной. Вид формул для определения координат центра тяжести тела при этом не меняется.

Таким образом, при определении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять метод разбиения, но считать массу полостей отрицательной.

***

Практические методы определения центра тяжести тел

На практике для определения центра тяжести плоских тел сложной формы часто применяют***метод подвешивания***, который заключается в том, что плоское тело подвешивают на нити за какую-нибудь точку. Прочерчивают вдоль нити линию, и тело подвешивают за другую точку, не находящуюся на полученной линии.

Затем вновь проводят линию вдоль нити.

Точка пересечения двух линий и будет являться центром тяжести плоского тела.

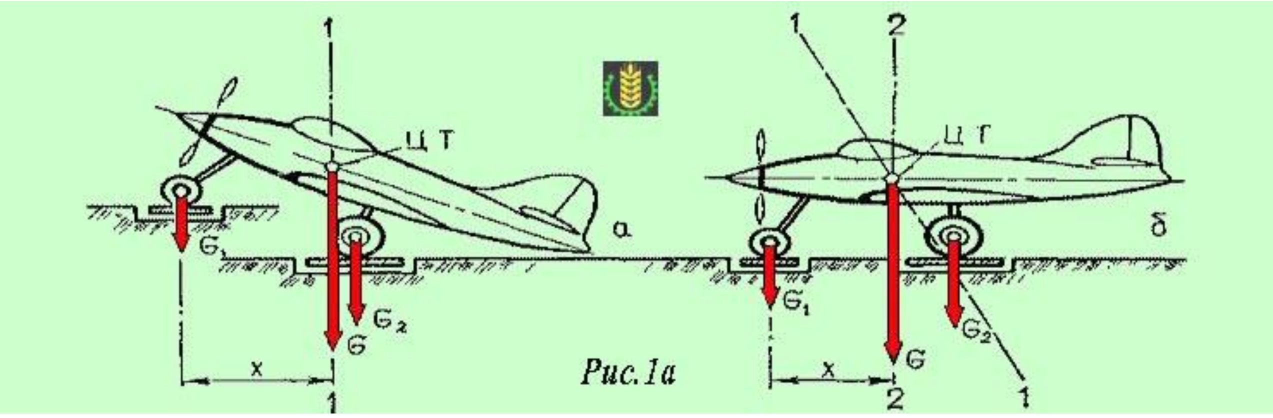


Рис.1а

Еще один способ определения центра тяжести, применяемый на практике, называется ***метод взвешивания***. Этот метод часто применяется для определения центра тяжести крупных машин и изделий – автомобилей, самолетов, колесных тракторов и т. п., которые имеют сложную объемную форму и точечную опору на грунт.

Метод заключается в применении условий равновесия, исходя из того, что сумма моментов всех сил, действующих на неподвижное тело равна нулю.

Практически это осуществляется взвешиванием одной из опор машины (задние или передние колеса устанавливаются на весы), при этом показания весов, по сути, являются реакцией опоры, которая учитывается при составлении уравнения равновесия относительно второй точки опоры (находящейся вне весов).

По известной массе (соответственно – весу) тела, показанию весов в одной из точек опоры, и расстоянию между точками опоры можно определить расстояние от одной из точек опоры до плоскости, в которой расположен центр тяжести.

Чтобы найти подобным образом линию (ось), на которой расположен центр тяжести машины, необходимо произвести два взвешивания по принципу, изложенному выше для метода подвешивания *(см. рис. 1а)*.

***

Положение центра тяжести некоторых фигур

Прямоугольник. Так как прямоугольник имеет две оси симметрии, то центр тяжести его площади находится в точке пересечения этих осей, иначе говоря, в точке пересечения диагоналей прямоугольника.

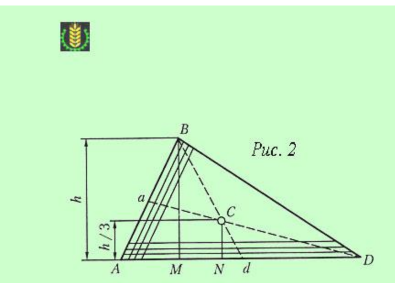


Рис. 2

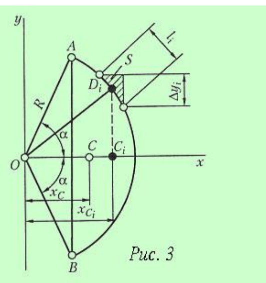


Рис. 3

Треугольник. Пусть дан треугольник ABD *(см. рисунок 2)*.

Разобьем его на элементарные (бесконечно узкие) полоски, параллельные стороне AD. Центр тяжести каждой полоски будет лежать на медиане Bd *(т. е. в середине каждой полоски)*, следовательно, на этой медиане будет лежать и центр тяжести всей площади треугольника. Разбив треугольник на элементарные полоски, параллельные стороне AB, увидим, что искомый центр тяжести лежит и на медиане aD.

Проделав аналогичное действие с треугольником относительно стороны BD, получим тот же результат – центр тяжести находится на соответствующей медиане.

Следовательно, центр тяжести всей площади треугольника лежит на точке пересечения его медиан, поскольку эта точка является единственной общей точкой для всех трех медиан данной геометрической фигуры.

Из геометрии известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в соотношении *1:2* от основания. Следовательно, центр тяжести треугольника расположен на расстоянии одной трети высоты от каждого основания.

Дуга окружности. Возьмем дугу окружности AB радиусом R с центральным углом 2α *(см. рисунок 3)*. Систему координат выберем так, чтобы начало координат было в центре окружности, а ось xделила дугу пополам, тогда $y_C = 0$ вследствие симметрии дуги относительно оси x. Определим координату центра тяжести x_C.

Разобьем дугу AB на элементарные части l_i, одна из которых изображена на рисунке. Тогда, согласно сделанным выше выводам,

$$x_C = \Sigma(l_i x_{Ci})/\Sigma l_i.$$

Дугу l_i вследствие малости примем за отрезок прямой. Из подобия треугольника OD_iC_i и элементарного треугольника S *(на рисунке заштрихован)* получим:

$$L_i/\Delta y_i = R/x_{Ci} \quad \text{или} \quad l_i x_i = R\Delta y_i.$$

Тогда:

$$x_C = \Sigma(l_i x_{Ci})/\Sigma l_i = \Sigma(R\Delta y_i)/l = R\Sigma\Delta y_i/l = R\times AB/l,$$

поскольку $R\Sigma\Delta y_i = AB$, а $\Sigma l_i = l$ – длина дуги AB. Но $AB = 2R \sin\alpha$, а $l = 2R\alpha$, следовательно,

$$x_C = (R \sin\alpha)/\alpha.$$

При $\alpha = \pi/2$ *рад* *(полуокружность)*, $x_C = 2R/\pi$.

Круговой сектор. Возьмем сектор радиусом R с центральным углом 2α *(см. рисунок 3а)*. Проведем оси координат, как показано на рисунке (ось xнаправлена вдоль оси симметрии сектора), тогда$y_C = 0$.

Определим x_C, для чего разобьем сектор на ряд элементарных секторов, каждый из которых из-за малости дуги l_i можно принять за равнобедренный треугольник с высотой R. Тогда центр тяжести каждого элементарного сектора будет находиться на дуге радиуса $2R/3$ и задача определения центра тяжести сектора сводится к определению центра тяжести этой дуги. Очевидно, что

$$x_C = 2\,R\,\sin\alpha/(3\alpha).$$

При $\alpha = \pi/2$ *рад* (*полукруг*): $x_C = 4R/(3\pi)$.

***

Пример решения задачи на определение центра тяжести

Задача: Определить положение центра тяжести сечения, составленного из двутавра *№ 22* и швеллера *№ 20*, как показано на *рисунке 4*.

Решение. Из курса инженерной графики известно, что номер проката соответствует наибольшему габаритному размеру его сечения, выраженного в сантиметрах.

Так как сечение, составленное из двутавра и швеллера, представляет собой фигуру, симметричную относительно оси y, то центр тяжести такого сечения лежит на этой оси, т. е. $x_C = 0$.

По справочнику определим площади и координаты центров тяжести двутавра ***1*** и швеллера ***2***.

Для двутаврового сечения: $A_1 = 15{,}2\ см^2$; y_1 = *22/2 = 11 см.*

Для швеллерного сечения: $A_2 = 12\ см^2$; $y_2 = 22 + d - z_0$ = *22 + 0,32 – 1,25 = 21,07 см*,

где d – толщина стенки швеллера; z_0 – размер, определяющий положение центра тяжести швеллера.

Применим формулу для определения координаты центра тяжести всего сечения:

$$y_C = \Sigma(A_i y_i)/\Sigma A_i,$$

тогда:

$$y_C = (A_1y_1 + A_2y_2)/(A_1 + A_2) = (15{,}2\times 11 + 12\times 21{,}07)/(15{,}2 + 12) = 15{,}4\ см.$$

Задача решена.

1.2 Кинематика

Кинематика точки

Кинематика – часть теоретической механики, в которой изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

Когда в механике говорят о движении тела, то подразумевают под этим изменение с течением времени его положения в пространстве по отношению к другим телам.

Обычно с телом, по отношению к которому изучают движение, связывают какую-нибудь систему координат, которую вместе с выбранным способом измерения времени называют системой отсчета. Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются неизменными во времени, то тело находится в покое.

Если рассматривается движение тела по отношению к условно неподвижной системе отсчета, то движение называют ***абсолютным***; движение тела по отношению к подвижной системе отсчета называют ***относительным***.

В мире все находится в непрерывном движении, поэтому все движения являются относительными, однако условно можно представить себе и абсолютное движение, например, движение по отношению к Земле.

Итак, движение тело совершается в пространстве с течением времени. Пространство и время, как и движение, согласно учению диалектического материализма – формы существования материи.

Классическая механика полагает, что пространство и время имеют абсолютный, независимый друг от друга характер, и что их свойства не зависят от распределения и движения материи.

Такая точка мировоззрения господствовала в науке до начала XX века, пока гениальный А. Эйнштейн *(1879-1955)* не поставил ее под сомнение своей теорией относительности. Этот человек сломал вековое представление человечества о самом главном – об абсолютности времени и пространства. Теория относительности Эйнштейна – это современная физическая теория пространства и времени, связывающая эти доселе незыблемые независимые постулаты с движением, массой и энергией.

До А. Эйнштейна считалось, что все в мире относительно. Если тело движется по отношению к какой-либо подвижной системе, то оно имеет другой характер движения по отношению к той системе, относительно которой движется данная система. Это утверждение являлось одним из китов, на которых восседала наука до начала прошлого века.

Теория относительности Эйнштейна основывается на том, что скорость света является постоянной величиной, не зависящей от скорости источника этого света. На основании этого противоречащего здравому смыслу вывода можно утверждать, что и пространство, и время – суть понятия относительные, зависящие от скорости света.

Гениальность Эйнштейна заключается в том, что он увидел и объял неочевидное. Современная физика, на основании множества экспериментов, опытов и исследований полностью подтвердила его теорию.

Тем не менее, несмотря на открытия Эйнштейна, классическая механика не потеряла свою актуальность, так как при скоростях движения, далеких от скорости света, результаты, даваемые классической механикой, ничтожно мало отличаются от результатов механики теории относительности и вполне пригодны для практики. Можно сказать, что классическая механика является частным случаем механики теории относительности, предполагающая упрощенные расчеты с допустимыми погрешностями.

Основные определения кинематики

Чтобы понять смысл определений кинематики следует ознакомиться с понятиями и определениями другого раздела технической механики – теорией механизмов и машин, которая занимается приложением законов теоретической механики для практических расчетов деталей, механизмов и машин.

Механизмом называется совокупность связанных между собой тел, имеющих определенные движения и служащих для передачи и преобразования движения.

Машиной называют механизм или сочетание механизмов, служащих для преобразования энергии (энергетические машины), изменения формы, свойств, состояния и положения предмета труда (рабочие машины), или для сбора, переработки и использования информации (информационные машины). Таким образом, любая машина состоит из одного или нескольких механизмов, но не всякий механизм является машиной, т. е. машина – понятие более широкое.

Простейшей частью любой машины является ее ***звено*** – одно тело или неизменяемое во время работы машины сочетание группы тел.

Два звена, соединенные между собой и допускающие относительное движение, называются ***кинематической парой***.

Кинематические пары бывают ***низшие*** и ***высшие***. Звенья низших пар соприкасаются по поверхностям (поступательные, вращательные и винтовые пары), звенья высших пар соприкасаются по линиям и точкам (зубчатые пары, подшипники качения и т. п.).

Совокупность кинематических пар называется ***кинематической цепью***.

Кинематические пары и цепи могут быть плоскими и пространственными. Механизм – это кинематическая цепь, у которой одно из звеньев лишено движения (закреплено). Такое звено называют ***станиной*** или ***стойкой***.

Звено, вращающееся вокруг неподвижной оси, называют ***кривошипом***, качающееся вокруг неподвижной оси – ***балансиром*** или ***коромыслом***.

Звено, совершающее сложное движение параллельно какой-то плоскости, называют ***шатуном***. Звено, совершающее возвратно-поступательное движение по станине или стойке, называют***ползуном***.

Ведущим звеном механизма считается то, которому извне сообщается определенное движение, передаваемое посредством этого звена другим звеньям, называемым ***ведомыми***.

Кинематика изучает закономерности относительного движения и перемещения отдельных звеньев механизмов, без учета сил, вызывающих эти движения и перемещения.

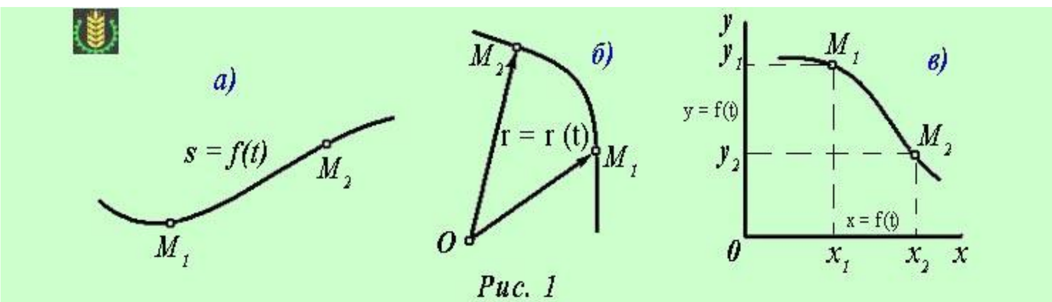
Основными физическими величинами, которыми оперирует кинематика, являются расстояние (длина) и время. Единицей измерения длины в системе СИ является метр *(м)*, единицей измерения времени – секунда *(с)*.

Способы задания движения точки

Знание законов движения тела означает знание законов движения каждой его точки, поэтому изучение кинематики основывается на изучении геометрии движения точки.

Траекторией точки называется множество (геометрическое место) положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета. Проще говоря, траектория движения – это линия, которую описывает подвижная точка относительно выбранной системы отсчета. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движение.

Движение любой точки тела можно описать (задать) тремя способами – естественным, векторным и координатным *(см. рисунок 1)*.



Естественный способ *(рис. 1а)* заключается в том, что движение точки задается ее траекторией, началом отсчета и уравнением движения по этой траектории (законом движения). В общем виде уравнение движения записывается так: $s = f(t)$, где s – расстояние от точки до начального положения (начала отсчета), являющееся функцией времени; t – время движения точки от начального отсчета.

Зная траекторию и закономерность (уравнение) движения точки по этой траектории, можно в любой момент времени определить, где она находится.

При своем движении точка проходит некоторый путь, который также является функцией времени. Следует отметить, что путь, пройденный точкой, совпадает с расстоянием от начала отсчета лишь в том случае, если траектория движения точки представляет собой прямую линию, и точка движется по ней в одном направлении, а начало движения точки совпадает с началом отсчета.

Векторный способ *(рис. 1б)* основывается на том, что положение точки в пространстве однозначно определяется радиусом-вектором r, проведенным из некоторого неподвижного центра к данной точке. При этом положение точки в данный момент времени определяется направлением и модулем вектора. Математически функция изменения радиуса-вектора от времени записывается так:

$$r = rf(t)$$

Координатный способ *(рис. 1в)* заключается в том, что движение точки задается движением ее проекций вдоль осей координат. В общем виде уравнение движения точки можно записать следующим образом:

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t).$$

Зная уравнения движения точки в координатной форме, можно, подставив в эти уравнения время, определить положение проекций точки, а, следовательно, и самой точки в любой момент времени.

Если точка движется в плоскости, то для определения ее местоположения в данный момент времени достаточно знать две координаты, если движение происходит по прямой – достаточно одной координаты.

Скорость и ускорение

Скорость точки

В предыдущей статье движение тела или точки определено, как изменение положения в пространстве с течением времени. Для того чтобы более полно охарактеризовать качественные и количественные стороны движения введены понятия скорости и ускорения.

Скорость – это кинематическая мера движения точки, характеризующая быстроту изменения ее положения в пространстве.

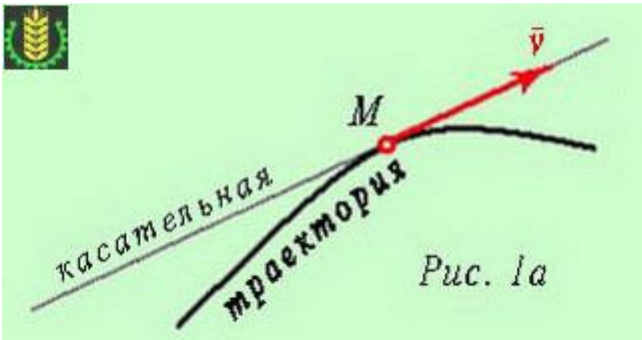
Скорость является векторной величиной, т. е. она характеризуется не только модулем (скалярной составляющей), но и направлением в пространстве.

Как известно из физики, при равномерном движении скорость может быть определена длиной пути, пройденного за единицу времени: $v = s/t = const$ (предполагается, что начало отсчета пути и времени совпадают). При прямолинейном движении скорость постоянна и по модулю, и по направлению, а ее вектор совпадает с траекторией.

Единица скорости в системе *СИ* определяется соотношением длина/время, т. е. ***м/с***.

Очевидно, что при криволинейном движении скорость точки будет меняться по направлению. Для того, чтобы установить направление вектора скорости в каждый момент времени при криволинейном движении, разобьем траекторию на бесконечно малые участки пути, которые можно считать (вследствие их малости) прямолинейными. Тогда на каждом участке условная скорость $\boldsymbol{v_n}$такого прямолинейного движения будет направлена по хорде, а хорда, в свою очередь, при бесконечном уменьшении длины дуги (Δs стремится к нулю), будет совпадать с касательной к этой дуге. Из этого следует, что при криволинейном движении вектор скорости в каждый момент времени совпадает с касательной к траектории *(рис. 1а)*. Прямолинейное движение можно представить, как частный случай криволинейного движения по дуге, радиус которой стремится к бесконечности*(траектория совпадает с касательной)*.

При неравномерном движении точки модуль ее скорости с течением времени меняется. Представим себе точку, движение которой задано естественным способом уравнением $s = f(t)$.



Если за небольшой промежуток времени Δt точка прошла путь Δs, то ее средняя скорость равна:

$$v_{ср} = \Delta s/\Delta t.$$

Средняя скорость не дает представления об истинной скорости в каждый данный момент времени (истинную скорость иначе называют мгновенной). Очевидно, что чем меньше промежуток времени, за который определяется средняя скорость, тем ближе ее значение будет к мгновенной скорости.

Истинная (мгновенная) скорость есть предел, к которому стремится средняя скорость при Δt, стремящемся к нулю:

$$v = \lim v_{ср} \text{ при } t \to 0 \text{ или } v = \lim (\Delta s/\Delta t) = ds/dt.$$

Таким образом, числовое значение истинной скорости равно $v = ds/dt$. Истинная (мгновенная) скорость при любом движении точки равна первой производной координаты (т. е. расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

При Δt стремящемся к нулю, Δs тоже стремится к нулю, и, как мы уже выяснили, вектор скорости будет направлен по касательной (т. е. совпадает с вектором истинной скорости $\boldsymbol{v}$). Из этого следует, что предел вектора условной скорости $\boldsymbol{v_n}$, равный пределу отношения вектора перемещения точки к бесконечно малому промежутку времени, равен вектору истинной скорости точки.

Ускорение точки в прямолинейном движении

В общем случае движение точки с изменяющейся во времени скоростью называют ускоренным, при этом считая ускорение, вызывающее уменьшение скорости, отрицательным. Иногда движение, в котором скорость с течением времени уменьшается, называют замедленным.

Ускорение есть кинематическая мера изменения скорости точки во времени. Другими словами - ускорение - это скорость изменения скорости.

Как и скорость, ускорение является величиной векторной, т. е. характеризуется не только модулем, но и направлением в пространстве.

При прямолинейном движении вектор скорости всегда совпадает с траекторией и поэтому вектор изменения скорости тоже совпадает с траекторией.

Из курса физики известно, что ускорение представляет собой изменение скорости в единицу времени. Если за небольшой промежуток времени Δt скорость точки изменилась на Δv, то среднее ускорение за данный промежуток времени составило: $a_{ср} = \Delta v/\Delta t$.

Среднее ускорение не дает представление об истинной величине изменения скорости в каждый момент времени. При этом очевидно, что чем меньше рассматриваемый промежуток времени, во время которого произошло изменение скорости, тем ближе значение ускорения будет к истинному (мгновенному). Отсюда определение: истинное (мгновенное) ускорение есть предел, к которому стремится среднее ускорение при Δt, стремящемся к нулю:

$$a = \lim a_{ср} \text{ при } t \to 0 \quad \text{или} \quad \lim \Delta v/\Delta t = dv/dt.$$

Учитывая, что $v = ds/dt$, получим: $a = dv/dt = d^2s/dt^2$.

Истинное ускорение в прямолинейном движении равно первой производной скорости или второй производной координаты (расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

Единица ускорения - метр, деленный на секунду в квадрате ($м/с^2$).

Ускорение точки в криволинейном движении

При движении точки по криволинейной траектории скорость меняет свое направление, т. е вектор скорости является переменной величиной.

Представим себе точку M, которая за время Δt, двигаясь по криволинейной траектории, переместилась в положение M_1 *(рис. 1)*.

Вектор приращения (изменения) скорости обозначим Δv, тогда: $\Delta v = v_1 - v$.

Для нахождения вектора Δv перенесем вектор v_1 в точку M и построим треугольник скоростей. Определим вектор среднего ускорения:

$$a_{ср} = \Delta v/\Delta t.$$

Вектор $\boldsymbol{a_{ср}}$ параллелен вектору $\boldsymbol{\Delta v}$, так как от деления векторной величины на скалярную направление вектора не меняется.

Вектор истинного ускорения есть предел, к которому стремится отношение вектора приращения скорости к соответствующему промежутку времени, когда последний стремится к нулю:

$$a = \lim \Delta v/\Delta t \text{ при } t \to 0.$$

Такой предел называют векторной производной.

Таким образом, ***истинное ускорение точки в криволинейном движении равно векторной производной скорости по времени***.

Из *рисунка 1* видно, что вектор ускорения в криволинейном движении всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Так как векторную производную непосредственно вычислять мы не умеем, то ускорение в криволинейном движении будем определять косвенными методами. Так, например, если движение точки задано естественным способом, то применяется теорема о проекции ускорения на касательную и нормаль. Чтобы понять суть этой теоремы, следует рассмотреть понятие кривизны кривых линий.

Понятие о кривизне кривых линий

Рассмотрим криволинейную траекторию точки $\boldsymbol{M}$ *(рис. 2а)*.

Угол $\boldsymbol{\Delta\varphi}$ между касательными к кривой в двух соседних точках называется ***углом смежности***.

Кривизной кривой в данной точке называется предел отношения угла смежности $\boldsymbol{\Delta\varphi}$ к соответствующей длине $\boldsymbol{\Delta s}$ дуги, когда последняя стремится к нулю.

Обозначим кривизну буквой $\boldsymbol{k}$, тогда:

$$k = \lim \Delta\varphi/\Delta s \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0.$$

Рассмотрим окружность радиуса $\boldsymbol{R}$ *(см. рисунок 2б)*.

Так как $\boldsymbol{\Delta s = R\Delta\varphi}$, то:

$$k = \lim \Delta\varphi/\Delta s = \lim \Delta\varphi/R\Delta s = 1/R \text{ (при } \Delta s \to 0).$$

Следовательно, кривизна окружности во всех точках одинакова и равна $\boldsymbol{k = 1/R}$.

Для каждой точки данной кривой можно подобрать такую окружность, кривизна которой равна кривизне кривой в данной точке. Радиус ρ такой окружности называется ***радиусом кривизны кривой*** в данной точке, а центр этой окружности – ***центром кривизны***.

Итак, ***кривизна кривой в данной точке есть величина, обратная радиусу кривизны в данной точке***:

$$k = 1/\rho.$$

Очевидно, что кривизна прямой линии будет равна нулю, а поскольку радиус кривизны такой линии равен бесконечности.

Теорема о проекции ускорения на касательную и нормаль

Проекция ускорения на касательную к траектории называется касательным (тангенциальным) ускорением, а проекция ускорения на нормаль к этой касательной – нормальным ускорением.

Теорема: ***нормальное ускорение равно квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке; касательное ускорение – первой производной от скорости по времени***.

Доказательство этой теоремы основывается на геометрических построениях с учетом приведенных ранее зависимостей перемещения, скорости и ускорения от времени. В данной статье доказательство теоремы не приводится; при необходимости, его можно рассмотреть в других источниках информации.

Итак, на основании теоремы об ускорениях, можно записать:

$$an = v^2/\rho; \quad a_\tau = dv/dt.$$

Анализируя формулы касательного и нормального ускорения можно сделать вывод, что касательное ускорение характеризует изменение скорости только по модулю, а нормальное – только по направлению.

Зная величину нормального и касательного ускорения, можно вычислить полное ускорение точки, применив теорему Пифагора:

$$a = \sqrt{(a_\tau^2 + a_n^2)}.$$

Направление ускорения: $\cos(a_\tau, a) = a_\tau/a$.

Часто касательное и нормальное ускорения рассматривают не как проекции, а как составляющие полного ускорения, т. е. как векторные величины.

Вектор нормального ускорения всегда направлен к центру кривизны, поэтому нормальное ускорение иногда называют ***центростремительным***.

Виды движения точки в зависимости от ускорения

Анализируя формулы касательного и нормального ускорений, можно выделить следующие виды движения точки:

$a_n = v^2/\rho \neq 0; \quad a_\tau = dv/dt \neq 0$, - неравномерное криволинейное *(рис. 3а)*;

$a_n = v^2/\rho \neq 0; \quad a_\tau = dv/dt = 0$, - равномерное криволинейное *(рис. 3б)*;

$a_n = v^2/\rho = 0; \quad a_\tau = dv/dt \neq 0$, - неравномерное прямолинейное *(рис. 3в)*;

$a_\tau = dv/dt = const \neq 0; \quad a_n = v^2/\rho \neq 0$, - равнопеременное криволинейное *(рис. 3г)*;

$a_\tau = dv/dt = const \neq 0, \quad a_n = v^2/\rho = 0$, - равнопеременное прямолинейное *(рис. 3д)*;

$a_n = v^2/\rho = 0; \quad a_\tau = dv/dt = 0$, - равномерное прямолинейное (движение без ускорения) *(рис. 3е)*.

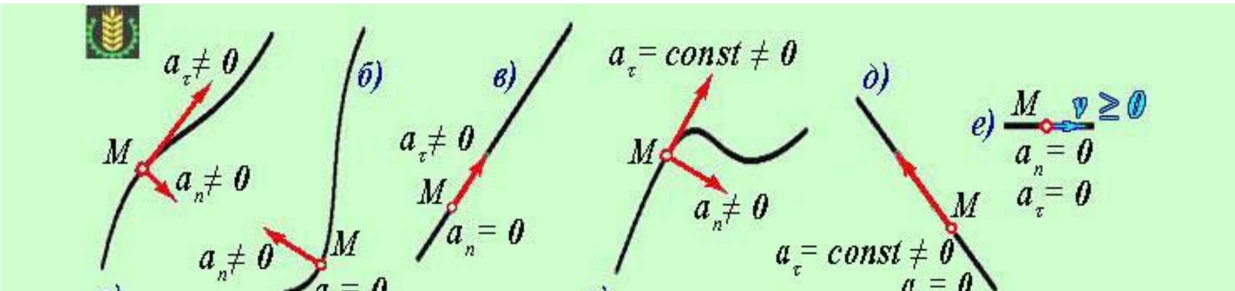


Рис.3

Теоремы о проекциях скорости и ускорения на координатную ось

Если движение точки задано координатным способом, то путь (перемещение), скорость и ускорение за промежуток времени Δt можно найти, используя проекции этих величин на координатную ось. Очевидно, что приращение любой из координат при Δt стремящемся к нулю тоже стремится к нулю, и предел такого приращения может быть определен из дифференциальных отношений, устанавливаемых теоремами о проекциях скорости и ускорения:

Теорема: ***проекция скорости на координатную ось равна первой производной от соответствующей координаты по времени***:

$$v_{nx} = dx/\Delta t \qquad v_{ny} = dy/\Delta t \qquad v_{nz} = dz/\Delta t.$$

Теорема: ***проекция ускорения на координатную ось равна второй производной от соответствующей координаты по времени***:

$$a_x = d^2x/\Delta t^2 \qquad a_y = d^2y/\Delta t^2 \qquad a_z = d^2z/\Delta t^2.$$

Зная проекции скорости или ускорения на координатные оси, можно определить модуль и направление вектора любой из этих величин, используя теорему Пифагора и тригонометрические соотношения.

Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение

Различают два вида простейшего движения твердого тела: поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению, называется поступательным. Так, например, поршень двигателя относительно других деталей и узлов (гильзы, блока, головки цилиндров и т. п.) совершает поступательное движение.

Закономерности перемещения всех точек тела при поступательном движении можно описать движением любой из его точек. Этот вывод опирается на утверждения теоремы о поступательном движении твердого тела.

Т*еорема:* ***при поступательном движении все точки твердого тела имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения***.

Пусть за время Δt тело, двигаясь поступательно, переместилось из положения AB в положение A_1B_1, причем произвольная точка A прошла путь Δs_A, а другая произвольная точка B прошла путь Δs_B по некоторым траекториям (дугам) AA_1 и BB_1 *(см. рис. 1)*.

Требуется доказать, что траектории, скорости и ускорения точек A и B при поступательном перемещении были одинаковы.

Соединим точки A и A_1, B и B_1 хордами. Так как $AB = A_1B_1$ *(поскольку тело является твердым, и расстояние между его частями и точками неизменно)*, а $AB \parallel A_1B_1$ *(по определению поступательного движения, любая прямая внутри тела перемещается параллельно своему первоначальному положению)*, то фигура ABB_1A_1 – параллелограмм. Следовательно, хорда AA_1 равна и параллельна хорде BB_1.

Возьмем промежуточное положение прямой A_2B_2 и соединим концы этого отрезка с точками A и A_1, B и B_1, как показано на рисунке.

Аналогично предыдущему можно доказать, что вписанные ломаные линии AA_2A_1 и BB_2B_1 имеют попарно равные и параллельные стороны.

Если бесконечное число раз удваивать число сторон этих ломаных линий, то в пределе они дадут дуги Δs_A и Δs_B. Но так как эти ломаные линии всегда одинаковы, то они одинаковы и в пределе, следовательно, траектории произвольных точек A и B будут одинаковы.

Поскольку точки A и B выбраны произвольно, то, следовательно, траектории всех точек тела будут одинаковы.

Докажем теперь, что скорости и ускорения произвольных точек A и B, а, следовательно, и всех других точек тела в каждый данный момент времени будут равны.

Так как векторы перемещений точек A и B равны между собой $(AA_1 = BB_1)$, то, разделив обе части этого векторного равенства на Δt и перейдя к пределу при Δt стремящемся к нулю, получим:

$$\lim AA_1/\Delta t = \lim BB_1/\Delta t \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Поскольку эти пределы являются векторами скоростей точек, следовательно $v_A = v_B$.

Перенесем векторы скоростей v_{A1} и v_{B1} в точки A и B и найдем векторы приращения скоростей Δv_A и Δv_B. Рассмотрим треугольники AMN и BM_1N_1. Эти треугольники конгруэнтны (равны), и их равные стороны попарно параллельны, следовательно, $\Delta v_A = \Delta v_B$.

Разделим обе части этого векторного равенства на Δt и перейдя к пределу при Δt стремящемся к нулю, получим:

$$\lim \Delta v_A / \Delta t = \lim \Delta v_B / \Delta t \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0 \quad \text{или} \quad a_A = a_B.$$

Теорема доказана.

Таким образом, поступательное движение твердого тела вполне определяется движением одной из его точек и, следовательно, все формулы кинематики точки применимы для тела, движущегося поступательно.

Вращение вокруг неподвижной оси

Движение, при котором по крайней мере две точки твердого тела или неизменяемой системы остаются неподвижными, называется вращательным; прямая линия, соединяющая эти две точки, называется осью вращения.

В определении вращательного движения говорится о неизменяемой системе, потому что ось вращения может лежать и вне тела.

Вращательное движение в технике встречается очень часто. Во многих машинах имеются звенья, совершающие вращательное движение, например, валы, шкивы, зубчатые колеса, ступицы и т. п.

Следует отметить, что понятие вращательного движения может относиться лишь к телу, но не к отдельной точке, и, например, движение точки по окружности является не вращательным, а криволинейным движением.

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа *(см. рис. 2)*. Точка O – след этой оси.

Очевидно, что траектории точек вращающегося тела есть окружности различных радиусов, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, с центрами, лежащими на этой оси.

Пусть за время Δt диск повернулся на угол φ. При этом точка A прошла путь s_A, а точка B – путь s_B.

Так как точки, находящиеся на различном расстоянии от оси вращения, за один и тот же промежуток времени проходят разные пути, то, следовательно, они имеют разные скорости и ускорения.

Отсюда следует, что линейное перемещение (путь), линейные скорость и ускорение точек не могут характеризовать вращательное движение тела в целом.

Вращательное движение тела можно характеризовать углом φ, на который повернулось тело за данный промежуток времени. Этот угол называется ***угловым перемещением тела***.

Угловое перемещение тела выражается в радианах *(рад)* или оборотах *(об)*; в последнем случае угловое перемещение обозначают N. Для установлении зависимости между этими величинами составим пропорцию:

1 об = 2π рад, N об = φ рад, откуда $\varphi = 2\pi N$ рад,

где N – число оборотов тела.

Угловое перемещение есть функция времени, следовательно, закон вращательного движения в общем виде можно записать так: $\varphi = f(t)$.

Из *рис. 2* видно, что путь любой точки вращающегося тела может быть определен из уравнения:

$s = r\varphi$, где r – расстояние от точки до оси вращения.

Скорость любой точки тела определяется так:

$$v = ds/dt = d(r\varphi)/dt = r(d\varphi/dt)$$

(r вынесли за знак производной, так как для данной точки твердого тела эта величина постоянна).

Выражение $d\varphi/dt$ называется ***угловой скоростью*** и обозначается ω.

Угловая скорость есть кинематическая мера движения вращающегося тела, характеризующая быстроту его углового перемещения: $\omega = d\varphi/dt$.

Угловая скорость равна первой производной углового перемещения по времени. Единица угловой скорости – радиан в секунду *(рад/с)*.

Формула для определения скорости любой точки вращающегося тела имеет следующий вид:

$$v = \omega r.$$

Скорость точки в каждый момент времени прямо пропорциональна ее расстоянию от оси вращения, следовательно, график скоростей точек, например, диаметра B_1B_2, будет представлять собой два треугольника. Очевидно, что вектор скорости точки вращающегося тела направлен перпендикулярно радиусу, соединяющему эту точку с осью вращения.

Если точка лежит на поверхности вращающегося тела, то ее скорость называют ***окружной***.

В технике часто скорость вращения выражают в оборотах в минуту, обозначают буквой n и называют ***частотой вращения***. Зависимость между угловой скоростью и частотой вращения выглядит так:

$\omega = \pi n/30$ *рад/с*, где n = частота вращения тела *(об/мин)*.

Различные случаи вращательного движения

Равномерное вращательное движение

Если тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью, то движение называется равномерным.

При этом:

$$\omega = const; \quad \varphi = \omega t.$$

Касательное, нормальное и полное ускорения любой точки равномерно вращающегося тела определяют так:

$$a_\tau = 0; \quad a_n = \omega^2 r; \quad a = a_n = \omega^2 r.$$

Неравномерное вращательное движение

Если угловая скорость вращающегося тела с течением времени меняется, то движение называется неравномерным.

В самом общем виде формулы неравномерного вращательного движения выглядят так:

$$\varphi = f(t); \quad \omega = \Delta\varphi/\Delta t.$$

Касательное движение любой точки неравномерно вращающегося тела определяют следующим образом:

$$a_\tau = dv/dt = d(\omega r)/dt = r(d\omega/dt).$$

Выражение $d\omega/dt$ обозначают α *(альфа)* и называют ***угловым ускорением***.

Угловое ускорение есть кинематическая мера изменения угловой скорости вращающегося тела:

$$\alpha = d\omega/t = d^2\varphi/dt^2.$$

Угловое ускорение равно первой производной угловой скорости или второй производной углового перемещения по времени. Единица углового ускорения – радиан на секунду в квадрате *(рад/с²)*.

Формулу для определения касательного ускорения любой точки неравномерно вращающегося тела можно записать в таком виде: $a_\tau = \alpha r$.

Нормальное ускорение определяется по такой же формуле, как и в случае равномерного вращения:

$$a_n = \omega^2 r.$$

Полное ускорение:

$$a = \sqrt{[(a_\tau^2) + (a_n^2)]} = \sqrt{[(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2]}, \quad \text{откуда} \quad a = r\sqrt{(\alpha^2 + \omega^4)}.$$

Направляющий тангенс полного ускорения можно определить так:

$$tg(a,\ a_n) = a_\tau/a_n = \alpha r/(\omega^2 r),\quad \text{откуда}\quad tg(a,a_n) = \alpha/\omega^2.$$

Если направление углового ускорения совпадает с направлением вращения, то вращательное движение является ускоренным, и наоборот.

Равнопеременное вращательное движение

Если тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением, то движение называют равнопеременным.

Формулы для этого вида вращательного движения могут быть выведены при помощи интегрального исчисления.

Итак, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси равнопеременно, то:

$$\alpha = d\omega/dt = const,\quad \text{откуда}\quad d\omega = \alpha dt.$$

Интегрируя это равенство по t, получим:

$\int d\omega = \int \alpha dt$, где ω изменяется от 0 *(начальная угловая скорость)* до ω, t изменяется от 0 до t.

Получим окончательную формулу угловой скорости в следующем виде:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Далее выведем формулу углового перемещения. Так как при любом вращательном движении

$$d\varphi/dt = \omega,\quad \text{то}\quad d\varphi = d\omega/dt,$$

то, интегрируя это равенство по t, получим:

$$\int d\varphi = \int d\omega/dt = \int(\ \omega_0 + \alpha t)dt = \int \omega_0 dt + \int \alpha t dt;\quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \alpha t^2/2,$$

где φ_0 – начальное угловое перемещение.

Очевидно, что в случае $\varphi_0 = 0$, формула примет вид: $\varphi = \omega_0 t + \alpha t^2/2$.

Итак, формулы для равнопеременного вращательного движения твердого тела записываются следующим образом:

$$\alpha = const;\quad \omega = \omega_0 + \alpha t;\quad \varphi = \omega_0 t + \alpha t^2/2.$$

Из этих формул можно получить формулы углового перемещения в другом виде:

$$\varphi = (\omega^2 - \omega_0^2)/(2\alpha)\quad \text{или}\quad \varphi = (\omega_0 + \omega)t/2.$$

Сложное движение точки

Что такое сложное движение точки?

В предыдущей статье рассматривалось движение точки относительно одной системы координат, которую считали неподвижной. В реальном мире все находится в непрерывном движении, и неподвижная система координат в действительности не существует. Поэтому нередко возникает необходимость рассматривать движение точек одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых условно считается неподвижной, а вторая определенным образом движется по отношению к первой. Движение точки в этом случае называется сложным.

Движение точки по отношению к неподвижной системе координат называется ***абсолютным***, а по отношению к подвижной системе координат –***относительным***.

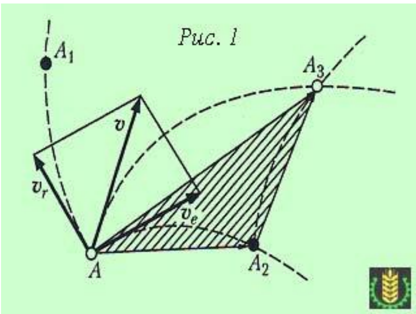
Движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной называют ***переносным движением***. Абсолютное движение точки является сложным и состоит из относительного и переносного движения.

Скорость точки в абсолютном движении называется абсолютной скоростью, а скорость точки в относительном движении называется относительной скоростью. Скорость точки, мысленно закрепленной в данный момент времени на подвижной системе координат, называется переносной скоростью. Связь между этими скоростями устанавливает теорема о сложении скоростей.

Теорема о сложении скоростей

Теорема: ***абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей***.

Пусть за время Δt точка переместилась из положения A в положение A_3, двигаясь по траектории абсолютного движения, т. е. по дуге AA_3 (см. рис. 1).



Если бы имело место только относительное движение, то точка перешла бы в положение A_2. Можно представить, что точка A перешла в положение A_3, двигаясь сначала только по траектории переносного движения (дуга AA_2), а затем только по траектории относительного движения (дуга A_2A_3 равная дуге AA_1). Соединив точки A, A_2 и A_3 хордами, получим следующую зависимость между векторами перемещений точки A:

$$AA_3 = AA_2 + A_2A_3.$$

Разделим все члены равенства на Δt и перейдем к пределу при Δt, стремящемся к нулю:

$$\lim (AA_3)/\Delta t = \lim (AA_2)/\Delta t + \lim (A_2A_3)/\Delta t, \quad \text{что дает} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

где: $\mathbf{v}$ – вектор абсолютной скорости; $\mathbf{v}_e$ - вектор переносной скорости; $\mathbf{v}_r$ – вектор относительной скорости.

Теорема доказана.

1.3 Динамика

Основные понятия и аксиомы динамики

Динамика есть часть теоретической механики, изучающая механическое движение тел в зависимости от сил, влияющих на это движение.

Основы динамики заложил итальянский ученый Галилео Галилей *(1564-1642)*, который опроверг существовавшее в науке со времен Аристотеля *(IV в. до н.э.)* заблуждение о том, что из двух тел, падающих на Землю, более тяжелое движется быстрее. Галилей установил, что причиной изменения скорости тела является сила, т. е. любое ускорение или замедление вызывается силовым воздействием. На основе выводов Г. Галилея англичанин И. Ньютон сформулировал основные аксиомы (законы) движения, ставшие фундаментом, на который сотни лет опирается классическая физика, в том числе и современная.

Динамика основывается на ряде положений, которые являются аксиомами и называются законами динамики. Прежде чем перейти к рассмотрению этих законов, необходимо раскрыть сущность понятий материальной точки и изолированной материальной точки. Под ***материальной точкой*** подразумевают некое тело, имеющее определенную массу (т. е. содержащее некоторое количество материи), но не имеющее линейных размеров (бесконечно малый объем пространства).

Изолированной считается материальная точка, на которую не оказывают действие другие материальные точки.

В реальном мире изолированных материальных точек, как и изолированных тел, не существует, это понятие является условным.

Первый закон Ньютона (первый закон динамики)

Первый закон динамики, называемый аксиомой инерции, формулируется в применении к материальной точке так: ***изолированная материальная точка либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно***.

В кинематике было установлено, что прямолинейное равномерное движение является единственным видом движения, при котором ускорение равно нулю, поэтому аксиому инерции можно сформулировать следующим образом: ускорение изолированной материальной точки равно нулю.

Итак, изолированная от влияния окружающих тел материальная точка не может сама себе сообщить ускорение. Это свойство тел называют ***инерцией*** или ***инертностью***, т. е. инертность (инерция) – свойство тел сохранять скорость по модулю и направлению (в т. ч. и покой – состояние, при котором скорость равна нулю). Изменить скорость, т. е. сообщить материальной точке ускорение способна только приложенная к ней сила.

Второй закон Ньютона (второй закон динамики)

Зависимость между силой и сообщаемым ею ускорением устанавливает второй закон Ньютона, который гласит, что ***ускорение, сообщаемое материальной точке силой, имеет направление силы и пропорционально ее модулю***.

Если сила F_1 сообщает материальной точке ускорение a_1, а сила F_2 сообщает этой же точке ускорение a_2, то на основании второго закона Ньютона можно записать:

$$F_1/F_2 = a_1/a_2 \quad \text{или} \quad F_1/a_1 = F_2/a_2.$$

Следовательно, для данной материальной точки отношение любой силы к вызываемому ею ускорению есть величина постоянная. Эту величину (отношение силы к ускорению) называют массой материальной точки, и обозначают ее m:

$$F/a = m = const.$$

На основании этого равенства можно сделать выводы: *- две материальные точки, имеющие одинаковые массы, получат от одной и той же силы одинаковые ускорения; - чем больше масса точки, тем большую силу необходимо приложить, чтобы придать данной точке требуемое ускорение*.

Что такое масса тела

Масса – одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства. Ньютон называл массой количество материи, заключенной в теле, считая массу каждого тела величиной постоянной. Современное представление о мире, после открытий, совершенных А. Эйнштейном, опровергает этот вывод И. Ньютона – масса не является постоянной величиной для тела, она зависит от скорости, с которой это тело движется. Так, например, наблюдения за движением заряженных частиц в ускорителях показали, что инертность частицы (т. е. способность сохранять свою скорость) возрастает с увеличением ее скорости.

Теория относительности устанавливает следующую зависимость между массой тела, находящегося в покое, и массой движущегося тела:

$$m = m_0/\sqrt{(1 - v^2/c^2)},$$

где m – масса движущегося тела, m_0 – масса покоящегося тела (масса покоя), v = скорость движения тела, c – скорость света.

Из этой формулы видно, что чем больше скорость движения тела, тем больше его масса и, следовательно, тем труднее сообщить ему дальнейшее ускорение. При скоростях близких к скорости света масса тела стремится к бесконечности, и для дальнейшего ускорения такого тела требуется сила бесконечной величины. Очевидно, что материальное тело не может двигаться со скоростью света, поскольку не существует реальная сила, способная ускорить его до такого состояния.

На основании теории относительности современная наука дает массе такое определение: ***масса есть мера инертности тела***. Однако заметное изменение массы (инертности) тела наблюдается лишь при очень больших скоростях, близких к скорости света, поэтому в классической физике массу принимают величиной постоянной, при этом погрешности, возникающие в расчетах, являются ничтожно малыми.

Второй закон Ньютона выражается равенством:

$$F = ma,$$

которое называется основным уравнением динамики и читается так: ***сила есть вектор, равный произведению массы точки на ее ускорение***. Основное уравнение динамики является уравнением движения материальной точки в векторной форме.

Ускорение свободного падения

Опытным путем установлено, что под действием притяжения Земли в вакууме тела падают с одинаковым ускорением, которое называется ускорением свободного падения.

Следует отметить, что это явление будет верным для конкретного географического места на поверхности планеты или над ее поверхностью – ускорение свободного падения не является постоянной величиной и зависит, в частности, от расстояния между центром тяжести тела и центром тяжести нашей планеты, а также от существования центробежной силы инерции, вызываемой вращением Земли. Так, на полюсах ускорение свободного падения $g \approx 9{,}83$ м/с^2, а на экваторе $g \approx 9{,}78$ м/с^2. Но в приближенных расчетах принимают среднее значение, равное примерно $g \approx 9{,}81$ м/с^2, при этом погрешности результатов незначительны.

Итак, сила тяжести тела равна его массе, умноженной на ускорение свободного падения. Если сила тяжести одного тела $G_1 = m_1/g$, а второго тела – $G_2 = m_2/g$, то

$$G_1/G_2 = (m_1 g)/(m_2 g) = m_1/m_2,$$

т. е. силы тяжести тел пропорциональны их массам, что позволяет сравнивать массы различных тел путем взвешивания (сравнивания их сил тяжести при помощи весов).

Из второго закона Ньютона следует, что под действием постоянной силы находившаяся в покое свободная материальная точка движется прямолинейно равнопеременно (с постоянным ускорением).

Движение под действием постоянной силы может быть и прямолинейным и криволинейным (в последнем случае материальная точка имеет начальную скорость, вектор которой не совпадает с вектором силы). Пример движения под действием постоянной силы – свободное падение тел.

***

Третий закон Ньютона

К основным законам динамики относится и рассмотренная в Статике аксиома взаимодействия, или третий закон Ньютона. Применительно к материальной точке закон формулируется так: ***силы взаимодействия двух материальных точек по модулю равны между собой и направлены в противоположные стороны*** (действие равно противодействию).

На основании этого закона можно сделать вывод, что сила, как мера взаимодействия между телами, не может проявляться без пары, т. е. если возникает какое-либо силовое воздействие, то существует и "двойник" этого силового воздействия, равный по модулю и противоположный по вектору.

Принцип независимости действия сил

Принцип независимости действия сил формулируется так: ***при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение равно векторной сумме ускорений, которые эта точка получила бы от действия каждой силы в отдельности***.

Пусть к материальной точке A приложены силы F_1 и F_2 равнодействующая которых равна F на основании аксиомы параллелограмма запишем:

$$F_1 + F_2 = F.$$

Разделив обе части равенства на массу точки m, получим:

$$F_1/m + F_2/m = F/m, \quad \text{откуда имеем:} \quad a_1 + a_2 = a.$$

Применяя последовательно аксиому параллелограмма, можно показать, что при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение будет таким, как если бы действовала одна равнодействующая сила $F = \Sigma F_i$.

Пользуясь изложенным выше принципом независимости действия сил, выведем уравнение движения материальной точки в дифференциальной форме.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть материальная точка A массой m движется в плоскости чертежа под действием равнодействующей силы $F = \Sigma F_i$ с ускорением a, тогда:

$$F = ma.$$

Спроецируем это векторной равенство на две взаимно-перпендикулярные оси координат x и y(оси и вектор силы F лежат в одной плоскости) и получим уравнение плоского движения материальной точки в координатной форме:

$$F_x = \Sigma X = ma_x; \qquad F_y = \Sigma Y = ma_y.$$

Применяя теорему о проекции ускорения на координатную ось, эти уравнения можно записать в виде дифференциальных уравнений плоского движения точки:

$$\Sigma X = m(d^2x/dt^2); \quad \Sigma Y = m(d^2y/dt^2),$$

где ΣX и ΣY – алгебраические суммы проекций сил, действующих на точку, на соответствующие координатные оси; x и y – текущие координаты точки.

С помощью полученных дифференциальных зависимостей решаются ***две основные задачи динамики***:

- *по заданному движению точки определяют действующие на нее силы;*
- *зная действующие на точку силы, определяют ее движение.*

В тех случаях, когда при решении задач имеем дело с несвободной материальной точкой, необходимо применять принцип освобождаемости, т. е. отбросить связи и заменить их реакциями, учитывая последние в уравнении движения наравне с действующими на точку активными силами.

Пример решения первой задачи динамики

Задача: движение тела массой m = 0,5 *кг* выражается уравнениями:

$$x = 2t; \quad y = 3 + t - 5t^2,$$

где x и y *(в сантиметрах)* – координаты точки в момент времени t *(в секундах)*.

Определить силу, действующую на тело.

Решение. Данный пример относится к первой задаче динамики. Прежде всего, пользуясь теоремой о проекции ускорения на координатную ось, определим проекции ускорения на оси x и y:

$$a_x = d^2x/dt^2 = 0; \quad a_y = d^2y/dt^2 = -10 \text{ см/с}^2 = -0{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Подставив эти значения в уравнение движения материальной точки, получим:

$$X = ma_x = 0{,}5 \times 0 = 0 \text{ Н}; \quad Y = ma_y = 0{,}5 \times (-0{,}1) = -0{,}05 \text{ Н}.$$

По полученным значениям проекций силы на координатные оси можно сделать вывод, что она параллельна оси ординат, направлена в сторону отрицательных ординат и по модулю равна:

$$F = \sqrt{(X^2 + Y^2)} = |Y| = 0{,}05 \text{ Н}.$$

Задача решена.

Пример решения второй задачи динамики

Задача: на материальную точку массой m = 4 *кг*, лежащую на гладкой горизонтальной плоскости, действует горизонтальная сила F = 12 *Н*. С какой скоростью будет двигаться материальная точка через время t = 10 *с*, если до приложения силы точка находилась в состоянии покоя?

Решение. Данный пример относится ко второй задаче динамики. Так как данная материальная точка лежит на гладкой горизонтальной плоскости, то под действием горизонтальной постоянной силы F точка будет двигаться прямолинейно равноускоренно. Направив координатную ось x вдоль траектории движения точки *(вдоль вектора силы* **F***)*, запишем уравнение ее движения:

$$\Sigma X = ma_x = ma.$$

Спроецировав на ось x действующие на точку силы, и подставив в это уравнение значение массы m, определим ускорение точки:

$$a = \Sigma X/m = F/m = 12/4 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Применим формулу скорости равноускоренного движения и подставим в нее значения, получим:

$$v = v_0 + at = at = 3\times10 = 30 \text{ м/с}.$$

Задача решена.

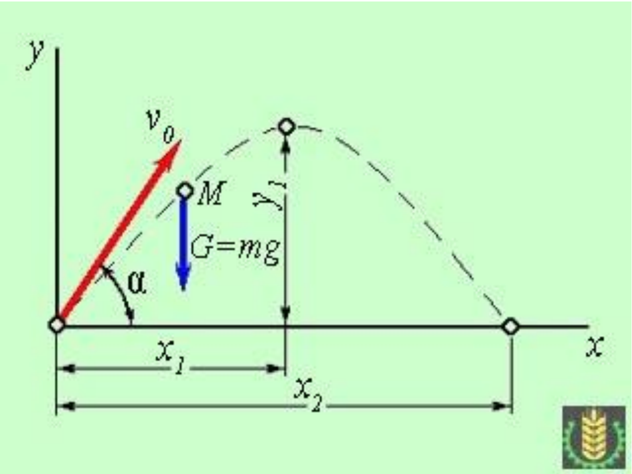
Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту

Рассмотрим материальную точку M массой m, брошенную из точки O поверхности Земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту *(см. рис. 1)*.

Определим движение точки M, считая, что на нее действует только сила тяжести G(сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Возьмем начало координат в точке O, ось x направим по горизонтали вправо *(в направлении траектории, по которой движется точка)*, а ось y – по вертикали вверх. Очевидно, что проекция ускорения на ось x будет равна нулю, поскольку единственная сила, действующая на точку - сила тяжести - направлена вертикально вниз (вдоль оси y), а согласно аксиоме Ньютона, без силы нет и ускорения. Составим дифференциальные уравнения, описывающие движение точки:

$$m\,(d^2x/dt^2) = 0; \quad m(d^2y/dt^2) = -\,mg.$$



Сокращая равенства на m, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad (1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (2)$$

Интегрируя первое из этих уравнений *(1)*, получим:

$dx/dt = C_1$, где C_1 – некоторая произвольная постоянная.

Следовательно, проекция скорости точки M на ось x все время остается величиной постоянной, равной $v_x = v_0 \cos\alpha$ или, на основании результата интегрирования уравнения *(1)*, можно записать:

$$dx/dt = v_0 \cos\alpha.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$x = v_0 t \cos\alpha + C_2.$$

По условию при $t = 0 \quad x = 0$, следовательно, произвольная постоянная C_2 равна нулю. Окончательно имеем:

$$x = v_0 t \cos\alpha.$$

Интегрируем уравнение *(2)*, находим:

$$v_y = dy/dt = -gt + C_3.$$

Подставив в это уравнение значение $t = 0$, найдем произвольную постоянную C_3:

$C_3 = v_y = v_0 \sin\alpha$, следовательно:

$$dy/dt = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Интегрируя вторично, получаем:

$$y = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2 + C_4.$$

Поскольку по условию $t = 0 \quad y = 0$, следовательно, произвольная постоянная C_4 равна нулю. Окончательно получаем:

$$y = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2.$$

Таким образом становится очевидным, что материальная точка M, брошенная с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется согласно уравнениям:

$$x = v_0 t\cos\alpha, \quad (3) \quad y = v_0 t\sin\alpha - gt^2/2. \quad (4)$$

Определение траектории, высоты и дальности полета

Для определения траектории точки M исключаем из полученной системы уравнений движения время. Для этого из формулы *(3)* выражаем время: $t = x/(v_0\cos\alpha)$ и подставляем это значение в формулу *(4)*. Получим уравнение траектории:

$$y = x\,tg\alpha - gx^2/(2v_0^2\cos^2\alpha).$$

Траектория точки M представляет собой параболу с вертикальной осью симметрии.

Определим время полета точки M, для чего во второе уравнение движения *(4)* подставим значение $y = 0$. Тогда уравнение движения примет вид:

$$v_0 t\sin\alpha - gt^2/2 = 0.$$

Отсюда находим два значения времени t, при которых ордината равна нулю *(корни уравнения)*:

$$t_0 = 0; \quad t_2 = (2v_0\sin\alpha)/g.$$

Первое значение времени соответствует началу полета, второе – конечной точке траектории полета. Тогда общая продолжительность полета будет равна:

$$t_2 - t_0 = t_2 = (2v_0\sin\alpha)/g.$$

Определим дальность полета по горизонтали, для чего в уравнение движения *(3)* подставим значение времени t_2:

$$x_2 = v_0 t\cos\alpha = (v_0\cos\alpha\times 2v_0\sin\alpha)/g \quad \text{или} \quad x_2 = v_0 t\cos\alpha = (v_0^2\sin 2\alpha)/g.$$

Из полученного уравнения можно сделать вывод, что максимальная дальность полета x_{max} имеет место при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = \pi/4$ *рад*:

$$x_{max} = v_0^2/g.$$

Определим наибольшую высоту подъема точки M, т. е. ее ординату в тот момент времени t_1, когда проекция скорости на ось y окажется равной нулю:

$$dy/dt = v_y = v_0\sin\alpha - gt_1 = 0.$$

Из полученного равенства определим t_1:

$$t_1 = (v_0 \sin\alpha)/g = t^2/2.$$

Следовательно, наибольший подъем точки имеет место в середине пути полета, при $x_1 = x^2/2$.

Подставив значение t_1 в уравнение *(4)*, получим:

$$y_1 = (v_0 \sin\alpha \times v_0 \sin\alpha)/g - g v_0^2 \sin 2\alpha/(2g^2).$$

Из полученного уравнения можно сделать вывод, что максимальной высоты точка достигает при $\sin\alpha = 1$ или при $\alpha = \pi/2$ *рад*, т. е. когда точка брошена под углом 90° к горизонту *(вертикально вверх)*.

Полученные формулы и зависимости позволяют решать различные задачи на движение тел и точек под действием силы тяжести в приближенной форме, поскольку они не учитывают силы сопротивления движению со стороны воздуха (аэродинамическое сопротивление).

Основы кинетостатики

Метод кинетостатики в динамике. Принцип Даламбера

Как известно, первый закон Ньютона гласит, что любое тело, любая материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока какая-нибудь сила не нарушит это состояние. Этот закон называют законом инерции, а свойство материальных тел «неохотно» изменять свое текущее состояние покоя – инертностью.

Явление инертности использовал в идее оригинального принципа динамических расчетов французский ученый ***Ж. Д'Аламбер*** *(д'Аламбер, Даламбер; фр. Jean Le Rond D'Alembert, d'Alembert, 1717-1783)*, по имени которого этот принцип и назван. Принцип Д'Аламбера (Даламбера) широко применяется для решения задач динамики методами кинетостатики.

Справедливости ради, следует отметить, что несколько раньше Д'Аламбера возможность решения задач динамики с помощью приемов статики изучали такие видные российские ученые Петербургской Академии наук, как Я. Герман и Л. Эйлер, жившие примерно в одно время с Даламбером.

Итак, что же такое принцип Д'Аламбера и чем он может быть полезен при решении задач динамики?

Сначала вспомним статику, где все легко и просто – любое тело или материальная точка будет находится в равновесии, если действующие на него силовые факторы уравновешивают друг друга. Все очевидно, просто и понятно. Благодаря приемам статики можно определить неизвестные активные или реактивные силы, действующие на уравновешенное тело или точку, применив простые математические приемы и геометрические построения. Нельзя ли эти приемы использовать для подвижных тел, причем не просто подвижных, а движущихся с ускорением? Оказывается можно, а иногда даже просто необходимо, как указал знаменитый француз, увековечивший свое имя в известном потомкам принципе.

Представим себе материальную точку массой m движущуюся с ускорением a под действием какой-то системы активных и реактивных сил, равнодействующая которых равна $\boldsymbol{F}$. Воспользуемся вторым (основным) законом динамики для того, чтобы уравнение движения этой точки записать в форме уравнений равновесия:

$$\boldsymbol{F} + (-m\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

Выражение, стоящее в скобках называют ***силой инерции***, и обозначают $\boldsymbol{F}^{ин}$. Итак:

$$\boldsymbol{F}^{ин} = -m\boldsymbol{a}.$$

Сила инерции есть вектор, равный произведению массы материальной точки на ее ускорение в данный момент времени, и направлен в сторону, противоположную ускорению. На основании этого определения можно записать:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{ин} = \boldsymbol{0} \quad \text{или} \quad \Sigma(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}^{ин}) = \boldsymbol{0}.$$

Это равенство и является математическим выражением принципа Д'Аламбера, который формулируется так: ***активные и реактивные силы, действующие на материальную точку, вместе с силами инерции образуют систему взаимно уравновешенных сил, удовлетворяющих всем условиям равновесия***. Т. е. Д'Аламбер предложил оригинальный способ применения методов статики к движущимся материальным точкам, использовав при этом в качестве основного инструмента понятие инертности и силы инерции.

Утверждение, что тело якобы находится в состоянии равновесия во время ускоренного движения, может вызвать недоумение. Как это может быть? Здесь следует отметить, что сила инерции, введенная в научную терминологию Д'Аламбером, является понятием условным, т. е. фактически такой силы в природе не существует, в отличие от понятия инертности - свойства любых материальных тел и точек, проявляющееся в стремлении сохранять свое состояние. Но именно условное уравновешивание силой инерции движущихся с ускорением тел, позволило использовать при решении задач динамики приемы статики, породив раздел теоретической механики - кинетостатику.

Явление инертности (инерции) можно пояснить на таком простом примере. Если подвесить на нити груз, который она легко выдержит в статическом состоянии, а затем резко дернуть за конец нити, то она порвется именно благодаря инертности груза. Другой пример: если тяжелое чугунное ядро попытаться сдвинуть с места, то потребуется приложить немалое усилие, чтобы оно покатилось. Когда же ядро, наконец, покатилось, для его остановки потребуется, опять же, немалое мускульное усилие. В каждом из этих случаев наглядно проявляется свойство инертности материальных тел.

Пример решения задачи методом кинетостатики

Задача: в кабине лифта размещены пружинные весы, на которых установлен груз. Когда кабина неподвижна показание весов составляет *50 Н*, а при движении лифта показание весов увеличилось до*51 Н*. Определить, с каким ускорением движется кабина лифта.

Решение. Применим к телу принцип освобождаемости, отбросим пружинные весы и заменим их реакцией $\boldsymbol{R}$, равной натяжению пружины. Для решения задачи применим метод кинетостатики, т. е. приложим к телу силу инерции $\boldsymbol{F^{ин}}$. Составим уравнение равновесия взвешиваемого тела, спроецировав все силы на вертикальную ось $\boldsymbol{y}$; предполагаем, что ускорение $\boldsymbol{a}$ кабины направлено вверх, и, следовательно, сила инерции направлена вниз (т. е. в противоположную ускорению сторону):

$$\Sigma Y = 0; \quad R - G - F^{ин} = 0.$$

Модуль силы инерции определяем по формуле:

$$F^{ин} = ma = (G/g)a.$$

Подставив это выражение в уравнение, определим ускорение:

$$a = (R - G)g/G = (51 - 50)\times 9{,}81/50 = 0{,}196 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение получилось положительным, следовательно мы изначально правильно предположили, что оно направлено вверх (если бы получилось отрицательное значение, значит ускорение направлено вниз).

Задача решена.

Силы инерции в криволинейном движении

В криволинейном движении точки полное ускорение равно векторной сумме касательного (тангенциального) и нормального (центростремительного) ускорений.

Касательное ускорение определяется по формуле $a_\tau = dv/dt$, нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$, полное ускорение $a = \sqrt{(a_\tau^2 + a_n^2)}$.

Каждому ускорению соответствует своя сила инерции:

- Касательная (тангенциальная) сила инерции: $F_\tau^{ин} = mdv/dt$;
- Нормальная (центробежная) сила инерции: $F_n^{ин} = mv^2/\rho$;
- Полная сила инерции: $F^{ин} = ma$.

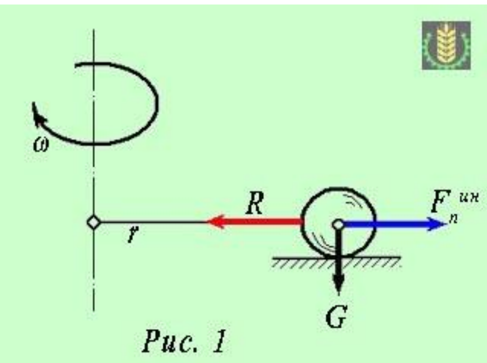


Рис. 1

В качестве примера рассмотрим равномерное движение по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, камня силой тяжести G, привязанного невесомой нитью длиной r, расположенной в той же плоскости *(рис. 1)*. Чтобы нить оставалась в плоскости движения камня, предполагается, что он скользит по идеально гладкой горизонтальной плоскости. Скорость движения камня обозначим v.

Тогда $F_n^{ин} = mv^2/\rho$ - центробежная сила инерции *(эта сила натягивает нить)*; $R = mv^2/\rho$ - центростремительная сила, приложенная к камню*(эта сила удерживает камень на круговой траектории)*. Обе эти силы, согласно второму закону Ньютона, равны по модулю и направлены в противоположные стороны, т. е. уравновешивают друг друга. Очевидно, что касательная сила в данном примере будет равна нулю, поскольку камень движется равномерно ($a_\tau = 0$).

Из опыта известно, что при достаточной скорости камня нить может не выдержать и разорваться, тогда камень полетит по касательной к окружности, т. е. по направлению имеющейся в момент разрыва нити скорости. Это доказывает, что центробежная сила инерции есть реальная сила для связи, но к телу она приложена условно.

Внутри тел, движущихся с ускорением, также возникают внутренние силы инерции, так как для каждой частицы тела соседние являются связями.

Найдем, чему будет равно натяжение нити, если камень движется по окружности, лежащей в вертикальной плоскости *(рис. 2)*. Для определения натяжения R нити применим принцип Д'Аламбера, т. е. приложим к камню нормальную силу инерции $F_n^{ин}$ и касательную силу инерции$F_\tau^{ин}$.

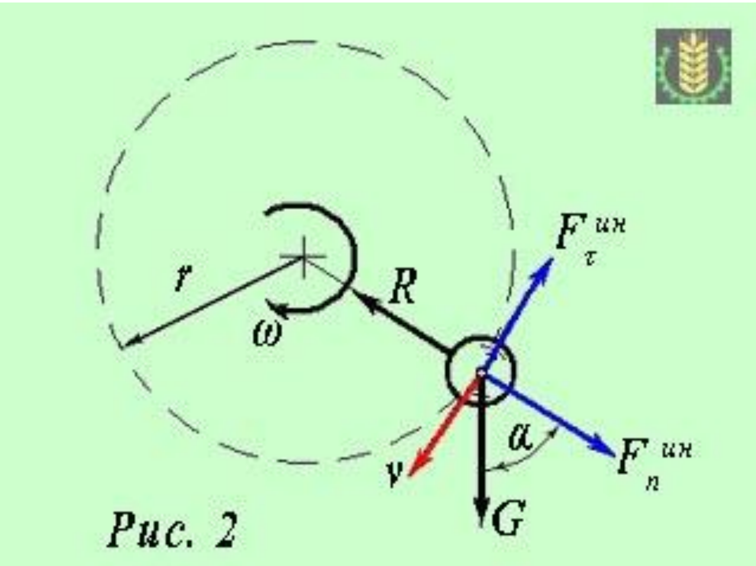


Рис. 2

Спроецируем все силы в направлении нити, в результате чего получим:

$$R - G\cos\alpha - F_n^{ин} = 0, \quad \text{откуда:} \quad R = F_n^{ин} + G\cos\alpha = mv^2/r + G\cos\alpha.$$

Очевидно, что натяжение нити будет максимальное при $\alpha = 0$, т. е. когда камень находится в нижнем положении:

$$R_{max} = mv^2/r + G.$$

Минимальное натяжение нити имеет место, когда $\alpha = \pi$ *рад*, т. е. в тот момент, когда камень находится в верхнем положении:

$$R_{min} = mv^2/r - G.$$

Следует отметить, что под влиянием силы тяжести в данном случае модуль скорости камня будет изменяться от максимума в нижнем положении до минимума в верхнем положении.

Если выразить линейную скорость камня через угловую скорость нити, используя зависимость $v = \omega r$, то формула центробежной силы примет вид:

$$F_n^{ин} = m\omega^2/r.$$

Пример решения задачи с использованием принципа Д'Аламбера

Задача: определить скорость v искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите на высоте h = 230 *км* от поверхности Земли, радиус которой принять равным R = 6370 *км*. Изменением ускорения свободного падения и сопротивлением атмосферы пренебречь.

Решение. После того, как ракета-носитель вывела спутник массой m на орбиту и сообщила ему скорость v, направленную по касательной к орбите, спутник продолжает движение под действием одной лишь силы притяжения Земли. Для определения скорости v спутника применим принцип Д'Аламбера, т. е. приложим к спутнику центробежную силу инерции и составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на ось, проходящую через спутник и центр Земли:

$$mg - F_n^{ин} = 0.$$

Так как $F_n^{ин} = mv^2/(R + h)$, то можно записать: $mg - mv^2/(R + h) = 0$.

Сократив члены этого равенства на m *(массу спутника)*, получим:

$$v = \sqrt{g(R + h)}.$$

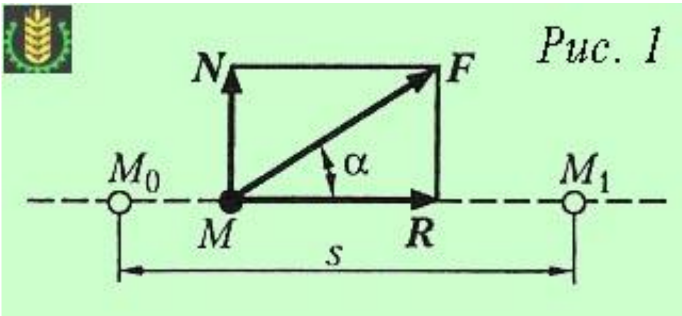
Подставив значения, получим: $v = \sqrt{9{,}81(6370 + 230)1000} \approx 8000$ *м/с* ≈ 8 *км/с*.

Задача решена.

Работа, мощность, энергия

Работа постоянной силы на прямолинейном участке

Рассмотрим материальную точку M, к которой приложена сила F. Пусть точка переместилась из положения M_0 в положение M_1, пройдя путь s *(рис. 1)*.



Чтобы установить количественную меру воздействия силы F на пути s, разложим эту силу на составляющие N и R, направленные соответственно перпендикулярно направлению перемещения и вдоль него. Так как составляющая N (перпендикулярная перемещению) не может двигать точку или сопротивляться ее перемещению в направлении s, то действие силы F на пути s можно определить произведением Rs. Эта величина называется ***работой*** и обозначается W.

Следовательно,

$$W = Rs = Fs \cos \alpha,$$

т. е. работа силы равна произведению ее модуля на путь и на косинус угла между направлением вектора силы и направлением перемещения материальной точки.

Таким образом, ***работа является мерой действия силы, приложенной к материальной точке при некотором ее перемещении***. Работа является скалярной величиной.

Рассматривая работу силы, можно выделить три частных случая: сила направлена вдоль перемещения *($\alpha = 0^\circ$)*, сила направлена в противоположном перемещению направлении *($\alpha = 180^\circ$)*, и сила перпендикулярна перемещению *($\alpha = 90^\circ$)*. Исходя из величины косинуса угла α, можно сделать вывод, что в первом случае работа будет положительной, во втором – отрицательной, а в третьем случае *($\cos 90^\circ = 0$)* работа силы равна нулю. Так, например, при движении тела вниз работа силы тяжести будет положительной (вектор силы совпадает с перемещением), при подъеме тела вверх работа силы тяжести будет отрицательной, а при горизонтальном перемещении тела относительно поверхности Земли работа силы тяжести будет равна нулю.

Силы, совершающие положительную работу, называются ***движущимися силами***, силы, а совершающие отрицательную работу – ***силами сопротивления***.

Единицей работы принят ***джоуль*** *(Дж)*:

1 Дж = сила×длина = ньютон×метр = *1 Нм*.

Джоуль – это работа силы в один ньютон на пути в один метр.

***

Работа силы на криволинейном участке пути

На бесконечно малом участке ds криволинейный путь можно условно считать прямолинейным, а силу – постоянной. Тогда элементарная работа dW силы на пути ds равна

$$dW = F\,ds\cos(F,v).$$

Работа на конечном перемещении равна сумме элементарных работ:

$$W = \int F\cos(F,v)\,ds.$$

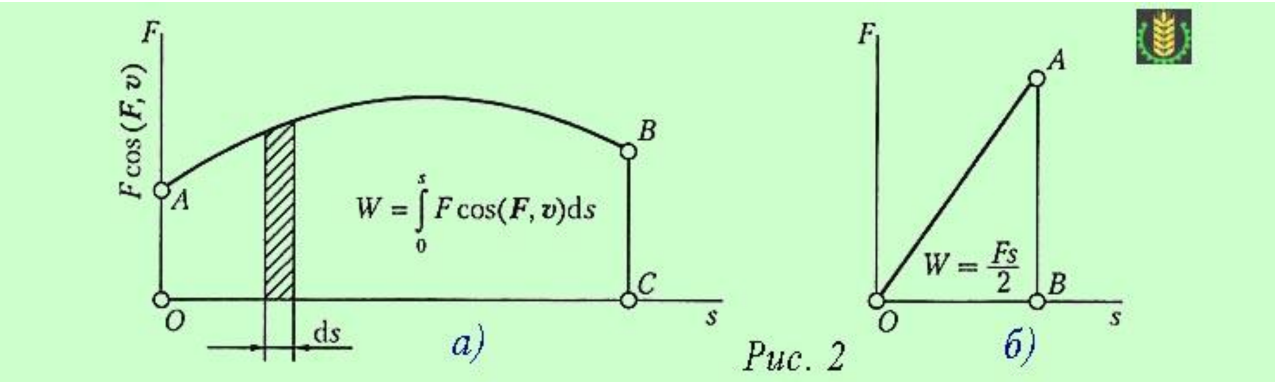


Рис. 2

На *рисунке 2а* изображен график зависимости между пройденным расстоянием и $F\cos(F,v)$. Площадь заштрихованной полоски, которую при бесконечно малом перемещении ds можно принять за прямоугольник, равна элементарной работе на пути ds:

$$dW = F\cos(F,v)\,ds,$$

а работа силы F на конечном пути s графически выражается площадью фигуры $OABC$, ограниченной осью абсцисс, двумя ординатами и кривой AB, которая называется ***кривой сил***.

Если работа совпадает с направлением перемещения и возрастает от нуля пропорционально пути, то работа графически выражается площадью треугольника OAB *(рис. 2 б)*, которая, как известно, может быть определена половиной произведения основания на высоту, т. е. половиной произведения силы на путь:

$$W = Fs/2.$$

Теорема о работе равнодействующей

Теорема: ***работа равнодействующей системы сил на каком-то участке пути равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же участке пути***.

Пусть к материальной точке M приложена система сил $(F_1, F_2, F_3,...F_n)$, равнодействующая которых равна F_Σ *(рис. 3)*.

Система сил, приложенных к материальной точке, есть система сходящихся сил, следовательно,

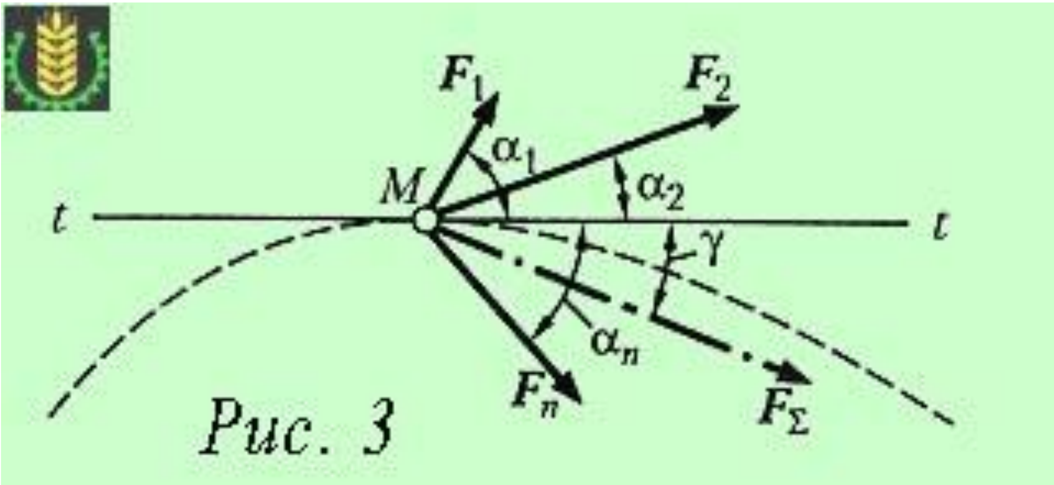


Рис. 3

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n.$$

Спроецируем это векторное равенство на касательную к траектории, по которой движется материальная точка, тогда:

$$F_\Sigma \cos\gamma = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + ... + F_n \cos\alpha_n.$$

Умножим обе части равенства на бесконечно малое перемещение ds и проинтегрируем полученное равенство в пределах какого-то конечного перемещения s:

$$\int F_\Sigma \cos\gamma\, ds = \int F_1 \cos\alpha_1\, ds + \int F_2 \cos\alpha_2\, ds + \int F_3 \cos\alpha_3\, ds + ... + \int F_n \cos\alpha_n\, ds,$$

что соответствует равенству:

$$W_\Sigma = W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_n$$

или сокращенно:

$$W_\Sigma = \Sigma W_{Fi}$$

Теорема доказана.

Теорема о работе силы тяжести

Теорема: ***работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения***.

Пусть материальная точка M движется под действием силы тяжести G и за какой-то промежуток времени перемещается из положения M_1 в положение M_2, пройдя путь s (рис.

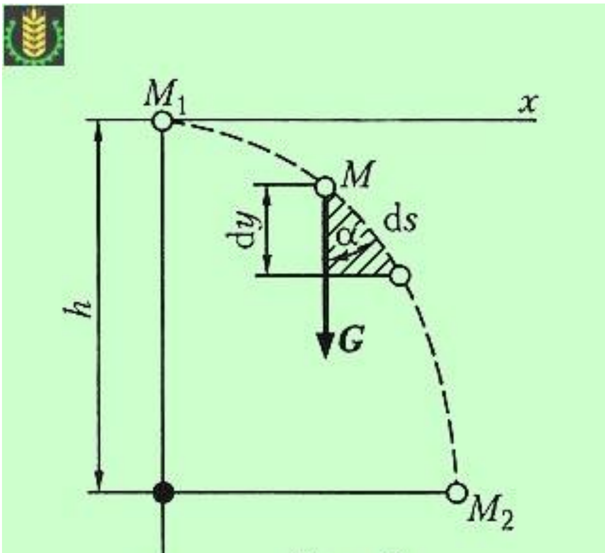


Рис. 4

4). На траектории точки M выделим бесконечно малый участок ds, который можно считать прямолинейным, и из его концов проведем прямые, параллельные осям координат, одна из которых вертикальна, а другая горизонтальна. Из заштрихованного треугольника получим, что

$$dy = ds \cos \alpha.$$

Элементарная работа силы G на пути ds равна:

$$dW = F\, ds \cos \alpha.$$

Полная работа силы тяжести G на пути s равна

$$W = \int G ds \cos \alpha = \int G dy = G \int dy = Gh.$$

Итак, работа силы тяжести равна произведению силы на вертикальное перемещение точки ее приложения:

$$W = Gh;$$

Теорема доказана.

***

Пример решения задачи по определению работы силы тяжести

Задача: Однородный прямоугольный массив $ABCD$ массой m = *4080 кг* имеет размеры, указанные на *рис. 5*.

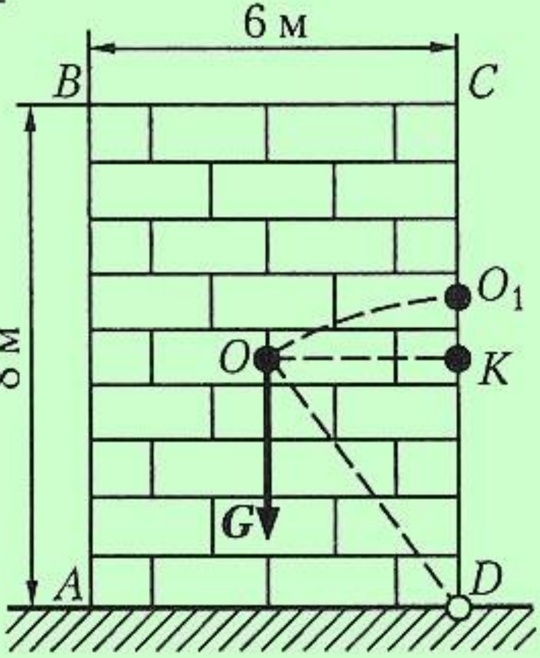


Рис. 5

Определить работу, которую необходимо выполнить для опрокидывания массива вокруг ребра D.

Решение. Очевидно, что искомая работа будет равна работе сопротивления, совершаемой силой тяжести массива, при этом вертикальное перемещение центра тяжести массива при опрокидывании через ребро D является путем, который определяет величину работы силы тяжести.

Для начала определим силу тяжести массива: $G = mg = 4080 \times 9{,}81 = 40\,000$ Н = 40 кН.

Для определения вертикального перемещения hцентра тяжести прямоугольного однородного массива (он находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника), используем теорему Пифагора, исходя из которой:

$$KO_1 = OD - KD = \sqrt{(OK^2 + KD^2)} - KD = \sqrt{(3^2+4^2)} - 4 = 1 \text{ м}.$$

На основании теоремы о работе силы тяжести определим искомую работу, необходимую для опрокидывания массива:

$$W = G \times KO_1 = 40\,000 \times 1 = 40\,000 \text{ Дж} = 40 \text{ кДж}.$$

Задача решена.

Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу

Представим себе диск, вращающийся вокруг неподвижной оси под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$ *(рис. 6)*, точка приложения которой перемещается вместе с диском. Разложим силу $\boldsymbol{F}$ на три взаимно-перпендикулярные составляющие: $\boldsymbol{F_1}$ – окружная сила, $\boldsymbol{F_2}$ – осевая сила, $\boldsymbol{F_3}$ – радиальная сила.

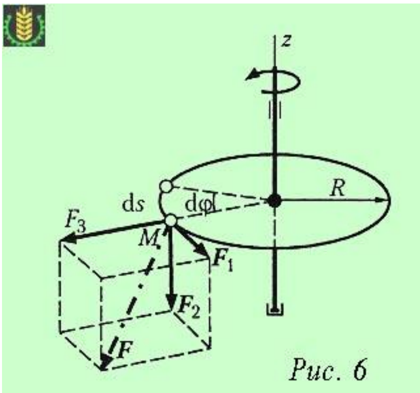


Рис. 6

При повороте диска на бесконечно малый угол $\boldsymbol{d\varphi}$ сила $\boldsymbol{F}$ совершит элементарную работу, которая на основании теоремы о работе равнодействующей будет равна сумме работ составляющих.

Очевидно, что работа составляющих $\boldsymbol{F_2}$ и $\boldsymbol{F_3}$ будет равна нулю, так как векторы этих сил перпендикулярны бесконечно малому перемещению $\boldsymbol{ds}$ точки приложения $\boldsymbol{M}$, поэтому элементарная работа силы $\boldsymbol{F}$ равна работе ее составляющей $\boldsymbol{F_1}$:

$$dW = F_1 ds = F_1 R d\varphi.$$

При повороте диска на конечный угол $\boldsymbol{\varphi}$ работа силы $\boldsymbol{F}$ равна

$$W = \int F_1 R d\varphi = F_1 R \int d\varphi = F_1 R \varphi,$$

где угол $\boldsymbol{\varphi}$ выражается в радианах.

Так как моменты составляющих $\boldsymbol{F_2}$ и $\boldsymbol{F_3}$ относительно оси $\boldsymbol{z}$ равны нулю, то на основании теоремы Вариньона момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси $\boldsymbol{z}$ равен:

$$M_z(F) = F_1 R.$$

Момент силы, приложенной к диску, относительно оси вращения называется вращающим моментом, и, согласно стандарту *ИСО*, обозначается буквой $\boldsymbol{T}$:

$$T = M_z(F), \text{ следовательно, } W = T\varphi.$$

Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угловое перемещение.

***

Пример решения задачи

Задача: рабочий вращает рукоятку лебедки силой F = *200 Н*, перпендикулярной радиусу вращения. Найти работу, затраченную в течение времени t = *25 секунд*, если длина рукоятки r = *0,4 м*, а ее угловая скорость ω = *π/3 рад/с*.

Решение. Прежде всего определим угловое перемещение φ рукоятки лебедки за *25 секунд*:

$$\varphi = \omega t = (\pi/3)\times 25 = 26{,}18 \text{ рад.}$$

Далее воспользуемся формулой для определения работы силы при вращательном движении:

$$W = T\varphi = Fr\varphi = 200\times 0{,}4\times 26{,}18 \approx 2100 \text{ Дж} \approx 2{,}1 \text{ кДж}.$$

***

Мощность

Работа, совершаемая какой-либо силой, может быть за различные промежутки времени, т. е. с разной скоростью. Чтобы охарактеризовать, насколько быстро совершается работа, в механике существует понятие ***мощности***, которую обычно обозначают буквой P.

Мощностью называется работа, совершаемая в единицу времени.

Если работа совершается равномерно, то мощность определяют по формуле

$$P = W/t.$$

Если направление силы и направление перемещения совпадают, что эту формулу можно записать в иной форме:

$$P = W/t = Fs/t \quad \text{или} \quad P = Fv.$$

Мощность силы равна произведению модуля силы на скорость точки ее приложения.

Если работа совершается силой, приложенной к равномерно вращающемуся телу, то мощность в этом случае может быть определена по формуле:

$$P = W/t = T\varphi/t \quad \text{или} \quad P = T\omega.$$

Мощность силы, приложенной к равномерно вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угловую скорость.

Единицей измерения мощности является ***ватт*** *(Вт):*

Ватт = работа/время = джоуль в секунду.

Понятие об энергии и КПД

Способность тела при переходе из одного состояния в другое совершать работу называется ***энергией***. Энергия есть общая мера различных форм движения материи.

В механике для передачи и преобразования энергии применяются различные механизмы и машины, назначение которых – выполнение заданных человеком полезных функций. При этом энергия, передаваемая механизмами, называется ***механической энергией***, которая принципиально отличается от тепловой, электрической, электромагнитной, ядерной и других известных видов энергии. Виды механической энергии тела мы рассмотрим на следующей странице, а здесь лишь определимся с основными понятиями и определениями.

При передаче или преобразовании энергии, а также при совершении работы, имеют место потери энергии, поскольку механизмы и машины, служащие для передачи или преобразования энергии преодолевают различные силы сопротивления (трения, сопротивления окружающей среды и т. п.). По этой причине часть энергии при передаче безвозвратно теряется и не может быть использована для выполнения полезной работы.

Коэффициент полезного действия

Часть энергии, потерянная при ее передаче на преодоление сил сопротивления, учитывается при помощи ***коэффициента полезного действия*** механизма (машины), передающего эту энергию. Коэффициент полезного действия *(КПД)* обозначается буквой η и определяется, как отношение полезной работы (или мощности) к затраченной:

$$\eta = W_2/W_1 = P_2/P_1.$$

Если коэффициент полезного действия учитывает только механические потери, то его называют механическим *КПД*.

Очевидно, что *КПД* – всегда правильная дробь (иногда его выражают в процентах) и его значение не может быть больше единицы. Чем ближе значение *КПД* к единице *(100 %)*, тем экономичнее работает машина.

Если энергия или мощность передаются рядом последовательных механизмов, то суммарный *КПД*может быть определен, как произведение *КПД* всех механизмов:

$$\eta = \eta_1\eta_2\eta_3 \ldots.\eta_n,$$

где: η_1, η_2, η_3, ... η_n – *КПД* каждого механизма в отдельности.

Теоремы и законы динамики материальной точки

Количество движения и импульс силы

Общие теоремы динамики материальной точки устанавливают зависимость между изменениями динамических мер движения материальной точки и мерами действия сил, приложенных к этой точке.

Количеством движения mv материальной точки называют вектор, равный произведению массы точки на ее скорость и имеющий направление скорости. Количество движения является динамической мерой движения материальной точки.

Единицей измерения количества движения, в соответствии с приведенным определением, является ***(кг×м)/с***.

Импульсом Ft постоянной силы F называется вектор, равный произведению силы на время ее действия. Импульс силы является мерой ее действия по времени. Единица импульса силы, согласно приведенному выше определению, является произведение ***Н×с***. Если силу заменить произведением массы на ускорение *(второй закон Ньютона)*, то получим:

$$[Ft] = [F][t] = [a][m][t] = (кг \times м/с^2) \times с = (кг \times м)/с.$$

Очевидно, что количество движения и импульс силы выражаются в одинаковых единицах, поэтому между этими динамическими мерами существует зависимость, устанавливаемая теоремой об изменении количества движения.

Теорема об изменении количества движения

Теорема: ***изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу приложенной к ней силы за тот же промежуток времени***.

Докажем эту теорему для случая прямолинейного движения материальной точки под действием постоянной силы F, в этом случае движение будет равнопеременным, и скорость в каждый момент времени может быть определена по формуле:

$$v = v_0 + at.$$

Преобразуем это выражение: перенесем v_0 в левую часть и умножим каждое из слагаемых уравнения на массу m материальной точки:

$$mv - mv_0 = mat.$$

Но произведение массы точки на ее ускорение есть сила, под действием которой точка движется, следовательно, уравнение будет справедливо в виде:

$$mv - mv_0 = Ft.$$

В левой части полученного равенства имеем изменение количества движения за время t, а в правой – импульс силы за это же время, что и требовалось доказать.

Если движение замедленное ($v < v_0$), то вектор силы направлен в сторону, противоположную вектору скорости, и, следовательно, в последую формулу силу следует подставлять с отрицательным знаком.

В случае криволинейного движения материальной точки под действием переменной по модулю и направлению силы весь промежуток времени t можно разбить на бесконечно малые промежутки, в пределах которых вектор силы можно считать постоянным, а путь – прямолинейным, тогда импульс силы за конечный промежуток времени t будет равен сумме элементарных импульсов. В этом случае математическое выражение теоремы об изменении количества движения приобретает следующий вид:

$$mv - mv_0 = \int F\, dt.$$

Если к материальной точке приложено несколько постоянных сил, то изменение количества движения будет равно сумме *(алгебраической, если силы действуют по одной прямой, и векторной, если силы действуют под углом друг к другу)* импульсов данных сил:

$$mv - mv_0 = \Sigma(F_i t).$$

Механическая энергия и ее виды

Слово *"энергия"* в переводе с греческого означает *"действие"*. В предыдущей статье было дано определение энергии, как способности материи совершать работу при переходе из одного состояния в другое. ***Механической энергией*** называют энергию перемещения и взаимодействия тел, при этом различают два вида механической энергии: ***кинетическую*** и ***потенциальную***.

Потенциальной энергией называют энергию взаимодействия между материальными телами(точками) какой-либо системы. Потенциальная энергия, как часть общей механической энергии системы материальных тел, зависит от взаимного расположения тел (частей) этой системы, и от их положений во внешнем силовом поле (например, гравитационном). Так, потенциальной энергией силы тяжести (энергией положения) обладают тела, находящиеся над поверхностью земли, а сжатая пружина или рессора – потенциальной энергией силы упругости. Мерой потенциальной энергии является работа, которую произведет материальное тело (точка) при освобождении от связей, не позволяющих выплеснуть эту энергию.

Кинетическая энергия – это энергия движения, т. е. ей обладает любая движущаяся материальная точка. Кинетическая энергия является динамической мерой движения материальной точки; это скалярная и всегда положительная величина. Поскольку кинетическая энергия является энергией движения, очевидно, что ее величина зависит от скорости, с которой движется материальная точка (тело). Величина кинетической энергии, которой обладает данная материальная точка, может быть определена по формуле:

$$K = mv^2/2.$$

Нетрудно заметить, что кинетическая и потенциальная энергия материальной точки являются величинами относительными, поскольку они имеют смысл лишь в пределах определенной системы материальных точек - либо относительным расположением, либо относительной скоростью по отношению к другим материальным точкам этой системы.

Единица измерения кинетической энергии – ***Джоуль*** *(Дж)*:

$$1\ Дж = кг\times(м/с)^2 = (кг\times м/с^2)м = Н\times м.$$

Из приведенных соотношений видно, что кинетическая энергия имеет размерность работы; связь между этими физическими величинами устанавливает теорема об изменении кинетической энергии.

Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема: ***изменение кинетической энергии материальной точки на некотором пути равно работе силы, приложенной к точке на том же пути.***

Докажем эту теорему для самого общего случая движения материальной точки, т. е. для случая криволинейного движения под действием переменной силы *(рис. 1)*.

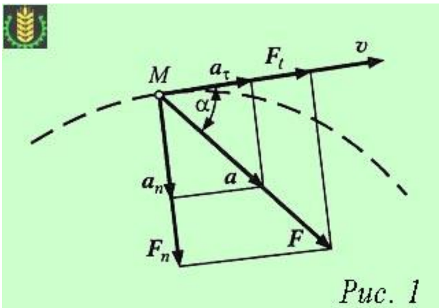


Рис. 1

Запишем для этой точки основное уравнение динамики *(второй закон Ньютона)*:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},$$

где m – масса точки; a – полное ускорение точки; F – сила, действующая на точку.

Спроецируем векторное равенство на направление скорости v точки:

$$ma \cos \alpha = F_\tau = F \cos \alpha.$$

Как известно из кинематики, $a \cos \alpha = a_\tau = dv/dt$, следовательно,

$$m\, dv/dt = F \cos \alpha.$$

Умножив обе части равенства на бесконечно малое перемещение ds, получим:

$$m\, dv\, ds/dt = F\, ds \cos \alpha.$$

Выражение, стоящее в левой части преобразуем следующим образом:

$$m\, dv\, ds/dt = m\, dv(ds/dt) = mv\, dv, \quad \text{следовательно} \quad mv\, dv = F ds \cos \alpha.$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах для скорости от v_0 до v и для пути от 0 до s, получим:

$$m \int v\, dv = \int F \cos \alpha\, ds \quad \text{или} \quad mv^2/2 - mv_0^2/2 = W,$$

где W – работа силы F на пути s.

Теорема доказана.

При замедленном движении ($v < v_0$) составляющая F_τ, вызывающая касательное ускорение a_τ, будет направлена в сторону, противоположную направлению вектора скорости v, и работа силы Fбудет отрицательной.

Составляющая F_n, вызывающая нормальное (центростремительное) ускорение a_n, работы не совершает, поскольку эта составляющая в каждый данный момент времени перпендикулярна элементарному перемещению точки приложения силы F.

Если к материальной точке приложено несколько сил, то изменение кинетической энергии равно алгебраической сумме работ этих сил:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = \Sigma W_i.$$

Закон сохранения механической энергии

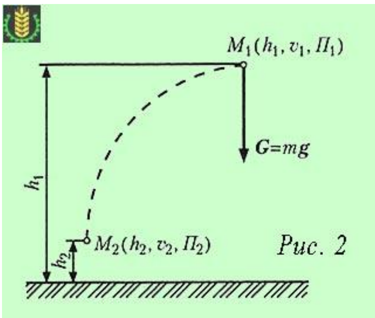
Закон сохранения механической энергии материальной точки можно сформулировать так: ***сумма потенциальной и кинетической энергии материальной точки есть величина постоянная, при этом один вид энергии может переходить в другой при изменении механического состояния точки***.

Этот закон наглядно проявляется при рассмотрении механической энергии тел, поднятых над поверхностью Земли и изменении их механического состояния при свободном падении.

Так, потенциальная энергия положения тела, обусловленная силой тяжести, может быть определена, как произведение силы тяжести тела G на высоту его подъема h над поверхностью Земли:

$$\boldsymbol{\Pi = Gh}.$$

Пусть материальная точка массой $\boldsymbol{m}$, падая под действием одной лишь силы тяжести $\boldsymbol{G}$ в положении $\boldsymbol{M_1}$ находилась на высоте $\boldsymbol{h_1}$, имела начальную скорость $\boldsymbol{v_1}$ и обладала потенциальной энергией $\boldsymbol{\Pi_1}$ *(рис. 2)*.



В положении $\boldsymbol{M_2}$ точка оказалась на высоте $\boldsymbol{h_2}$, ее скорость стала $\boldsymbol{v_2}$, а потенциальная энергия $\boldsymbol{\Pi_2}$.

При падении точки под действием одной лишь силы тяжести совершается работа

$$\boldsymbol{W = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2 = \Pi_1 - \Pi_2}.$$

Согласно теореме, доказанной выше, эта работа равна изменению кинетической энергии:

$$\boldsymbol{W = mv^2/2 - mv_0^2/2 = K_2 - K_1},$$

или

$$\boldsymbol{\Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1}, \text{ или } \boldsymbol{\Pi_1 + K_1 = \Pi_2 + K_2} \text{ следовательно, } \boldsymbol{\Pi + K = const}.$$

Это равенство и является математическим выражением закона сохранения механической энергии, сформулированного выше.

На основании закона сохранения механической энергии нетрудно доказать, что если тело бросить с поверхности Земли вертикально вверх, то его кинетическая энергия в нижнем положении будет равна потенциальной энергии в верхнем положении.

Закон сохранения механической энергии справедлив при движении под действием любой потенциальной силы; при движении под действием не потенциальных сил *(например, силы трения)*, механическая энергия переходит в другие виды энергии.

В заключение следует отметить, что закон сохранения механической энергии является частным случаем общего закона сохранения материи и энергии, сформулированного М. В. Ломоносовым*(1711-1765)*. Установление этого закона является одним из величайших открытий своего времени.

В прошлом столетии еще один величайший физик – А. Эйнштейн создал теорию относительности, одним из выводов которой является закон пропорциональности массы и энергии, математическая суть которого выражается формулой: $\boldsymbol{E = mc^2}$, где $\boldsymbol{E}$ – полная энергия *(включающая все виды энергии – механическую, тепловую, химическую, ядерную, электромагнитную и т. п.)*, которой обладает любая материальная точка; $\boldsymbol{m}$ – масса материальной точки, $\boldsymbol{c}$ – скорость света.

На основании формулы, предложенной Эйнштейном, можно подсчитать, что *1 грамм* материи обладает полной энергией, эквивалентной *25 млн кВтч* электроэнергии – величина колоссальная, над безопасным и дешевым высвобождением которой для нужд человечества работают лучшие научные умы.

Пример решения задачи

Задача: материальная точка брошена с Земли вертикально вверх с начальной скоростью $\boldsymbol{v_0}$ *= 20* *м/с*. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить максимальную высоту подъема h, на которую поднимется точка.

Решение. Для решения задачи запишем выражение для кинетической и потенциальной точки энергии в момент начала движения:

$$K_1 = mv^2/2; \quad П_1 = 0$$

и в момент максимального подъема:

$K_2 = 0$; $П_2 = mgh$, где m – масса материальной точки.

Согласно закону сохранения механической энергии можно записать:

$$K_1 + П_1 = K_2 + П_2 \quad \text{или} \quad mv^2/2 = mgh.$$

Сократив обе части равенства на m, определим высоту h максимального подъема материальной точки:

$$h = v_0^2/2g = 20^2/(2\times 9{,}81) \approx 20{,}4 \text{ м}.$$

Задача решена.

Кинетическая энергия твердого тела

Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий материальных точек, составляющих данное тело:

$$K = \Sigma(m_i v_i^2)/2.$$

Определим выражения для кинетической энергии твердого тела для трех случаев движения.

Тело движется поступательно

Учитывая, что при поступательном движении тела все его точки имеют одинаковую траекторию и одинаковые скорости, можно записать:

$$K_{пост} = \Sigma(m_i v_i^2)/2 = v_i^2/2\, \Sigma\, m_i, \quad \text{или} \quad K_{пост} = mv^2/2.$$

Следовательно, при поступательном движении твердого тела его кинетическая энергия вычисляется по той же формуле, что и кинетическая энергия материальной точки.

Тело вращается вокруг неподвижной оси

Запишем:

$$K_{вр} = \Sigma(m_i v_i^2)/2 = \Sigma[m_i(\omega r_i)^2]/2 = (\omega^2)/2\, \Sigma\, (m_i r_i)^2 \quad \text{или} \quad K_{вр} = J\omega^2/2.$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

Тело движется плоскопараллельно

Как известно из кинематики, сложное плоскопараллельное движение твердого тела в каждый данный момент времени можно считать простейшим вращательным движением вокруг мгновенной оси *(метод мгновенных центров скоростей)*.

Допустим, что известна скорость v_c центра тяжести тела, тогда мгновенная угловая скорость

$$\omega = v_c/OC,$$

где OC – расстояние центра тяжести C тела от мгновенной оси вращения O.

Момент инерции J_o относительно мгновенной оси вращения определяют по формуле:

$$J_o = J_c + mOC^2,$$

где J_c - момент инерции относительно центральной оси или центральный момент инерции.

Кинетическую энергию тела, движущегося плоскопараллельно, определяют следующим образом:

$$K_{nn} = J_o\omega^2/2 = (J_c + mOC^2)\ \omega^2/2 = (J_c\omega^2)/2 + mOC^2/2 \times v_c^2/OC^2,$$

или

$$K_{nn} = mv_c^2/2 + J_c\omega^2/2.$$

Кинетическая энергия твердого тела, движущегося плоскопараллельно, равна сумме кинетических энергий в поступательном движении вместе с центром тяжести и вращательном движении вокруг центральной оси, перпендикулярной основной плоскости.

В заключение сформулируем теорему об изменении кинетической энергии системы тел:

Изменение кинетической энергии системы тел при некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех внешних (активных и реактивных) и внутренних сил, действовавших на систему при указанном перемещении:

$$\Sigma K - \Sigma K_0 = \Sigma W.$$

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий каждого тела в отдельности.

Если тело твердое, то сумма работ его внутренних сил равна нулю. При некоторых связях, называемых идеальными, работа реактивных сил тоже будет равна нулю.

Балансировка вращающихся тел

Понятие о балансировке вращающихся тел

Балансировкой называется уравновешивание вращающихся или поступательно движущихся масс механизмов, с тем, чтобы устранить влияние сил инерции. В этой статье рассматривается только балансировка вращающихся деталей машин.

Термины, применяемые в данной статье, соответствуют *ГОСТ 19534-74 «Балансировка вращающихся тел. Термины»*. Этот стандарт устанавливает применяемые в науке, технике и производстве термины в области балансировки вращающихся тел, которые являются обязательными для применения в документации всех видов, учебниках, учебных пособиях, технической и справочной литературе. В остальных случаях применение этих терминов рекомендуется.

Вращающееся в опорах тело называют ***ротором***, а неуравновешенностью ротора – его состояние, характеризующееся таким распределением масс, которое за время вращения вызывает переменные нагрузки на опорах. Эти нагрузки являются причиной сотрясений и вибраций, преждевременного износа, снижают КПД и экономичность машины. Особо нежелательна неуравновешенность в быстроходных машинах и механизмах.

Рассмотрим случай статической неуравновешенности, когда центр тяжести тела не лежит на оси вращения.

Представим себе маховик массой m, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω. Допустим, что центр тяжести C маховика не лежит на оси вращения, а смещен на величину $e_{ст}$, называемую ***эксцентриситетом массы*** *(рис. 1а)*.

Силу тяжести маховика обозначим G, массу оси не учитываем. Разобьем маховик на ряд материальных точек с массами m_i и определим равнодействующую центробежных сил инерции $F_{ni}^{ин}$. Проекция этой равнодействующей на ось x вследствие симметрии маховика относительно оси y равна нулю, т. е.

$$F_{nx}^{ин} = \Sigma\,(F_{ni}^{ин} \sin \alpha_i) = 0$$

Следовательно, равнодействующая $F_n^{ин}$ сил $F_{ni}^{ин}$ проецируется на ось y в натуральную величину. Тогда

$$F_n^{ин} = F_{ny}^{ин}\ \Sigma\,(F_{ni}^{ин} \cos \alpha_i) = \Sigma(m_i\omega^2 r_i \cos \alpha_i) = \omega^2\Sigma(m_i y_i) = \omega^2 m\, e_{ст},$$

так как из статики известно, что $\Sigma(m_i y_i) = m y_C = m\, e_{ст}$.

Таким образом, равнодействующая сил инерции всего маховика направлена по линии OC и равна

$$F_n^{ин} = \omega^2 m\, e_{ст},\ (F_\tau^{ин} = 0,\ так\ как\ \omega = const) \qquad (1)$$

Применим принцип Даламбера и составим уравнение равновесия *(рис. 1б)*:

$$\Sigma Y = 0; \quad R_1 + R_2 - G - F_n^{ин} = 0.$$

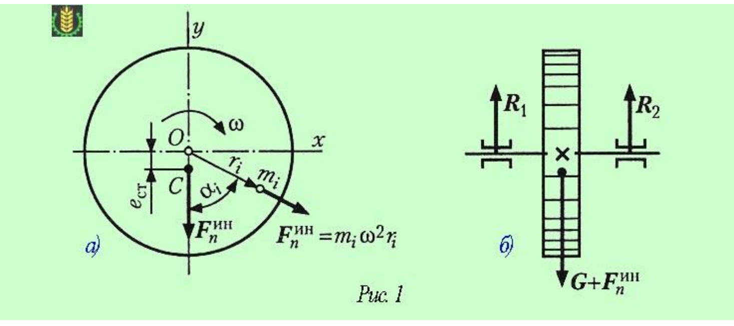


Рис. 1

Так как сила инерции $F_n^{ин}$ во время вращения меняет свое положение, то максимальная сила давления на подшипники будет при нижнем положении центра тяжести:

$$F_{max} - R_1 + R_2 = G + F_n^{ин}.$$

Пример решения задачи

В качестве примера определим силу давления F_{max} на подшипники, если масса маховика m = 102 кг, его частота вращения n = 3000 об/мин, а эксцентриситет массы e_{cm} = 1 мм.

Определим угловую скорость маховика:

$$\omega = \pi n/30 = \pi \times 3000/30 = 100\pi \text{ рад/с}.$$

Подставив значение угловой скорости ω в формулу (1), определим центробежную силу инерции:

$$F_n^{ин} = \omega^2 m\, e_{cm} = 102(100\pi)^2\, 0{,}001 \approx 10\,000 \text{ Н} \approx 10 \text{ кН}.$$

Максимальная сила давления на подшипники определится по формуле:

$$F_{max} = mg + F_n^{ин} = 102 \times 9{,}81 + 10000 \approx 11\,000 \text{ Н} \approx 11 \text{ кН}.$$

Как видно из примера, динамические нагрузки, обусловленные дисбалансом вращающегося тела (ротора) могут многократно превосходить силу тяжести самого тела.

2. Сопротивление материалов

Наука о сопротивлении материалов

Наука о сопротивлении материалов возникла в эпоху Возрождения, когда развитие техники, строительства, торговли, мореплавания и военного дела потребовало научных обоснований, необходимых для постройки крупных объектов и сооружений, морских судов и других сложных конструкций. Основоположником этой науки считают итальянского ученого Г. Галилея (1564-1642 гг.)

Как показывает практика, все части конструкций под действием нагрузок деформируются, т. е. изменяют свою форму и размеры, а в некоторых случаях происходит разрушение конструкций.

В этом плане показательна древняя китайская мудрость о вечности. Согласно легенде, китайские мудрецы так описывали понятие вечности своим ученикам: "Если положить на берега Ганга огромную алмазную глыбу и раз в тысячелетие к этой глыбе будет прилетать ворон, чтобы почистить клюв, то время, через которое алмазная глыба сотрется о клюв ворона и превратится в песчинку, - всего лишь краткий миг, по сравнению с вечностью". Тоже самое можно сказать и о деформируемости элементов конструкций. Какая бы прочная ни была конструкция, из каких бы прочнейших материалов она была бы создана, но даже крохотный комар, севший на массивную деталь, вызовет деформацию этой детали. Понятно, что эта деформация будет крайне ничтожной, но, тем не менее, она имеет место.

<u>Сопротивление материалов есть наука о прочности и деформируемости материалов и элементов машин и сооружений.</u>

Применяя способы и методы этой науки можно производить с достаточной степенью погрешности расчеты конструкций машин и объектов на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочностью называется способность материала конструкций и их элементов сопротивляться действию внешних сил, не разрушаясь. Расчеты на прочность дают возможность определить размеры и форму деталей конструкций, способные выдержать заданную нагрузку при наименьших затратах материалов.

Жесткость – способность тел или конструкций противостоять образованию деформаций. Расчеты на жесткость позволяют определить размеры, материал и форму конструкций, при которых возникающие в результате нагрузок деформации не превысят допустимых величин и норм.

Под *устойчивостью* понимают способность конструкции сопротивляться усилиям, стремящимся вывести ее из исходного состояния равновесия. Расчеты на устойчивость позволяют предотвратить внезапную потерю устойчивости конструкции и искривления ее элементов в результате приложения внешней нагрузки. Примером потери устойчивости может служить внезапное искривление длинного прямолинейного стержня при сильном сжатии его вдоль оси.

На практике в большинстве случаев приходится иметь дело с конструкциями сложной формы, но их можно представить состоящими из отдельных элементов, например, брусьев, пластин, оболочек или массивов. Основным расчетным элементом в сопротивлении материалов является ***<u>брус</u>***, т. е. тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Брусья бывают прямолинейными, криволинейными, постоянного и переменного сечения. В зависимости от их назначения в конструкции брусья называют *колоннами, балками, стержнями*.

Плоское сечение, перпендикулярное оси прямолинейного бруса называют поперечным, сечение, параллельное оси прямолинейного бруса – продольным, остальные виды плоских сечений называют наклонными.

Кроме расчёта брусьев сопротивление материалов занимается расчетом *пластин* и *оболочек*, т. е. тел, имеющих малую толщину по сравнению с другими размерами (резервуары, трубы, обшивка судов и самолетов и т. п.). Тела, у которых все три измерения одинакового порядка называются *массивами*(фундаменты, станины станков и т. п.).

При деформации тела под действием внешних силовых факторов внутри него возникают силы упругости, которые препятствуют деформации и стремятся вернуть частицы тела в исходное положение. Появление сил упругости обусловлено существованием в теле внутренних сил молекулярного взаимодействия. В сопротивлении материалов изучают деформации тел и возникающие при этих деформациях внутренние силовые факторы.

В зависимости от способности сохранять исходную форму под действием деформирующих сил различают *пластичные и хрупкие тела*. Пластичные могут изменять в той или иной степени форму даже после снятия внешних нагрузок (остаточная деформация), хрупкие обладают малой пластичностью и способны сохранять исходную форму вплоть до разрушения из-за внешних нагрузок.

На практике в большинстве случаев приходится иметь дело с конструкциями сложной формы, но их можно представить состоящими из отдельных элементов, например, брусьев, пластин, оболочек или

массивов. Основным расчетным элементом в сопротивлении материалов является ***брус***, т. е. тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Брусья бывают прямолинейными, криволинейными, постоянного и переменного сечения. В зависимости от их назначения в конструкции брусья называют *колоннами, балками, стержнями*.

Плоское сечение, перпендикулярное оси прямолинейного бруса называют поперечным, сечение, параллельное оси прямолинейного бруса – продольным, остальные виды плоских сечений называют наклонными.

Кроме расчёта брусьев сопротивление материалов занимается расчетом *пластин* и *оболочек*, т. е. тел, имеющих малую толщину по сравнению с другими размерами (резервуары, трубы, обшивка судов и самолетов и т. п.). Тела, у которых все три измерения одинакового порядка называются *массивами*(фундаменты, станины станков и т. п.).

При деформации тела под действием внешних силовых факторов внутри него возникают силы упругости, которые препятствуют деформации и стремятся вернуть частицы тела в исходное положение. Появление сил упругости обусловлено существованием в теле внутренних сил молекулярного взаимодействия. В сопротивлении материалов изучают деформации тел и возникающие при этих деформациях внутренние силовые факторы.

В зависимости от способности сохранять исходную форму под действием деформирующих сил различают *пластичные и хрупкие тела*.

Пластичные могут изменять в той или иной степени форму даже после снятия внешних нагрузок (остаточная деформация), хрупкие обладают малой пластичностью и способны сохранять исходную форму вплоть до разрушения из-за внешних нагрузок.

На практике в большинстве случаев приходится иметь дело с конструкциями сложной формы, но их можно представить состоящими из отдельных элементов, например, брусьев, пластин, оболочек или массивов. Основным расчетным элементом в сопротивлении материалов является ***брус***, т. е. тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Брусья бывают прямолинейными, криволинейными, постоянного и переменного сечения.

В зависимости от их назначения в конструкции брусья называют *колоннами, балками, стержнями*.

Плоское сечение, перпендикулярное оси прямолинейного бруса называют поперечным, сечение, параллельное оси прямолинейного бруса – продольным, остальные виды плоских сечений называют наклонными.

Кроме расчёта брусьев сопротивление материалов занимается расчетом *пластин* и *оболочек*, т. е. тел, имеющих малую толщину по сравнению с другими размерами (резервуары, трубы, обшивка судов и самолетов и т. п.). Тела, у которых все три измерения одинакового порядка называются *массивами* (фундаменты, станины станков и т. п.).

При деформации тела под действием внешних силовых факторов внутри него возникают силы упругости, которые препятствуют деформации и стремятся вернуть частицы тела в исходное положение. Появление сил упругости обусловлено существованием в теле внутренних сил молекулярного взаимодействия. В сопротивлении материалов изучают деформации тел и возникающие при этих деформациях внутренние силовые факторы.

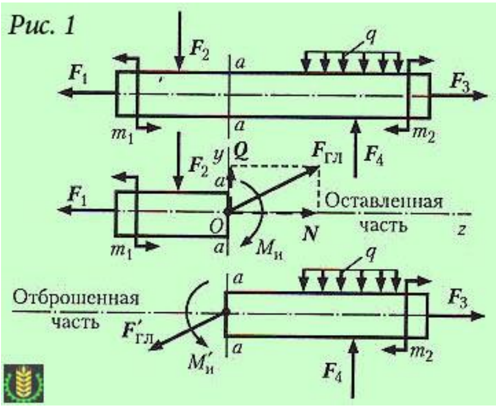
В зависимости от способности сохранять исходную форму под действием деформирующих сил различают *пластичные и хрупкие тела*. Пластичные могут изменять в той или иной степени форму даже после снятия внешних нагрузок (остаточная деформация), хрупкие обладают малой пластичностью и способны сохранять исходную форму вплоть до разрушения из-за внешних нагрузок.

Метод сечений. Напряжения

Сущность метода сечений

Для расчетов элементов конструкции на прочность необходимо знать внутренние силы упругости, возникающие в результате приложения внешних сил в разных точках и частях конструкции. Способы определения этих внутренних сил с помощью науки сопротивление материалов включают такой прием, как ***метод сечений***.

Метод сечений заключается в том, что тело мысленно рассекается плоскостью на две части, любая из которых отбрасывается и взамен ее к сечению оставшейся части прикладываются внутренние силы, действовавшие на нее до разреза со стороны отброшенной части. Оставленная часть рассматривается как самостоятельное тело, находящееся в равновесии под действием приложенных к сечению внешних и внутренних сил (третий закон Ньютона – действие равно противодействию). При применении этого метода выгоднее отбрасывать ту часть элемента конструкции (тела), для которой проще составить уравнение равновесия. Таким образом, появляется возможность определить внутренние силовые факторы в сечении, благодаря которым оставшаяся часть тела находится в равновесии (прием, часто применяемый в Статике).



Применяя к оставленной части тела условия равновесия, невозможно найти закон распределения внутренних сил по сечению, но можно определить статические эквиваленты этих сил (равнодействующие силовые факторы).

Так как основным расчетным объектом в сопротивлении материалов является брус, рассмотрим, какие статические эквиваленты внутренних сил проявляются в поперечном сечении бруса.

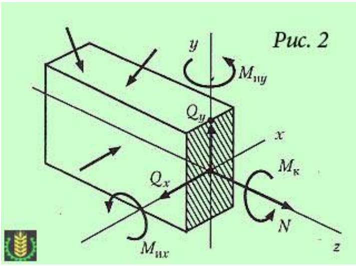
Рассечем брус *(рис. 1)* поперечным сечением ***a-a*** и рассмотрим равновесие его левой части. Если внешние силы, действующие на брус, лежат в одной плоскости, то в общем случае статическим эквивалентом внутренних сил, действующих в сечении ***a-a***, будут главный вектор $\boldsymbol{F_{гл}}$, приложенный в центре тяжести сечения, и главный момент $\boldsymbol{M_{гл} = M_и}$, уравновешивающие плоскую систему внешних сил, приложенных к оставленной части бруса.

Разложим главный вектор на составляющую $\boldsymbol{N}$, направленную вдоль оси бруса, и составляющую $\boldsymbol{Q}$, перпендикулярную этой оси и лежащую в плоскости сечения. Эти составляющие главного вектора и главный момент называют *внутренними силовыми факторами*, действующими в сечении бруса. Составляющую $\boldsymbol{N}$ называют *продольной силой*, составляющую $\boldsymbol{Q}$ – *поперечной силой*, пару сил с моментом $\boldsymbol{M_и}$ – *изгибающим моментом*.

Для определения указанных трех внутренних силовых факторов применим известные из Статики уравнения равновесия оставленной части бруса:

$\Sigma Z = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0;$ (ось z всегда направляем по оси бруса).

Если внешние силы, действующие на брус, не лежат в одной плоскости, т. е. представляют собой пространственную систему сил, то в общем случае в поперечном сечении бруса возникают шесть внутренних силовых факторов *(рис. 2)*, для определения которых применяют известные из Статики шесть уравнений равновесия оставленной части бруса:



$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0; \Sigma M_x = 0; \quad \Sigma M_y = 0; \quad \Sigma M_z = 0.$

Эти силовые факторы в общем случае носят следующие названия: N – продольная сила, Q_x,Q_y – поперечные силы, $M_{кр}$ – крутящий момент, $M_{иx}$ и $M_{иy}$ – изгибающие моменты.

При разных деформациях в поперечном сечении бруса возникают различные силовые факторы. Рассмотрим частные случаи:

1. В сечении возникает только продольная сила N. Это *деформация растяжения* (если Nнаправлена от сечения) или *сжатия* (если N направлена к сечению).

2. В сечении возникает только поперечная сила Q. Это *деформация сдвига*.

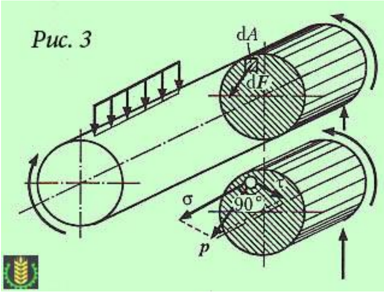
3. В сечении возникает только крутящий момент $M_{кр}$. Это *деформация кручения*.

4. В сечении возникает только изгибающий момент $M_и$. Это *деформация чистого изгиба*. Если в сечении одновременно возникает изгибающий момент $M_и$ и поперечная сила Q, то изгиб называют *поперечным*.

5. Если в сечении одновременно возникает несколько внутренних силовых факторов (например, изгибающий момент и продольная сила), то имеет место сочетание основных деформаций (сложное сопротивление).

Напряжение

Наряду с понятием деформации одним из основных понятий сопротивления материалов является



напряжение (обозначается $\boldsymbol{p}$). Напряжение характеризует интенсивность внутренних сил, действующих в сечении, и определяется, как отношение величины внутренней силы к площади сечения. Напряжение является величиной векторной.

Вектор напряжения можно разложить на две составляющие *(рис. 3)* – одну вдоль оси сечения, вторую – в плоскости сечения (перпендикулярно оси). Эти составляющие носят название *нормальное напряжение*(обозначается $\boldsymbol{\sigma}$) и *касательное напряжение*(обозначается $\boldsymbol{\tau}$). Поскольку нормальные и касательные напряжения расположены под прямым углом друг к другу, модуль полного напряжения $\boldsymbol{p}$ можно определить по теореме Пифагора:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

Единица измерения напряжения – паскаль (Па). 1 Па = Н / м^2. Поскольку эта единица очень мала, в расчетах часто применяют более крупную кратную единицу – мегапаскаль (МПа), который равен миллиону паскалей (10^6 Па).

Объяснить сущность напряжения можно на таком простом примере. В соответствии с гипотезой об отсутствии первоначальных внутренних усилий, считается, что когда к телу не приложены внешние нагрузки его частицы не взаимодействуют друг с другом, т. е. абсолютно равнодушны к "соседкам" справа, слева и т. п. Но стоит приложить к телу внешнюю нагрузку, его частицы начинают лихорадочно цепляться друг за друга, пытаясь удержаться в "кучке". Если нагрузка растягивает тело, его частицы держатся друг за дружку, не давая разорвать тело, если нагрузка сжимающая - частицы тела стараются удержать "соседок" на прежнем расстоянии. Совокупность всех этих усилий внутренних частиц, противостоящих внешним раздражителям-нагрузкам, и является напряжением. Задачи сопромата чаще всего сводятся к тому, чтобы определить предельные величины нагрузок, способных разорвать связи между частицами, из которых состоит тело или, по известным предельным напряжениям определить, какие нагрузки способно выдержать тело не разрушаясь, не деформируясь и т. д.

Нетрудно заметить, что напряжение измеряется в тех же единицах, что и давление, поэтому можно провести некоторую аналогию между этими физическими понятиями. Принципиальная разница заключается в том, что давление - внешний силовой фактор (т. е. воздействующий на тело или его части извне), а напряжение - внутренний силовой фактор, характеризующий степень взаимодействия (взаимосвязи) частиц тела между собой.

Растяжение и сжатие

Напряжения и характер деформаций при растяжении и сжатии

Растяжением или сжатием называется такой вид деформации, при котором в любом по-

перечном сечении бруса возникает только продольная сила. Брусья с прямолинейной осью, работающие на растяжение или сжатие, часто называются *стержнями*.

Рассмотрим невесомый, защемленный левым концом прямой брус, вдоль оси которого действуют активные силы F и $2F$ *(рис. 1)*. Части бруса постоянного сечения, заключенные между поперечными плоскостями (сечениями), в которых приложены одинаковые внешние силы (нагрузки или реакции связей) будем называть участками. Т. е. участок - это однородный кусок бруса и по форме, и по нагрузкам, и по площади сечения.

Рис. 1

Изображенный на *рис. 1* брус состоит из двух участков – от защемленного конца до места приложения силы F, и от силы F до свободного конца, к которому приложена сила $2F$. Применим метод сечений и определим продольные внутренние силы N_1 и N_2 на этих участках. Сначала рассечем брус плоскостью $1\text{-}1$ и мысленно отбросим правую часть бруса, заменив ее эквивалентными внутренними и внешними силами. Применим уравнения равновесия для этой части бруса:

$$\sum Z = 0, \text{ следовательно: } 2F - F - N_1 = 0, \text{ откуда } N_1 = 2F - F = F.$$

Очевидно, что для сохранения равновесия части бруса достаточно приложить продольную силу. Нетрудно понять, что на втором участке бруса продольная сила в сечении $2\text{-}2$ будет иметь другое значение: $N_2 = 2F$. Таким образом, продольная сила в поперечном сечении бруса равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения и в пределах каждого участка имеет одинаковое значение. Последнее утверждение не совсем справедливо, поскольку в местах приложения внешних сил внутренние силы распределяются по сложным закономерностям, но с учетом рассмотренного ранее принципа смягчения граничных условий (принципа Сен-Венана), мы допускаем некоторую условную погрешность, незначительно влияющую на итоговый результат расчета.

При определении величины продольной силы алгебраическим сложением внешних сил следует обращать внимание на знаки (векторные значения) этих сил. При расчетах в сопромате обычно принимают растягивающие нагрузки (направленные от сечения) положительными, а сжимающие – отрицательными.

При изучении ряда деформаций мы будем мысленно представлять брусья состоящими из бесконечного количества волокон, расположенных параллельно оси бруса, и предполагать, что при деформации растяжения и сжатия эти волокна не надавливают друг на друга *(гипотеза о не надавливании волокон)*.

Чтобы понять характер напряжений и деформаций, возникающих в сжимаемом или растягиваемом брусе, представим себе прямой брус из резины, на котором нанесена сетка из продольных и поперечных линий. Если такой брус подвергнуть деформации растяжения, можно заметить, что:

- поперечные линии на брусе остаются ровными и перпендикулярными оси бруса, а расстояния между ними увеличатся;

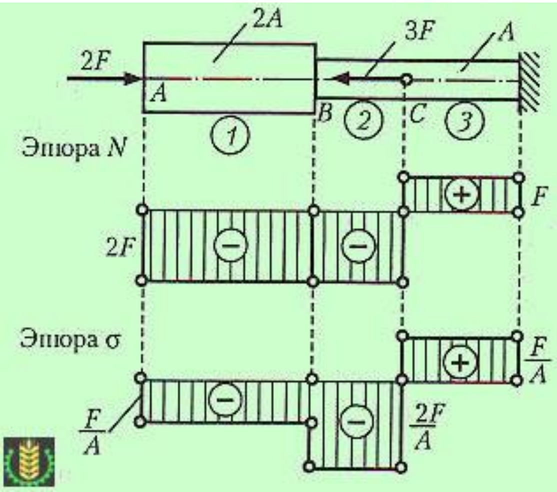
- продольные линии останутся прямыми, а расстояния между ними уменьшатся.

Из этого эксперимента следует, что при растяжении справедлива гипотеза плоских сечений *(гипотеза Бернулли)*, и, следовательно, все волокна бруса удлинятся на одну и ту же величину. Все это позволяет сделать вывод, что при растяжении и сжатии в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению. Эти напряжения можно определить по формуле:

$$\sigma = N / A,$$

где N – продольная сила, A – площадь поперечного сечения бруса.

Очевидно, что при растяжении и сжатии форма сечения бруса на величину напряжений не влияет. Для наглядного изображения распределения продольных сил и нормальных напряжений вдоль оси бруса строят графики, называемые ***эпюрами*** *(от французского "epure" - чертеж, график)* , при этом на эпюрах при построении учитывают знаки (векторные значения) продольных сил и напряжений.



Для ступенчатого бруса, к которому приложены сжимающая $2F$ и растягивающая $3F$ силы на *рис. 2* показаны соответствующие эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ.

Порядок построения эпюр таков: сначала под чертежом бруса проводят прямую линию, параллельную оси бруса (эта линия условно представляет брус), затем напротив каждого сечения бруса откладывают по этой линии величину силовых факторов: для положительных – вверх, для отрицательных - вниз. Масштаб при этом выбирается произвольный. Разумеется, перед построением эпюры необходимо подсчитать величину силовых факторов (сил, моментов сил или напряжений) в каждом участке бруса. На полученном графике в кружках указываются знаки силовых факторов по участкам, на наружных углах ступенчатых переходов ставятся числовые значения этих силовых факторов, а вся площадь графика заштриховывается тонкими линиями, перпендикулярными оси. Слева от оси эпюры указывается, какой силовой фактор на ней представлен.

По эпюрам, представленным на *рис. 2* можно заметить, что в местах приложения внешних нагрузок и реакций внутренние силовые факторы изменяются скачкообразно *(принцип Сен-Венана)*. Визуальное исследование эпюры позволяет определить критические участки бруса, находящиеся в наиболее напряженном состоянии. Так, по представленным на *рис. 2* эпюрам напряжений, возникающих в брусе, можно определить, что критическим является 2-й участок, поскольку здесь возникает наибольшее напряжение (по эпюре видно, что это напряжение сжатия, т. к. оно имеет отрицательное значение).

Кроме того, эпюра любого силового фактора позволяет (без применения лишних расчетов) определить силу или момент, действующие на брус со стороны, например, заделки, поскольку после построения эпюры со стороны свободного конца бруса эти силовые факторы отобразятся графически, без вычислений.

Ниже размещен видеоролик, в котором подробно объясняется порядок построения эпюр продольных сил и напряжений, возникающих в брусе при растяжении и сжатии, а также выводы, которые можно сделать на основе визуального анализа графиков. Видеоурок ведет преподаватель ГОУ СПО "Нижнетагильский горно-металлургический колледж" Чирков А. С.

Смятие. Контактные напряжения

Расчеты на прочность при смятии

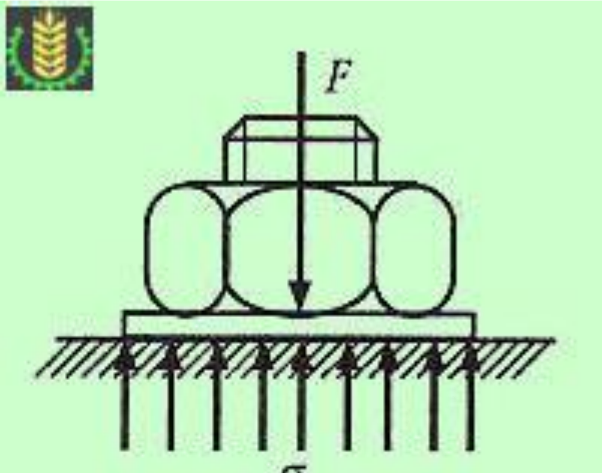


Рис. 1

Если детали конструкции, передающие значительную сжимающую нагрузку, имеют небольшую площадь контакта, то может произойти смятие поверхностей деталей. Смятие стараются предотвратить различными способами, например, подкладывая различные шайбы и подкладки под контактирующие детали.

Для простоты расчетов напряжений, возникающих при смятии, полагают, что по плоскости контакта возникают только нормальные напряжения, равномерно распределенные по площади контакта. Расчетное уравнение на смятие имеет вид:

$$\sigma_{см} = F / A_{см} \leq [\sigma_{см}],$$

где: F – сжимающая сила, $A_{см}$ – площадь контакта, $[\sigma_{см}]$ – допускаемое напряжение на смятие.

Если соприкасающиеся детали сделаны из разных материалов, то на смятие проверяют деталь из более мягкого материала.

При контакте двух деталей цилиндрической поверхности (например, заклепочное соединение) закон распределения напряжений смятия по поверхности контакта сложнее, чем по плоскости, поэтому при расчете на смятие цилиндрических отверстий в расчетную формулу подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а значительно меньшую площадь диаметрального сечения отверстия (условная площадь смятия, *(см. рис. 2)*, тогда:

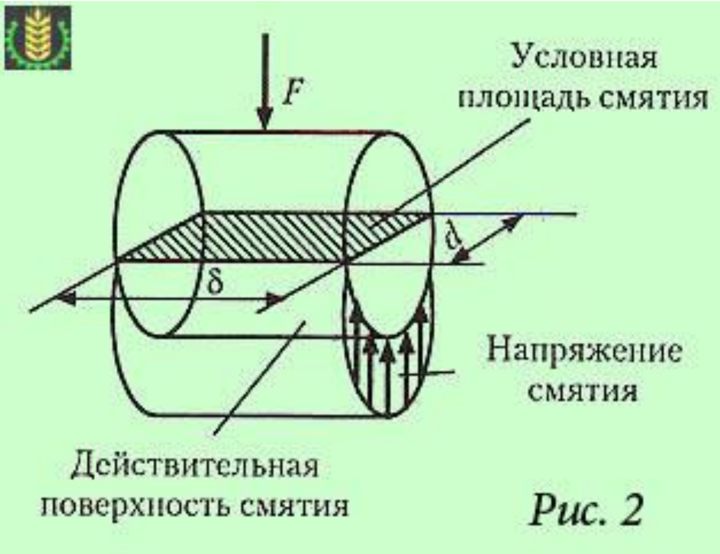


Рис. 2

$$A_{см} = d\ \delta,$$

где d - диаметр цилиндра, δ - толщина соединяемой детали (высота цилиндра).

При различной толщине соединяемых деталей, в расчетную формулу подставляют меньшую толщину.

Допустимые напряжения на смятие для разных материалов определяются опытным путем, их значение можно найти в справочниках. Так, для низкоуглеродистой стали допускаемое напряжение смятия принимается в пределах 100….120 МПа, для клепаных соединений: 240….320 МПа, для древесины: 2,4….11 МПа и т. д.

Контактные напряжения

Контактными называют напряжения и деформации, возникающие при сжатии тел криволинейной формы, причем первоначальный контакт может быть *линейным* (например, сжатие двух цилиндров с параллельными образующими), или *точечным* (например, сжатие двух шаров).

В результате деформации контактирующих тел начальный точечный или линейный контакт переходит в контакт по некоторой малой площадке. Решение вопросов о контактных напряжениях и деформациях впервые дано в работах немецкого физика ***Г. Герца*** *(1857-1894 г. г.)*.

Для деталей, в поверхностных слоях которых возникают контактные напряжения (например, подшипники качения, фрикционные катки, зубчатые колеса и т. п.), решающую роль играет прочность рабочих поверхностей – *контактная прочность*.

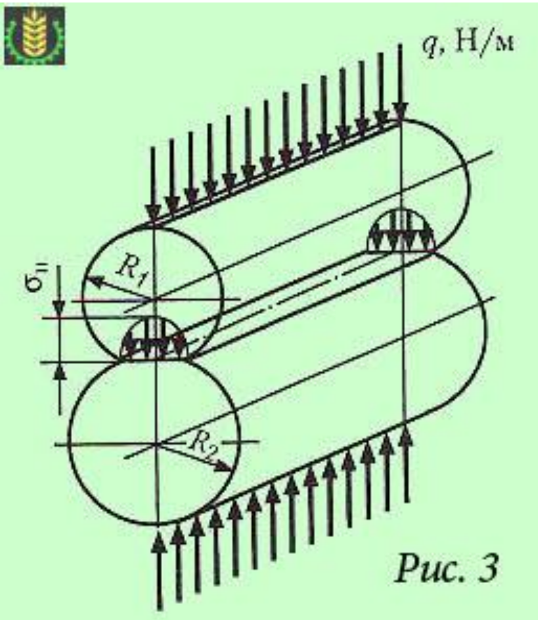


Рис. 3

Рассмотрим случай контакта двух цилиндров с параллельными образующими *(рис 3)*. Определение контактных напряжений в этом случае производится по ***формуле Герца***, выведенной в предположении, что материалы цилиндров подчиняются закону Гука. Очевидно, что контактные напряжения по ширине площадки контакта неравномерны.

Максимальные напряжения $\sigma_н$ определяются по формуле:

$$\sigma_н = \sqrt{\{qE_{пр} / [2\pi(1 - \nu^2)\rho_{пр}]\}},$$ *(здесь и далее √ - знак корня)*

где: q – нагрузка на единицу длины линии контакта; $E_{пр}$ – приведенный модуль упругости, получаемый из соотношения $2/E_{пр} = 1/E_1 + 1/E_2$; (здесь $1/E$ - некоторая характеристика податливости материала), откуда: $E_{пр} = 2\ E_1E_2 / E_1 + E_2$; ν - коэффициент Пуассона; $\rho_{пр}$ – приведенный радиус кривизны цилиндров, определяемый из соотношения $1/\rho_{пр} = 1/R_1 + 1/R_2$, (здесь $1/\rho_{пр}$ - кривизна поверхности), откуда:

$$\rho_{пр} = R_1R_2 / R_1 + R_2.$$

При $\nu = 0{,}3$ формула Герца приобретает вид:

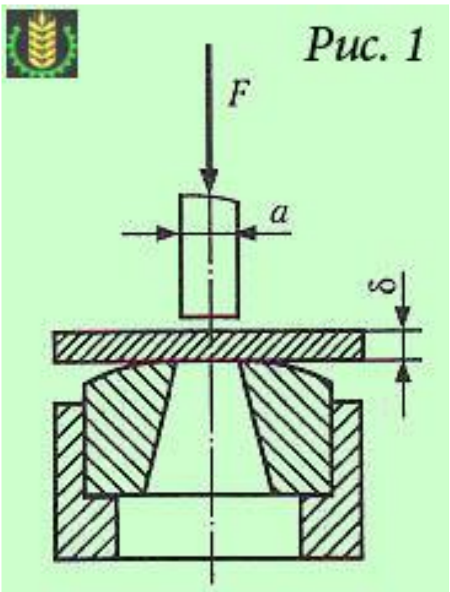
$$\sigma_н = 0{,}418 \sqrt{(qE_{пр} / \rho_{пр})}.$$

Формула Герца широко применяется при расчетах на контактную прочность многих деталей машин и механизмов - зубчатых колес, подшипников качения и т. п.

Сдвиг (срез)

Напряжения при сдвиге

Сдвигом называют такой вид деформации, при которой в любом поперечном сечении бруса возникает только поперечная сила.



Деформацию сдвига можно наблюдать, например, при резке ножницами металлических полос или прутков, при пробивании отверстия в заготовках на штампе *(рис. 1)*.

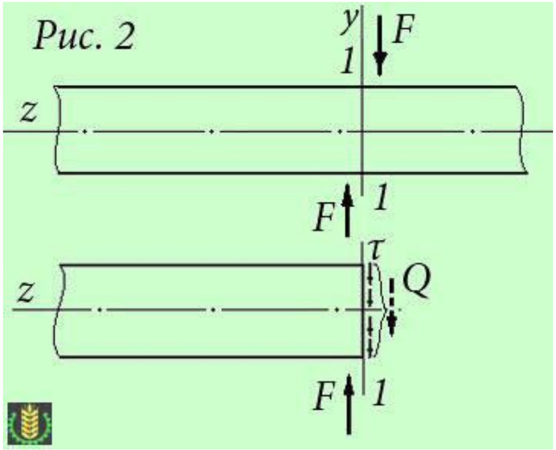
Рассмотрим брус площадью поперечного сечения A, перпендикулярно оси которого приложены две равные и противоположно направленные силы F; линии действия этих сил параллельны и находятся на относительно небольшом расстоянии друг от друга. Для определения поперечной силы Q применим метод сечений *(рис. 2)*. Во всех точках поперечного сечения действуют распределенные силы, равнодействующую которых определим из условия равновесия оставленной части бруса:

$$\Sigma Y = 0 \text{ » } F - Q = 0,$$

откуда поперечная сила Q может быть определена, как:

$$Q = F.$$

Поперечная сила есть равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении бруса при сдвиге. Очевидно, что при сдвиге в поперечном сечении возникают только касательные напряжения $\boldsymbol{\tau}$.



Предполагаем, что эти касательные напряжения равномерно распределены по сечению, и, следовательно, могут быть вычислены по формуле:

$$\tau = Q / A.$$

На основании полученной формулы можно сделать вывод, что форма сечения на величину напряжения при деформации сдвига не влияет.

Расчеты на прочность при сдвиге

Условие прочности детали конструкции заключается в том, что наибольшее напряжение, возникающее в ней (рабочее напряжение), не должно превышать допускаемое. Расчетная формула при сдвиге:

$$\tau = Q / A \le [\tau]$$

читается следующим образом: *касательное напряжение при сдвиге не должно превышать допускаемое*. *(при обозначении предельно допустимых напряжений применяют квадратные скобки: [τ] или [σ])*
По этой расчетной формуле проводят проектный и проверочный расчеты и определяют допускаемую нагрузку.

Деформация сдвига, доведенная до разрушения материала, называется срезом (применительно к металлам) или *скалыванием* (применительно к неметаллам). Допускаемое напряжение на срез выбирают для пластичных материалов в зависимости от предела текучести. В машиностроении для штифтов, болтов, шпонок и других деталей, работающих на срез принимают $[\tau_{ср}] = (0{,}25\ldots0{,}35)\ \sigma_т$, где $\sigma_т$ – предел текучести материала изделия.

При расчетах на срез в случае, если соединение осуществляется несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и т. д.), полагают, что все они нагружены одинаково. Расчеты соединений на срез обычно сопровождают проверкой прочности этих соединений на смятие.

Деформация кручения

Основные понятия о кручении. Кручение круглого бруса.

Кручением называют такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только крутящий момент, т. е. силовой фактор, вызывающий круговое перемещение сечения относительно оси, перпендикулярной этому сечению, либо препятствующий такому перемещению. Другими словами - деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях, перпендикулярных его оси приложить пару или пары сил. Моменты этих пар сил называют скручивающими или вращающими. Вращающий момент обозначают $\boldsymbol{T}$. Такое определение условно разделяет силовые факторы деформации кручения на внешние (скручивающие, вращающие моменты $\boldsymbol{T}$) и внутренние (крутящие моменты $\boldsymbol{M_{кр}}$).

В машинах и механизмах кручению наиболее часто подвергаются круглые или трубчатые валы, поэтому расчеты на прочность и жесткость чаще всего производят для таких узлов и деталей.

Рассмотрим кручение круглого цилиндрического вала. Представьте резиновый цилиндрический вал у которого жестко закреплен один из концов, а на поверхности нанесена сетка из продольных линий и поперечных окружностей. К свободному концу вала приложим пару сил, перпендикулярно оси этого вала, т. е. закрутим его вдоль оси. Если внимательно рассмотреть линии сетки на поверхности вала, то можно заметить, что: - ось вала, которую называют осью кручения, останется прямолинейной; - диаметры окружностей останутся такими же, а расстояние между соседними окружностями не изменится; - продольные линии на валу обратятся в винтовые линии.

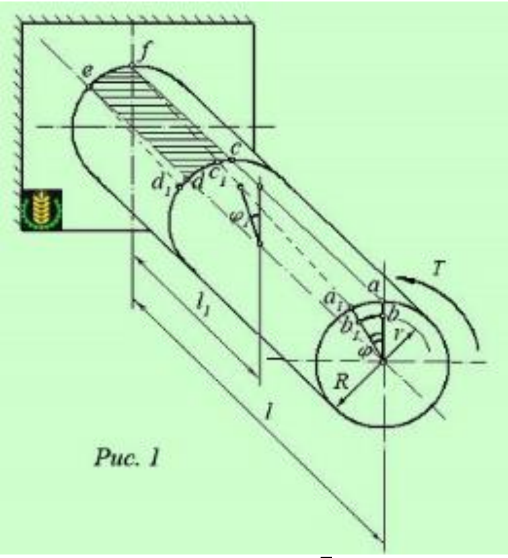


Рис. 1

Из этого можно заключить, что при кручении круглого цилиндрического бруса (вала) справедлива гипотеза плоских сечений, а также предположить, что радиусы окружностей остаются при деформации прямыми (поскольку их диаметры не изменились). А поскольку в сечениях вала отсутствуют продольные силы, то расстояние между ними сохраняется.

Следовательно, деформация кручения круглого вала заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения, причем углы поворота их прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения - чем дальше от закрепленного конца вала находится какое-либо сечение, тем на больший угол относительно оси вала оно закручивается. Для каждого сечения вала угол поворота равен углу закручивания части вала, заключенного между этим сечением и заделкой (закрепленным концом)

Угол (рис. 1) поворота свободного конца вала (концевого сечения) называется полным углом закручивания цилиндрического бруса (вала). Относительным углом закручивания φ0 называется отношение угла закручивания φ1 к расстоянию l1от данного сечения до заделки (закрепленного сечения). Если цилиндрический брус (вал) длиной l имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом на свободном конце (т. е. состоит из однородного геометрического участка), то справедливо утверждение: $\varphi_0 = \varphi_1 / l_1 = \varphi / l = const$ - величина постоянная.

Если мы рассмотрим тонкий слой на поверхности вышеупомянутого резинового цилиндрического бруса (*рис. 1*), ограниченный ячейкой сетки $cdef$, то заметим, что эта ячейка при деформации перекашивается, и ее сторона, удаленная от закрепленного сечения, смещается в сторону закручивания бруса, занимая положение cde_1f_1.

Следует отметить, что аналогичная картина наблюдается при деформации сдвига, только в этом случае поверхность деформируется из-за поступательного перемещения сечений друг относительно друга, а не из-за вращательного перемещения, как при деформации кручения. На основании этого можно сделать вывод, что при кручении в поперечных сечениях возникают только касательные внутренние силы (напряжения), образующие крутящий момент.

Итак, крутящий момент есть результирующий момент относительно оси бруса внутренних касательных сил, действующих в поперечном сечении.

Построение эпюр крутящих моментов

Для наглядного изображения распределения крутящих моментов вдоль оси бруса строят эпюры крутящих моментов - графическое отображение величины крутящих моментов на каждом участке бруса.

Крутящий момент в сечениях бруса определяется с помощью метода сечения. Так как равномерно вращающийся или неподвижный вал находится в равновесии, очевидно, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении, должны уравновешивать внешние моменты, действующие на рассматриваемую часть бруса. Отсюда следует, что крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения.

Эпюры крутящих моментов дают возможность определить опасное сечение. В частности, если брус имеет постоянное поперечное сечение по всей длине, то опасными будут сечения на участке, где возникает наибольший крутящий момент.

Следует очень внимательно отнестись к определению знаков крутящего момента. Крутящий момент считается положительным, если при взгляде со стороны сечения результирующий момент внешних пар сил, приложенных к рассматриваемой части бруса, будет направлен против часовой стрелки, и наоборот (это положение условно и принимается для облегчения проверки расчетов, выполненных несколькими исполнителями).

Рассматривая величины крутящих моментов, действующих в каждом конкретном сечении бруса, полагаем, что в сечении, где приложен вращающий (скручивающий) момент, значения крутящего момента изменяются скачкообразно (принцип смягченных граничных условий).

Пример построения эпюры крутящих моментов

Силовая передача (трансмиссия), изображенная на *рис. 2* состоит из вала, на котором размещены три шестерни - одна ведущая (*A*) и две ведомые (*B* и *C*). К шестерням приложены вращающие моменты: $P_A = 300$ *Нм*, $P_B = 120$ *Нм*, $P_C = 180$ *Нм*.

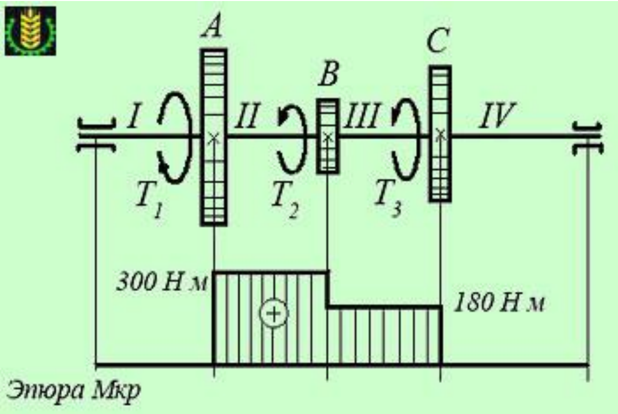


Рис. 2

Построим эпюру крутящих моментов для этой силовой передачи.

Решение

Очевидно, что свободные концы вала, (вращающиеся в подшипниках) не подвержены действию вращающих моментов, т. е. крутящие моменты на участках **1** и **4** равны нулю. К шестерне *A* приложен вращающий момент *300 Н м*, следовательно в сечении, расположенном под этой шестерней скачкообразно возникает крутящий момент, равный *300 Нм*, и величина этого момента сохраняется неизменной по всем сечениям участка **2** (до шестерни *B*).

К шестерне *B* приложен вращающий момент *120 Нм*, который направлен в противоположную сторону от ведущего скручивающего момента, приложенного к шестерне *A*. Следовательно крутящий момент на участке **3** будет равен разности крутящих моментов, приложенных к шестерням *A* и *B*. На эпюре это отобразится в виде ступени величиной *120 Нм*, расположенной напротив сечения, где размещена шестерня *B*. На всем протяжении участка **3** величина этого крутящего момента будет сохраняться неизменной, до сечения, расположенного под шестерней *C*.

К шестерне *C* приложен вращающий момент *180 Нм*, направление которого противоположно моменту, приложенному к ведущей шестерне *A*, поэтому, начиная с сечения под шестерней *C*, крутящий момент будет равен разнице между скручивающим моментом шестерни *A* и моментами, приложенными к шестерням *B* и *C*, т. е. $M_{КРc} = T_A - T_B - T_C = 300 - 120 - 180 = 0$ *Нм*, и величина этого момента будет распространяться на весь участок **4**, расположенный за шестерней *C*.

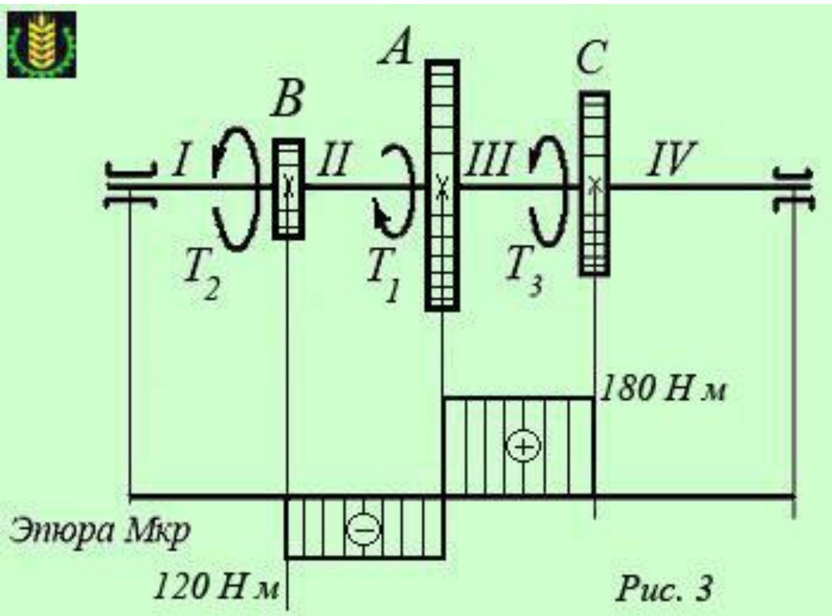


Рис. 3

Построив эпюру крутящих моментов, действующих в сечениях вала данной силовой передачи как показано на *рис. 2*, отмечаем, что максимальной величины - *300 Нм* крутящий момент достигает на участке **2**, т. е. этот участок и является критическим (наименее надежным).

Теперь попробуем изменить расположение шестерен на валу, разместив ведущую шестерню *A* между ведомыми шестернями *B* и *C*, как показано на *рис. 3*. Приложенные к шестерням вращающие моменты оставим без изменения и построим эпюру крутящих моментов для измененной конструкции (*рис. 3*).

Из полученной эпюры видно, что на участке $\boldsymbol{2}$ (между шестернями $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$) крутящий момент равен -*120 Нм*, на участке $\boldsymbol{3}$ — *+180 Нм*, а на участках $\boldsymbol{1}$ и $\boldsymbol{4}$ крутящие моменты равны нулю, как и в предыдущей конструкции. И если в рассмотренной ранее конструкции максимальный крутящий момент достигал *300 Нм*, то теперь его величина снизилась до *180 Нм*. Рациональным размещением шестерен на валу силовой передачи мы смогли значительно уменьшить максимальный крутящий момент, возникающий в сечениях этого вала, повысив надежность передачи. При этом передаточные отношения и функционал самой передачи не изменились.

Напряжения и деформации при кручении

Исследование отдельных участков и слоев цилиндрического бруса, нагруженного скручивающим (вращающим) моментом, дает основание полагать, что в поперечных сечениях этого бруса нормальные напряжения (направленные вдоль оси) отсутствуют, а возникают только касательные напряжения, модули которых расположены в плоскости исследуемого сечения Этот вывод опирается и на гипотезу о не надавливании волокон, предполагающую, что если брус представить в виде многочисленных цилиндрических продольных волокон, то при деформациях разного рода эти волокна не оказывают друг на друга силового воздействия (не давят друг на друга).

Как показали многочисленные опыты и исследования, эта гипотеза справедлива в определенном интервале деформаций, и погрешностями в расчетах, связанными с ее применением, можно пренебречь.

На *рис. 1* видно, что абсолютный сдвиг сечения волокна $\boldsymbol{a}$ равен дуге $\boldsymbol{aa_1}$, а сечения волокна $\boldsymbol{b}$ - дуге $\boldsymbol{bb_1}$. Этот сдвиг (т. е. длины дуг) можно определить, зная угол $\boldsymbol{\varphi}$ закручивания исследуемого сечения относительно центральной оси:

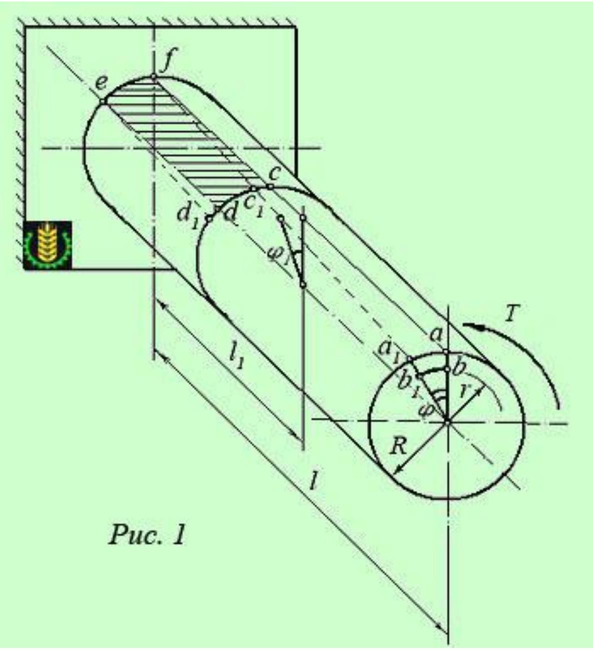


Рис. 1

дуга $\boldsymbol{aa_1 = r\varphi}$; дуга $\boldsymbol{bb_1 = R\varphi}$,

где: $\boldsymbol{r}$ - расстояние от волокна $\boldsymbol{a}$ до оси кручения, $\boldsymbol{R}$ - радиус сечения круглого бруса, $\boldsymbol{\varphi}$- полный угол закручивания бруса.

Так как радиусы сечений при кручении бруса остаются прямыми (принятое предположение), то величина абсолютного сдвига сечения волокон прямо пропорциональна их расстоянию от оси кручения, т. е. чем дальше от оси расположено продольное волокно, тем сильнее сдвинется его сечение относительно центральной оси.

Относительный сдвиг сечения произвольного продольного волокна $\boldsymbol{b}$ может быть определен по формуле: $\boldsymbol{\gamma_p = r\varphi / l}$, где $\boldsymbol{\varphi / l = \varphi_0}$ - относительный угол закручивания (для любого сечения круглого однородного бруса эта величина является постоянной). Тогда:

$$\gamma_p = \varphi_0 r.$$

Поскольку мы пришли к выводу, что при кручении в поперечных сечениях бруса возникает только деформация сдвига, то можно применить формулу, описывающую закон Гука при сдвиге:

$$\tau_r = G\gamma_p = G\varphi_0 r.$$

Здесь τ_r - касательное напряжение в сечении волокна, G - коэффициент пропорциональности между относительным углом закручивания и величиной касательного напряжения, возникающего в сечении волокна, который называют ***модулем упругости второго рода***. Модуль упругости имеет такую же размерную единицу, как и напряжение *(Па)* и характеризует физические свойства материала бруса. Для разных материалов модуль упругости устанавливается опытно-экспериментальным путем и приводится в справочниках в виде таблиц, применяемых при расчетах.

На основании приведенной формулы Гука для сдвига при кручении можно сделать вывод, что для центрального волокна бруса (т. е. расположенного на оси закручивания в центре сечения) касательные напряжения равны нулю: если $r = 0$, то $\tau = 0$.

Максимального значения касательные напряжения достигают в сечениях волокон, наиболее удаленных от оси закручивания бруса, т. е. на внешней поверхности бруса: если $r = R$, то $\tau = \tau_{max}$.

Так как касательные напряжения в сечениях волокон бруса находятся в прямо пропорциональной зависимости от расстояния до оси кручения, то эпюра распределения напряжений вдоль радиуса сечения имеет вид треугольника *(рис. 4)*. Исходя из схемы распределения напряжений, можно сделать вывод, что в круглых валах наиболее напряженными являются внешние слои, а внутренние почти не испытывают нагрузки. По этой причине многие валы машин и механизмов изготавливаются трубчатой формы (пустотелыми), что позволяет сэкономить дорогостоящий металл при незначительной потере прочности конструкции.

Если брус имеет по всей длине одинаковый диаметр (все сечения одинаковы по размерам и форме), и к каждому сечению приложен одинаковый крутящий момент, то касательные напряжения в каждом продольном волокне этого бруса будут одинаковы по величине.

Моменты сопротивления кручению круглых валов

В технических расчетах наиболее часто приходится иметь дело с круглыми или трубчатыми брусьями (валами), поэтому определим величину момента сопротивления кручению для круглого вала и для вала, имеющего кольцевое сечение (труба).

Для круга диаметром D:

$W_r = I_r / 0{,}5D = \pi D^4 / (32 \times 0{,}5) = \pi D^3 / 16$ или приближенно: $W_r \approx 0{,}2D^3$.

Для кольца имеющего наружный диаметр D и внутренний диаметр d: $W_r = I_r / 0{,}5D = \pi(D^4 - d^4)$

$/ (32x0{,}5D) = \pi(D^4 - d^4) / 16D$ или приближенно: $W_r \approx 0{,}2(D^4 - d^4) / D$.

Из последней формулы видно, что если полярный момент инерции кольцевого сечения можно определить, как разность между осевыми моментами инерции большого и малого кругов, то момент сопротивления кручения кольцевого сечения подобным образом рассчитать нельзя.

Итак, для определения напряжений в сечениях круглого бруса следует использовать формулы: для сплошного вала: $\tau_{max} \approx M_{кр} / 0{,}2D^3$ для трубчатого вала: $\tau_{max} \approx M_{кр}D / (D^3 - d^3)$ Угол закручивания цилиндрического вала: $\varphi = M_{кр}l / (GI_r)$.

Эти формулы применяют при решении задач и выполнении расчетов на прочность для скручиваемых валов.

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности бруса при кручении заключается в том, что наибольшее касательное напряжение, возникающее в нем, не должно превышать предельно допустимое. При этом расчетная формула на прочность имеет вид:

$$\tau_{max} = M_{кр} / W_r \leq [\tau_{кр}],$$

где $[\tau_{кр}]$ - предельное допускаемое напряжение.

При практических расчетах, определяя предельные допускаемые напряжения для различных материалов, используют зависимость между напряжениями при растяжении и напряжениями при кручении, которая для стали и чугуна имеет вид: для стали - $[\tau_{кр}] = 0{,}55....0{,}6\ [\sigma_p]$ для чугуна - $[\tau_{кр}] = 1{,}0....1{,}2\ [\sigma_p]$) (здесь $[\sigma_p]$ - справочная или определяемая экспериментально величина, (предельное допустимое напряжение растяжения) характеризующая материал бруса (вала).

Кроме требования прочности к валам предъявляются требования жесткости, которое заключается в том, что угол закручивания участка вала длиной 1 м не должен превышать предельной величины, определяемой требованиями конструкции. Допускаемый угол закручивания 1 м длины вала задается в градусах и обозначается $[\varphi_0°]$. Расчетная формула на жесткость при кручении имеет вид:

$$\varphi_0° = 180\ M_{кр} / (\pi GI_r) \leq [\varphi_0°]$$

В реальных механизмах обычно допускаются углы закручивания валов в пределах $[\varphi_0°] = 0{,}25...1$ *градус/м*.

Пример решения задачи на кручение

Определить минимальный допустимый диаметр вала d, передающего крутящий момент $M_{кр}$ = *464 Нм*, если допускаемое напряжение кручения $[\tau_{кр}]$ = *30 МПа*.

Решение

По известному передаваемому крутящему моменту можно определить момент сопротивления кручению:

$$W_r = M_{кр} / [\tau_{кр}] = 464 / 30 \times 10^6 = 15{,}6 \times 10^{-6}\ м^3.$$

Из зависимости между моментом сопротивления кручению и диаметром вала $W_r \approx 0{,}2D^3$ находим минимальный допустимый диаметр:

$$D \approx \sqrt[3]{W_r / 0{,}02} \approx 43 \text{ мм}$$ (здесь и далее √ - знак корня).

Округляя найденное значение диаметра до стандартной величины (в большую сторону), принимаем D = 45 мм.

***

Дифференциальные зависимости при изгибе

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют дифференциальные зависимости, основанные на *теореме Журавского*, названной по имени русского инженера-мостостроителя Д. И. Журавского (1821-1891 г.г.). Эта теорема формулируется так: ***Поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки.***

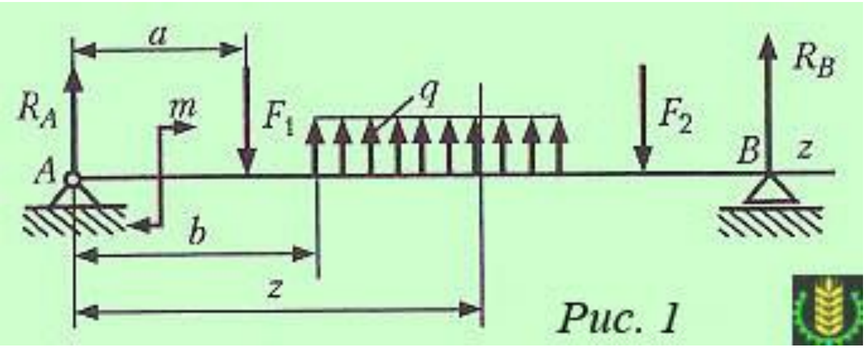


Рис. 1

Рассмотрим балку *(рис. 1)*. Начало координат возьмем на левом конце балки, а ось z направим вправо (в дальнейшем это будет иметь существенное значение). На одном из участков балки возьмем сечение с текущей координатой z и запишем уравнение изгибающего момента:

$$M_u = R_{Az} + m - F_1 (z - a) + q(z - b)^2 / 2.$$

Продифференцировав это выражение по координате z, получим:

$$dM_u / dz = R_A - F_1 + q(z - b).$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть поперечная сила Q в сечении z. Таким образом:

$$dM_u / dz = Q;$$

теорема доказана. Если уравнение изгибающих моментов (для участков с равномерно распределенной нагрузкой) продифференцировать вторично, то получим:

$$d^2M_u / dz^2 = dQ / dz = q,$$

т. е. вторая производная от изгибающего момента или первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки. Как известно из высшей математики, по знаку второй производной функции можно судить о выпуклости или вогнутости кривой; соответствующее правило следует использовать при построении эпюр.

***

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Для наглядного изображения распределения вдоль оси балки поперечных сил и изгибающих моментов строят эпюры, которые дают возможность определить предположительно опасное сечение балки и установить значения поперечной силы и изгибающего момента в этом сечении. Слово *"эпюра"* в переводе с французского *(epure)* означает *"график"*, *"чертеж"*.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно строить двумя способами.

Первый способ заключается в том, что сначала составляют аналитические выражения поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка, как функций координаты z поперечного сечения:

$$Q = f1(z); \quad M_u = f^2(z).$$

Затем по полученным уравнениям строят эпюры.

Второй способ заключается в построении эпюр по характерным точкам и значениям поперечных сил и изгибающих моментов на границах участков. Применяя этот способ, в большинстве случаев можно обойтись без составления уравнений поперечных сил и изгибающих моментов. При наличии некоторого опыта второй способ предпочтительнее.

Правила построения эпюр при изгибе

При построении эпюр следует руководствоваться приведенными ниже правилами:

1. Эпюру моментов строят на сжатом волокне, т. е. положительные моменты (и положительные поперечные силы) откладывают вверх от оси, а отрицательные – вниз;

2. Пользуясь принципом смягченных граничных условий *(принципом Сен-Венана)*, будем полагать, что в сечении, где приложена сосредоточенная сила (или изгибающий момент), значение поперечной силы (или момента) меняется скачкообразно, причем скачек равен модулю этой силы (или момента);

3. Правильность построения эпюр следует проверять с помощью теоремы Журавского. Как известно из математики, если $M_u = f(z)$, то

$$dM_u / dz = tg\ \alpha,$$

где α – угол, который составляет касательная к эпюре моментов с положительным направлением оси z. Согласно теореме Журавского,

$$Q = dM_u / dz = tg\ \alpha$$

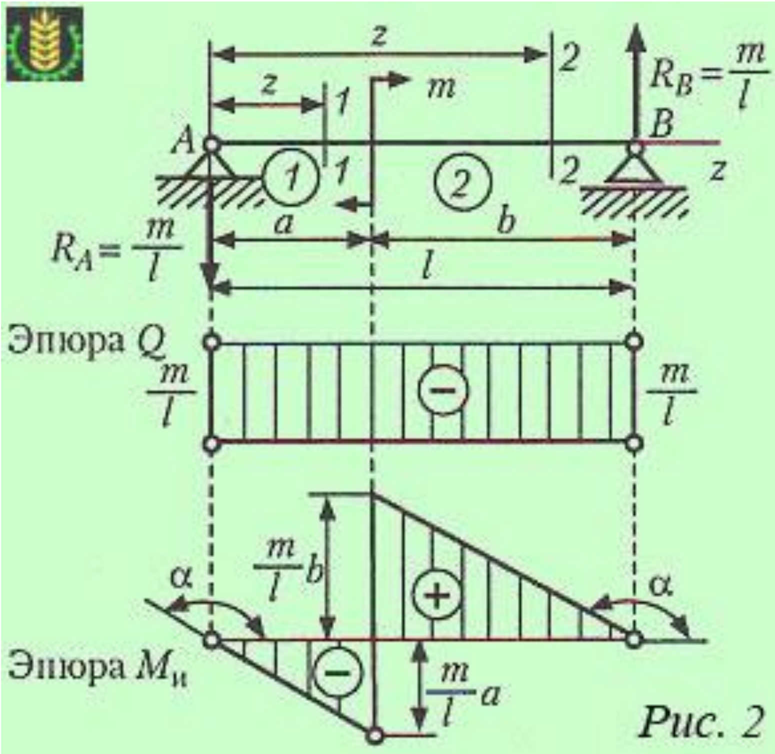


Рис. 2

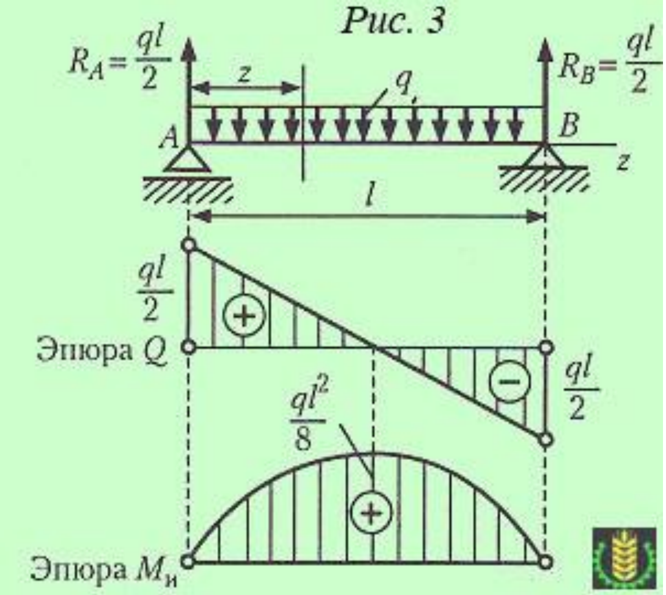
(полагаем масштабы $M_и$ и z численно равными единице), следовательно, если угол α острый, то $Q > 0$ и изгибающий момент на участке возрастает, если угол αтупой, то $Q < 0$ и изгибающий момент на участке убывает; если $\alpha = 0$ на всем участке, то $M_и = const$, $Q = 0$ и на этом участке возникает чистый изгиб; если $\alpha = 0$ в одной точке эпюры моментов, то в этом сечении $Q = 0$, а изгибающий момент имеет экстремальное (максимальное или минимальное) значение. В сечении, где на эпюре поперечных сил имеется скачок, на эпюре изгибающих моментов будет резкое изменение направления касательной. Чтобы правила знаков для изгибающих моментов и поперечных сил не противоречили знакам, полученным на основании теоремы Журавского, при проверке эпюр следует ось z мысленно направлять всегда слева направо.

4. На участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра моментов представляет собой наклонную прямую, а эпюра поперечных сил – прямую, параллельную оси z.

5. На участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра моментов представляет собой параболу, а эпюра поперечных сил – наклонную прямую.

6. На конце балки изгибающий момент равен нулю, если там не приложена пара сил.

7. При построении эпюры для консольных балок начало координат удобно брать на конце консоли, что нередко дает возможность обойтись без определения опорных реакций.



В сечении, соответствующем заделке, поперечная сила равна реактивной силе, а изгибающий момент – реактивному моменту.

Пример построения эпюры поперечных сил и изгибающих моментов приведен на *рис. 2*. Начало координат поместим на левом конце балки, а ось z направим вправо. Данная балка состоит из двух участков. Составив уравнение моментов относительно опор, определим реакции связей (опор). После этого приступаем к построению эпюры поперечных сил, а затем – к построению эпюры изгибающих моментов. Поскольку к балке не приложена распределенная нагрузка, эпюра сил будет параллельна оси z, а эпюра моментов состоит из наклонных линий, для построения которых достаточно нанести значения моментов для граничных сечений на участках бруса.

На *рис.3* представлен пример построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балке, к которой приложена распределенная нагрузка.

Как видно из рисунка, эпюра поперечных сил в этом случае – наклонная прямая, эпюра изгибающих моментов – парабола.

Кручение и растяжение или сжатие

Сочетание деформаций кручения и растяжения испытывают, например, болты и крепежные винты, а сочетание деформаций кручения и сжатия - винты домкратов и винтовых прессов, сверла и шпиндели сверлильных станков. Эти детали обычно изготовляют из материалов, у которых $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$.

Нормальные и максимальные касательные напряжения в этих случаях определяют по формулам:

$$\sigma = N / A; \qquad \tau = M_к / W_p.$$

Применив третью теорию прочности, получим расчетную формулу:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{[(N / A)^2 + 4(M_к / W_p)^2]} \le [\sigma].$$

Применив энергетическую теорию прочности, получим:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{[(N / A)^2 + 3(M_к / W_p)^2]} \le [\sigma].$$

Прочность и жесткость при динамических нагрузках

Сопротивление усталости материалов

Динамические нагрузки подразделяются на повторно-переменные, ударные, внезапно приложенные и инерционные. На этой страничке рассматриваются повторно-переменные нагрузки, которые вызывают в деталях машин периодически изменяющиеся напряжения и деформации. Сопротивление деталей действию таких нагрузок существенно отличается от их сопротивления при статическом нагружении.

Повторно-переменным нагрузкам подвергаются, например, вращающиеся оси, валы, зубчатые колеса и т. п. При вращении вала одни и те же волокна оказываются то в растянутой, то в сжатой зоне, т. е. подвергаются деформациям растяжения-сжатия.

Анализ поломок деталей машин показывает, что материалы длительное время подвергавшиеся действию переменных нагрузок, могут разрушаться при напряжениях более низких, чем предел прочности и даже предел текучести. Разрушение при этом происходит вследствие усталости материала.

Усталостью, *согласно ГОСТ 23207-78 «Сопротивление усталости. Основные термины, определения и обозначения»*, называется процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

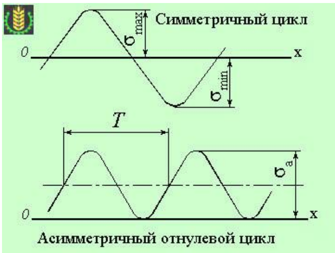
Причины усталостного разрушения заключаются в появлении микротрещин из-за неоднородности строения материала, следов механической обработки и повреждений поверхности детали (волосовины, раковины, газовые и шлаковые включения, следы резца или шлифовального камня и т. п.), а также в результате концентрации напряжений.

Способность материалов противостоять усталости называется ***сопротивлением усталости***. Изучение этого вопроса имеет очень большое значение, поскольку такие ответственные детали, как валы, поршневые пальцы, оси железнодорожных вагонов и многие другие выходят из строя в результате усталости.

При изучении явления усталости материалов введены различные понятия, которые имеют стандартные определения.

Циклом напряжений называется совокупность всех значений напряжений за период их изменения. ***Периодом цикла*** T называется продолжительность одного цикла. Цикл напряжений характеризуется следующими параметрами: - ***максимальное напряжение*** σ_{max}; - ***минимальное напряжение*** σ_{min}; - ***среднее напряжение*** $\sigma_m = 1/2\,(\sigma_{max} + \sigma_{min})$; - ***амплитуда цикла*** $\sigma_a = 1/2\,(\sigma_{max} - \sigma_{min})$; - ***коэффициент асимметрии цикла*** $R_\sigma = \sigma_{max} / \sigma_{min})$.

Циклы, имеющие одинаковый коэффициент асимметрии, называются ***подобными***.



В случае равенства σ_{max} и σ_{min} по абсолютной величине имеем симметричный цикл напряжений, при котором $\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \pm\sigma$, $R_\sigma = -1$. Если представить график симметричного цикла в виде синусоиды, то нулевая ордината делит этот график на две симметричные половины.

Если синусоида асимметричного цикла принимает только положительные (или только отрицательные) значения по оси ординат, и касается ординатного нуля, такой цикл называют ***отнулевым***. При отнулевом цикле $R_\sigma = 0$, поскольку $\sigma_{min} = 0$ (или $\sigma_{max} = 0$)

В случае действия касательных напряжений необходимо в обозначениях и формулах заменить σ на τ.

Число циклов напряжений до начала усталостного разрушения называется ***циклической долговечностью*** и обозначается N. Максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором материал может сопротивляться усталости при заданной циклической долговечности, называется ***пределом выносливости***. Предел выносливости для нормальных напряжений при симметричном цикле обозначают σ_{-1}, при отнулевом цикле – σ_0, при цикле с коэффициентом асимметрии R_σ – σ_R.

Для определения предела выносливости производят испытания образцов на усталость на специальных машинах. Наибольшее распространение имеют испытания на усталость при изгибе и симметричном цикле напряжений. Предварительно устанавливаемая наибольшая продолжительность испытаний называется базой испытаний, обычно задаваемая числом циклов, обозначаемым N_0. Так, например, для стали N_0 = 5 млн. циклов.

Для испытаний на усталость изготавливают серию одинаковых, тщательно отполированных образцов, имеющих в рабочей части цилиндрическую форму диаметром 5-10 мм. Образцы доводят до разрушения при различной нагрузке и напряжениях, устанавливая при этом циклическую долговечность образца. По полученным данным строят кривую усталости. На кривой усталости имеется участок, стремящийся к горизонтальной асимптоте. Ордината этой асимптоты и дает значение предела выносливости σ_R.

Экспериментально установлено, что при любом асимметричном цикле предел выносливости для того же материала будет выше, чем при симметричном цикле. Это означает, что симметричный цикл является наиболее опасным.

При расчетах деталей, не предназначенных для длительной эксплуатации, вместо предела выносливости учитывается предел ограниченной выносливости σ_{RN} - максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, соответствующее

Факторы, влияющие на предел выносливости

задаваемой циклической долговечности N.

Предел выносливости конкретной детали конструкции зависит от ряда факторов, главные из которых

– концентрация напряжений, масштабный фактор (размеры детали) и состояние поверхности детали (шероховатость и поверхностное упрочнение).

Влияние концентрации напряжений

Концентрацией напряжений называется повышение напряжений в местах изменений формы или нарушений сплошности материала. Напряжения, вычисленные по формулам сопротивления материалов без учета концентрации, называются номинальными напряжениями.

Резкое изменение формы или площади поперечного сечения деталей (наличие выточек, галтелей, отверстий, канавок, надрезов и т. п.) приводит к неравномерному распределению напряжений, т. е. вызывает концентрацию напряжений в такой зоне. Причина, вызывающая концентрацию напряжений (отверстие в детали, шпоночный паз и т. п.), называется ***концентратором напряжений***.

Концентрация напряжений чаще всего имеет местный характер, и по мере удаления от концентратора напряжение быстро падает до номинального значения. По этой причине возросшие в районе концентраторов напряжения обычно называют ***местными напряжениями***.

С количественной стороны концентрацию напряжений характеризует ***теоретический коэффициент концентрации*** напряжений K_m, который определяют, как отношение величины максимальных местных напряжений к номинальным:

$$K_{m\sigma} = \sigma_{max} / \sigma.$$

В случае концентрации касательных напряжений по аналогии принимают $K_{m\tau} = \tau_{max} / \tau$.

Концентрация напряжений по-разному влияет на прочность пластичных и хрупких материалов. Существенное значение при этом имеет и характер нагрузки. Если взять пластичный материал, нагруженный статически, то при увеличении нагрузки рост наибольших местных напряжений при достижении предела текучести приостанавливается из-за местной текучести материала, и произойдет выравнивание напряжений по всему сечению. Отсюда можно сделать вывод, что при статической нагрузке пластичные материалы малочувствительны к концентрации напряжений.

При нагрузках быстро изменяющихся во времени, выравнивание напряжений произойти не успевает, поэтому концентрацию напряжений необходимо учитывать и для пластичных материалов.

Теоретический коэффициент концентрации K_m отражает влияние концентратора напряжений в условиях, далеких от разрушения детали, поэтому введено понятие эффективного коэффициента концентрации напряжений K_σ или K_τ. ***Эффективным коэффициентом концентрации*** напряжений называется отношение предела выносливости σ_{-1} образца без концентрации напряжений к пределу выносливости $\sigma_{-1к}$ образцов с концентрацией напряжений, имеющих такие же абсолютные размеры, как и гладкие образцы.

$$K_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_{-1к} \quad \text{и} \quad K_\tau = \tau_{-1} / \tau_{-1к}.$$

Сравнение показывает, что эффективный коэффициент концентрации всегда меньше теоретического.

Влияние абсолютных размеров детали

На основании опытов установлено, что предел выносливости зависит от абсолютных размеров поперечного сечения образца: с увеличением размеров сечения предел выносливости уменьшается. Эта закономерность объясняется тем, что с увеличением объема материала возрастает вероятность наличия в нем неоднородностей строения и нарушений сплошности, что приводит к появлению очагов концентрации напряжений.

Влияние абсолютных размеров детали учитывается введением в расчетные формулы соответствующего коэффициента. ***Коэффициентом влияния абсолютных размеров поперечного сечения*** K_d называется отношение предела выносливости образцов диаметра d к пределу выносливости образцов стандартных размеров:

$$K_d = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1}.$$

Так, для стальных валов K_d принимают равным 0,52….0,95.

Влияние состояния поверхности детали

На предел выносливости влияют шероховатость поверхности детали и поверхностное упрочнение.

С увеличением шероховатости поверхности предел выносливости снижается из-за появления микроочагов разрушений - микрораковин, микровпадин, микротрещин и т. п. Влияние шероховатости на предел выносливости учитывается введением коэффициента влияния шероховатости поверхности.

Коэффициентом влияния шероховатости поверхности K_F называется отношение предела выносливости образца с данной шероховатостью поверхности к пределу выносливости стандартного гладкого образца такого же размера.

Для повышения сопротивляемости усталости широко применяются различные способы упрочнения поверхностей деталей, например поверхностная закалка, химико-термическая обработка, обкатка роликами, дробеструйная обработка и т. п. Отношение предела выносливости упрочненных образцов к пределу выносливости неупрочноенных образцов называется ***коэффициентом влияния поверхностного упрочнения*** и обозначается K_v. Обычно K_v = 1,1…2,8.

Общий коэффициент снижения предела выносливости обозначается K и определяется по формуле:

$$K = [(K_\sigma / K_d) + (1/ K_F) - 1] / K_v.$$

Растяжение и сжатие

Напряжения и характер деформаций при растяжении и сжатии

Растяжением или сжатием называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила. Брусья с прямолинейной осью, работающие на растяжение или сжатие, часто называются *стержнями*.

Рассмотрим невесомый, защемленный левым концом прямой брус, вдоль оси которого действуют активные силы F и $2F$ (рис. 1). Части бруса постоянного сечения, заключенные между поперечными плоскостями (сечениями), в которых приложены одинаковые внешние силы (нагрузки или реакции связей) будем называть участками. Т. е. участок - это однородный кусок бруса и по форме, и по нагрузкам, и по площади сечения.

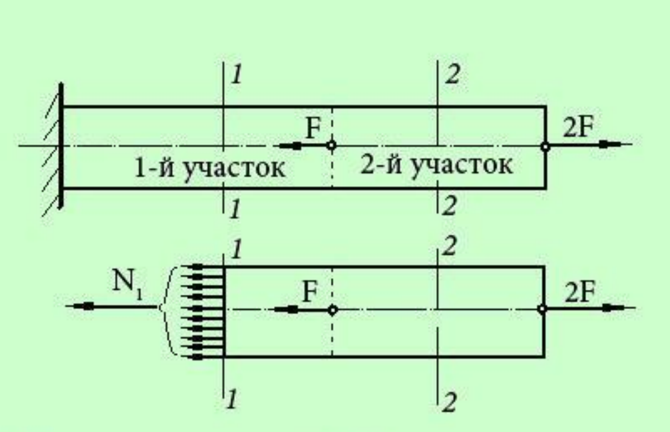


Рис. 1

Изображенный на рис. 1 брус состоит из двух участков – от защемленного конца до места приложения силы F, и от силы F до свободного конца, к которому приложена сила $2F$. Применим метод сечений и определим продольные внутренние силы N_1 и N_2 на этих участках. Сначала рассечем брус плоскостью $1\text{-}1$ и мысленно отбросим правую часть бруса, заменив ее эквивалентными внутренними и внешними силами. Применим уравнения равновесия для этой части бруса:

$$\sum Z = 0, \text{ следовательно: } 2F - F - N_1 = 0, \text{ откуда } N_1 = 2F - F = F.$$

Очевидно, что для сохранения равновесия части бруса достаточно приложить продольную силу. Нетрудно понять, что на втором участке бруса продольная сила в сечении $2\text{-}2$ будет иметь другое значение: $N_2 = 2F$. Таким образом, продольная сила в поперечном сечении бруса равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения и в пределах каждого участка имеет одинаковое значение. Последнее утверждение не совсем справедливо, поскольку в местах приложения внешних сил внутренние силы распределяются по сложным закономерностям, но с учетом рассмотренного ранее принципа смягчения граничных условий (принципа Сен-Венана), мы допускаем некоторую условную погрешность, незначительно влияющую на итоговый результат расчета.

При определении величины продольной силы алгебраическим сложением внешних сил следует обращать внимание на знаки (векторные значения) этих сил. При расчетах в сопромате обычно принимают растягивающие нагрузки (направленные от сечения) положительными, а сжимающие – отрицательными.

При изучении ряда деформаций мы будем мысленно представлять брусья состоящими из бесконечного количества волокон, расположенных параллельно оси бруса, и предполагать, что при деформации растяжения и сжатия эти волокна не надавливают друг на друга *(гипотеза о не надавливании волокон)*.

Чтобы понять характер напряжений и деформаций, возникающих в сжимаемом или растягиваемом брусе, представим себе прямой брус из резины, на котором нанесена сетка из продольных и поперечных линий. Если такой брус подвергнуть деформации растяжения, можно заметить, что:

- поперечные линии на брусе остаются ровными и перпендикулярными оси бруса, а расстояния между ними увеличатся;
- продольные линии останутся прямыми, а расстояния между ними уменьшатся.

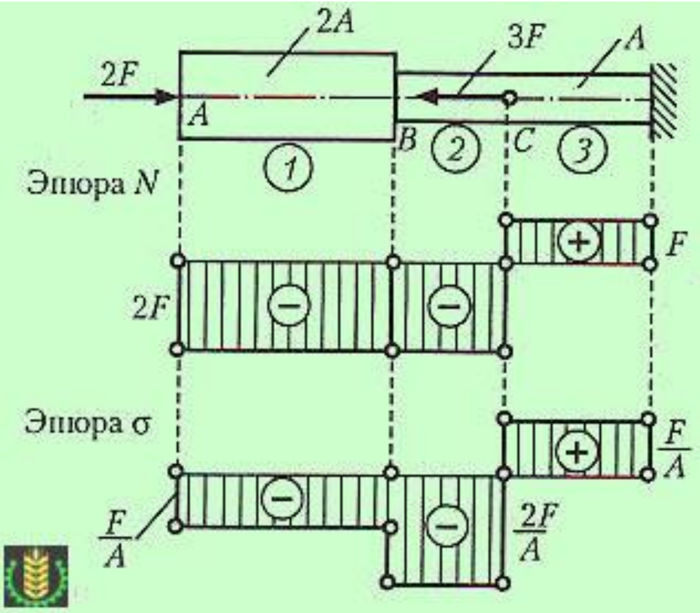
Из этого эксперимента следует, что при растяжении справедлива гипотеза плоских сечений*(гипотеза*

Бернулли), и, следовательно, все волокна бруса удлинятся на одну и ту же величину. Все это позволяет сделать вывод, что при растяжении и сжатии в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению. Эти напряжения можно определить по формуле:

$$\sigma = N / A,$$

где N – продольная сила, A – площадь поперечного сечения бруса.

Очевидно, что при растяжении и сжатии форма сечения бруса на величину напряжений не влияет. Для наглядного изображения распределения продольных сил и нормальных напряжений вдоль оси бруса строят графики, называемые ***эпюрами*** *(от французского "epure" - чертеж, график)* , при этом на эпюрах при построении учитывают знаки (векторные значения) продольных сил и напряжений.



Для ступенчатого бруса, к которому приложены сжимающая $2F$ и растягивающая $3F$ силы на *рис. 2*показаны соответствующие эпюры продольных силN и нормальных напряжений σ.

Порядок построения эпюр таков: сначала под чертежом бруса проводят прямую линию, параллельную оси бруса (эта линия условно представляет брус), затем напротив каждого сечения бруса откладывают по этой линии величину силовых факторов: для положительных – вверх, для отрицательных - вниз. Масштаб при этом выбирается произвольный. Разумеется, перед построением эпюры необходимо подсчитать величину силовых факторов (сил, моментов сил или напряжений) в каждом участке бруса. На полученном графике в кружках указываются знаки силовых факторов по участкам, на наружных углах ступенчатых переходов ставятся числовые значения этих силовых факторов, а вся площадь графика заштриховывается тонкими линиями, перпендикулярными оси. Слева от оси эпюры указывается, какой силовой фактор на ней представлен.

По эпюрам, представленным на *рис. 2* можно заметить, что в местах приложения внешних нагрузок и реакций внутренние силовые факторы изменяются скачкообразно *(принцип Сен-Венана)*. Визуальное исследование эпюры позволяет определить критические участки бруса, находящиеся в наиболее напряженном состоянии. Так, по представленным на *рис. 2* эпюрам напряжений, возникающих в брусе, можно определить, что критическим является 2-й участок, поскольку здесь возникает наибольшее напряжение (по эпюре видно, что это напряжение сжатия, т. к. оно имеет отрицательное значение).

Кроме того, эпюра любого силового фактора позволяет (без применения лишних расчетов) определить силу или момент, действующие на брус со стороны, например, заделки, поскольку после построения эпюры со стороны свободного конца бруса эти силовые факторы отобразятся графически, без вычислений.

Ниже размещен видеоролик, в котором подробно объясняется порядок построения эпюр продольных сил и напряжений, возникающих в брусе при растяжении и сжатии, а также выводы, которые можно сделать на основе визуального анализа графиков.

Смятие. Контактные напряжения

Расчеты на прочность при смятии

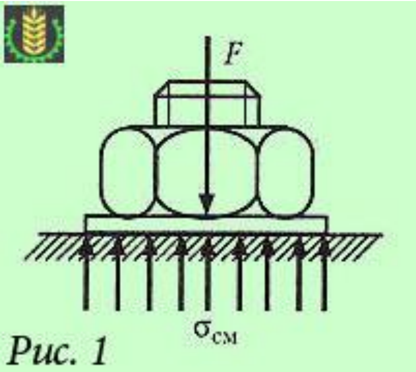


Рис. 1

Если детали конструкции, передающие значительную сжимающую нагрузку, имеют небольшую площадь контакта, то может произойти смятие поверхностей деталей. Смятие стараются предотвратить различными способами, например, подкладывая различные шайбы и подкладки под контактирующие детали.

Для простоты расчетов напряжений, возникающих при смятии, полагают, что по плоскости контакта возникают только нормальные напряжения, равномерно распределенные по площади контакта. Расчетное уравнение на смятие имеет вид:

$$\sigma_{см} = F / A_{см} \le [\sigma_{см}],$$

где: F – сжимающая сила, $A_{см}$ – площадь контакта, $[\sigma_{см}]$ – допускаемое напряжение на смятие.

Если соприкасающиеся детали сделаны из разных материалов, то на смятие проверяют деталь из более мягкого материала.

При контакте двух деталей цилиндрической поверхности (например, заклепочное соединение) закон распределения напряжений смятия по поверхности контакта сложнее, чем по плоскости, поэтому при расчете на смятие цилиндрических отверстий в расчетную формулу подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а значительно меньшую площадь диаметрального сечения отверстия (условная площадь смятия, *(см. рис. 2)*, тогда:

$$A_{см} = d\,\delta,$$

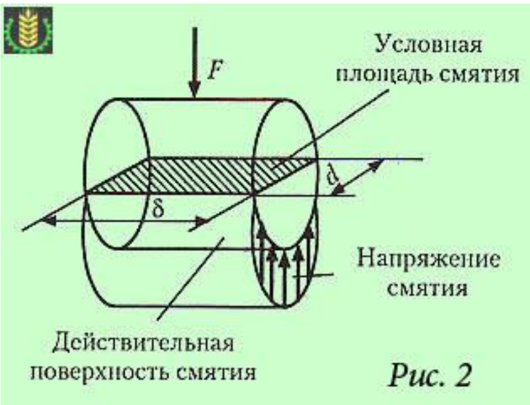


Рис. 2

где d - диаметр цилиндра, δ - толщина соединяемой детали (высота цилиндра).

При различной толщине соединяемых деталей, в расчетную формулу подставляют меньшую толщину.

Допустимые напряжения на смятие для разных материалов определяются опытным путем, их значение можно найти в справочниках. Так, для низкоуглеродистой стали допускаемое напряжение смятия принимается в пределах 100….120 МПа, для клепаных соединений: 240….320 МПа, для древесины: 2,4….11 МПа и т. д.

Контактные напряжения

Контактными называют напряжения и деформации, возникающие при сжатии тел криволинейной формы, причем первоначальный контакт может быть *линейным* (например, сжатие двух цилиндров с параллельными образующими), или *точечным* (например, сжатие двух шаров).

В результате деформации контактирующих тел начальный точечный или линейный контакт переходит в контакт по некоторой малой площадке. Решение вопросов о контактных напряжениях и деформациях впервые дано в работах немецкого физика ***Г. Герца*** *(1857-1894 г. г.)*.

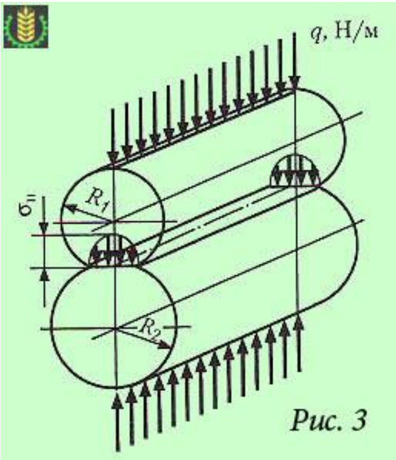


Рис. 3

Для деталей, в поверхностных слоях которых возникают контактные напряжения (например, подшипники качения, фрикционные катки, зубчатые колеса и т. п.), решающую роль играет прочность рабочих поверхностей – *контактная прочность*.

Рассмотрим случай контакта двух цилиндров с параллельными образующими *(рис 3)*. Определение контактных напряжений в этом случае производится по ***формуле Герца***, выведенной в предположении, что материалы цилиндров подчиняются закону Гука. Очевидно, что контактные напряжения по ширине площадки контакта неравномерны.

Максимальные напряжения $\sigma_н$ определяются по формуле:

$$\sigma_н = \sqrt{\{qE_{пр} / [2\pi(1 - \nu^2)\rho_{пр}]\}},$$ *(здесь и далее √ - знак корня)*

где: q – нагрузка на единицу длины линии контакта; $E_{пр}$ – приведенный модуль упругости, получаемый из соотношения $2/E_{пр} = 1/E_1 + 1/E_2$; (здесь 1/E - некоторая характеристика податливости материала), откуда: $E_{пр} = 2\ E_1E_2 / E_1 + E_2$; ν - коэффициент Пуассона; $\rho_{пр}$ – приведенный радиус кривизны цилиндров, определяемый из соотношения $1/\rho_{пр} = 1/R_1 + 1/R_2$, (здесь $1/\rho_{пр}$ - кривизна поверхности), откуда:

$$\rho_{пр} = R_1R_2 / R_1 + R_2.$$

При $\nu = 0,3$ формула Герца приобретает вид:

$$\sigma_н = 0,418\ \sqrt{(qE_{пр} / \rho_{пр})}.$$

Формула Герца широко применяется при расчетах на контактную прочность многих деталей машин и механизмов - зубчатых колес, подшипников качения и т. п.

3. Детали машин и механизмов - основные положения

Задачи раздела "Детали машин"

Курс учебной дисциплины "Детали машин" рассматривает основы расчета и конструирования деталей, узлов и агрегатов, встречающихся в различных машинах и механизмах. Учебными программами среднего профессионального образования предмет "Детали машин" рассматриваются и изучаются, как раздел учебной дисциплины "Техническая механика", куда входят, также, "Теоретическая механика" и "Сопротивление материалов". В технических и строительных ВУЗах эти предметы изучаются более углубленно и преподаются как самостоятельные учебные дисциплины.

Детали машин должны удовлетворять двум основным условиям: надежности и экономичности. Под экономичностью понимают минимально необходимую стоимость проектирования, изготовления и эксплуатации.

Понятия и определения раздела "Детали машин"

Предмет "Детали машин" оперирует следующими основными понятиями и определениями:

Машина *(от латинского machina)* - механическое устройство, выполняющее движения с целью преобразования энергии, материалов или информации. Основное назначение машин - частичная или полная замена производственных функций человека с целью повышения производительности, облегчения человеческого труда или замены человека в недопустимых для него условиях работы.

В зависимости от выполняемых функций машины делятся на энергетические, рабочие (транспортные, технологические, транспортирующие), информационные (вычислительные, шифровальные, телеграфные и т.п.), машины-автоматы, сочетающие в себе функции нескольких видов машин, включая информационные.

Агрегат *(от латинского aggrego - присоединяю)*- укрупненный унифицированный элемент машины (например, в автомобиле: двигатель, топливоподающий насос), обладающий полной взаимозаменяемостью и выполняющий определенные функции в процессе работы машины.

Механизм - искусственно созданная система материальных тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемое (необходимое) движение других тел. Примерами механизмов могут служить различные редукторы, коробки передач автомобилей, тракторов и т. п.

Прибор - устройство, предназначенное для измерений, производственного контроля, управления, регулирования и других функций, связанных с получением, преобразованием и передачей информации.

Сборочная единица (узел) - изделие или часть его (часть машины), составные части которого подлежат соединению между собой (собираются) на предприятии изготовителе (смежном предприятии). Сборочная единица имеет, как правило, определенное функциональное назначение.

Деталь - наименьшая неделимая (не разбираемая) часть машины, агрегата, механизма, прибора, узла, т. е. деталь - это часть машины, которую изготовляют без сборочных операций.

В зависимости от сложности изготовления детали, в свою очередь, делятся на простые и сложные. ***Простые детали*** для своего изготовления требуют небольшого числа уже известных и хорошо освоенных технологических операций и изготавливаются при массовом производстве на станках-автоматах (например, крепежные изделия - болты, винты, гайки, шайбы, шплинты; зубчатые колеса небольших размеров и т.п.).

Узлы и детали общего назначения применяются в большинстве современных машин и приборов (крепежные детали: болты, винты, гайки, шайбы; зубчатые колеса, подшипники качения и т.п.). Их изготовляют ежегодно в больших количествах (в одном легковом автомобиле более пяти тысяч различных типов деталей, более тридцати подшипников), поэтому знание основных методов расчета, правил и норм проектирования, подтвержденных статистикой эксплуатации, очень важно для конструкторской подготовки. Именно такие детали изучаются в курсе деталей машин.

Сложные детали имеют чаще всего достаточно сложную конфигурацию, а при их изготовлении применяются достаточно сложные технологические операции и используется значительный объем ручного труда, для выполнения которого в последние годы все чаще применяются роботы (например, при сборке-сварке кузовов легковых автомобилей).

К узлам и деталям ***специального назначения*** относятся такие узлы и детали, которые входят в состав одного или нескольких типов машин и приборов (например, поршни и шатуны ДВС, лопатки турбин газотурбинных двигателей, траки гусениц тракторов, танков и БМП) и изучаются в соответствующих специальных курсах (например, таких как "Теория и конструкция ДВС", "Конструкция и расчет гусеничных машин" и др.).

Классификация узлов и деталей по назначению

По функциональному назначению узлы и детали делятся на:

Корпусные детали, предназначенные для размещения и фиксации подвижных деталей механизма, для их защиты от действия неблагоприятных факторов внешней среды, а также для крепления механизмов в составе машин и агрегатов. Часто, кроме того, корпусные детали используются для хранения эксплуатационного запаса смазочных материалов.

Соединительные детали для разъемного и неразъемного соединения (например, муфты – устройства для соединения вращающихся валов; болты винты шпильки гайки – детали для разъемных соединений; заклепки – детали для неразъемного соединения).

Передаточные механизмы и детали, предназначенные для передачи энергии и движения от источника (двигателя) к потребителю (исполнительному механизму), выполняющему необходимую полезную работу. В курсе «Детали машин» рассматриваются в основном передачи вращательного движения: фрикционные, зубчатые, ременные, цепные и т.п. Эти передачи содержат большое число деталей вращения: валы, шкивы, зубчатые колеса и т.п. Иногда возникает необходимость передавать энергию и движение с преобразованием последнего, например, вращательного в поступательное и наоборот. В таких случаях используются кулачковые, реечные и рычажные механизмы.

Упругие элементы предназначены для ослабления ударов и вибрации или для накопления энергии с целью последующего совершения механической работы (рессоры колесных машин, противооткатные устройства пушек, боевая пружина стрелкового оружия).

Инерционные детали и элементы предназначены для предотвращения или ослабления колебаний (в линейном или вращательном движениях) за счет накопления и последующей отдачи кинетической энергии (маховики, противовесы, маятники, бабы, шаботы).

Защитные детали и уплотнения предназначены для защиты внутренних полостей узлов и агрегатов от действия неблагоприятных факторов внешней среды и от вытекания смазочных материалов из этих полостей (пыльники, сальники, крышки, рубашки и т.п.).

Детали и узлы регулирования и управления предназначены для воздействия на агрегаты и механизмы с целью изменения их режима работы или его поддержания на оптимальном уровне (тяги, рычаги, тросы и т.п.).

Основными требованиями, предъявляемыми к деталям машин, являются требования *работоспособности* и *надежности*. К деталям, непосредственно контактирующим с человеком-оператором (ручки и рычаги управления, элементы кабин машины, приборные щитки и т.п.), кроме названных предъявляются требования эргономичности и эстетичности. Еще одно важное требование, предъявляемое к машинам и их деталям – *технологичность конструкции*, которая характеризуется наименьшими затратами при производстве, эксплуатации и ремонте.

Объекты изучения раздела "Детали машин"

Предмет Детали машин изучает следующие объекты и составляющие звенья конструкций:

Соединения и детали соединений. Соединения разделяют на разъемные и неразъемные.

Разъемные соединения допускают многократную переборку. Их основные типы: резьбовые, шпоночные, шлицевые, клеммовые, на закрепительных конических втулках. ***Неразъемные соединения*** не допускают многократной переборки. Для разборки такого соединения его нужно разрушить. Основные типы: сварные, клеевые, паяные, заклепочные, соединения с натягом. Последние относят к неразъемным условно, так как они позволяют проводить сборку и разборку, но не многократно.

Детали передач. В курсе рассматривают механические передачи: зубчатые, планетарные, волновые, червячные, фрикционные, ременные, цепные, винт-гайка и некоторые другие.

Детали, обслуживающие вращательное движение – *валы* и *оси*, *подшипники качения* и *скольжения*, *муфты приводов*.

При изучении каждого из объектов рассматривается:

- Назначение объекта (передачи, муфты, соединения).
- Описание конструкции и принципа действия (работы).
- Области применения.
- Сравнительные достоинства и недостатки.
- Условия работы и действующие нагрузки.
- Характер и причины отказа – критерии работоспособности.
- Применяемые материалы и сведения о технологии изготовления.
- Методы расчета и конструирования (составление расчетной схемы; проектировочный и (или) проверочный расчет по основным критериям работоспособности; рекомендации по конструированию).
- Направления совершенствования конструкции и методов расчета.

При выполнении курсового проекта дополнительно изучают проектирование корпусных деталей (корпусов, рам, плит), деталей смазывающих устройств, упругих элементов и др.

Работоспособность и надежность деталей, механизмов и машин

Понятие надежности машины

Работоспособность - состояние изделия, при котором в данный момент времени его основные параметры находятся в пределах, установленных требованиями нормативно-технической документации и необходимых для выполнения его функциональной задачи. Попросту говоря, работоспособность изделия – это его способность нормально выполнять заданные функции.

Работоспособность количественно оценивается следующими показателями:

- ***Прочность*** *- способность детали выдерживать заданные нагрузки в течение заданного срока без нарушения работоспособности*.
- ***Жесткость*** *- способность детали выдерживать заданные нагрузки без изменения формы и размеров*.
- ***Износостойкость*** *- способность детали сопротивляться изнашиванию*.
- ***Стойкость к специальным воздействиям*** *- способность детали сохранять работоспособное состояние при проявлении специальных воздействий (теплостойкость, вибростойкость, радиационная стойкость, коррозионная стойкость и т.п.)*.

Неработоспособное состояние наступает вследствие отказа. ***Отказ*** *- событие, нарушающее работоспособность.* Отказы делятся на *постепенные* и *внезапные*; *полные* и *частичные*; *устранимые* и *неустранимые*.

Надежность *– свойство изделия сохранять во времени способность к выполнению требуемых функций в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.* Надежность характеризуют *состояниями* и *событиями*.

Свойство надежности количественно оценивается следующими показателями: наработкой на отказ *(среднее время работы изделия между двумя, соседними по времени отказами)*, коэффициентом готовности или коэффициентом технического использования *(отношение времени работы изделия к сумме времен работы, обслуживания и ремонта в течение заданного срока эксплуатации)*, вероятностью безотказной работы и некоторыми другими.

Показатели качества изделия по надежности: *безотказность*, *долговечность* и *ремонтопригодность*.

Безотказность – свойство изделия непрерывно сохранять работоспособность в течение заданного времени.

Долговечность – свойство изделия длительно сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при соблюдении норм эксплуатации. Под предельным понимают такое состояние изделия, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна.

Ремонтопригодность – свойство изделия, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособности путем технического обслуживания и ремонта.

Понятия надежности во времени: *наработка*, *ресурс* и *срок службы*.

Наработка – продолжительность или объем работы изделия (в часах, километрах пробега, числах циклов нагружения).

Ресурс – суммарная наработка изделия от начала эксплуатации до перехода в предельное состояние (в часах, километрах пробега и др.).

Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации изделия от начала до перехода в предельное состояние. Выражают обычно в годах. Срок службы включает наработку изделия и время простоев.

Основными показателями надежности являются:

- *по безотказности* – вероятность безотказной работы и интенсивность отказов;
- *по долговечности* – средний и гамма–процентный ресурс;
- *по ремонтопригодности* – вероятность восстановления.

Надежность машин и теория вероятности

Под вероятностью P(t) безотказной работы *понимают вероятность того, что в заданном интервале времени или в пределах заданной наработки не возникает отказ изделия. Если за время* t *наработки из числа* N *одинаковых изделий были изъяты из-за отказов* n *изделий, то вероятность безотказной работы изделия:*

$$P(t) = (N - n)/N = 1 - n/N.$$

Вероятность безотказной работы сложного изделия равна произведению вероятностей безотказной работы отдельных его элементов:

$$P(t) = P_1(t)\times P_2(t)\times P_3(t)\times\ldots\times P_n(t).$$

Отсюда следует, что *чем больше элементов в изделии, тем ниже его надежность*. Эксплуатация изделия с низким показателем $P(t)$ может оказаться нецелесообразной.

Интенсивность отказов (t). В разные периоды эксплуатации или испытаний изделий число отказов в единицу времени различно. *Интенсивностью отказов называют отношение числа* n *отказавших в единицу времени* t *изделий к числу изделий* $(N - n)$*, исправно работающих в данный отрезок времени, при условии, что отказавшие изделия не восстанавливают и не заменяют новыми:*

$$\lambda(t) = n/[(N - n)\times t].$$

Вероятность безотказной работы можно оценить по интенсивности отказов:

$$P(t) = 1 - \lambda(t) \times t.$$

Для деталей машин в качестве показателя долговечности используют ***средний ресурс*** *(математическое ожидание ресурса в часах работы, километрах пробега, миллионах оборотов)* или ***гамма–процентный ресурс*** *(суммарная наработка, в течение которой изделие не достигает предельного состояния с вероятностью, выраженной в процентах)*. Для изделий серийного и массового производства наиболее часто используют гамма–процентный ресурс: для подшипников качения, например, *90 %*-ный ресурс.

Под ***вероятностью восстановления*** понимают вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния изделия не превысит заданное значение.

Основы надежности закладывает конструктор при проектировании изделия (точностью составления расчетной схемы). Определение показателей надежности выполняют методами теории вероятностей, их используют при выборе оптимальных вариантов конструкции. Надежность зависит также от качества изготовления (неточности влияют на распределение нагрузок в зоне силового взаимодействия) и от соблюдения норм эксплуатации.

Основные критерии работоспособности и расчета деталей

Задачи раздела "Детали машин"

Критерии работоспособности: *прочность, жесткость, износостойкость, теплостойкость, виброустойчивость*. При конструировании работоспособность деталей обеспечивают выбором материала и расчетом размеров по основному критерию.

Выбор критерия для расчета обусловлен характером разрушения (видом отказа), типичным для той или иной детали, изделия. Так, для крепежных винтов основным критерием работоспособности является прочность, для ходовых винтов – износостойкость, для валов – жесткость.

Важнейшим критерием работоспособности является прочность, *т.е. способность детали сопротивляться разрушению или возникновению недопустимых пластических деформаций под действием приложенных к ней нагрузок.* ***Это абсолютный критерий. Ему должны удовлетворять все детали***.

Основы расчетов на прочность изучают в курсе "Сопротивление материалов". В курсе "Детали машин" общие методы расчетов на прочность рассматривают в приложении к конкретным деталям и придают им форму инженерных расчетов. На практике применяют расчеты на прочность по номинальным напряжениям, по коэффициентам безопасности или по вероятности безотказной работы.

Расчеты по номинальным напряжениям

Расчеты по номинальным напряжениям выполняют в качестве предварительных для выбора основных размеров (для проектировочных расчетов). При этом используют номинальные эксплуатационные (σ,τ) и допускаемые ($[\sigma],[\tau]$) напряжения с целью выполнения условий по:

- нормальным напряжениям: $\sigma \leq [\sigma]$
- касательным напряжениям: $\tau \leq [\tau]$

Эти расчеты наиболее просты и удобны для обобщения опыта конструирования путем накопления данных о напряжениях в хорошо зарекомендовавших себя конструкциях, работающих в близких или сходных условиях. Наиболее полезны такие данные для машин массового выпуска, опыт эксплуатации которых велик.

Расчеты по коэффициентам безопасности

В отличие от расчета по номинальным напряжениям они учитывают в явной форме отдельные факторы, влияющие на прочность: концентрацию напряжений, отличие в размерах деталей и опытных образцов, наличие упрочнений, а поэтому более точны. Вместе с тем, эти расчеты сохраняют условность, так как коэффициент безопасности вычисляют для некоторых условных характеристик материалов и значений нагрузок.

Расчет по вероятности безотказной работы

В ответственных конструкциях выполняют расчет по вероятности безотказной работы. Для широкого применения этого метода требуется накопление достоверного статистического материала по действующим нагрузкам и физико-механическим характеристикам материалов. Важным при расчетах на прочность является точное выявление действительных эксплуатационных нагрузок.

Нагрузки, действующие на детали и изделия

Нагрузки, определяющие напряженное состояние деталей, можно подразделить на постоянные и переменные по времени. Постоянные нагрузки: силы тяжести *(в транспортных и подъемно–транспортных машинах)*, давления жидкости или газа, от начальной затяжки резьбовых соединений, сил пластического деформирования заклепок.

Постоянные нагрузки могут вызывать переменные напряжения. Так, при вращении вала, нагруженного изгибающим моментом, одни и те же волокна его оказываются попеременно то в растянутой, то в сжатой зоне. Так же поочередный вход в зацепление зубьев зубчатых передач вызывает в них периодическое изменение напряжений.

Основные механические характеристики материалов (предел текучести σ_m, временное сопротивление $\sigma_в$) определяют при постоянных нагрузках.

Переменность нагружения обусловлена периодическим изменением нагрузок и соответственно напряжений. Продолжительность одного цикла нагружения называют ***периодом*** и обозначают T. Нагружение с одним максимумом и с одним минимумом в течение одного периода при постоянстве параметров цикла называют *регулярным нагружением*.

Характеристикой напряженности детали является цикл напряжений – совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения при регулярном нагружении. Цикл напряжений *(рис. 1)* характеризуют максимальным σ_{max}, минимальным σ_{min} и средним σ_m напряжениями, амплитудой σ_a напряжений, периодом T, коэффициентом асимметрии R:

$$R = \sigma_{min}/\sigma_{max},$$

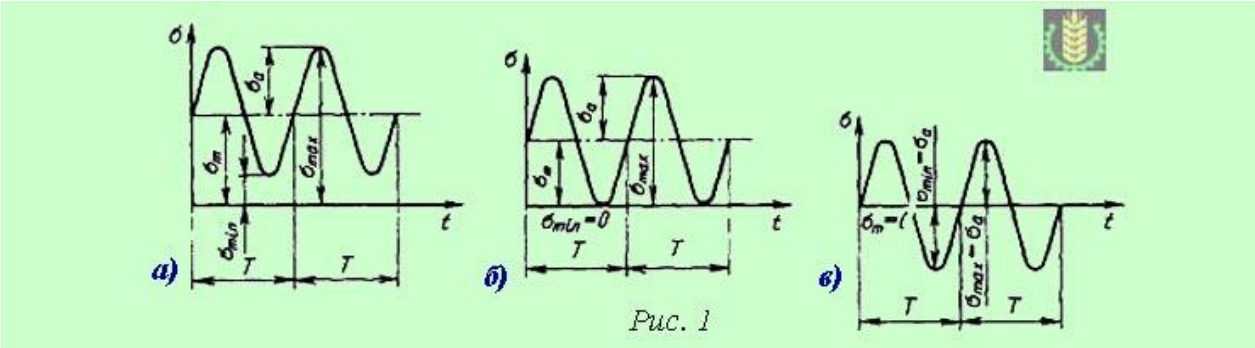


Рис. 1

Основные циклы напряжений *(рис. 1)*: ***а* – *асимметричный*** *(крепежные винты, пружины)*, ***б* –*отнулевой*** *(зубья зубчатых колес)*, ***в* – *симметричный*** *(валы, вращающиеся оси)*.

Разрушение деталей машин, длительное время подвергающихся действию переменных напряжений, происходит при значительно меньших напряжениях, чем временное сопротивление или предел текучести. Под действием переменных напряжений возникают необратимые изменения физико-механических свойств материала – усталостные повреждения *(образование микротрещин, их развитие и разрушение материала)*. *Процесс накопления повреждений называют* ***усталостью***. *Число циклов напряжений, выдержанных нагруженной деталью до усталостного разрушения, называют* ***циклической долговечностью***, которую можно оценить с помощью ***кривых усталости***.

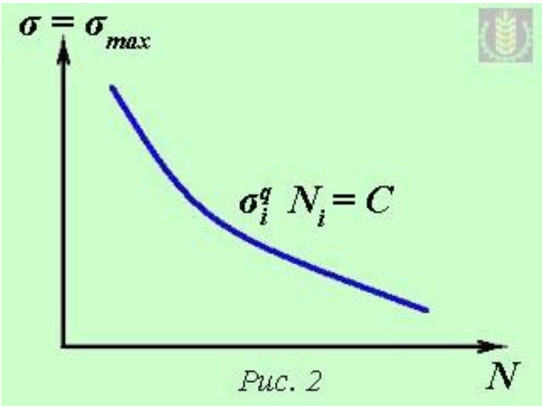


Рис. 2

Кривые усталости получают опытным путем, задавая испытуемым образцам различные значения напряжений $\sigma = \sigma_{max}$ *(рис. 2)* и определяя число N циклов, при котором происходит их разрушение. Кривые усталости описывают степенной функцией:

$$\sigma^q{}_i \times N_i = C,$$

где: С – постоянная, соответствующая условиям проведения эксперимента.

В завершение рассмотрения критерия прочности отметим, что такие разрушения, как смятие контактирующих поверхностей, их выкрашивание и изнашивание обусловлены действием контактных напряжений (напряжений в месте контакта криволинейных поверхностей двух прижатых друг к другу тел). Отказы около *50%* деталей *(зубчатые, фрикционные и червячные передачи, подшипники качения)*обусловлены действием контактных напряжений. Подробнее контактная прочность рассмотрена в разделе "Механические передачи".

Характеристика критериев работоспособности

Жесткость *– способность детали сопротивляться изменению формы и размеров под нагрузкой*. Роль этого критерия работоспособности возрастает в связи с тем, что прочностные характеристики материалов (например, сталей) постоянно улучшаются, что позволяет уменьшить размеры деталей, а упругие характеристики (модуль упругости) при этом не изменяются. Так, за последние *50* лет временное сопротивление σв легированных сталей повысили от *500* до *1500 МПа*при неизменном значении модуля упругости $E = 2{,}1 \times 10^5$ *МПа*.

Практические расчеты на жесткость проводят в форме ограничения упругих деформаций в пределах, допустимых для конкретных условий работы.

В уточненных расчетах прочности и жесткости деталей используют различные методы решения задач теории упругости, в частности метод конечных элементов *(МКЭ)*. Этот метод реализуют на ЭВМ с большой памятью и высоким быстродействием.

Износостойкость – *свойство материала оказывать сопротивление изнашиванию*. Под изнашиванием понимают процесс разрушения и отделения вследствие трения материала с поверхности твердого тела, проявляющийся в постепенном изменении размеров или формы.

Износостойкость зависит от физико-механических свойств материала, термообработки и шероховатости поверхностей, от значений давлений или контактных напряжений, скорости скольжения, наличия смазочного материала, режима работы и т.д.

Износ - *результат изнашивания*. Износ изменяет характер сопряжения, увеличивает зазоры в подвижных соединениях, вызывает шум, уменьшает толщину покрытия, снижает прочность деталей. Износ можно уменьшить, если разделить трущиеся детали смазочным материалом. В подшипниках скольжения с помощью гидродинамических расчетов определяют необходимую толщину масляного слоя. Для сравнительно медленно перемещающихся деталей (направляющие станков, ходовые винты) используют гидростатический контакт: масло в зону взаимодействия подают под давлением.

Универсального и общепринятого метода расчета на изнашивание нет. В большинстве случаев расчет проводят в форме ограничения действующих давлений р в местах контакта:

$$p \le [p],$$

Исследованиями контактного взаимодействия твердых тел при их относительном смещении занимается новая наука триботехника.

Теплостойкость – *способность конструкции работать в пределах заданных температур в течение заданного срока службы*. Нагрев деталей в процессе работы машины приводит к:

- Снижению механических характеристик материала и к появлению пластических деформаций – ползучести. Стальные детали, работающие при температурах ниже *300 °С*, на ползучесть не рассчитывают.
- Уменьшению зазоров в подвижных сопряжениях деталей и, как следствие, схватыванию, заеданию, заклиниванию.
- Снижению вязкости масла и несущей способности масляных пленок. С повышением температуры вязкость минеральных нефтяных масел снижается по кубической параболе – очень резко.

Для обеспечения нормального теплового режима работы проводят тепловые расчеты *(расчеты червячных и волновых редукторов, подшипников скольжения)*. При этом составляют уравнение теплового баланса *(тепловыделение за единицу времени приравнивают теплоотдаче)* и определяют среднюю установившуюся температуру при работе машины. С целью повышения теплоотдачи предусматривают охлаждающие ребра, принудительное охлаждение или увеличивают размеры корпуса.

Виброустойчивость – *способность конструкции работать в диапазоне режимов, достаточно далеких от области резонанса*. Вибрации снижают качество работы машин, увеличивают шум, вызывают дополнительные напряжения в деталях. Особенно опасны резонансные колебания.

В связи с повышением скоростей движения машин опасность вибраций возрастает. Поэтому расчеты на виброустойчивость приобретают все большее значение. Периодическое изменение внешних сил в поршневых машинах или сил от неуравновешенности вращающихся деталей, от погрешностей изготовления вызывает вынужденные колебания. При совпадении или кратности частоты вынужденных колебаний и частоты собственных колебаний наблюдают ***явление резонанса***.

При резонансе амплитуда колебаний достигает больших значений – происходит разрушение. Работать можно в до- или послерезонансной зонах. Переход через резонансную зону должен быть осуществлен достаточно быстро. Расчеты на виброустойчивость выполняют для машины в целом. Они сводятся к определению частот собственных колебаний механической системы и обеспечению их несовпадения с частотой вынужденных колебаний. К устройствам для снижения колебаний относят маховики, упругодемпфирующие элементы и демпферы, рассеивающие энергию колебаний.

Проектирование, расчет и моделирование типовых изделий

Проектирование изделий

Проектирование изделия – *разработка комплекта документации, необходимой для его изготовления, наладки и эксплуатации в заданных условиях и в течение заданного срока*. Проектирование является одним из этапов так называемого жизненного цикла изделия, в который входят также этапы производства, эксплуатации и утилизации. Проектирование представляет собой процесс решения многовариантной и в соответствии с многочисленными и разнообразными требованиями, которым каждый из возможных вариантов должен отвечать, еще и многокритериальной задачи.

Комплект технической документации, разработанный в результате проектирования, включает:

- *Комплект конструкторской документации (регламентируется комплексом стандартов ЕСКД).*
- *Комплект технологической документации (регламентируется комплексом стандартов ЕСТД).*
- *Комплект эксплуатационной документации (регламентируется комплексом стандартов ЕСКД). Последний включает формуляры, технические описания, инструкции по эксплуатации, инструкции по техническому обслуживанию, плакаты, макеты и т.п.*
- *Комплект ремонтной документации - ремонтные карты, ремонтно-технологические документы и т.п.*

При проектировании решаются следующие основные задачи:

- *Обеспечение заданных параметров изделия для работы в заданных условиях.*
- *Обеспечение минимальных затрат на производство заданного количества изделий при сохранении заданных эксплуатационных параметров для каждого выпущенного изделия.*
- *Сведение к минимуму эксплуатационных затрат при сохранении заданных эксплуатационных параметров изделия.*

При решении каждой из основных задач приходится находить решение целого ряда частных задач на разных этапах проектирования. При этом различные требования к изделию зачастую вступают в противоречие между собой. Искусство конструктора как раз и состоит в том, чтобы принять решение, позволяющее извлечь максимальный положительный эффект от разрабатываемого изделия.

Процесс проектирования изделия состоит из многих этапов (составление технического задания, расчет, конструирование, изготовление и испытание опытных образцов, разработка технологической документации, разработка эксплуатационной документации и т.п.), одними из главных среди которых являются расчет и конструирование.

В машиностроении основным является расчет деталей на прочность, который обычно выполняется в двух вариантах:

- *проектный расчет;*
- *проверочный расчет.*

Проектный расчет

Целью проектного расчета является установление необходимых размеров узлов и деталей, соответствующих заданным нагрузкам и условиям работы. В этом случае расчет выполняется исходя из основного условия прочности с учетом коэффициентов запаса прочности.

Для нормально работающей детали величина нормативного и фактического коэффициентов запаса обычно больше единицы, а фактический коэффициент запаса по величине больше нормативного.

Проектировочный расчет является предварительным и упрощенным. Он необходим для определения размеров, без которых невозможна первая чертежная проработка конструкции.

Проверочный расчет

Целью проверочного расчета является определение фактических характеристик главного критерия работоспособности детали или определение наибольшей допустимой нагрузки на деталь по допускаемым значениям главного критерия работоспособности. При проверочном расчете определяют фактические (расчетные) напряжения и коэффициенты запаса прочности, действительные прогибы и углы наклона сечений, температуру, ресурс при заданной нагрузке или допустимую нагрузку при заданных размерах и т. п.

Проверочный расчет является утонченным, его проводят, когда размеры и форма детали определены в проектировочном расчете или приняты конструктивно, разработана технология изготовления (способ получения заготовки, вид термообработки, качество поверхности и т. д.).

Расчеты неразрывно связаны с конструированием.

Что такое конструирование?

Конструированием *называют творческий процесс создания чертежей механизма или машины на основе проектировочных и проверочных расчетов*. При разработке конструкции машины рассматривают различные варианты с целью получения оптимальной конструкции при наименьшей стоимости ее изготовления и эксплуатации. Конструирование требует всестороннего анализа статистического материала, отражающего опыт проектирования, изготовления и эксплуатации машин данного типа.

Современная проектно–конструкторская деятельность подразумевает системный образ мышления и комплексный подход к проектированию машин.

Моделирование деталей и узлов машин

Изделие машиностроения – не простая совокупность деталей. В собранном изделии детали находятся во взаимосвязи и взаимозависимости, которые и определяют качественные характеристики изделия. Образно говоря, не машина состоит из деталей, а детали образуют машину, являясь элементами системы и требуя системного подхода при расчете и разработке. Таким образом, проектирование должно быть системным.

Системное проектирование – это решение технической задачи для части с позиций целого. Объединенные в производственном процессе отдельные единицы оборудования оказывают как непосредственное, так и косвенное влияние на работу друг друга и представляют собой технологические системы производств. Например, гибкие производственные системы *(комплексы механообработки)*.

Комплексное моделирование – это процесс разработки оборудования с позиций технологической системы.

Основные этапы комплексного моделирования

Среди этапов комплексного моделирования можно выделить следующие:

Формулировка задачи на разработку изделия и обоснование его актуальности, исходя из той системы, элементом которой будет разрабатываемое изделие. Определение места изделия в технической системе. Задачу формулируют в общем виде, без излишней детализации. Нужно стараться сделать формулировку настолько общей, насколько позволяет важность задачи.

Анализ задачи: уточнение в деталях поставленной задачи, определение критериев, которыми будут пользоваться при нахождении лучшего варианта, определение ограничений решения, разработка комплексной модели качества и составление на ее основе комплекса критериев. Устанавливают качественные и количественные характеристики начального и конечного состояний, в том числе вариации входа и выхода.

Устанавливают ограничения, отражающие существующие условия физической или технологической реализуемости того или иного параметра путем назначения его минимально и максимально допустимых значений. Например, ограничения по габаритам, массе, быстроходности или ограничения по критериям работоспособности и надежности. Часто используют понятие – конструктивные ограничения.

Ограничения решения сводят в систему неравенств и равенств и вводят в математическую модель. ***Математическая модель*** *– совокупность формул, уравнений, соотношений, алгоритмов или программ, отражающая свойства моделируемого объекта или имитирующая реальный процесс*.

Поиск возможных решений. Центральный этап проектирования. Для решения задач курса "Детали машин" наиболее часто используют ***структурное*** или***параметрическое моделирование***.

При структурном моделировании варианты приводов получают как возможные комбинации различных типов редукторов, муфт, открытых передач.

При параметрическом моделировании разные варианты заданной структуры привода получают путем применения разных материалов или видов термообработки, различного распределения передаточных чисел между отдельными передачами, применения различных исполнений той или иной передачи *(для ременной, например, с плоским, клиновым, поликлиновым или зубчатым ремнем)*.

Выбор оптимального варианта по результатам сравнительного анализа возможных решений. Это главный среди этапов, предшествующих конструированию, – этап принятия решения.

Формирование коплекса критериев. Разрабатываемое изделие характеризуют определенными свойствами. Свойства, по которым ведут оценку при выборе лучшего решения, называют***критериями***. В соответствии с комплексной моделью качества формируют комплекс критериев.

Завершают комплексное проектирование конструктивной разработкой оптимального варианта и последующим уточнением принятого решения на основе экспериментальных исследований или опытной эксплуатации.

Общие правила проектирования и конструирования

Среди общих правил проектирования и конструирования можно отметить следующие три.

Первое. При проектировании рассчитывают на нормальные условия эксплуатации. Так, если рассчитывать детали велосипеда из условий их стойкости к повреждению при наезде на непреодолимое препятствие, то получится перетяжеленная конструкция, которая будет трудна в эксплуатации.

Второе. Конструирование есть поиск оптимального компромиссного решения. Часто при проектировании должны быть удовлетворены противоречивые требования. Так, у боевого самолета должно быть обеспечено и достаточное бронирование кабины пилота (что требует увеличения массы) и необходимая дальность и скорость полета (что требует снижения массы).

Третье. При конструировании должно быть выполнено условие равнопрочности. Очевидно, что нецелесообразно конструировать отдельные элементы машины с излишними запасами несущей способности, которые все равно не могут быть реализованы в связи с отказом конструкции из–за разрушения или повреждения других элементов.

Соединения деталей машин

Понятия и определения соединений деталей машин

Каждая машина состоит из деталей, число которых зависит от сложности и размеров машины. Так автомобиль содержит около 16 000 деталей (включая двигатель), крупный карусельный станок имеет более 20 000 деталей и т.д.

Чтобы выполнять свои функции в машине детали соединяются между собой определенным образом, образуя *подвижные* и *неподвижные соединения*. Например, соединение коленчатого вала двигателя с шатуном, поршня с гильзой цилиндра *(подвижные соединения)*. Соединение штока гидроцилиндра с поршнем, крышки разъемного подшипника с корпусом *(неподвижное соединение)*.

Подвижные соединения определяют кинематику машины, а неподвижные – позволяют расчленить машину на отдельные блоки, элементы, детали.

Соединения состоят из соединительных деталей и прилегающих частей соединяемых деталей, форма которых подчинена задаче соединения. В отдельных конструкциях специальные соединительные детали могут отсутствовать.

С точки зрения общности расчетов все соединения делят на две большие группы: *неразъемные иразъемные соединения*.

Неразъемными *называют соединения, которые невозможно разобрать без разрушения или повреждения деталей*. К ним относятся заклепочные (клепаные), сварные, клеевые соединения, а также соединения с гарантированным натягом. Неразъемные соединения осуществляются силами молекулярного сцепления *(сварка, пайка, склеивание)* или механическими средствами *(клепка, вальцевание, прессование)*.

Разъемными *называют соединения, которые можно многократно собирать и разбирать без повреждения деталей*. К разъемным относятся резьбовые, шпоночные и шлицевые соединения, штифтовые и клиновые соединения.

По форме сопрягаемых поверхностей соединения делят на *плоское*, *цилиндрическое*, *коническое*,*сферическое*, *винтовое* и т.д.

Выбор типа и вида соединения определяется условиями взаимодействия деталей, требованиями к прочности соединения, условиями работы, требованиями к надежности, долговечности и др.

Область применения различных соединений

Как уже указывалось выше, подвижные и неподвижные соединения деталей машин для различых узлов, агрегатов и механизмов подбираются с учетом наибольшей целесообразности - прочностных характеристик, особенностей монтажа, экономичности *(стоимости изготовления и эксплуатации)* и т. д.

Сварные соединения применяются обычно для соединения деталей, испытывающих значительные по мощности, но постоянные по направлению нагрузки. Получают сварные соединения при помощи сварочных аппаратов различных типов (электродуговая сварка, газосварка и т.д.). Сварные швы могут быть сплошными, прерывистыми, круговыми. Бывает так же точечная сварка; применяются т.н. "электрозаклепки", представляющие собой сварные швы, уложенные внутри отверстия одной из соединяемых деталей на поверхность другой детали.

Пайка, в общем, по технологии и характеристикам сходна со сваркой, но отличается тем, что для пайки применяются специальные составы (припои), как правило на основе олова, свинца и флюсовых добавок. Наиболее широко пайка применяется в радиотехнике, электронике, при соединении деталей гидравлических систем (пайка трубок и штуцеров) и т.д.

Заклепочное (клепаное) соединение применяется в случаях, когда соединяемые детали испытывают знакопеременные нагрузки малой и средней мощности (в том числе вибрации), или знакопеременные нагрузки большой мощности, исключающие работу на срез. Пример: рамы, корпуса, крепление несъемных облицовок и т.п.

Резьбовые соединения применяются повсеместно и являются наиболее распространенным видом соединения в технике. Суть резьбового соединения в применении пары дополнительных деталей, соединяющихся посредством вворачивания одной детали в другую по резьбе, и тем самым соединяющих основные детали. Надежность резьбового соединения обеспечивается за счет силы трения в витках резьбы. Коэффициент трения в правильно соединенных деталях должен превышать коэффициент сдвига основных деталей. Величина коэффициента трения зависит от момента затяжки резьбового соединения, размеров и свойств резьбовой пары. Наиболее распространенными элементами резьбовых соединений являются болты, винты, шпильки, гайки.

Шпоночные и шлицевые соединения применяются при соединении деталей совместного вращения. Чаще всего это валы и зубчатые колеса, валы и шкивы, валы и муфты, а также валы и всевозможные рукоятки, толкатели и т.п. Шлицевое соединение обеспечивает передачу значительно большего момента, чем шпоночное и применяется в более нагруженных узлах.

Штифтовое соединение обеспечивает неподвижность и точную ориентацию деталей относительно друг друга и применяется, например, для обеспечения соосности отверстий в деталях разъемных корпусов (корпуса редукторов, коробок перемены передач и т.д.).

Требования к соединениям деталей машин

Проектирование соединений является очень ответственной задачей, поскольку большинство разрушений в машинах происходит именно в местах соединений.

К соединениям в зависимости от их назначения предъявляются требования прочности, плотности*(герметичности)* и жесткости.

При оценке прочности соединения стремятся приблизить его прочность к прочности соединяемых элементов, т. е. стремятся обеспечить равнопрочность конструкции.

Требование плотности является основным для сосудов и аппаратов, работающих под давлением. Уплотнение разъемного соединения достигается за счет:

- сильного сжатия достаточно качественно обработанных поверхностей;
- введения прокладок из легко деформируемого материала.

При этом рабочее удельное давление q в плоскости стыка должно лежать в пределах $q = (1{,}5...4)p$, *где: p – внутренне давление жидкости в сосуде*.

Экспериментальные исследования показали, что жесткость соединения во много раз меньше жесткости соединяемых элементов, а поскольку жесткость системы всегда меньше жесткости наименее жесткого элемента, то именно жесткость соединения определяет жесткость системы.

Пружинные стопорные шайбы изобрел английский инженер Джон Гровер *(1836-1892)*, именем которого иногда и называют эти детали в обиходе. Стопорение пружинными шайбами недостаточно надежно, и при высоких уровнях вибрации не исключает самоотвинчивание соединения.

Самоконтрящимися являются гайки с завальцованным пластмассовым стопорным кольцом. Резьба в кольце образуется при навинчивании на гайки винт.

Классификация механических передач

В зависимости от принципа действия механические передачи разделяют на две основные группы:

- передачи зацеплением *(зубчатые, червячные, цепные)*;
- передачи трением *(фрикционные, ременные)*.

Каждая из указанных групп передач подразделяется на две подгруппы:

- передачи с непосредственным контактом передающих звеньев;
- передачи с гибкой связью *(цепь, ремень)* между передающими звеньями.

Кроме этих основных классификационных признаков передачи подразделяют по некоторым другим конструктивным характеристикам: расположению валов, характеру изменения вращающего момента и угловой скорости, по количеству ступеней и т. д.

Классификация механических передач по различным признакам представлена ниже.

1. По способу передачи движения от входного вала к выходному: 1.1. Передачи зацеплением: *1.1.1.* с непосредственным контактом тел вращения - зубчатые, червячные, винтовые; *1.1.2.* с гибкой связью - цепные, зубчато-ременные. 1.2. Фрикционные передачи: *1.2.1.* с непосредственным контактом тел вращения – фрикционные; *1.2.2.* с гибкой связью - ременные.

2. По взаимному расположению валов в пространстве: 2.1. с параллельными осями валов - зубчатые с цилиндрическими колесами, фрикционные с цилиндрическими роликами, цепные; 2.2. с пересекающимися осями валов - зубчатые и фрикционные конические, фрикционные лобовые; 2.3. с перекрещивающимися осями - зубчатые - винтовые и гипоидные, червячные, лобовые фрикционные со смещением ролика.

3. По характеру изменения угловой скорости выходного вала по отношению к входному: редуцирующие *(понижающие)* и мультиплицирующие *(повышающие)*.

4. По характеру изменения передаточного отношения *(числа)*: передачи с постоянным*(неизменным)* передаточным отношением и передачи с переменным (изменяемым или по величине, или по направлению или и то и другое вместе) передаточным отношением.

5. По подвижности осей и валов: передачи с неподвижными осями валов - рядовые *(коробки скоростей, редукторы)*, передачи с подвижными осями валов *(планетарные передачи, вариаторы с поворотными роликами)*.

6. По количеству ступеней преобразования движения: одно-, двух-, трех- и многоступенчатые.

7. По конструктивному оформлению: закрытые и открытые *(безкорпусные)*.

Наибольшее распространение в технике получили следующие виды механических передач:

- Зубчатые *(цилиндрические, конические, гипоидные, волновые, планетарные и т. п.)*;
- Ременные *(плоскоременные, клиноременные, круглоременные и т. п.)*;
- Червячные;
- Фрикционные *(постоянной передачи, реверсы и вариаторы)*;
- Винтовые передачи.

Зубчато-ременные передачи можно выделить в отдельную группу передач с промежуточной гибкой связью, поскольку они способны передавать мощность и посредством трения, и посредством зацепления.

Основные характеристики механических передач

Главными характеристиками передачи, необходимыми для ее расчета и проектирования, являются ***передаваемые мощности*** (по величине и направлению) и ***скорости вращения валов*** – входных*(ведущих)*, промежуточных, выходных *(ведомых)*.

В технических расчетах вместо угловых скоростей обычно используются частоты вращения валов - $n_{вх}$ и $n_{вых}$, измеряемые в оборотах за минуту. Соотношение между угловой скоростью ω *(рад/сек)* и частотой вращения n *(об/мин)*:

$$\omega \approx \pi n/30$$

Еще важный параметр механической передачи – ***коэффициент полезного действия*** *(КПД)*, характеризующий потери мощности при передаче от двигателя к исполнительному элементу.

Фрикционные передачи

Общие понятия и определения

Фрикционными называют передачи, в которых движение передается силами трения, возникающими в зоне контакта между двумя катками *(колесами)*, прижимаемыми друг к другу с некоторой силой и при вращении одного из них. При этом сила трения, возникающая между катками фрикционной передачи, должна быть равна по величине или превышать передаваемое передачей окружное усилие.

Возможность передавать заданную нагрузку для фрикционных передач описывается условием:

$$R_f \geq F_t,$$

где: F_t *– передаваемая окружная сила;*

$R_f = fF_r$ *– сила трения в зоне контакта катков фрикционной передачи;* F_r *– прижимная сила;* f *– коэффициент трения.*

Если указанное выше условие не соблюдается, катки фрикционной передачи будут проскальзывать друг относительно друга, не передавая мощность.

Как правило, для создания требуемой силы трения R_f катки прижимают друг к другу силой F_r, которая во много раз превышает окружную силу F_t. При коэффициенте f трения *0,05...0,3* сила прижатия катков превосходит передаваемую *(окружную)* силу не менее, чем в *3...25* раз *(с учетом необходимого запаса сцепления)*. Прижатие катков фрикционной передачи может осуществляться различными способами – собственным весом конструкции, рычагами, пружинами или специальными устройствами.

Фрикционные передачи работают с небольшим упругим скольжением, которое обусловлено упругими деформациями поверхностных слоев катков.

Ременные передачи

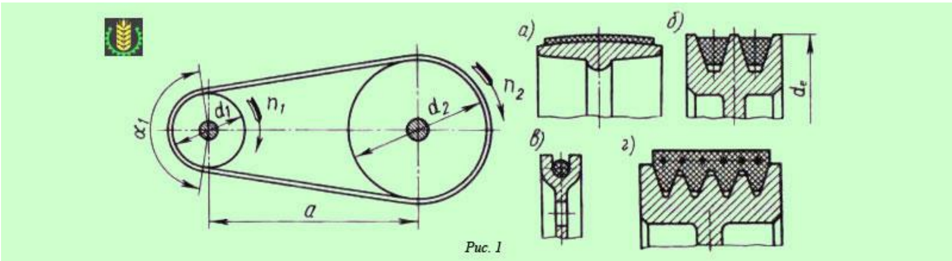
Общие сведения о ременных передачах

Ременные передачи относятся к передачам трением (фрикционным), у которых передача мощности осуществляется за счет сил трения, возникающих между ведущим, ведомым и промежуточным звеном – упругим ремнем *(гибкой связью)*. Ведущее и ведомое звено обычно называют шкивами. Этот тип передач обычно применяется для соединения валов, расположенных на значительном расстоянии друг от друга.

Для нормальной работы ременной передачи необходимо предварительное натяжение ремня, которое может осуществляться за счет перемещения одного из шкивов, за счет натяжных роликов или установки двигателя *(механизма)* на качающейся плите.

Классификация ременных передач

1. ***По форме поперечного сечения ремня***: плоскоременные *(поперечное сечение ремня имеет форму плоского вытянутого прямоугольника, рис. 1а)*; клиноременные *(поперечное сечение ремня в форме трапеции, рис. 1б)*; поликлиноременные *(ремень снаружи имеет плоскую поверхность, а внутренняя, взаимодействующая со шкивами, поверхность ремня снабжена продольными гребнями, выполненными в поперечном сечении в форме трапеции, рис. 1г)*; круглоременные*(поперечное сечение ремня имеет форму, рис. 1в)*; зубчатоременная *(внутренняя, контактирующая со шкивами, поверхность плоского ремня снабжена поперечными выступами, входящими в процессе работы передачи в соответствующие впадины шкивов, фото ниже)*.



Наибольшее применение в машиностроении имеют клиновые и поликлиновые ремни. Передачу круглым резиновым ремнем *(диаметром 3…12 мм)* применяют в приводах малой мощности*(настольные станки, приборы, бытовые машины и т. п.)*.

Разновидностью ременной передачи является зубчатоременная, в которой передача мощности осуществляется зубчатым ремнем путем зацепления зубцов ремня с выступами на шкивах. Этот тип передач является промежуточным между передачами зацеплением и передачами трением. Зубчатоременная передача не требует значительного предварительного натяжения ремня и не имеет такого недостатка, как скольжение ремня, которое присуще всем прочим ременным передачам.

Клиноременную передачу в основном применяют как открытую. Клиноременные передачи обладают большей тяговой способностью, требуют меньшего натяжения, благодаря чему меньше нагружают опоры валов, допускают меньшие углы обхвата, что позволяет применять их при больших передаточных отношениях и малому расстоянию между шкивами.

Клиновые и поликлиновые ремни выполняют бесконечными и прорезиненными. Нагрузку несет корд или сложенная в несколько слоев ткань.

Клиновые ремни выпускают трех видов: нормального сечения, узкие и широкие. Широкие ремни применяются в вариаторах.

Поликлиновые ремни – плоские ремни с высокопрочным кордом и внутренними продольными клиньями, входящими в канавки на шкивах. Они более гибкие, чем клиновые, лучше обеспечивают постоянство передаточного числа.

Плоские ремни обладают большой гибкостью, но требуют значительного предварительного натяжения ремня. Кроме того, плоский ремень не так устойчив на шкиве, как клиновый или поликлиновый.

2. ***По взаимному расположению валов и ремня***:

- с параллельными геометрическими осями валов и ремнем, охватывающим шкивы в одном направлении – ***открытая передача*** *(шкивы вращаются в одном направлении, рис. 2а)*;
- с параллельными валами и ремнем, охватывающим шкивы в противоположных направлениях –***перекрестная передача*** *(шкивы вращаются во встречных направлениях, рис. 2б)*;
- оси валов перекрещиваются под некоторым углом *(чаще всего 90°, рис. 2в)* –***полуперекрестная передача***;
- валы передачи пересекаются, при этом изменение направления потока передаваемой мощности осуществляется посредством промежуточного шкива или ролика - ***угловая передача*** *(рис. 2г)*.
-

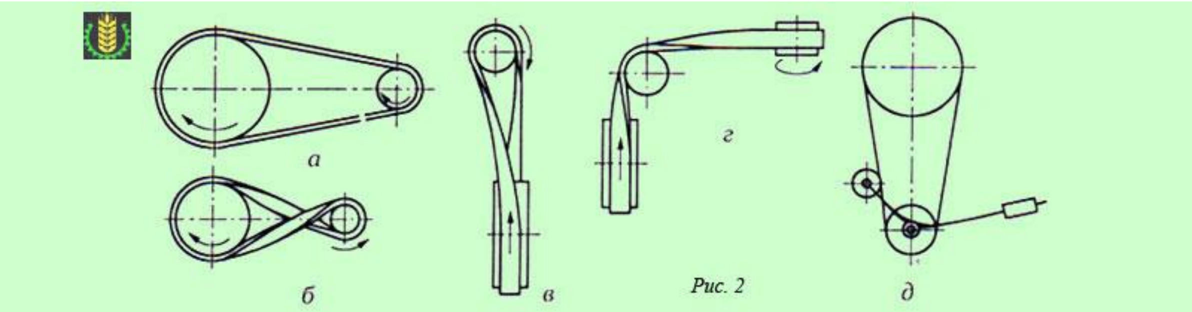


Рис. 2

3. ***По числу и виду шкивов***, применяемых в передаче: с одношкивными валами; с двушкивным валом, один из шкивов которого холостой; с валами, несущими ступенчатые шкивы для изменения передаточного числа (для ступенчатой регулировки скорости ведомого вала).

4. ***По количеству валов, охватываемых одним ремнем***: двухвальная, трех-, четырех- и многовальная передача.

5. ***По наличию вспомогательных роликов***: без вспомогательных роликов, с натяжными роликами*(рис. 2д)*; с направляющими роликами *(рис. 2г)*.

***

Достоинства ременных передач

К достоинствам ременных передач относятся следующие их свойства:

- Простота конструкции, малая стоимость изготовления и эксплуатации.
- Возможность передачи мощности на значительное расстояние.
- Возможность работы с высокими частотами вращения.
- Плавность и малый шум в работе вследствие эластичности ремня.
- Смягчение вибрации и толчков благодаря упругости ремня.
- Предохранение механизмов от перегрузок и ударов за счет возможности ремня проскальзывать*(к передачам с зубчатым ремнем это свойство не относится)*.
- Электроизолирующая способность ремня используется для предохранения ведомой части машин с электроприводом от появления опасных напряжений и токов.

Недостатки ременных передач

Основные недостатки ременных передач:

- Большие габаритные размеры *(в особенности при передаче значительных мощностей)*.
- Малая долговечность ремня, особенно в быстроходных передачах.
- Большая нагрузка на валы и подшипники опор из-за натяжения ремня *(этот недостаток менее выражен у зубчатоременных передач)*.
- Необходимость применения устройств натяжения ремня, усложняющих конструкцию передачи.
- Чувствительность нагрузочной способности к загрязнению звеньев и влажности воздуха.
- Непостоянное передаточное число вследствие неизбежного упругого скольжения ремня.

Область применения ременных передач

Ременные передачи применяют в большинстве случаев для передачи движения от электродвигателя или двигателя внутреннего сгорания,

когда по конструктивным соображениям межосевое расстояние должно быть достаточно большим, а передаточное число может быть не строго постоянным *(конвейеры, приводы станков, дорожных и сельскохозяйственных машин и т. п.)*. Передачи зубчатым ремнем можно применять и в приводах, требующих постоянного значения передаточного числа.

Мощность, передаваемая ременной передачей, обычно до *50 кВт*, но может достигать *2000 кВт* и даже более. Скорость ремня v = *5…50 м/сек*, а в высокоскоростных передачах – до *100 м/сек* и выше.

После зубчатой передачи ременная – наиболее распространенная из всех механических передач. Часто она используется в сочетании с другими типами передач.

Характеристика ременных передач разных типов

Плоскоременные передачи

Плоскоременные передачи применяют при скорости от *5* до *100 м/сек* для передачи мощности до*50 кВт* и передаточном числе i <*6*. Как правило, применяются следующие типы ремней:

1. ***Тканевые прорезиненные*** *(ОСТ 38.05.98.76)* шириной *20...1200 мм* и толщиной *3...13,5 мм* при скорости до *30 м/с (см. рис. 1а)* . Данный тип ремней выпускается конечной длины и поставляется в рулонах, из которых отрезают ремень необходимой длины *(с запасом на сшивку)*. Изготовляются из нескольких *(от 2 до 9)* слоев технических тканей *БКНЛ-65*, *БКНЛ-65-2* или бельтингов *Б-800*, *Б-820*, соединенных резиной, с последующей вулканизацией. Такие передачи передают любые нагрузки.

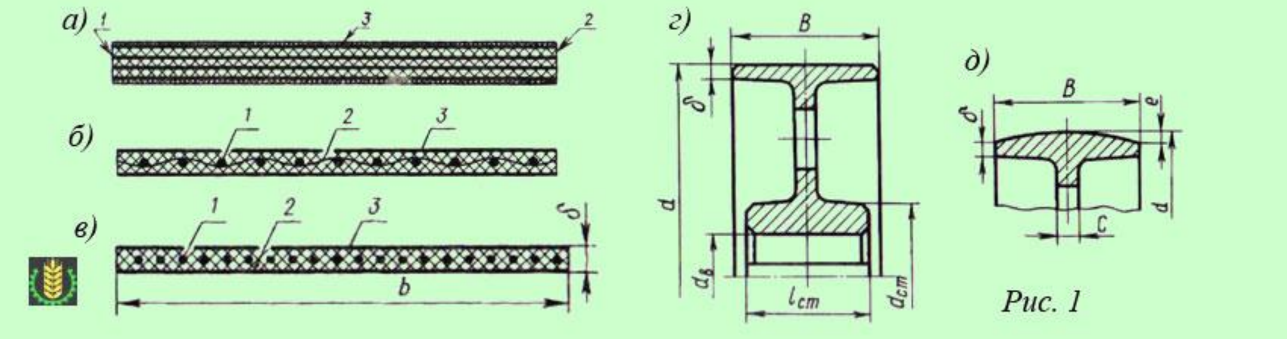


Рис. 1

2. ***Синтетические (капроновые) бесконечные*** *(по ТУ 17-21-307-79)* из ткани нескольких типов, пропитанные полиамидным раствором, шириной *10...100 мм*, длиной *250...3350 мм* и толщиной *0,5...1,0 мм*; допустимая скорость до *75 м/сек*, передаваемые нагрузки - малые и средние *(см. рис. 1б)*.

3. ***Кожаные*** *(ГОСТ 18697-73)* шириной *10...560 мм*, толщиной *3...6* (одинарные) и *7,5...10 мм(двойные склеенные)*. Применяются для малых и средних нагрузок при скорости до *40 м/сек*.

4. ***Хлопчатобумажные цельнотканые*** *(ГОСТ 6982-75)*, пропитанные сплавом *СП-1* и озокеритовой композицией *(см. рис. 1в)*. Применяются при малых и средних нагрузках и скорости до *25 м/сек*. Изготовляются четырех-, шести- и восьмислойные толщиной соответственно *4,5; 6,5 и 8,5 мм* и шириной *30...100, 50...150 и 100...250 мм* для шкивов минимальным диаметром *140, 200 и 300 мм*. Хлопчатобумажные бесконечные длиной до *10 мм* для высокоскоростных передач. Выпускаются двух типов: *прошивные прорезиненные* четырех-, шести- и восьмислойные шириной от *20* до *135 мм*; *тканые полульняные двухслойные* толщиной *1,75 мм* и шириной *15...55 мм*.

Способы соединения концов ремней конечной длины:

1. ***Склеивание прорезиненных ремней.*** Концы ремня расслаивают и срезают ступеньками длиной около *0,6* ширины ремня каждая и склеивают резиновым клеем с последующим прикатыванием роликом и вулканизацией.

2. ***Склеивание кожаных ремней***. Концы ремня срезают под острым углом по ходу ремня на длине от *100 мм* *(при малой ширине)* до *175 мм* *(при ширине свыше 150 мм)*. Клей для кожи должен оставаться эластичным после высыхания. Соединяемые концы прикатывают роликом, зажимают между двух пластин и просушивают.

3. ***Сшивка сыромятными ремешками или жильной струной***. Ведется внахлестку, с накладкой *(при скорости меньше 10 м/сек)* или встык *(при скоростях менее 20 м/сек)*. Отверстия в ремне пробивают пробойником, а в тканых ремнях прокалывают шилом в шахматном порядке в два или более ряда. Концы ремня в месте стыка для предохранения от растрескивания прошивают тонкой жилой.

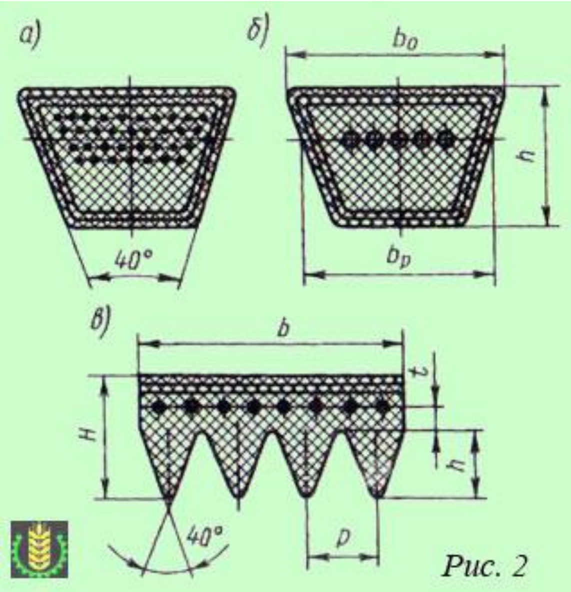
4. ***Соединение металлическими соединителями*** двух типов:
   - жесткими при скорости *<10-15 м/сек* и значительных диаметрах шкивов с помощью скрепок, скобок, заклепок, накладок с винтами и др.;
   - шарнирными при скорости *<15-25 м/сек* с помощью проволочных крючков, соединяемых металлическими или жильными стержнями, и спиралей.

Шкивы для плоскоременных передач изготавливают литыми, кованными, штампованными, сварными цельными или сборными. Наибольшее распространение получили литые шкивы из чугуна марки *СЧ15*, которые применяют при скоростях не более *30 м/сек*. Стальные литые или сварные шкивы допускают скорости до *60 м/сек*. Для снижения центробежных сил при высоких скоростях применяют шкивы из алюминиевых сплавов и пластмасс *(текстолит, волокнит)*.

Для предотвращения сползания ремня поверхность ведомого шкива делают выпуклой, а ведущего - цилиндрической *(рис. 1г, д)*. При скоростях более *25 м/сек* оба шкива делают выпуклыми. Значение выпуклости зависит от диаметра шкива и принимается по справочным таблицам.

Клиноременная передача

Клиновые ремни имеют трапециевидное поперечное сечение *(рис. 2а, б)*. Ремни работают на шкивах с канавками соответствующего ремню профиля.



Профили ремней и канавок шкивов имеют контакт только по боковым (рабочим) поверхностям ремней и боковым граням канавок шкивов. Между внутренней поверхностью ремня и дном канавки шкива должен быть зазор.

В передаче часто применяют несколько клиновых ремней *(комплект)*.

Клиновые ремни выполняются бесконечными прорезиненными, трапецеидальной формы с несущим слоем в виде нескольких слоев корда, ткани или шнура. В зависимости от соотношения ширины и высоты ремни изготовляют трех типов: нормального, узкого и широкого, применяемого в бесступенчатых передачах (вариаторах) по *ГОСТ 24848.1-81* и *ГОСТ 24848.3-81*.

Стандартизированы следующие расчетные *(по нейтральной линии)* длины ремней: *400, 450, 500, 560, 630, 710, 800, 900, 1000, 1120, 1250, 1400, 1600, 1800, 2000. 2240, 2500, 2800, 3150, 3550, 4000, 4500, 5000, 5600, 6300, 7100, 8000, 9000, 10 000, 11200, 12 500, 14 000, 16 000, 18 000*.

Шкивы имеют в ободе канавки под клиновой ремень. Угол канавок варьируется в диапазоне от *34*°до *40*° и зависит от диаметра шкива.

Чаще всего шкивы для клиноременных и поликлиноременных передач изготавливают точеными или литыми (шкивы большого диаметра). Материал шкивов - чугун, сталь, алюминиевые сплавы. Для уменьшения износа ремня боковые (рабочие) поверхности канавок шкива полируют.

Диаметр d цилиндра, на котором расположен нейтральный слой надетого на шкив ремня, называют ***расчетным диаметром шкива*** *(см. рис. 3а)*.

Достоинством клиноременных передач по сравнению с передачами плоским ремнем является то, что благодаря повышенному *(до трех раз)* сцеплению ремня со шкивами, обусловленному эффектом клина, они могут передавать большую мощность, допускают меньший угол обхвата на малом шкиве, а следовательно, допускают меньшее межосевое расстояние a. Клиноременная передача со шкивами специальной конструкции допускает бесступенчатое регулирование скорости *(ременные вариаторы)*.

Недостатками являются большие напряжения изгиба вследствие значительной высоты ремня, большие потери на внешнее и внутреннее трение, большая стоимость изготовления шкивов и неодинаковая работа ремней в комплекте вследствие отклонений в их длине.

Передачи клиновыми ремнями рекомендуют применять при малых межосевых расстояниях, больших передаточных числах, вертикальном расположении осей валов. Их можно встретить в приводах станков, промышленных установок, вентиляторов, в транспортных, дорожно-строительных и сельскохозяйственных машинах. Клиновые передачи применяют для мощностей до *200 кВт*.

Поликлиноременная передача

Поликлиновые ремни - бесконечные плоские ремни с продольными ребрами – клиньями, входящими в кольцевые клиновые канавки на шкивах *(рис. 2в)*. В поликлиновых ремнях корд из высокопрочного полиэфирного шнура расположен в тонкой плоской части. Резина над кордом и по ребрам ремня защищена оберткой. Выпускают также ремни без обертки, обеспечивающие коэффициент трения в *2* раза выше, чем при наличии обертки, что увеличивает тяговую способность, позволяет снижать предварительное натяжение.

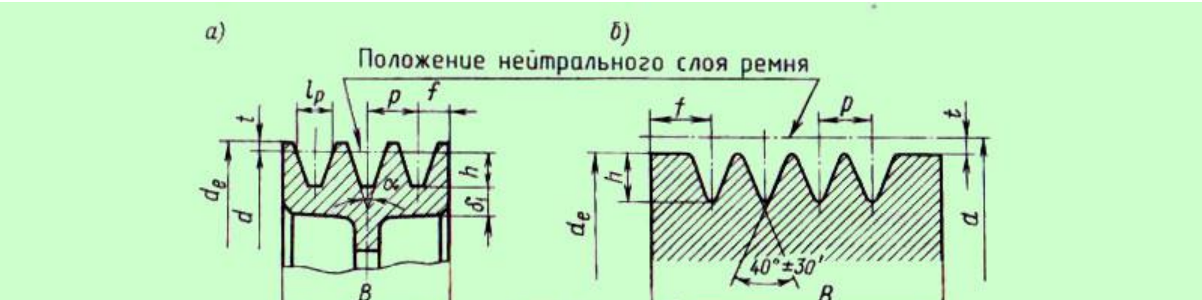


Рис. 3

Изготовляют поликлиновые ремни трех сечений *(в порядке увеличения высоты* H *ремня, высоты* h *ребра, шага* p*)*: ***К***, ***Л*** и ***М***.

Размер δ определяет положение нейтрального слоя.

Шкивы для поликлиновых ремней изготавливают аналогично шкивам для клиноременных передач*(см. рис. 3б)*.

Достоинства и недостатки поликлиновых ремней

Поликлиновые ремни сочетают достоинства ремней плоских *(гибкость)* и клиновых *(высокая тяговая способность)*. Благодаря высокой гибкости допускают применение шкивов малых диаметров. Поликлиновые ремни могут работать при скоростях до *65 м/сек*.

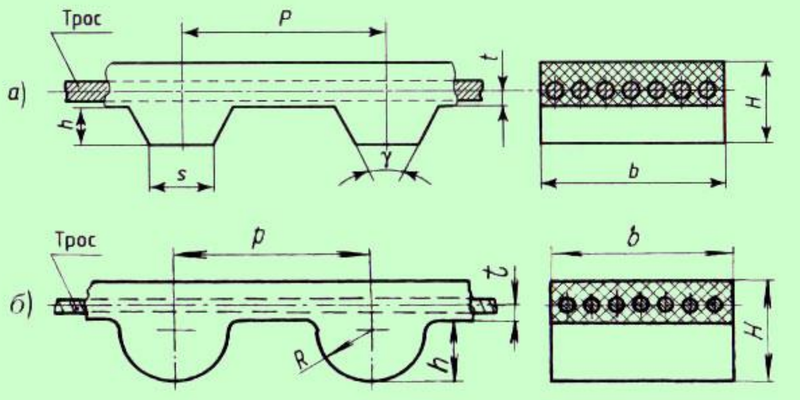
Рабочая поверхность расположена по всей ширине ремня, что обусловливает высокую нагрузочную способность: при одинаковой передаваемой мощности ширина b поликлинового ремня существенно меньше ширины комплекта клиновых ремней нормальных сечений. Поликлиновую передачу применяют при мощностях до *1000кВт*. Малая масса ремня способствует снижению уровня его колебаний.

К недостаткам поликлиноременных передач относится высокая чувствительность к относительному осевому смещению шкивов и отклонению от параллельности осей валов.

Зубчатоременная передача

Зубчатые ремни выполняют плоскими с поперечными зубьями на внутренней поверхности *(рис. 3)*. При работе передачи зубья ремня входят во впадины соответствующего профиля на шкивах. Передача зубчатым ремнем работает по принципу зацепления.

Зубчатое зацепление ремня со шкивом устраняет скольжение и необходимость в большом предварительном натяжении, уменьшает влияние угла обхвата *(межосевого расстояния)* на тяговую способность, что позволяет уменьшить габариты передачи и реализовать большие передаточные числа.



Зубчатый ремень с зубьями трапецеидальной *(а)* и полукруглой *(б)* формы

В соответствии с *ОСТ 38 05246-81* ремни изготовляются замкнутой длины из неопрена или полиуретана и армируются металлическим тросом. Зубья ремней имеют трапецеидальную или полукруглую форму. Во избежание схода ремня шкивы имеют по одному ограничительному диску с разных сторон либо малый шкив имеет два диска с обеих сторон.

Достоинства передач зубчатым ремнем

- Постоянное передаточное число.
- Малое межосевое расстояние.
- Небольшие нагрузки на валы и подшипники.
- Большое передаточное число *(i <12)*.
- Низкий уровень шума и отсутствие динамических нагрузок вследствие эластичности ремня и упругости зубьев.

Недостатки передач зубчатым ремнем

- Сравнительно высокая стоимость.
- Чувствительность к отклонению от параллельности осей валов.

Передачу зубчатым ремнем применяют как в высоконагруженных передачах *(например, кузнечно-прессовое оборудование)*, используя ее высокую тяговую способность, так и в передачах точных перемещений *(в связи с постоянством передаточного числа)*: приводы печатающих устройств *ЭВМ*, киносъемочная аппаратура, робототехника и др.

Мощность, передаваемая зубчатым ремнем, до *100кВт*; скорость ремня - до *60м/сек*; *КПД*передачи η = *0,94...0,98*.

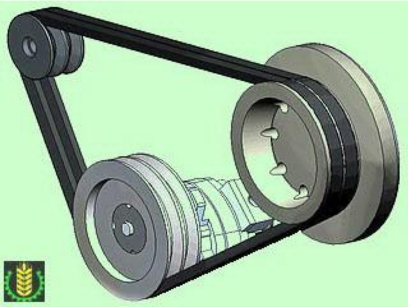
В зависимости от способа изготовления зубчатые ремни выпускают двух видов: ***сборочные*** и ***литьевые***.

Круглоременная передача

Круглоременная передача применяется для передачи малых мощностей. В таком типе передач применяют кожаные, хлопчатобумажные, текстильные или прорезиненные ремни диаметром *4...8 мм*. Шкив имеет канавку полукруглой или клиновидной формы с углом *40°*.

Рекомендации по конструированию ременных передач

1. Для удобства надевания и замены ремней шкивы передач должны быть установлены консольно – на концы валов и как можно ближе к опоре *(для уменьшения момента, изгибающего вал)*.



2. Для создания предварительного натяжения ремня и компенсации его удлинения при эксплуатации в конструкции ременной передачи должно быть предусмотрено устройство для натяжения ремня. Обычно это устройство используют и для установки нового ремня в передаче.

3. Рекомендуется ведомую ветвь передачи располагать сверху для увеличения угла обхвата α_1 при провисании ремня. При установке натяжного ролика его следует располагать на ведомой ветви внутри контура передачи.

4. На поверхности обода шкивов плоскоременных передач, работающих со скоростью более *40 м/сек*, необходимо протачивать кольцевые канавки для выхода из-под ремня воздуха, вовлекаемого в зазор между набегающей ветвью и шкивом и снижающего их сцепление.

5. Во избежание повышенного изнашивания ремней шероховатость рабочей поверхности шкива не должна быть больше R_a *2,5 мкм*.

6. Клиновые ремни не должны выступать за пределы наружного диаметра шкивов, в противном случае кромки канавок быстро разрушат ремень.

Цепные передачи

Общие сведения о цепных передачах

Цепная передача относится к передачам зацеплением с гибкой связью. Мощность в цепной передаче посредством многозвенной шарнирной цепи передается от ведущей к ведомой звездочке, размещенных на параллельных валах.

Классификация цепных передач

Цепные передачи классифицируют по типу применяемой цепи. В настоящее время применяют роликовые, втулочные и зубчатые цепи, которые, в свою очередь, могут быть однорядными и многорядными.

В роликовых и втулочных цепях зацепление звеньев со звездочкой осуществляется через ролик или втулку, при этом долговечность цепи возрастает, но возрастает ее масса и стоимость.

Зубчатые цепи набирают из пластин, при этом большое значение на эксплуатационные качества цепи имеет конструкция шарнира. В конструкцию входит направляющая пластина, предотвращающая сползание цепи со звездочки.

По сравнению со втулочными зубчатые цепи работают более плавно, обеспечивают большую кинематическую точность *(плавность хода передачи)*, могут передавать бóльшую мощность, имеют высокий *КПД*, но их масса и стоимость значительно выше.

В зависимости от типа применяемой цепи зависит конструкция звездочек цепной передачи. Звездочки для втулочной и роликовой цепи представлена на *рис. 2* слева, звездочка для зубчатой цепи – справа.

Достоинства цепных передач

По сравнению с зубчатыми передачами:

Преимущество цепных передач в сравнении с зубчатыми заключается в том, что они способны передавать движение между валами при значительных межосевых расстояниях *(до 8 м)*.

По сравнению с ременными передачами:

По сравнению с ременными передачами *(передачами трением)* цепные передачи *(передачи зацеплением)* выгодно отличаются компактностью, способностью передавать бóльшие мощности при одинаковых размерах, постоянством передаточного числа и меньшей требовательностью к предварительному натяжению цепи *(иногда предварительный натяг для цепных передач не применяется)*. Кроме того, цепные передачи устойчиво работают при малых межосевых расстояниях между звездочками, тогда как ременная передача может пробуксовывать при малых углах обхвата шкива ремнем.

К достоинствам цепных передач можно отнести высокий *КПД* и безотказность при работе в условиях частых пусков и торможений.

Недостатки цепных передач

1. Значительный шум и вибрация при работе вследствие удара звена цепи о зуб звездочки при входе в зацепление, особенно при малых числах зубьев и большом шаге *(этот недостаток ограничивает применение цепных передач при больших скоростях)*.

2. Сравнительно быстрое изнашивание шарниров цепи, необходимость применения системы смазывания и установки в закрытых корпусах.

3. Удлинение цепи вследствие износа шарниров и сход ее со звездочек, что требует применения натяжных устройств.

4. По сравнению с зубчатыми передачами цепные передают движение менее плавно и равномерно.

Область применения цепных передач

Цепные передачи находят широкое применение во многих областях машиностроения, конструкциях сельскохозяйственных и дорожных машин, станкостроении и т. д. Их применяют в станках, мотоциклах, велосипедах, промышленных роботах, буровом оборудовании, подъемно-транспортных, строительно-дорожных, сельскохозяйственных, полиграфических и других машинах для передачи движения между параллельными валами на значительные расстояния, когда применение зубчатых передач нецелесообразно, а ременных невозможно.

Цепные передачи наибольшее применение получили для передачи мощностей до *120 кВт* при окружных скоростях до *15 м/сек*.

Зубчатые передачи

В зубчатой передаче движение передается с помощью зацепления пары зубчатых колес. Меньшее зубчатое колесо принято называть шестерней, большое – колесом. Термин «зубчатое колесо» относится как к шестерне, так к большому колесу. При написании расчетных формул и указании параметров передачи шестерне присваивают индекс *1*, колесу – индекс *2*, например: d_1, d_2, n_1, n_2. Зубчатые передачи являются самым распространенным видом механических передач, поскольку они могут надежно передавать мощности от долей до десятков тысяч киловатт при окружных скоростях до*275 м/с*. По этой причине они широко применяются во всех отраслях машиностроения и приборостроения.

Достоинства зубчатых передач

К достоинствам этого вида механических передач относятся:

- Высокая надежность работы в широком диапазоне нагрузок и скоростей;
- Малые габариты;
- Большой ресурс;
- Высокий КПД;
- Сравнительно малые нагрузки на валы и подшипники;
- Постоянство передаточного числа;
- Простота обслуживания;

Недостатки зубчатых передач

Как и любой другой вид механических передач, зубчатые передачи имеют ряд недостатков, к которым относятся:

- Относительно высокие требования к точности изготовления и монтажа;
- Шум при больших скоростях, обусловленный неточностями изготовления профиля и шага зубьев;
- Высокая жесткость, не дающая возможность компенсировать динамические нагрузки, что часто приводит к разрушению передачи или элементов конструкции (для примера – ременная или фрикционная передача при внезапных динамических нагрузках могут пробуксовывать).

Классификация зубчатых передач

Зубчатые передачи классифицируются по ряду конструктивных признаков и особенностей. ***В зависимости от взаимного расположения осей***, на которых размещены зубчатые колеса, различают передачи цилиндрические (при параллельных осях), конические (при пересекающихся осях) и винтовые (при перекрещивающихся осях). Винтовые зубчатые передачи применяются ограниченно, поскольку имеют низкий КПД из-за повышенного скольжения в зацеплении и низкую нагрузочную способность. Тем не менее, они имеют и некоторые достоинства – высокую плавность хода и возможность выводить концы валов за пределы передачи в обе стороны.

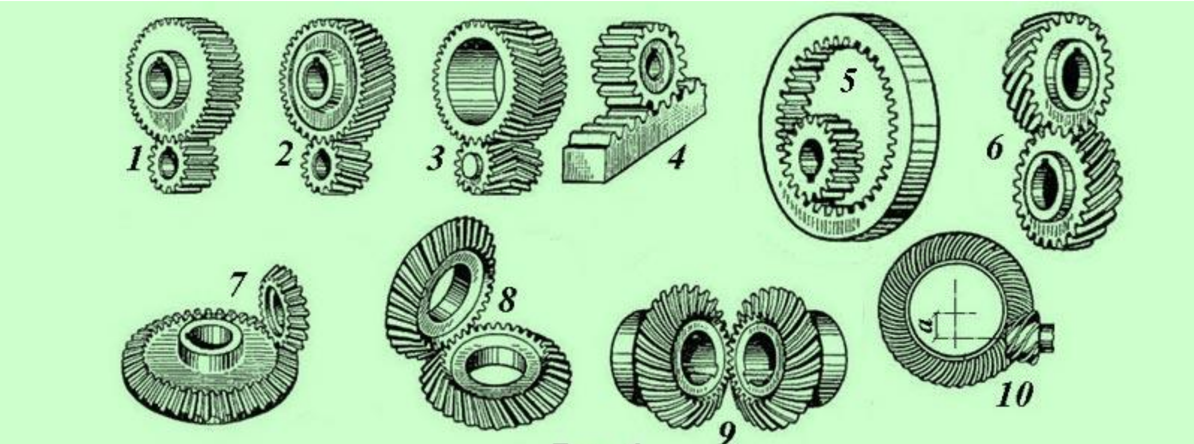


Рис. 1

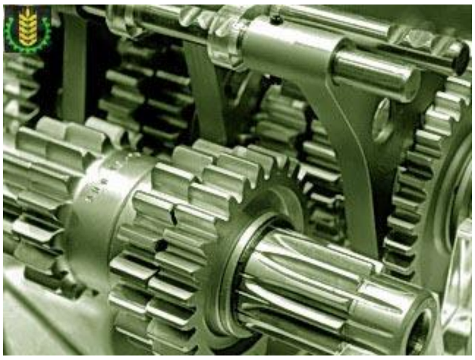
На рисунке *1* представлены наиболее широко применяемые виды зубчатых передач: *1 - цилиндрическая прямозубая передача; 2 - цилиндрическая косозубая передача; 3 - шевронная передача; 4 - реечная передача; 5 - цилиндрическая передача с внутренним зацеплением;6 - винтовая передача; 7 - коническая прямозубая передача;8 - коническая косозубая передача; 9 - коническая передача со спиралевидными зубьями; 10 - гипоидная передача.*

В зависимости от вида передаваемого движения различают зубчатые передачи, не преобразующие передаваемый вид движения и преобразующие передаваемый вид движения. К последним относятся реечные зубчатые передачи, в которых вращательное движение преобразуется в поступательное или наоборот. В таких передачах рейку можно рассматривать, как зубчатое колесо с бесконечно большим диаметром. Среди перечисленных видов зубчатых передач наиболее распространены цилиндрические передачи, поскольку они наиболее просты в изготовлении и эксплуатации, надежны и имеют небольшие габариты.

В зависимости от расположения зубьев на ободе колес различают передачи прямозубые, косозубые, шевронные и с круговыми (спиральными) зубьями. Шевронные зубчатые колеса можно условно сравнивать со спаренными косозубыми колесами, имеющими противоположный угол наклона зубьев. Такая конструкция позволяет избежать осевых усилий на валы и подшипники опор, неизбежно появляющихся в обычных косозубых передачах.

В зависимости от формы профиля зубьев различают эвольвентные зубчатые передачи и передачи с зацеплением Новикова.

Эвольвентное зацепление в зубчатых передачах, предложенное еще в 1760 году российским ученым Леонардом Эйлером, имеет наиболее широкое распространение. В 1954 году в России М. Л. Новиков предложил принципиально новый тип зацеплений в зубчатых колесах, при котором профиль зуба очерчен дугами окружностей. Такое зацепление возможно лишь для косых зубьев.



В принципе, возможно изготовление зубчатых передач и с другими формами зубьев – даже квадратными, треугольными или трапецеидальными. Но такие передачи имеют ряд существенных недостатков (непостоянство передаточного отношения, низкий КПД и т. д.), поэтому распространения не получили. В приборах и часовых механизмах иногда встречаются зубчатые передачи с циклоидальным зацеплением.

В зависимости от взаимного положения зубчатых колес передачи бывают с внешним и внутренним зацеплением. Наиболее распространены передачи с внешним зацеплением.

В зависимости от конструктивного исполнения различают закрытые и открытые зубчатые передачи. В закрытых передачах колеса помещены в пыле- и влагонепроницаемые корпуса (картеры) и работают в масляных ваннах (зубчатое колесо погружают в масло до 1/3 радиуса). В открытых передачах зубья колес работают всухую или при периодическом смазывании консистентной смазкой и не защищены от вредного воздействия внешней среды.

В зависимости от числа ступеней зубчатые передачи бывают одно- и многоступенчатые.

В зависимости от относительного характера движения осей зубчатых колес различают рядовые передачи, у которых оси неподвижны, и планетарные зубчатые передачи, у которых ось сателлита вращается относительно центральных осей.

Основы теории зубчатого колеса

Основная теорема зацепления

Профили зубьев колес должны быть сопряженными, т. е. заданному профилю зуба одного колеса должен соответствовать вполне определенный профиль зуба другого колеса. Чтобы выяснить, какова должна быть форма профиля зубьев пары колес, чтобы зацепление обеспечивало требуемое постоянство передаточного отношения, рассмотрим два зуба C и D, принадлежащих шестерне и колесу передачи и соприкасающихся в точке S (см. рисунок 2).

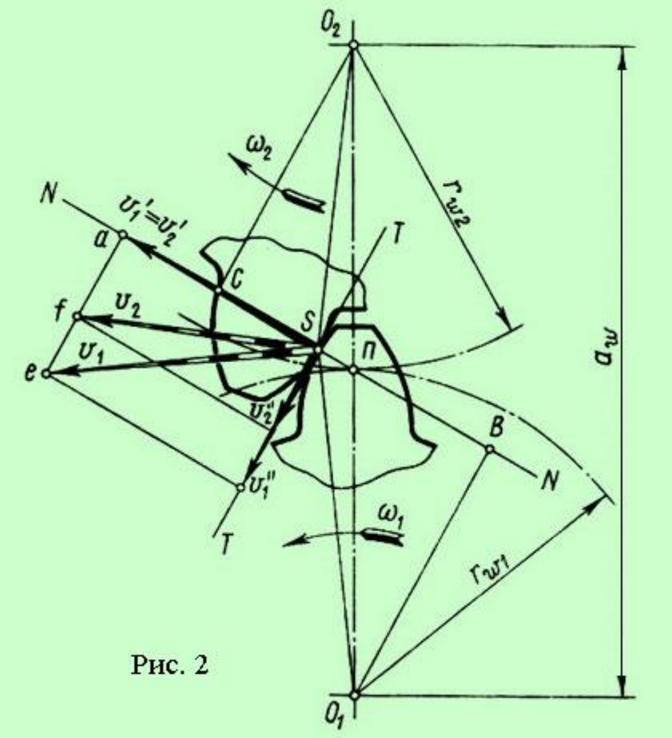


Рис. 2

C – ведущее колесо с центром вращения O_1, а D – ведомое колесо с центром вращения в точке O_2. Расстояние a_w между центрами O_1 и O_2 неизменно. Зуб шестерни, вращаясь с угловой скоростью ω_1, оказывает давление на зуб колеса, сообщая ему угловую скорость ω_2.

Проведем через точку S общую для обоих профилей касательную TT и нормаль NN. Очевидно, что окружные скорости точки касания зубьев S относительно центров вращения O_1 и O_2 будут равны:

$$v_1 = O_1S\omega_1 \quad \text{и} \quad v_2 = O_2S\omega_2.$$

Разложим скорости v_1 и v_2 на составляющие v'_1 и v'_2 по направлению нормали NN и составляющие v''_1 и v''_2 по направлению к касательной TT.

Для обеспечения постоянного касания профилей необходимо соблюдение условия $v'_1 = v'_2$, иначе, если скорость точки касания на зубе шестерни будет меньше скорости точки касания на зубе колеса (т. е. $v'_1 < v'_2$) , то зуб шестерни отстанет от зуба колеса, если же точка касания на зубе шестерни будет больше точки касания на зубе колеса ($v'_1 > v'_2$), произойдет врезание зубьев.

Опустим из центров O_1 и O_2 перпендикуляры O_1B и O_2C на нормаль NN.

Поскольку треугольники aeS и BSO_1 подобны, можно записать:

$$v'_1/v_1 = O_1B/O_1S,$$

откуда получим:

$$v'_1 = v_1O_1B/O_1S = \omega_1O_1B.$$

Из подобия треугольников afS и CSO_2 следует:

$$v'_2/v_2 = O_2C/O_2S,$$

откуда

$$v'_2 = v_2O_2C/O_2S = \omega_2O_2C.$$

Но $v'_1 = v'_2$, следовательно:

$$\omega_1O_1B = \omega_2O_2C.$$

Передаточное число: $u = \omega_1/\omega_2 = O_2C/O_1B.$ *(1)*

Нормаль ***NN*** пересекает линию центров O_1O_2 в точке ***П***, называемой ***полюсом зацепления***. Из подобия треугольников $O_2ПС$ и $O_1ПВ$ следует:

$$O_2C/O_1B = O_2П/O_1П = r_{w2}/r_{w1}. \qquad (2)$$

Сравнивая соотношения *(1)* и *(2)*, получим:

$$u = \omega_1/\ \omega_2 = rw_2/\ rw_1 = const. \qquad (3)$$

Это соотношение выражает основную теорему зацепления, которая может быть сформулирована следующим образом: ***Для обеспечения постоянного передаточного числа зубчатых колес профили их зубьев должны быть очерчены по кривым, у которых общая нормаль NN, проведенная через точку касания профилей, делит расстояние между центрами O_1O_2 на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.***

Полюс зацепления ***П*** сохраняет неизменное положение на линии центров O_1O_2, поэтому радиусы r_{w2} и r_{w1} также неизменны. Окружности радиусов r_{w1} и r_{w2} называют ***начальными***. При вращении зубчатых колес начальные окружности перекатываются друг по другу без скольжения, о чем свидетельствует равенство скоростей $\omega_1\ r_{w1}$ и $\omega_2\ r_{w2}$, полученное из формулы *(3)*.

Из множества кривых, удовлетворяющих требованиям основной теории зацепления, практическое применение в современном машиностроении получила эвольвента окружности, которая обладает следующими свойствами:

- *позволяет получить сравнительно точно и просто профиль зуба в процессе нарезания;*
- *без нарушения правильности зацепления допускает некоторое изменение межосевого расстояния aw, которое может появиться в результате неточностей изготовления и сборки, деформации деталей передачи при работе;*
- *обеспечивает высокую точность и долговечность зубьев, малые скорости скольжения точек контакта на поверхности зацепляющихся зубьев и высокий КПД.*

Работоспособность и надежность деталей, механизмов и машин

Понятие надежности машины

Работоспособность - состояние изделия, при котором в данный момент времени его основные параметры находятся в пределах, установленных требованиями нормативно-технической документации и необходимых для выполнения его функциональной задачи. Попросту говоря, работоспособность изделия – это его способность нормально выполнять заданные функции.

Работоспособность количественно оценивается следующими показателями:

- ***Прочность*** *- способность детали выдерживать заданные нагрузки в течение заданного срока без нарушения работоспособности*.

- ***Жесткость*** - *способность детали выдерживать заданные нагрузки без изменения формы и размеров*.
- ***Износостойкость*** - *способность детали сопротивляться изнашиванию*.
- ***Стойкость к специальным воздействиям*** - *способность детали сохранять работоспособное состояние при проявлении специальных воздействий (теплостойкость, вибростойкость, радиационная стойкость, коррозионная стойкость и т.п.)*.

Неработоспособное состояние наступает вследствие отказа. ***Отказ*** *- событие, нарушающее работоспособность.* Отказы делятся на *постепенные* и *внезапные*; *полные* и *частичные*; *устранимые* и *неустранимые*.

Надежность *– свойство изделия сохранять во времени способность к выполнению требуемых функций в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.* Надежность характеризуют *состояниями* и *событиями*.

Свойство надежности количественно оценивается следующими показателями: наработкой на отказ *(среднее время работы изделия между двумя, соседними по времени отказами)*, коэффициентом готовности или коэффициентом технического использования *(отношение времени работы изделия к сумме времен работы, обслуживания и ремонта в течение заданного срока эксплуатации)*, вероятностью безотказной работы и некоторыми другими.

Показатели качества изделия по надежности: *безотказность*, *долговечность* и *ремонтопригодность*.

Безотказность – свойство изделия непрерывно сохранять работоспособность в течение заданного времени.

Долговечность – свойство изделия длительно сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при соблюдении норм эксплуатации. Под предельным понимают такое состояние изделия, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна.

Ремонтопригодность – свойство изделия, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособности путем технического обслуживания и ремонта.

Понятия надежности во времени: *наработка*, *ресурс* и *срок службы*.

Наработка – продолжительность или объем работы изделия (в часах, километрах пробега, числах циклов нагружения).

Ресурс – суммарная наработка изделия от начала эксплуатации до перехода в предельное состояние (в часах, километрах пробега и др.).

Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации изделия от начала до перехода в предельное состояние. Выражают обычно в годах. Срок службы включает наработку изделия и время простоев.

Основными показателями надежности являются:

- *по безотказности* – вероятность безотказной работы и интенсивность отказов;
- *по долговечности* – средний и гамма–процентный ресурс;
- *по ремонтопригодности* – вероятность восстановления.

Надежность машин и теория вероятности

Под вероятностью P(t) безотказной работы *понимают вероятность того, что в заданном интервале времени или в пределах заданной наработки не возникает отказ изделия. Если за время* ***t*** *наработки из числа* ***N*** *одинаковых изделий были изъяты из-за отказов* ***n*** *изделий, то вероятность безотказной работы изделия:*

$$P(t) = (N - n)/N = 1 - n/N.$$

Вероятность безотказной работы сложного изделия равна произведению вероятностей безотказной работы отдельных его элементов:

$$P(t) = P_1(t) \times P_2(t) \times P_3(t) \times \ldots \times P_n(t).$$

Отсюда следует, что *чем больше элементов в изделии, тем ниже его надежность*. Эксплуатация изделия с низким показателем ***P(t)*** может оказаться нецелесообразной.

Интенсивность отказов (t). В разные периоды эксплуатации или испытаний изделий число отказов в единицу времени различно. *Интенсивностью отказов называют отношение числа* ***n*** *отказавших в единицу времени* ***t*** *изделий к числу изделий* ***(N – n)****, исправно работающих в данный отрезок времени, при условии, что отказавшие изделия не восстанавливают и не заменяют новыми:*

$$\lambda(t) = n/[(N - n) \times t].$$

Вероятность безотказной работы можно оценить по интенсивности отказов:

$$P(t) = 1 - \lambda(t) \times t.$$

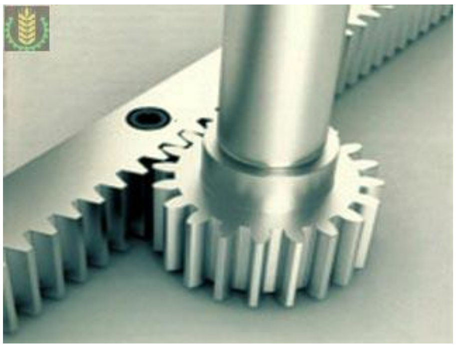
Для деталей машин в качестве показателя долговечности используют ***средний ресурс****(математическое ожидание ресурса в часах работы, километрах пробега, миллионах оборотов)*или ***гамма–процентный ресурс*** *(суммарная наработка, в течение которой изделие не достигает предельного состояния с вероятностью, выраженной в процентах)*. Для изделий серийного и массового производства наиболее часто используют гамма–процентный ресурс: для подшипников качения, например, *90 %*-ный ресурс.

Под ***вероятностью восстановления*** понимают вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния изделия не превысит заданное значение.

Основы надежности закладывает конструктор при проектировании изделия (точностью составления расчетной схемы). Определение показателей надежности выполняют методами теории вероятностей, их используют при выборе оптимальных вариантов конструкции. Надежность зависит также от качества изготовления (неточности влияют на распределение нагрузок в зоне силового взаимодействия) и от соблюдения норм эксплуатации.

Основные критерии работоспособности и расчета деталей

Задачи раздела "Детали машин"



Критерии работоспособности: *прочность, жесткость, износостойкость, теплостойкость, виброустойчивость*. При конструировании работоспособность деталей обеспечивают выбором материала и расчетом размеров по основному критерию. Выбор критерия для расчета обусловлен характером разрушения (видом отказа), типичным для той или иной детали, изделия. Так, для крепежных винтов основным критерием работоспособности является прочность, для ходовых винтов – износостойкость, для валов – жесткость.

Важнейшим критерием работоспособности является прочность, *т.е. способность детали сопротивляться разрушению или возникновению недопустимых пластических деформаций под действием приложенных к ней нагрузок.* ***Это абсолютный критерий. Ему должны удовлетворять все детали***.

Основы расчетов на прочность изучают в курсе "Сопротивление материалов". В курсе "Детали машин" общие методы расчетов на прочность рассматривают в приложении к конкретным деталям и придают им форму инженерных расчетов. На практике применяют расчеты на прочность по номинальным напряжениям, по коэффициентам безопасности или по вероятности безотказной работы.

Расчеты по номинальным напряжениям

Расчеты по номинальным напряжениям выполняют в качестве предварительных для выбора основных размеров (для проектировочных расчетов). При этом используют номинальные эксплуатационные (σ,τ) и допускаемые ($[\sigma],[\tau]$) напряжения с целью выполнения условий по:

- нормальным напряжениям: $\sigma \leq [\sigma]$
- касательным напряжениям: $\tau \leq [\tau]$

Эти расчеты наиболее просты и удобны для обобщения опыта конструирования путем накопления данных о напряжениях в хорошо зарекомендовавших себя конструкциях, работающих в близких или сходных условиях. Наиболее полезны такие данные для машин массового выпуска, опыт эксплуатации которых велик.

Расчеты по коэффициентам безопасности

В отличие от расчета по номинальным напряжениям они учитывают в явной форме отдельные факторы, влияющие на прочность: концентрацию напряжений, отличие в размерах деталей и опытных образцов, наличие упрочнений, а поэтому более точны. Вместе с тем, эти расчеты сохраняют условность, так как коэффициент безопасности вычисляют для некоторых условных характеристик материалов и значений нагрузок.

Расчет по вероятности безотказной работы

В ответственных конструкциях выполняют расчет по вероятности безотказной работы. Для широкого применения этого метода требуется накопление достоверного статистического материала по действующим нагрузкам и физико-механическим характеристикам материалов. Важным при расчетах на прочность является точное выявление действительных эксплуатационных нагрузок.

Нагрузки, действующие на детали и изделия

Нагрузки, определяющие напряженное состояние деталей, можно подразделить на постоянные и переменные по времени. Постоянные нагрузки: силы тяжести *(в транспортных и подъемно–транспортных машинах)*, давления жидкости или газа, от начальной затяжки резьбовых соединений, сил пластического деформирования заклепок.

Постоянные нагрузки могут вызывать переменные напряжения. Так, при вращении вала, нагруженного изгибающим моментом, одни и те же волокна его оказываются попеременно то в растянутой, то в сжатой зоне. Так же поочередный вход в зацепление зубьев зубчатых передач вызывает в них периодическое изменение напряжений.

Основные механические характеристики материалов (предел текучести σ_m, временное сопротивление $\sigma_в$) определяют при постоянных нагрузках.

Переменность нагружения обусловлена периодическим изменением нагрузок и соответственно напряжений. Продолжительность одного цикла нагружения называют ***периодом*** и обозначают T. Нагружение с одним максимумом и с одним минимумом в течение одного периода при постоянстве параметров цикла называют *регулярным нагружением*.

Характеристикой напряженности детали является цикл напряжений – совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения при регулярном нагружении. Цикл напряжений *(рис. 1)* характеризуют максимальным σ_{max}, минимальным σ_{min} и средним σ_mнапряжениями, амплитудой σ_a напряжений, периодом T, коэффициентом асимметрии R:

$$R = \sigma_{min}/\sigma_{max},$$

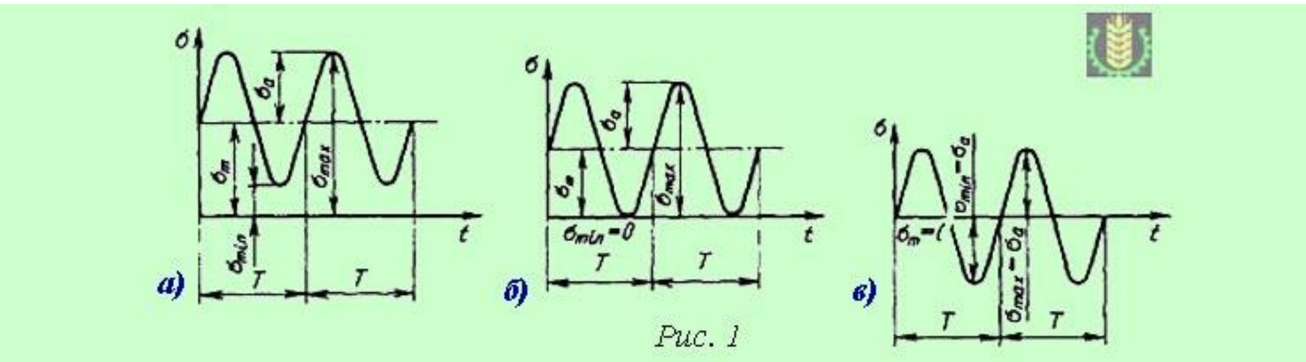


Рис. 1

Основные циклы напряжений *(рис. 1)*: ***а*** – ***асимметричный*** *(крепежные винты, пружины)*, ***б*** –***отнулевой*** *(зубья зубчатых колес)*, ***в*** – ***симметричный*** *(валы, вращающиеся оси)*.

Разрушение деталей машин, длительное время подвергающихся действию переменных напряжений, происходит при значительно меньших напряжениях, чем временное сопротивление или предел текучести. Под действием переменных напряжений возникают необратимые изменения физико-механических свойств материала – усталостные повреждения *(образование микротрещин, их развитие и разрушение материала)*. *Процесс накопления повреждений называют* ***усталостью***. *Число циклов напряжений, выдержанных нагруженной деталью до усталостного разрушения, называют* ***циклической долговечностью***, которую можно оценить с помощью ***кривых усталости***.

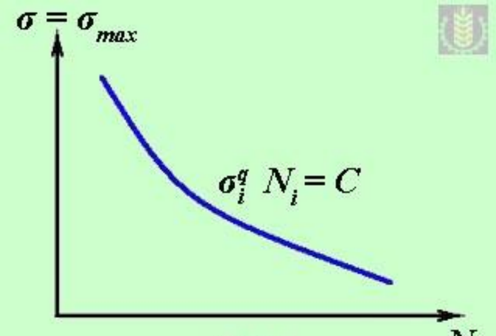


Рис. 2

Кривые усталости получают опытным путем, задавая испытуемым образцам различные значения напряжений σ = σ_{max} *(рис. 2)* и определяя число N циклов, при котором происходит их разрушение. Кривые усталости описывают степенной функцией:

$$\sigma^q{}_i \times N_i = C,$$

где: С – постоянная, соответствующая условиям проведения эксперимента.

В завершение рассмотрения критерия прочности отметим, что такие разрушения, как смятие контактирующих поверхностей, их выкрашивание и изнашивание обусловлены действием контактных напряжений (напряжений в месте контакта криволинейных поверхностей двух прижатых друг к другу тел). Отказы около *50%* деталей *(зубчатые, фрикционные и червячные передачи, подшипники качения)*обусловлены действием контактных напряжений. Подробнее контактная прочность рассмотрена в разделе "Механические передачи".

Характеристика критериев работоспособности

Жесткость *– способность детали сопротивляться изменению формы и размеров под нагрузкой*. Роль этого критерия работоспособности возрастает в связи с тем, что прочностные характеристики материалов (например, сталей) постоянно улучшаются, что позволяет уменьшить размеры деталей, а упругие характеристики (модуль упругости) при этом не изменяются. Так, за последние *50* лет временное сопротивление σв легированных сталей повысили от *500* до *1500 МПа*при неизменном значении модуля упругости $E = 2{,}1 \times 10^5$ *МПа*.

Практические расчеты на жесткость проводят в форме ограничения упругих деформаций в пределах, допустимых для конкретных условий работы.

В уточненных расчетах прочности и жесткости деталей используют различные методы решения задач теории упругости, в частности метод конечных элементов *(МКЭ)*. Этот метод реализуют на ЭВМ с большой памятью и высоким быстродействием.

Износостойкость *– свойство материала оказывать сопротивление изнашиванию*. Под изнашиванием понимают процесс разрушения и отделения вследствие трения материала с поверхности твердого тела, проявляющийся в постепенном изменении размеров или формы.

Износостойкость зависит от физико-механических свойств материала, термообработки и шероховатости поверхностей, от значений давлений или контактных напряжений, скорости скольжения, наличия смазочного материала, режима работы и т.д.

Износ *- результат изнашивания*. Износ изменяет характер сопряжения, увеличивает зазоры в подвижных соединениях, вызывает шум, уменьшает толщину покрытия, снижает прочность деталей. Износ можно уменьшить, если разделить трущиеся детали смазочным материалом. В подшипниках скольжения с помощью гидродинамических расчетов определяют необходимую толщину масляного слоя. Для сравнительно медленно перемещающихся деталей (направляющие станков, ходовые винты) используют гидростатический контакт: масло в зону взаимодействия подают под давлением.

Универсального и общепринятого метода расчета на изнашивание нет. В большинстве случаев расчет проводят в форме ограничения действующих давлений р в местах контакта:

$$p \leq [p],$$

Исследованиями контактного взаимодействия твердых тел при их относительном смещении занимается новая наука триботехника.

Теплостойкость *– способность конструкции работать в пределах заданных температур в течение заданного срока службы*. Нагрев деталей в процессе работы машины приводит к:

- Снижению механических характеристик материала и к появлению пластических деформаций – ползучести. Стальные детали, работающие при температурах ниже *300 °С*, на ползучесть не рассчитывают.
- Уменьшению зазоров в подвижных сопряжениях деталей и, как следствие, схватыванию, заеданию, заклиниванию.
- Снижению вязкости масла и несущей способности масляных пленок. С повышением температуры вязкость минеральных нефтяных масел снижается по кубической параболе – очень резко.

Для обеспечения нормального теплового режима работы проводят тепловые расчеты *(расчеты червячных и волновых редукторов, подшипников скольжения)*. При этом составляют уравнение теплового баланса *(тепловыделение за единицу времени приравнивают теплоотдаче)* и определяют среднюю установившуюся температуру при работе машины. С целью повышения теплоотдачи предусматривают охлаждающие ребра, принудительное охлаждение или увеличивают размеры корпуса.

Виброустойчивость *– способность конструкции работать в диапазоне режимов, достаточно далеких от области резонанса*. Вибрации снижают качество работы машин, увеличивают шум, вызывают дополнительные напряжения в деталях. Особенно опасны резонансные колебания.

В связи с повышением скоростей движения машин опасность вибраций возрастает. Поэтому расчеты на виброустойчивость приобретают все большее значение. Периодическое изменение внешних сил в поршневых машинах или сил от неуравновешенности вращающихся деталей, от погрешностей изготовления вызывает вынужденные колебания. При совпадении или кратности частоты вынужденных колебаний и частоты собственных колебаний наблюдают ***явление резонанса***.

При резонансе амплитуда колебаний достигает больших значений – происходит разрушение. Работать можно в до- или послерезонансной зонах. Переход через резонансную зону должен быть осуществлен достаточно быстро. Расчеты на виброустойчивость выполняют для машины в целом. Они сводятся к определению частот собственных колебаний механической системы и обеспечению их несовпадения с частотой вынужденных колебаний. К устройствам для снижения колебаний относят маховики, упругодемпфирующие элементы и демпферы, рассеивающие энергию колебаний.

Учебное издание

Саликова Т.С.

Методическое пособие по изучению дисциплины «Техническая механика» для обучающихся специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 17.09.2019 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага печатная. Усл. п.л. 9,12. Тираж 100 экз. Изд. №6482.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ