Брянская государственная сельскохозяйственная академия

Комогорцев В. Ф.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

для студентов
сельскохозяйственного вуза

Направление обучения
«Экономика»
(*бакалавриат*)

Брянск – 2014

УДК 517(07)
ББК 22.161
К 63

Комогорцев В. Ф. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: Учебное пособие / В. Ф. Комогорцев. – Брянск: Издательство Брянской ГСХА, 2014. - 201 с.

Данное учебное пособие соответствует федеральному государственному стандарту высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100 «Экономика», квалификация (степень) «бакалавр». Оно содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

Рецензент:
зав. кафедрой высшей математики и физики, к.т.н., доцент Панкова Е.А.;
доцент кафедры электрооборудования и электротехнологий Яковенко Н.И.

Рекомендовано к изданию учебно – методической комиссии факультета энергетики и природопользования от 06.02.14., протокол №1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Математический анализ – это важнейшая часть, ядро высшей математики. Со времен создания основ математического анализа берет свое начало вся высшая математика.

Главное содержание математического анализа составляют *дифференциальное и интегральное исчисления,* основу которых в конце 17 века заложили Исаак Ньютон (великий английский математик и физик) и Готфрид Лейбниц (великий немецкий математик и философ). Дифференциальное и интегральное исчисления составляют, можно сказать, стены и крышу здания математического анализа. Есть в этом здании и пристройки, появившиеся позже - например, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, ряды. А теоретическим фундаментом математического анализа является *теория пределов*, которая создавалась уже позже возведения самого здания этого анализа. И создавалась другими учеными, из которых в первую очередь следует назвать французского математика начала 19 века Огюстена Коши.

Отличительной чертой математического анализа является то, что в нем, в отличие от элементарной математики, изучаются не установившиеся, неизменные *состояния*, характеризуемые некоторыми постоянными величинами, а несравненно более сложные *процессы*, в ходе которых ключевые величины, характеризующие рассматриваемый процесс, меняют свои значения.

Например, не требует, очевидно, высшей математики задача об определении пути при постоянной скорости движения. И даже если эта скорость переменна, но сила, действующая на тело, постоянна (а, значит, при постоянной массе постоянно и ускорение тела), то математическое исследование такого движения тоже легко осуществляется с помощью элементарной математики. Но если, например, речь идет о математическом исследовании движения ракеты, у которой и масса меняется (из-за сгорания топлива), и сила тяги ее двигателей, и окружающая ракету среда не является неизменной, то тут уже элементарной математикой не обойдешься – нужно привлекать высшую. И в первую очередь – математический анализ.

Собственно говоря, математический анализ - это *анализ переменных величин и связей между ними*. Причем в математическом анализе при рассмотрении переменных величин ключевую роль играют *бесконечно малые изменения* этих величин. В связи с этим до недавних времен математический анализ называли *анализом бесконечно малых*.

Создание основ математического анализа революционным образом ускорило как развитие самой математики, так и всего естествознания в целом. Не случайно в это же время началась промышленная революция, охватившая многие страны Европы.

Особенно широкие возможности перед математическим исследованием различных природных и общественных процессов открылись в последние десятилетия в связи с появлением электронных вычислительных машин. Появилась возможность проводить необходимые расчеты там, где раньше они, в силу своего объема, были немыслимы. В последние десятилетия математика начала эффективно применяться даже в таких, казалось бы, далеких от нее науках, как биология, языкознание, медицина, и т.д.

Широко применяется математический анализ и в экономике. И особенно в современной, рыночной экономике. Действительно, в ее условиях каждой хозяйственной единице надо самостоятельно принимать решение, делать выбор. И если предприятие хочет преуспеть, то выбор этот должен быть хорошо обоснован и просчитан. Поэтому роль математических методов в современной экономике велика и постоянно возрастает.

Работая над данным пособием, автор стремился отобрать в него материал и преподнести его так, чтобы он был, во-первых, доступен сельским абитуриентам, составляющим большинство в сельскохозяйственном вузе, а во-вторых, чтобы в нем просматривалась определенная экономическая направленность. Поэтому всюду, где это было уместно, указываются возможности экономического применения излагаемого математического материала с примерами, не требующими для своего понимания каких-либо специальных экономических знаний.

Работая над текстом, автор стремился к тому, чтобы книгу можно было использовать как при аудиторном прохождении курса математического анализа, так и при самообразовании – например, заочниками. Поэтому наряду с примерами, иллюстрирующими теоретические выводы излагаемого курса, в конце каждого параграфа имеются и упражнения для самостоятельной работы с ответами.

И, наконец, последнее. Освоение математических методов позволяет приобрести не только расчетный аппарат для профессиональной деятельности специалиста любого профиля. Математика играет большую роль и в формировании общей культуры человека: как никакая другая наука, она учит логически мыслить, анализировать, обобщать, вырабатывает объективность, точность и сжатость мысли, воображение и фантазию. Ее значение, таким образом, выходит далеко за рамки прикладной науки. Однако ее изучение требует и немалого труда. Но, как говорил выдающийся экономист XIX века Карл Маркс, «в науке нет широкой столбовой дороги, и только тот достигнет ее сияющих вершин, кто, не страшась усталости, карабкается по ее каменистым тропам».

Глава 1

Пределы

Предел – это одно из самых фундаментальных понятий высшей математики вообще и математического анализа в частности. В данной главе мы рассмотрим две основные разновидности пределов:

1) предел переменной величины; 2) предел функции.

§ 1. Предел переменной величины

Переменная величина x – это величина, которая может менять свои значения. Этим она принципиально отличается от любой *постоянной величины a*, которая своего неизменного значения не меняет. Например, высота столба – величина постоянная, а высота живого растущего дерева – величина переменная.

Одна и та же величина в одних условиях может быть постоянной, а в других переменной. Например, в процессе движения тела его скорость может быть постоянной (если движение равномерное), а может быть и переменной, если движение неравномерное. То же самое касается и других величин, характеризующих движение тела - ускорения тела (оно постоянно при равноускоренном движении и переменно в более сложных случаях), кинетической энергии тела, и даже массы тела (у падающего кирпича она постоянная, у летящей ракеты из-за постоянно сгорающего топлива - переменная).

Постоянные величины считаются простейшими частными случаями величин переменных. В частности, высота дерева, если оно засохнет (умрет), из переменной становится постоянной. Ясно, что переменные величины и сложнее, и интереснее постоянных величин, ибо всякое движение, всякая жизнь и интереснее, и сложнее покоя.

Переменная величина может меняться плавно (непрерывно), а может меняться и скачкообразно (дискретно). В первом случае переменная величина называется *непрерывной*, а во втором *дискретной*. Например, путь, пройденный движущимся пешеходом, меняется, очевидно, непрерывно, ибо траектория движения пешехода – сплошная (непрерывная) линия. То есть этот путь – непрерывная переменная величина. А если отмечать этот путь лишь по оставляемым пешеходом следам на дороге, то в этом случае путь уже будет меняться скачкообразно (дискретно), и он будет дискретной переменной величиной. Аналогично скорость движущегося по дороге автомобиля меняется, очевидно, непрерывно. А скорость хаотичного движения молекулы газа, сталкивающейся с соседними молекулами, меняется в результате этих столкновений скачкообразно (дискретно). То есть скорость автомобиля - непрерывная переменная величина, а скорость молекулы – дискретная. И т.д.

В математическом анализе в основном рассматриваются непрерывные переменные величины. А с более простыми дискретными величинами систематически оперируют не в математическом анализе, а в так называемой *дискретной математике* (см., например, [5]).

Предел дискретной переменной величины

Пусть x – переменная величина. Причем сначала будем считать, что x – дискретная переменная величина. То есть x – переменная величина, меняющаяся скачкообразно. Она считается заданной, если задана *последовательность*

$$\{x_n\} = x_1; x_2; x_3; \ldots x_n; \ldots \tag{1.1}$$

ее значений. То есть тех значений x_1; x_2; x_3;…, которые она последовательно, одно за другим, принимает в процессе своего скачкообразного изменения (x_1 - первое значение переменной x, x_2 - второе, и т.д.).

Будем считать, что этот процесс изменения переменной величиной x своих значений ни на каком этапе не прекращается, у нее нет последнего значения, после которого она перестанет меняться и превратится в постоянную величину. Ибо в таком застывшем, «мертвом» виде она уже не будет нам интересна. А это значит, что последовательность (1.1) имеет бесконечное число членов, что и отмечено в (1.1) многоточием.

Естественно, возникает интерес относительно характера изменения величиной x своих значений. То есть возникает вопрос: меняются эти значения бессистемно, хаотически или все же как-то целенаправленно?

В принципе, для переменной x возможно и то, и другое. Основной интерес представляет, конечно, второй вариант.

А именно, пусть значения x_n переменной x в процессе их изменения, то есть по мере увеличения их номера n, неограниченно приближаются (*стремятся*) к некоторому конкретному числу a. Это значит, что разность (расстояние) между значениями x_n переменной x и числом a сокращается, стремясь при увеличении n (при $n \to \infty$) к нулю. Заменяя слово «стремится» стрелкой, сказанное выше можно записать так:

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty \quad <=> \quad |x_n - a| \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{1.2}$$

Если имеет место (1.2), то говорят, что *переменная x стремится к числу a*. Это число a называется *пределом переменной* x. И записывается это следующим образом:

$$\lim x = a \quad <=> \quad x \to a \tag{1.3}$$

Читается: *предел x равен a* (*x стремится к a*).

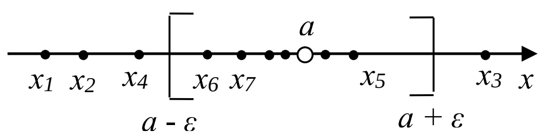


Рис. 1.1

Стремление дискретной переменной x к своему пределу a можно наглядно проиллюстрировать на числовой оси. Точный математический смысл этого стремления x к a состоит в том, что какое бы малое положительное число ε ни взять, а значит, каким бы малым промежутком $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]$ ни окружить на числовой оси число a, в этот промежуток (в так называемую ε-окрестность числа a) попадут, начиная с некоторого номера N, все значения x_n переменной x. В частности, на рис. 1.1 в изображенную ε-окрестность числа a попали все значения x_n переменной x, начиная с номера $N=5$.

Отметим, что совершенно не важно, стремится ли переменная x к своему пределу a монотонно (так, что каждое следующее ее значение находится ближе к пределу, чем предыдущее), или она делает это немонотонно - то приближаясь к своему пределу, то несколько удаляясь от него; находятся ли все значения переменной с одной стороны предела или с разных; достигает ли в каких–то своих значениях переменная своего предела или нет. Существенно лишь то, о чем говорится в определении предела: переменная x в конце концов должна подойти как угодно близко к своему пределу a и после этого (для всех более поздних своих значений) дальше от него уже ни с какой стороны не отходить.

Переменная x, имеющая своим пределом нуль (то есть стремящаяся к нулю) называется *бесконечно малой*. А переменная x, неограниченно растущая по абсолютной величине, называется *бесконечно большой* (ее модуль стремится к бесконечности).

Итак, если $x\to 0$, то x – бесконечно малая переменная величина. А если $|x|\to\infty$, то x – бесконечно большая переменная величина. В частности, если $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, то x – бесконечно большая переменная величина.

Если $x\to a$, то $x-a=\alpha\to 0$. И обратно, если $x-a=\alpha\to 0$, то $x\to a$. Отсюда получаем следующую важную связь между переменной x и ее пределом a:

$$\lim x=a\ (x\to a)\ \Leftrightarrow\ x=a+\alpha\ (\alpha\to 0) \tag{1.4}$$

Отметим, что не всякая переменная x имеет предел. У многих переменных нет предела. Есть он или нет – это зависит от того, какова последовательность (1.1) значений этой переменной.

<u>*Пример 1*</u>. Пусть

$$\{x_n\}=1{,}9;\ 1{,}99;\ 1{,}999;\ 1{,}9999;\ldots$$

- последовательность значений переменной x. Совершенно очевидно, что при такой последовательности своих значений переменная $x\to 2$, то есть $\lim x=2$.

<u>*Пример 2*</u>. Пусть

$$\{x_n\}=1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ldots$$

- последовательность значений переменной x. Здесь, очевидно, $x\to 0$, то есть $\lim x=0$. Значит, переменная x с такой последовательностью значений – бесконечно малая переменная.

<u>*Пример 3.*</u> Пусть

$$\{x_n\}=\frac{1+(-1)^n}{n}=0;\ \frac{2}{2};\ 0;\ \frac{2}{4};\ 0;\ \frac{2}{6};\ 0;\ \frac{2}{8};\ldots$$

Очевидно, что и здесь, как и в предыдущем примере, $x \to 0$. То есть и здесь переменная x - бесконечно малая. Обратим внимание: через раз переменная x достигает своего предела!

Пример 4. Пусть

$$\{x_n\} = 1^2;\, 2^2;\, 3^2;\, 4^2;...$$

Здесь, очевидно, $x \to +\infty$, то есть $\lim x = +\infty$. Переменная x из этого примера – бесконечно большая.

Пример 5. Пусть

$$\{x_n\} = 1;\, -1;\, 1;\, -1;...$$

Здесь, очевидно, переменная x ни к чему не стремится. То есть предела у нее нет ($\lim x$ не существует).

Пример 6. Пусть

$$\{x_n\} = \left\{\frac{3n}{2n-1}\right\} = \frac{3}{1};\, \frac{6}{3};\, \frac{9}{5};\, \frac{12}{7};...$$

Здесь ситуация с пределом переменной x не так очевидна, как в предыдущих пяти примерах. Для прояснения этой ситуации преобразуем значения x_n переменной x:

$$x_n = \frac{3n}{2n-1} = \left| \begin{array}{l} \textit{разделим числитель} \\ \textit{и знаменатель на } n \end{array} \right| = \frac{3}{2-1/n}$$

Очевидно, что $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $x_n = \frac{3}{2-1/n} \to \frac{3}{2-0} = \frac{3}{2}$ при $n \to \infty$.

А это значит, что переменная $x \to \frac{3}{2} = 1{,}5$, то есть $\lim x = 1{,}5$.

Пример 7. Пусть

$$\{x_n\} = \{q^n\} = q;\, q^2;\, q^3;\, q^4;...$$

Здесь последовательность $\{x_n\}$ значений переменной x представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем q. Следовательно, предел переменной x – это предел бесконечной геометрической прогрессии.

а) Если $-1 < q < 1$, то, очевидно, $x_n = q^n \to 0$ при $n \to \infty$. А это значит, что $x \to 0$ ($\lim x = 0$).

б) Если $q = 1$, то $\{x_n\} = \{q^n\} = 1;\, 1;\, 1;\, ...$. То есть в этом случае значения переменной x не меняются – они все время равны 1. Тогда и ее предел равен 1 ($\lim x = 1$).

в) Если $q = -1$, то $\{x_n\} = \{-1^n\} = -1;\, 1;\, -1;\, 1;...$. В этом случае, очевидно, $\lim x$ не существует.

г) Если $q > 1$, то $\{x_n\} = \{q^n\} = q;\, q^2;\, q^3;\, q^4;...$ – бесконечно возрастающая положительная числовая последовательность. А значит, $x \to +\infty$ ($\lim x = +\infty$).

д) Если $q < -1$, то вводя обозначение $q = -p$, где $p > 1$, получим: $\{x_n\} = \{q^n\} = \{(-p)^n\} = -p;\, p^2;\, -p^3;\, p^4;...$ – знакопеременная числовая последовательность с бесконечно возрастающими по абсолютной величине членами:

$$|x_n| = |(-p)^n| = |(-1)^n \cdot p^n| = p^n \to +\infty \text{ при } n \to \infty$$

А значит, переменная x бесконечно большая. Но в силу знакопеременности ее членов она не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$ (предела не имеет).

Предел непрерывной переменной величины

Пусть теперь x - непрерывная переменная величина. Это значит, что если эту величину представить себе как точку x числовой оси, то эта точка перемещается по числовой оси плавно, без скачков, оставляя после себя сплошной след. И если в процессе своего движения она все ближе и ближе приближается к некоторой неподвижной точке с координатой a, так что расстояние $|x-a|$ от точки x до точки a сокращается, стремясь к нулю, то такое число a является пределом переменной x. При этом, как и в случае дискретной переменной величины, пишут:

$$\lim x = a \quad <=> \quad x \to a \tag{1.5}$$

Стремление непрерывной переменной величины x к своему пределу a, как и стремление дискретной переменной величины к своему пределу, можно наглядно проиллюстрировать на числовой оси. Число a будет пределом переменной величины x, если какое бы малое положительное число ε ни взять, а значит, каким бы малым промежутком $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]$ ни окружить на числовой оси число a, наступит такой момент (такой этап) в изменении переменной x, после которого переменная x попадет в этот промежуток (в так называемую ε-окрестность числа a) и уже не будет выходить из нее. При этом совершенно не важно, движется ли точка x к своему пределу a монотонно или нет, и с какой стороны движется, и достигает ли когда-нибудь своего предела или нет. Главное, что такое число a существует. Если же такого числа не существует, то непрерывная переменная x предела не имеет.

В частности, если $\lim x = 0$, то есть если $x \to 0$, то непрерывная переменная x (как и дискретная) называется *бесконечно малой*. А если $|x| \to \infty$, то непрерывная переменная x, как и дискретная, называется *бесконечно большой.*

Основные свойства переменных величин и их пределов

Указанные ниже свойства имеют место как для дискретных, так и для непрерывных переменных величин. Они почти очевидны, хотя их можно и строго доказать.

1) Если $x = a$ (переменная x неизменна и равна постоянной a), то естественно считать, что и $\lim x = a$. То есть предел постоянной равен ей самой:

$$\lim a = a \tag{1.6}$$

2) Если $x \to a,\ y \to b$, и числа a и b конечны, то $z = x \pm y \to a \pm b$. То есть

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y \tag{1.7}$$

(предел суммы или разности переменных величин равен сумме или разности их пределов).

3) Если $x \to a,\ y \to b$, и числа a и b конечны, то $z = xy \to ab$. То есть

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y \tag{1.8}$$

(предел произведения переменных величин равен произведению их пределов).

4) Если $x \to a,\ y \to b,\ a$ и b конечны и $b \neq 0$, то $z = \frac{x}{y} \to \frac{a}{b}$. То есть

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \tag{1.9}$$

(предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю).

5) Если $x \to a$, и C - любая константа, то $Cx \to Ca$. То есть

$$\lim Cx = C \lim x \tag{1.10}$$

(постоянный множитель можно выносить за знак предела).

6) Если x – бесконечно малая переменная величина ($x \to 0$), то $y = \frac{1}{x}$ – бесконечно большая переменная величина ($|y| \to \infty$).

7) Если x – бесконечно большая переменная величина ($|x| \to \infty$), то $y = \frac{1}{x}$ – бесконечно малая переменная величина ($y \to 0$).

8) Если переменная x ограничена (это значит, что все ее значения расположены в некотором конечном числовом промежутке $[c_1; c_2]$), а переменная y бесконечно малая ($y \to 0$), то переменная $z = xy$ – тоже бесконечно малая ($z \to 0$).

9) Если переменная x ограничена, а переменная y бесконечно большая ($|y| \to \infty$), то переменная $z = \frac{x}{y}$ – бесконечно малая ($z \to 0$).

10) *Теорема Вейерштрасса*.

а) Пусть значения переменной x монотонно возрастают и при этом все они меньше некоторой постоянной величины C. Такая переменная x называется *монотонно возрастающей и ограниченной сверху* (числом C). Она заведомо имеет конечный предел a, причем $a \leq C$. Наглядную иллюстрацию этой ситуации для случая дискретной переменной величины дает рис. 1.2.

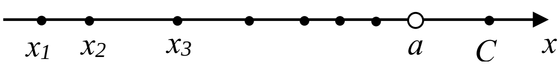


Рис. 1.2

б) Пусть значения переменной x монотонно убывают и при этом все они больше некоторой постоянной величины C. Такая переменная x называется *монотонно убывающей и ограниченной снизу* (числом C). Она заведомо имеет конечный предел a, причем $a \geq C$. Наглядную иллюстрацию этой ситуации для случая дискретной переменной величины дает рис. 1.3.

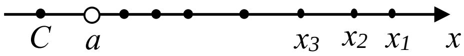


Рис. 1.3

Упражнения

1. $\{x_n\} = \left\{\frac{\cos n\pi}{n}\right\}$ (n = 1, 2, 3,…). Развернуть эту последовательность значений переменной x и найти ее предел.

Ответ: $\{x_n\} = -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$. $\lim x = 0$.

2. $\{x_n\} = 0{,}6;\ 0{,}66;\ 0{,}666; \dots$. Найти $\lim x$.

Ответ: $\lim x = \frac{2}{3}$.

3. $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2 - 4}{2n + n^2}\right\}$ (n = 1, 2, 3,…). Найти $\lim x$.

Ответ: $\lim x = 1$.

4. $\{x_n\} = \left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Найти $\lim x$.

Ответ: $\lim x = 1$.

5. $\{x_n\} = \{(-1)^n (2n+1)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Найти $\lim x$.

Ответ: $\lim x$ не существует.

6. $\{x_n\} = \left\{\frac{2n + (-1)^n}{n}\right\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Найти $\lim x$.

Ответ: $\lim x = 2$.

7. Пусть α_n - угол между соседними сторонами правильного n- угольника. Доказать, что $\alpha_n \to \pi$ при $n \to \infty$.

8. Точка x движется по оси ox по закону $x = \frac{2t+1}{t}$ ($t \geq 1, t$ - время). Построить график зависимости x от t. Показать, что точка непрерывно и монотонно движется по оси ox справа налево и стремится к точке 2, хотя и никогда не достигает ее.

9. Точка x движется по оси ox по закону $x = \dfrac{\sin t}{t}$ ($t \ge 1, t$ - время). Построить график зависимости x от t. Показать, что точка непрерывно движется по оси ox, неоднократно меняя при этом направление своего движения, и стремится к точке 0, регулярно (через одинаковые промежутки времени) достигая ее.

§ 2. Предел функции. Непрерывность и разрывы функций

Пусть $y = f(x)$ – некоторая функция, рассматриваемая на некотором промежутке оси ox (например, на отрезке $[a;b]$ или на интервале $(a;b)$ этой оси). То есть функцию $y = f(x)$ будем рассматривать лишь для значений x, принадлежащих этому промежутку. При этом предполагается, что функция определена (может быть вычислена) для любого значения x из этого промежутка. И пусть x_0 – некоторая внутренняя или граничная точка этого промежутка. Для отрезка $[a;b]$ такой точкой x_0 может быть любая точка этого отрезка. А для интервала $(a;b)$ – любая точка этого интервала, включая не принадлежащие ему его границы a и b.

Будем рассматривать значения функции $y = f(x)$ для аргумента x, стремящегося к x_0. Как при этом будет осуществляться это стремление, непрерывно или дискретно – это для нас неважно. При стремлении x к x_0 значения y функции $y = f(x)$ могут стремиться к некоторому значению y_0, конечному или бесконечному. И если это стремление y к y_0 осуществляется *при любом способе* стремления x к x_0, то число y_0 называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$. И записывается это так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \tag{2.1}$$

(читается: предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен y_0). Обратно, равенство (2.1) означает, что при $x \to x_0$ функция $y = f(x) \to y_0$. Причем стремление y к y_0 осуществляется *при любом способе* стремления x к x_0.

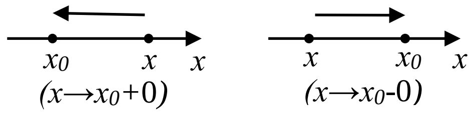


Рис.1.4

Отметим, что если x_0 – граничная точка числового промежутка оси ox, на котором рассматривается функция $y = f(x)$ (крайняя левая или крайняя правая его точка), то x может стремиться к x_0 либо только справа, либо только слева. Такое стремление x к x_0 обозначают соответственно $x \to x_0 + 0$ (x стремится к x_0 справа) и $x \to x_0 - 0$ (x стремится к x_0 слева) – рис. 1.4. А соответствующие пределы функции $y = f(x)$ называют соответственно пределами справа и слева:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = y_1 \text{ – предел функции } y = f(x) \text{ при } x \to x_0 \text{ справа;} \tag{2.2}$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=y_2$$ – предел функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ слева.

Такие пределы функции называются *односторонними.* А предел (2.1) называют *общим* (или *двусторонним*).

Если x_0 – внутренняя точка числового множества оси ox, на котором рассматривается функция $y=f(x)$, то для нее можно искать оба односторонних предела – и предел справа (при $x\to x_0+0$), и предел слева (при $x\to x_0-0$). Кроме того, можно искать и общий (двусторонний) предел (2.1). Очевидно, что если этот двусторонний предел существует и равен y_0, то существуют и оба односторонних, и оба они равны y_0. Обратно, если оба односторонних предела (2.2) существуют и равны, то существует и равен им и двусторонний предел (2.1).

Суть пределов функции, как двустороннего, так и односторонних, можно наглядно проиллюстрировать. В частности, сделаем это для двустороннего предела (2.1).

Согласно определению этого предела, при любом способе стремления x к x_0 соответствующее значение функции $y=f(x)$ стремится к y_0. То есть если x подойдет достаточно близко к x_0, то и $y=f(x)$ подойдет достаточно близко к y_0. Иначе говоря, как бы ни была мала ε-окрестность $[y_0-\varepsilon; y_0+\varepsilon]$ точки y_0, должна найтись такая соответствующая ей δ-окрестность $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ точки x_0, что как только x в своем стремлении к x_0 попадет в δ-окрестность точки x_0, соответствующее этому x значение функции $y=f(x)$ попадет в ε-окрестность точки y_0 (рис. 1.5).

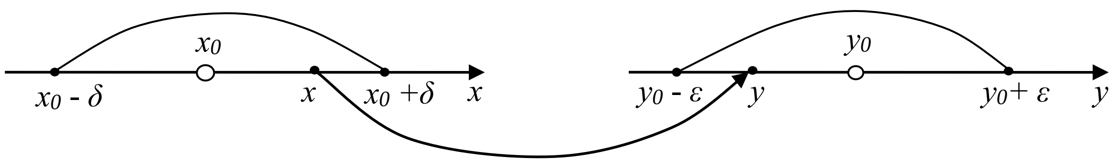


Рис. 1.5

Для иллюстрации же односторонних пределов (2.2) в рис. 1.5 нужно заменить двустороннюю δ-окрестность точки x_0 на соответствующую одностороннюю $[x_0;\ x_0+\delta]$ или $[x_0-\delta;\ x_0]$.

Теперь перейдем к рассмотрению такого важнейшего понятия, как *непрерывность функции.*

<u>*Непрерывность и разрывы функций*</u>

Если функция $y=f(x)$ определена для всех x из некоторого отрезка $[a;b]$ или интервала $(a;b)$ оси ox, и ее график для указанных x – сплошная (непрерывная) линия, то такая функция называется

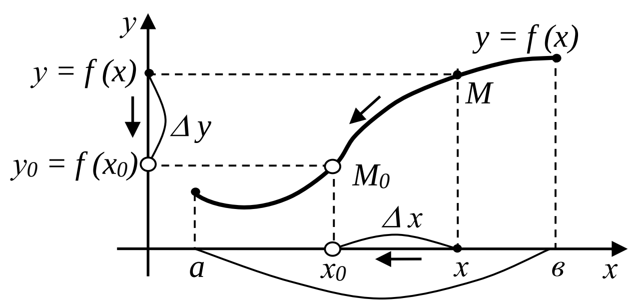


Рис. 1.6

непрерывной на этом отрезке или интервале. Непрерывная на отрезке или интервале функция считается непрерывной в любой конкретной точке x_0 этого отрезка или интервала.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0, то очевидно, что при $x \to x_0$ значение функции $y = f(x) \to y_0 = f(x_0)$ (рис. 1.6). Причем это стремление y к y_0 при $x \to x_0$ будет иметь место и при $x \to x_0 + 0$, и $x \to x_0 - 0$. Действительно, стремление x к x_0 вызывает для непрерывной функции стремление (приближение) точки M к точке M_0, а значит, и стремление ординаты y точки M к ординате y_0 точки M_0, с какой бы стороны от точки M_0 ни находилась точка M.

Стремление $y = f(x)$ к $y_0 = f(x_0)$ при $x \to x_0$ означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{2.3}$$

Если ввести обозначения (см. рис. 1.6)

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x \text{ – приращение аргумента } x \text{ в точке } x_0; \\ y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \Delta y \text{ – приращение функции } y = f(x) \text{ в точке } x_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

то стремление $y = f(x)$ к $y_0 = f(x_0)$ при $x \to x_0$, то есть выполнение равенства (2.3), означает, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. И обратно, если при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то это означает, что при аргументе $x \to x_0$ функция $y \to y_0$, а значит, выполняется равенство (2.3). Таким образом, условие

$$\Delta y \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0 \; (\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0) \tag{2.5}$$

и условие (2.3) равносильны. Оба они, в разной форме, представляют собой *математическое определение непрерывности функции* $y = f(x)$ *в заданной точке* x_0.

Если условие непрерывности (2.3) (или равносильное ему условие (2.5)) функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 не выполняется, то функция называется *разрывной в точке* x_0. А сама такая точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$. Например, точка x_0 является точкой разрыва функции $y = f(x)$ и на рис. 1.7(а), и на рис. 1.7(б), и на рис. 1.7(в).

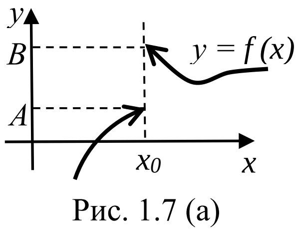


Рис. 1.7 (а)

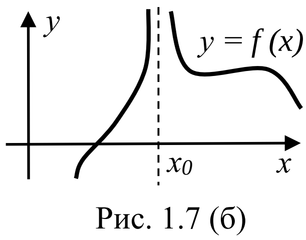


Рис. 1.7 (б)

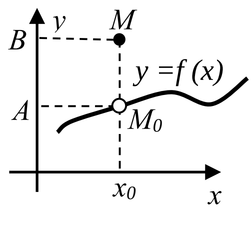


Рис. 1.7 (в)

Действительно, для рис. 1.7 (а) условие непрерывности (2.3) не выполняется сразу по двум причинам:

1) $f(x_0)$ – не существует; 2) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=B$; $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$; $B\neq A$. Значит, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ – не существует.

Для рис. 1.7 (б) условие непрерывности (2.3) тоже, очевидно, не выполняется. Действительно,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ (существует, хоть и не является конечным числом), но $f(x_0)$ – не существует.

На рис. 1.7 (в) из сплошного (непрерывного) графика функции $y=f(x)$ вырезана точка M_0 и перемещена по вертикали в другое положение M. В итоге точка x_0 становится точкой разрыва функции $y=f(x)$, ибо для неё получаем:

1) $f(x_0)=B$ – существует; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ – существует; 3) Однако $B\neq A$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. Если вернуть точку M на место (в точку M_0), то функция $y=f(x)$ опять станет непрерывной в точке x_0. Поэтому разрыв этой функции в точке x_0 , изображенный на рис. 1.7 (в), называется *устранимым*, а сама точка x_0 - *устранимой точкой разрыва*.

Разрывы же функции $y=f(x)$, изображенные на рисунках 1.7 (а) и 1.7 (б), являются, очевидно, неустранимыми. Причем эти разрывы по-разному называются: на рисунке 1.7 (а) точка x_0 - это точка разрыва 1-го рода, а на рисунке 1.7 (б) – 2-го рода. Разница здесь в том, что в точках разрыва первого рода происходит *конечный скачок* значения функции, а в точках разрыва второго рода – *бесконечный*.

Но какого бы рода ни была точка разрыва функции, суть этой точки во всех случаях одна и та же: *точкой разрыва функции $y=f(x)$ является такое значение x_0 аргумента x этой функции, при котором нарушается сплошность (непрерывность) ее графика.*

Вспомним, что графики всех основных элементарных функций (линейной $y=kx+b$, квадратичной $y=ax^2+bx+c$, обратно-пропорциональной зависимости $y=\dfrac{k}{x}$, показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических) являются сплошными (непрерывными) линиями для всех x, для которых эти функции определены. И разрыв указанные линии терпят лишь при тех изолированных значениях $x=x_0$, при которых соответствующие им функции не определены. Такие x_0 и являются точками разрыва элементарных функций.

Например, квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ определена для любых x. И ее график (парабола) является сплошной (непрерывной) линией при любых x. То есть точек разрыва у функции $y=ax^2+bx+c$ нет. А вот функция $y=\dfrac{k}{x}$ определена для любых x, кроме $x=0$. И соответственно ее график (гипербола) является сплошной (непрерывной) линией для любых x, кроме $x=0$, где она терпит разрыв (рис. 1.8 (а) и 1.8 (б)). Причем разрыв 2-го рода.

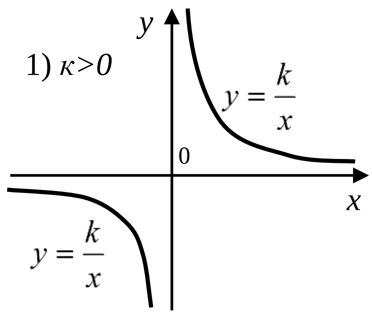


Рис.1.8 (а)

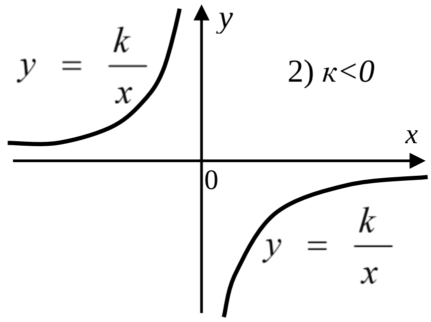


Рис.1.8 (б)

Указанным выше свойством основных элементарных функций обладают, как можно доказать, и любые конечные комбинации этих функций (их суммы, произведения, функции от функций, то есть сложные функции, и т.д.). То есть любые функции $y=f(x)$, составленные из основных элементарных функций (а с другими функциями, собственно говоря, мы встречаться практически и не будем) *будут непрерывны для всех значений аргумента x, для которых они определены*. А следовательно, *точками их разрыва будут лишь те отдельные изолированные точки x_0, в которых они не определены*. Изолированные – это значит такие точки x_0, что в окрестности $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ этих точек функция определена, и лишь в самих точках x_0 она не определена.

Например, функция $y=\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ определена, а следовательно, и непрерывна для любых x, кроме точек $x_1=0$ и $x_2=1$. В окрестности каждой из этих точек функция определена, и только в самих этих точках она не определена. Значит, эти точки $x_1=0$ и $x_2=1$ и есть точки разрыва данной функции y.

Выясним, заодно, и характер поведения этой функции возле каждой из ее точек разрыва – и справа, и слева.

1) Пусть $x\to 0+0$; тогда $y\to\left(\dfrac{1}{-0}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0} y=-\infty$.

2) Пусть $x\to 0-0$; тогда $y\to\left(\dfrac{1}{-0}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-0} y=-\infty$.

3) Пусть $x\to 1+0$; тогда $y\to\left(\dfrac{2}{+0}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0} y=+\infty$.

4) Пусть $x\to 1-0$; тогда $y\to\left(\dfrac{2}{-0}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0} y=-\infty$.

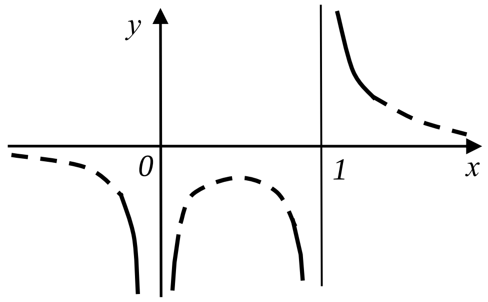


Рис. 1.9

Отобразив установленное поведение функции y возле ее точек разрыва, получим важные фрагменты графика функции (они изображены на рис. 1.9 сплошными линиями). Другие же части графика функции (обозначенные пунктиром) требуют для своего детального изображения дополнительного исследования. Но об этом поговорим позже, когда будет рассмотрена полная схема исследования функций (глава 2, § 3).

Рассмотрим теперь несколько примеров вычисления пределов функций.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2} x^2$.

Решение. Функция $y = x^2$ определена, а, следовательно, и непрерывна в любой точке x, в том числе и в точке $x = 2$. Поэтому, пользуясь равенством (2.3) для непрерывных функций, получаем:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

Впрочем, этот результат и так очевиден, ибо естественно, что при $x \to 2$ функция $y = x^2 \to 4$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$.

Решение. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ определена, а следовательно, и непрерывна для всех x, кроме $x = 0$. То есть $x = 0$ – точка разрыва этой функции. Поэтому найти искомый предел при $x \to 0$ по формуле (2.3), которая применяется лишь для непрерывных в точке x_0 функций, нельзя. Но это в данном случае и не важно – значение предела и так очевидно. Действительно, совершенно очевидно, что при любом способе стремления $x \to 0$ функция $y = \frac{1}{x^2} \to +\infty$. То есть

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty .$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Решение. При $x \to \infty$ функция $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$, очевидно, стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{x\to \infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = \left(\frac{3}{\infty}\right) = 0 .$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$.

Решение. Как и в примере 2, воспользоваться равенством (2.3) здесь нельзя, так как $x=2$ – точка разрыва функции $y=\dfrac{1}{x-2}$. Однако очевидно, что при $x\to 2+0$ функция $y\to+\infty$, а при $x\to 2-0$ функция $y\to-\infty$. То есть односторонние пределы типа (2.2) здесь разные:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty\,;\ \lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty\,.$$

А значит, общий $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ не существует.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{3x-x^2}$.

Решение. Воспользоваться равенством (2.3) и здесь нельзя, так как при $x=3$ функция $y=\dfrac{x^2-9}{3x-x^2}$ не определена (при $x=3$ выражение $\dfrac{x^2-9}{3x-x^2}$ дает неопределенное выражение $\dfrac{0}{0}$). Значит, как и в примерах (2) – (4), нужно анализировать поведение функции при $x\to 3$.

Функция $y=\dfrac{x^2-9}{3x-x^2}$ представляет собой дробь, у которой при $x\to 3$ и числитель, и знаменатель одновременно стремятся к нулю. Но стремление числителя дроби к нулю ведет к уменьшению этой дроби, а стремление знаменателя к нулю – наоборот, к ее увеличению. Какой фактор перевесит – пока неясно, в разных случаях бывает по-разному. То есть в данном пределе имеется неясность (неопределенность) типа $\dfrac{0}{0}$. Кстати, это не единственный возможный тип неопределенности, но о прочих типах – позже.

Неопределенность, встретившуюся при вычислении предела, нужно *раскрывать*. То есть как-то так преобразовать выражение под знаком предела, чтобы неопределенность исчезла и предел стал очевиден. В частности, раскроем нашу неопределенность:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3x-x^2}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(3-x)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{-x}=\frac{3+3}{-3}=-2$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-9}{x+4}$.

Решение. Здесь при $x\to\infty$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечности. Но стремление числителя дроби к бесконечности ведет к неограниченному росту дроби, а стремление знаменателя дроби к бесконечности, наоборот, ведет к неограниченному уменьшению дроби (к стремлению ее к нулю). Эти два фактора, как и в предыдущем примере, работают друг против друга, приводя к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем её:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-9}{x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\left|\begin{matrix}\textit{разделим числитель}\\ \textit{и знаменатель на } x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2-9/x}{1+4/x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{учтем, что при } x\to\infty\\ 9/x\to 0 \textit{ и } 4/x\to 0\end{matrix}\right|=\frac{2-0}{1+0}=2.$$

Неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ принадлежат к числу наиболее часто встречающихся при вычислении пределов неопределенностей. Но есть и другие типы неопределенностей. Всего этих типов семь:

$$1)\ \frac{0}{0}=?;\ 2)\ \frac{\infty}{\infty}=?;\ 3)\ 0\cdot\infty=?;\ 4)\ \infty-\infty=?; \tag{2.6}$$

$$5)\ \infty^0=?;\ 6)\ 0^0=?;\ 7) 1^\infty=?.$$

Эти записи нужно понимать не буквально, не как арифметические операции с символами 0 и ∞, а как *предельные ситуации при вычислении пределов*. Для сравнения приведем другие предельные ситуации, неопределенностями не являющиеся:

$$1)\ \infty+\infty=\infty;\ 2)\ \infty\cdot\infty=\infty;\ 3)\ \frac{0}{\infty}=0;\ 4)\ \frac{\infty}{0}=\infty$$

$$\left(\frac{+\infty}{+0}=+\infty;\ \ \frac{+\infty}{-0}=-\infty;\ \ \frac{-\infty}{+0}=-\infty;\ \ \frac{-\infty}{-0}=+\infty\right)$$

$$5)\ 0^{+\infty}=0;\ 6)\ 0^{-\infty}=\frac{1}{0^{+\infty}}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

Если при вычислении предела функции возникает какая-либо из неопределенностей (2.6), ее нужно как-то раскрывать. Если неопределенности нет, значит, ситуация ясная, и результат следует записать сразу.

<u>*Пример 7*</u>. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-x^2)$.

<u>*Решение*</u>.

$$\lim_{x\to\infty}(2x-x^2)=(\infty-\infty=?)=\lim_{x\to\infty}x(2-x)=\big(\infty\cdot(-\infty)=-\infty\big)=-\infty$$

<u>*Пример 8*</u>. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg x}{x}$.

<u>Решение</u>.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg x}{x}=\left|\textit{Учтем, что } \lg x\to-\infty \textit{ при } x\to 0\right|=\left(\frac{-\infty}{+0}\right)=-\infty$$

Вычислению многих пределов, содержащих неопределенности, часто помогает использование двух так называемых *замечательных пределов*:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=1\ \ (x - \text{угол в радианах}) \tag{2.7}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1^{\infty} = ?) = e$, где $e = 2{,}71828... \approx 2{,}72$.

Докажем первый замечательный предел. Для этого вспомним школьную формулу для длины *l* произвольной дуги окружности (рис. 1.10):

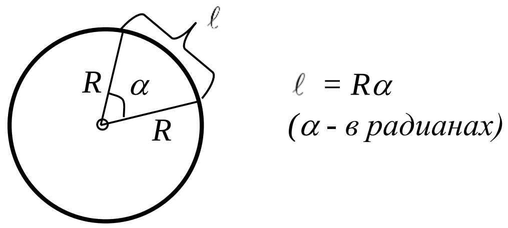


Рис. 1.10

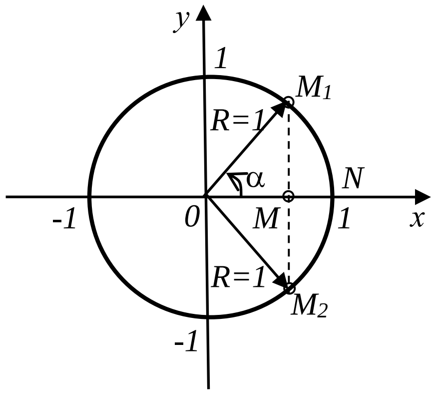


Рис. 1.11

А теперь рассмотрим рис. 1.11:

$$M_1M = \sin\alpha; \quad M_1M_2 = 2MM_1 = 2\sin\alpha; \quad \cup M_1N = R\alpha = \alpha;$$

$$\cup M_1NM_2 = 2\cdot\cup M_1N = 2\alpha; \quad \frac{M_1M_2}{\cup M_1NM_2} = \frac{2\sin\alpha}{2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \ (\alpha \text{ – в радианах}).$$

При $\alpha \to 0$ хорда M_1M_2 и дуга M_1NM_2, неограниченно уменьшаясь, практически становятся неразличимыми (малая дуга практически не отличается от стягивающей ее хорды). То есть их отношение стремится к единице. Таким образом, при $\alpha \to 0$ дробь $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1$. А это и означает, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$. Полученный результат совпадает (при другом обозначении) с первым замечательным пределом (2.7).

Второй замечательный предел, приводящий к важному для всей высшей математики числу e (к Неперову числу – по имени шотландского математика 16–го века Джона Непера, введшего в математику это число), оставим без доказательства.

Число $e \approx 2{,}72$, как и число $\pi \approx 3{,}14$, принадлежит к числу важнейших математических констант. А такие функции, как $y = e^x$ и $y = \log_e x = \ln x$, принадлежат к числу важнейших элементарных функций, используемых в высшей математике. Графики этих функций показаны на рисунках (1.12) и (1.13). При этом показательная функция $y = e^x$ называется *экспоненциальной*, а ее график называется *экспонентой*. А логарифмическая функция $y = \ln x = \log_e x$ называется *функцией натурального логарифма*, а ее график называется *натуральной логарифмической кривой*. Эти функции играют большую роль при математическом описании различного рода природных процессов. Именно поэтому, в частности, логарифм по основанию e назвали натуральным – от слова «natur» (природа).

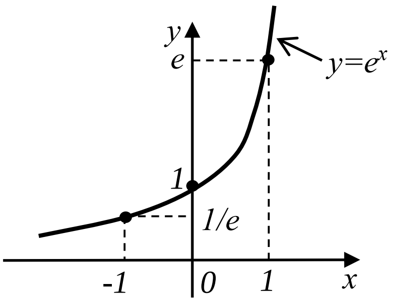


Рис. 1.12

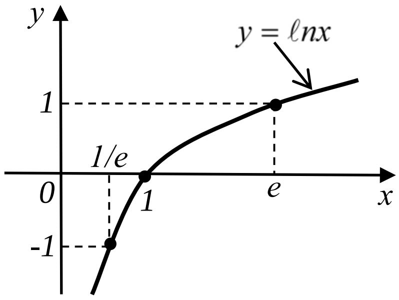


Рис. 1.13

В математических справочниках имеются таблицы этих двух важных функций - и $y=e^x$, и $y=\ln x$. Впрочем, для вычисления натуральных логарифмов $\ln x$ можно воспользоваться и таблицами общеизвестных десятичных логарифмов $\lg x$, если применить формулу перехода в логарифмах от одного основания к другому:

$$\ln x = \log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\lg x}{0{,}43429...} = 2{,}30258...\cdot \lg x \approx 2{,}3\cdot \lg x\,;$$

$$\ln x \approx 2{,}3\cdot \lg x \qquad (2.8)$$

<u>*Пример 9*</u>. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})tg\, x$.

<u>*Решение*</u>.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})tg\, x = (0\cdot\infty = ?) = \left| \begin{array}{c} \textit{введем}\quad \textit{обозначение}: x-\dfrac{\pi}{2}=\alpha \\ (\alpha\to 0,\ \textit{т.к.}\ x\to\dfrac{\pi}{2}).\quad \textit{Тогда}\ x=\dfrac{\pi}{2}+\alpha \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\alpha\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \lim_{\alpha\to 0}\alpha\cdot(-ctg\,\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{-\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{-\cos\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}} = \frac{\lim\limits_{\alpha\to 0}(-\cos\alpha)}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}} = \frac{-\cos 0}{1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

<u>*Пример 10*</u>. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{3x}$.

<u>*Решение*</u>.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x} = (1^{\infty} = ?) = \lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x}\right)\right]^{3x} =$$

$=|$ *введем обозначение*: $-\dfrac{2}{x}=\alpha$ $(\alpha\to 0,$ *т.к.* $x\to\infty)$; *тогда* $x=-\dfrac{2}{\alpha}$; $3x=\dfrac{-6}{\alpha}$ $|=$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{6}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-6}=e^{-6}.$$

<u>*Пример 11*</u>. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

<u>*Решение*</u>.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=\log_e e=1.$$

Упражнения

1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. Указание: положить $x-2=\alpha$. Или разложить квадратный трехчлен в знаменателе на множители. <u>*Ответ*</u>: 1.
2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x}{3x-1}$. <u>*Ответ*</u>: ∞.
3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\, x}{2x}$. Указание: положить $arctg\, x=\alpha$. <u>*Ответ*</u>: $1/2$.
4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$. <u>*Ответ*</u>: $1/2$.
5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$. <u>*Ответ*</u>: $1/\sqrt{e}$.
6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$. <u>*Ответ*</u>: 0.
7. Найти: *а*) $\lim\limits_{x\to 0+0}2^{\frac{1}{x}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0-0}2^{\frac{1}{x}}$. <u>*Ответ*</u>: *а*) $+\infty$; *б*) 0.
8. Найти: *а*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{2}{1+2^{tgx}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{2}{1+2^{tgx}}$. <u>*Ответ*</u>: *а*) 2; *б*) 0.
9. Указать точный смысл условных записей:

   1) $\dfrac{2}{\infty}=0$; 2) $\dfrac{2}{0}=\infty$ $\left(\dfrac{2}{+0}=+\infty;\quad \dfrac{2}{-0}=-\infty\right)$; 3) $3^{\infty}=\infty$; 4) $3^{-\infty}=0$;

   5) $\ln 0=-\infty$; 6) $tg90^0=\pm\infty$.
10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. <u>*Ответ*</u>: 1.

11. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{3}$.

12. Найти $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{56}$.

13. Найти $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$. *Ответ*: $-\sqrt{2}$.

14. Найти $\lim\limits_{x\to \pi+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$. *Ответ*: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{2}$.

16. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{\pi}$.

17. Найти $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{2}$.

18. Найти $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. *Ответ*: $\dfrac{1}{e}$.

19. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$. *Ответ*: -1.

§ 3. Асимптоты графиков функций

Определение. *Асимптоты графика функции – это такие линии (прямые или кривые), к которым неограниченно приближается указанный график при неограниченном его продолжении.*

В частности, на рис. 1.14 изображен график функции $y=f(x)$, имеющий три асимптоты: вертикальную прямую $x=a$, горизонтальную прямую $y=b$ и кривую линию $y=\varphi(x)$. При этом, согласно этому рисунку, вертикальная прямая $x=a$ является асимптотой графика функции $y=f(x)$ лишь при $x\to a+0$ (при x, стремящемся к a справа). При $x\to a-0$ (слева) эта прямая асимптотой графика функции $y=f(x)$ не является. Горизонтальная прямая $y=b$ является асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$. А кривая $y=\varphi(x)$ является асимптотой графика этой функции при $x\to+\infty$.

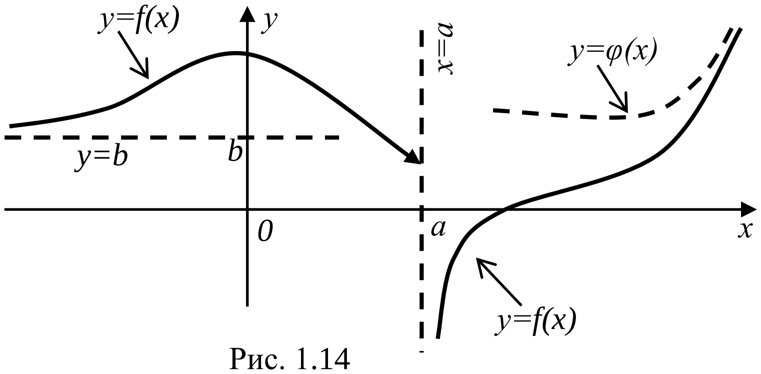


Рис. 1.14

1. <u>Нахождение вертикальных асимптот</u>

Рисунок 1.14 свидетельствует: если прямая $x=a$ – вертикальная асимптота графика функции $y=f(x)$, то должны выполняться два условия:

1) a – точка разрыва функции $y=f(x)$; (3.1)

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ (+∞ или –∞) или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ (+∞ или –∞).

И обратно, если выполняются оба условия (3.1), то прямая $x=a$ – вертикальная асимптота графика функции $y=f(x)$.

Из сказанного вытекает следующая

<u>Схема нахождения вертикальных асимптот графика функции</u> $y=f(x)$:

1) Находим все точки разрыва (a_1; a_2; …) функции, то есть те изолированные точки оси *ox*, в которых функция не определена.

2) Каждую из точек разрыва проверяем на выполнимость второго условия (3.1).

<u>Пример 1</u>. Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$y=\frac{3x}{x-2}+\frac{\sin x}{x}$$

и сделать геометрическую иллюстрацию полученного результата.

<u>Решение</u>. Данная функция не определена, а, следовательно, разрывна лишь в двух точках оси *ox*: $x=2$ и $x=0$. Проверим каждую из них на выполнимость второго условия (3.1):

$$\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{\sin x}{x}\right)=\left(\frac{6}{+0}+\frac{\sin 2}{2}\right)=\left(+\infty+\frac{\sin 2}{2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{\sin x}{x}\right)=\left(\frac{6}{-0}+\frac{\sin 2}{2}\right)=\left(-\infty+\frac{\sin 2}{2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1;\ \lim_{x\to 0-0}\left(\frac{3x}{x-2}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1.$$

Второе условие (3.1) выполняется для точки $x=2$ и не выполняется для точки $x=0$. Значит, лишь прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой графика нашей функции, причем и при $x\to 2+0$, и при $x\to 2-0$. А прямая $x=0$ (ось *оу*) вертикальной асимптотой графика функции не является. Геометрическая иллюстрация полученных результатов дана на рис. 3.15.

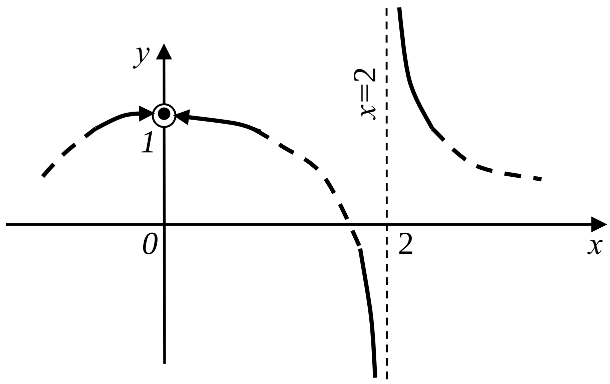


Рис. 1.15

На этом рисунке представлено лишь то, что выяснено выше: поведение функции y возле ее точек разрыва $x=0$ и $x=2$. Вдали от этих точек мы эту функцию не исследовали, поэтому ее график не известен (он лишь намечен пунктирной линией).

2. <u>Нахождение невертикальных асимптот.</u>

Рассматривая рис. 1.14, приходим к очевидному выводу: если некоторая линия L с уравнением $y=\varphi(x)$ является невертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ или при $x\to-\infty$, то это значит, что при таком изменении x функция $f(x)\to\varphi(x)$, то есть $f(x)-\varphi(x)=\alpha(x)\to 0$, а значит

$$f(x)=\varphi(x)+\alpha(x), \text{ где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to+\infty \text{ или при } x\to-\infty. \qquad (3.2)$$

И обратно, при выполнении (3.2) функция $y=\varphi(x)$ – асимптота функции $y=f(x)$. В частности, если

$$f(x)=b+\alpha(x), \text{ где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to+\infty \text{ или при } x\to-\infty, \qquad (3.3)$$

то соответственно при $x\to+\infty$ или при $x\to-\infty$ горизонтальная прямая $y=b$ будет асимптотой графика функции $y=f(x)$.

<u>*Пример 2*</u>. Найти невертикальные асимптоты графика функции

$$y=\frac{3x}{x-2}+10^x.$$

<u>*Решение*</u>. Для их нахождения нужно выяснить поведение функции y при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

а) Если $x\to+\infty$, то очевидно, что

$$\frac{3x}{x-2}=\frac{3}{1-2/x}\to 3; \quad 10^x\to 10^{+\infty}=+\infty.$$

Поэтому при $x\to+\infty$ наша функция $y\to 3+10^x$. А это значит, что линия L с уравнением $y=10^x+3$ является асимптотой графика нашей функции при $x\to+\infty$.

б) Если $x\to-\infty$, то очевидно, что

$$\frac{3x}{x-2}=\frac{3}{1-2/x}\to 3; \quad 10^x\to 10^{-\infty}=\frac{1}{10^{+\infty}}=0.$$

Поэтому при $x\to-\infty$ наша функция $y\to 3$. А это значит, что при $x\to-\infty$ асимптотой графика нашей функции y является горизонтальная прямая $y=3$.

<u>Пример 3</u>. Определить все имеющиеся асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ и изобразить поведение этого графика возле его асимптот.

<u>Решение</u>. Начнем с нахождения области определения функции y. Функция определена, а следовательно, и непрерывна для всех x, кроме $x=1$. То есть $x=1$ – единственная точка разрыва нашей функции. А значит, вертикальная прямая $x=1$, проходящая через эту точку – единственная возможная вертикальная асимптота графика нашей функции.

Проверим, действительно ли она – вертикальная асимптота. Для этого выясним, в соответствии с (3.1), поведение функции y при $x\to 1+0$ и при $x\to 1-0$:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+2x}{x-1}=\left(\frac{3}{+0}\right)=+\infty;\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+2x}{x-1}=\left(\frac{3}{-0}\right)=-\infty$$

То есть $y\to+\infty$ при $x\to 1+0$ и $y\to-\infty$ при $x\to 1-0$. А это значит, что вертикальная прямая $x=1$ является асимптотой графика функции y, причем и при $x\to 1+0$, и при $x\to 1-0$.

Теперь поищем возможные невертикальные асимптоты. Для этого рассмотрим поведение функции y при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

а) Если $x\to+\infty$, то $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}\to\left(\dfrac{\infty}{\infty}=?\right)$.

Учтем, что $\dfrac{x^2+2x}{x-1}=x+3+\dfrac{3}{x-1}$ (это устанавливается делением x^2+2x на $x-1$ «в столбик»). То есть

$$y=\frac{x^2+2x}{x-1}=\varphi(x)+\alpha(x),\text{ где } \varphi(x)=x+3;\ \ \alpha(x)=\frac{3}{x-1}.$$

И так как $\alpha(x)=\dfrac{3}{x-1}\to 0$ при $x\to+\infty$, а $\varphi(x)=x+3$ при $x\to+\infty$ к нулю не стремится, то при $x\to+\infty$ наша функция $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}\to\varphi(x)=x+3$. А это, в соответствии с (3.2), означает, что линия с уравнением $y=\varphi(x)=x+3$ (прямая) является асимптотой графика нашей функции y при $x\to+\infty$.

б) Если $x\to-\infty$, то буквально повторяя пункт (а), приходим к выводу, что прямая $y=x+3$ является асимптотой графика нашей функции и при $x\to-\infty$.

Теперь изобразим график нашей функции вместе с его асимптотами. Для более качественного построения этого графика найдем еще точки его пересечения с осями координат.

1) С осью ox:

$$y=0\Leftrightarrow\frac{x^2+2x}{x-1}=0\Leftrightarrow\frac{x(x+2)}{x-1}=0\Rightarrow x_1=0\ и\ x_2=-2.$$

2) С осью oy:

$x = 0 \Rightarrow y = 0$.

А теперь строим график (рис. 1.16).

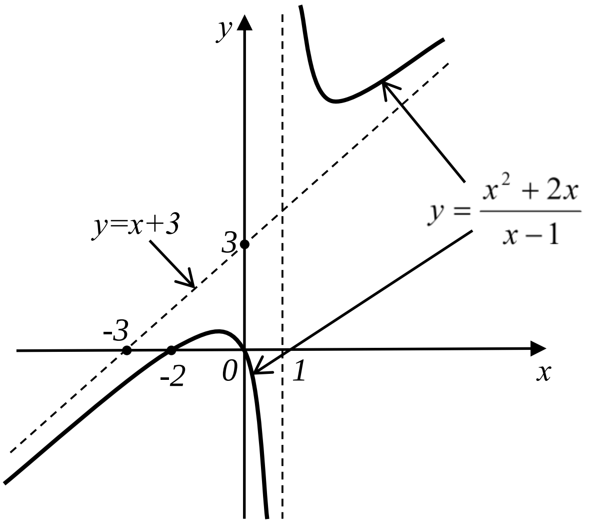


Рис. 1.16

Упражнения

Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \dfrac{x-1}{2x+3}$; б) $y = \dfrac{2}{x^2-4}$;

в) $y = 3^x + x - 2$ и построить эти графики вместе с их асимптотами.

<u>Ответ</u>: См. рис. 1.17 (а) – (в).

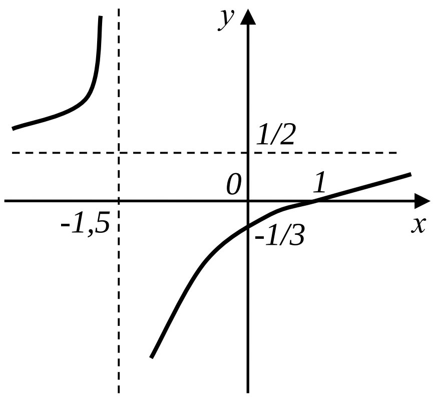


Рис. 1.17(а)

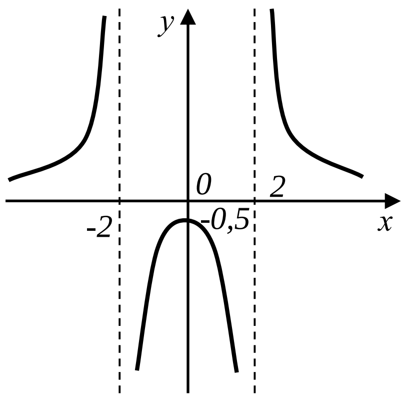


Рис. 1.17(б)

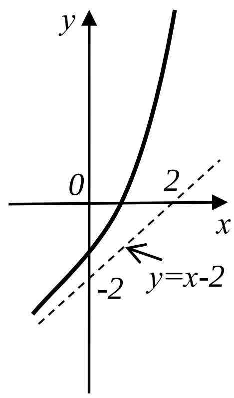


Рис. 1.17(в)

§ 4. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

<u>1. Бесконечно малые функции и их сравнение</u>

Пусть $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ – некоторые две функции, а x стремится к некоторому x_0 (конечному или бесконечному). Если при этом $f_1(x) \to 0$ и $f_2(x) \to 0$, то есть если

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = 0, \tag{4.1}$$

то обе эти функции называются *бесконечно малыми при* $x \to x_0$. Возникает вопрос: как их сравнить (кто меньше?). Ответ на этот вопрос мы получим, если исследуем отношение этих функций $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ при $x \to x_0$, то есть найдем $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$. При этом возможны следующие варианты.

<u>Вариант 1:</u>

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=0 \Leftrightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\to 0 \text{ при } x\to x_0 \tag{4.2}$$

Это значит, что $f_2(x)$ несравненно быстрее, чем $f_1(x)$, стремится к нулю при $x\to x_0$. А, стало быть, бесконечно малая функция $f_2(x)$ является малой частью (бесконечно малой частью!) другой бесконечно малой функции $f_1(x)$ при $x\to x_0$. Или, как говорят, что функция $f_2(x)$ является *бесконечно малой функцией более высокого (высшего) порядка малости, чем функция* $f_1(x)$*, при* $x\to x_0$. И обозначают этот факт так:

$$f_2(x)=o(f_1(x)) \text{ при } x\to x_0 \tag{4.3}$$

(читается: $f_2(x)$ есть «*o* малое» от $f_1(x)$ при $x\to x_0$).

Вариант 2:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=1 \Leftrightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\to 1 \text{ при } x\to x_0 \tag{4.4}$$

Это значит, что при $x\to x_0$ бесконечно малые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ практически не отличаются друг от друга. В этом случае говорят, что *функция* $f_2(x)$ *эквивалентна (равносильна) функции* $f_1(x)$ *при* $x\to x_0$. И обозначается это так:

$$f_2(x)\sim f_1(x) \text{ при } x\to x_0 \tag{4.5}$$

(~ – знак эквивалентности).

Вариант 3:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=A \Leftrightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\to A \text{ при } x\to x_0, \tag{4.6}$$

где *A* – конечное число, не равное ни нулю, ни единице (эти два случая мы рассмотрели выше). Тогда, очевидно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{Af_1(x)}=1 \Leftrightarrow f_2(x)\sim Af_1(x) \text{ при } x\to x_0. \tag{4.7}$$

В этом случае говорят, что бесконечно малые при $x\to x_0$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – *одного порядка малости*. И записывают этот факт так:

$$f_2(x)=O(f_1(x)) \text{ при } x\to x_0 \tag{4.8}$$

(читается: $f_2(x)$ есть «*O* большое» от $f_1(x)$ при $x\to x_0$).

Вариант 4:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=\pm\infty \Leftrightarrow \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\to \pm\infty \text{ при } x\to x_0, \tag{4.9}$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}}=\frac{1}{\pm\infty}=0$$

А это значит, что $f_1(x)=o(f_2(x))$ при $x\to x_0$.

Пример 1. Показать, что

а) $\sin x\sim x$ при $x\to 0$ (x – угол в радианах); б) $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$;

в) $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$ при $x\to 0$; г) $tg\,x\sim x$ при $x\to 0$ (x – угол в радианах);

д) $arctg\,x\sim x$ при $x\to 0$; е) $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$;

ж) $\dfrac{\pi}{2}-\arccos x\sim x$ при $x\to 0$. (4.10)

Решение. Эквивалентность (4.5) означает выполнение предельного равенства (4.4). Поэтому для подтверждения эквивалентностей (а)-(ж) вычислим необходимые пределы (4.4) и покажем, что все они равны 1:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – согласно (2.7);

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}=?\right)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$ – согласно (2.7);

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}=\left(\dfrac{0}{0}=?\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{2}{1+1}=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}=?\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}=?\right)=\left|\begin{array}{l}\textit{сделаем подстановку}:\\ arctg\,x=\alpha;\ \textit{тогда}\ x=tg\,\alpha;\\ \alpha\to 0,\ \textit{т.к.}\ x\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{tg\,\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\frac{tg\,\alpha}{\alpha}}=$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha}}=\left|\textit{учтем (г)}\right|=\frac{1}{1}=1;$$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}=?\right)=\left|\begin{array}{l}\textit{сделаем подстановку}:\\ \arcsin x=\alpha;\ \textit{тогда}\ x=\sin\alpha;\\ \alpha\to 0,\ \textit{т.к.}\ x\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{1}{1}=1;$$

ж)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\left|\begin{array}{l}\textit{сделаем подстановку}:\\ \frac{\pi}{2}-\arccos x=\alpha;\ \textit{тогда}\ \arccos x=\frac{\pi}{2}-\alpha.\\ x=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha;\ \alpha\to 0,\ \textit{т.к.}\ x\to 0\end{array}\right|=$$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1$. Итак, все эквивалентности (4.10) доказаны.

<u>Свойства бесконечно малых функций</u>

1. Если $f_2(x)=o(f_1(x))$ при $x\to x_0$, то $f_1(x)\pm f_2(x)\sim f_1(x)$ при $x\to x_0$. Или, что то же самое,

$$f_1(x)\pm o(f_1(x))\sim f_1(x)\ \text{ при }\ x\to x_0 \tag{4.11}$$

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)\pm f_2(x)}{f_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[1\pm\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]=1\pm 0=1$$

2. Если $f_2(x)\sim f_1(x)$ при $x\to x_0$, то

$$f_2(x)-f_1(x)=o(f_1(x))\ \text{ при }\ x\to x_0 \tag{4.12}$$

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)-f_1(x)}{f_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f_2(x)}{f_1(x)}-1\right]=1-1=0$$

3. Если $f_2(x)\sim f_1(x)$ и $g_2(x)\sim g_1(x)$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{4.13}$$

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\cdot\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{g_1(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Этими свойствами (особенно последним из них) часто пользуются при вычислении различного рода пределов, в которых фигурируют бесконечно малые функции.

<u>Пример 2.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 8x}{4x^2}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\left|\begin{array}{l}\textit{учтем, согласно}\ (4.10),\ \textit{что}\ \sin 8x\sim 8x,\\ \textit{а значит},\ \sin^2 8x\sim 64x^2\ \textit{при}\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{64x^2}{4x^2}=\lim_{x\to 0}16=16$$

<u>Пример 3.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\left|\begin{array}{l}\textit{учтем, что при}\ x\to 0\\ \sin^2\frac{x}{2}\sim\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^3-2x^2}=\left(\frac{0}{0}=?\right)=\left|\begin{matrix}\textit{учтем, согласно } (4.10), \textit{ что}\\ \ln(1-x^2)\sim -x^2 \textit{ при } x\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x-2}=\frac{1}{2}$$

2. Бесконечно большие функции и их сравнение.

Пусть

$$\lim_{x\to x_0}|f_1(x)|=\infty \text{ и } \lim_{x\to x_0}|f_2(x)|=\infty, \tag{4.14}$$

то есть функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ при $x\to x_0$ по абсолютной величине стремятся к бесконечности. Тогда они называются *бесконечно большими при* $x\to x_0$.

Сравнивают бесконечно большие функции по тому же принципу, что и бесконечно малые. А именно:

1) Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=0, \tag{4.15}$$

то функция $f_2(x)$ называется бесконечно большой функцией *низшего порядка роста*, чем бесконечно большая функция $f_1(x)$. А функция $f_1(x)$ – соответственно *высшего порядка роста*, чем $f_2(x)$.

В частности, очевидно, что функции $y=x$; $y=x^2$; $y=x^3$; $y=e^x$ являются бесконечно большими при $x\to+\infty$, причем каждая последующая из них – высшего порядка роста, чем предыдущая. И вообще, можно доказать (см. главу 2, §4), что любая степенная функция $y=x^n$ ($n>0$) при $x\to+\infty$ является бесконечно большой функцией низшего порядка роста, чем любая показательная функция $y=a^x$ ($a>1$). То есть

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad (n>0;\ a>1) \tag{4.16}$$

Иначе говоря, *любая показательная функция* $y=a^x$ *(*$a>1$*) при* $x\to+\infty$ *растет быстрее, чем любая степенная функция* $y=x^n$ ($n>0$).

2) Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=1, \tag{4.17}$$

то бесконечно большие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называется *эквивалентными (равносильными)*, и обозначается это так:

$$f_2(x)\sim f_1(x), \text{ при } x\to x_0 \tag{4.18}$$

3) Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=A, \tag{4.19}$$

где *A* – конечное число, $A\neq 0$ и $A\neq 1$, то функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называется функциями *одного порядка роста*. При этом, очевидно, что

$$f_2(x) \sim A \cdot f_1(x) \text{ при } x \to x_0 \qquad (4.20)$$

4) Если $f_2(x) \sim f_1(x)$ и $g_2(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$, то, как и для бесконечно малых функций, получаем равенство, аналогичное (4.13):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \qquad (4.21)$$

Пример 5. Показать, что при $x \to +\infty$:

а) $ax + b \sim ax$; б) $ax^2 + bx + c \sim ax^2$; в) $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$

Доказательство. Учтем, что (4.18) равносильно (4.17), и вычислив соответствующие пределы, убедимся, что все они равны 1:

а) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax + b}{ax} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + \dfrac{b}{ax}) = 1 + 0 = 1$;

б) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax^2 + bx + c}{ax^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + \dfrac{b}{ax} + \dfrac{c}{ax^2}) = 1 + 0 + 0 = 1$;

в)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = \lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}) = 1 + 0 + \ldots + 0 = 1.$$

Пример 6.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{1 - 4x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ? \right) = \left| \begin{matrix} \textit{учтем, что при } x \to \pm\infty \\ 2x^2 - 3x + 5 \sim 2x^2 \; \textit{и} \; 1 - 4x^2 \sim -4x^2 \end{matrix} \right| = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{-4x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Упражнения

1. Показать, что сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций тоже являются бесконечно малыми функциями.

2. Показать, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

3. Доказать, что бесконечно малые при $x \to 0$ функции $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = x \cos\dfrac{1}{x}$ несравнимы между собой, то есть что предел их отношения не существует.

4. Показать, что функция $4\sin^3 2x \sim 32x^3$ при $x \to 0$.

5. Показать, что $\sqrt[3]{1 + x} - 1 \sim \dfrac{1}{3}x$ при $x \to 0$.

6. Сравнить бесконечно большие функции $f_1(x) = 2x^3 + 3x$ и $f_2(x) = (x + 2)^3$ при $x \to +\infty$.

Ответ: $f_1(x) \sim 2 f_2(x)$ при $x \to +\infty$.

Глава 2

Дифференциальное исчисление

Дифференциальное исчисление – это раздел высшей математики, базирующийся на использовании таких ключевых для всей высшей математики понятий, как производные и дифференциалы функций. Эти понятия были введены в математику в конце 17 века Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем.

§ 1. Производная функции: определение и смысл (геометрический, физический, экономический)

Производная функции рассматривалась в школьном курсе математики. Поэтому сначала кратко повторим пройденное.

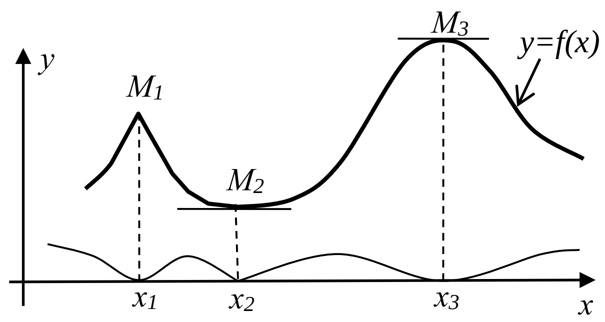


Рис. 2.1

Пусть $y = f(x)$ – некоторая непрерывная функция (ее график – сплошная линия) – рис.2.1. Здесь (M_1, M_2, M_3,…) – вершины и впадины графика функции. А их проекции (x_1, x_2, x_3,…) на ось *ох* называются соответственно *точками максимума и минимума* функции. Эти точки имеют и общее название: *точки экстремума функции*. Или, как иногда добавляют, точки *локального* экстремума. Ну и, соответственно, точки *локального* максимума и точки *локального* минимума. Но мы это слово «локального» добавлять не будем.

Повторим еще раз: точки экстремума (точки максимума и минимума) функции – это не вершины и впадины графика функции, а *их проекции на ось ох.*

Интервал оси *ох*, на котором с увеличением аргумента x растет и функция y, называется *интервалом возрастания функции*. А интервал оси *ох*, на котором с увеличением аргумента x функция y убывает, называется *интервалом ее убывания.* В частности, на рис. 2.1 интервалы $(-\infty; x_1)$ и (x_2; x_3) – интервалы возрастания функции $y = f(x)$, а интервалы (x_1; x_2) и ($x_3; +\infty$) – интервалы ее убывания.

Функция, возрастающая (убывающая) на некотором интервале, считается возрастающей (убывающей) *в каждой точке* x этого интервала.

Заметим, что возрастая или убывая, функция делает это для разных x, вообще говоря, неодинаково быстро. Например, возрастающая на интервале (x_2; x_3) функция $y = f(x)$ (рис. 2.1) сначала для x, близких к x_2, растет медленно (график функции поднимается медленно); затем, по мере увеличения x, крутизна подъема графика функции возрастает, а значит, увеличивается и скорость роста функции; затем, по мере приближения x к x_3, скорость роста функции снижается. В точке x_3 рост функции прекращается и затем, для $x > x_3$, начинается убывание функции. И оно тоже, очевидно, происходит для разных x с разной скоростью.

Возникает естественная задача: оценить скорость изменения функции (скорость ее роста или убывания) в каждой точке x *численно*. Эта задача решена в конце 17 века Ньютоном и Лейбницем путем введения в математику понятия *производной функции*.

Вспомним, как вводится это понятие. Пусть $y = f(x)$ – некоторая непрерывная на интервале $(a;\ b)$ оси *ox* функция. Если на этом интервале взять конкретное значение аргумента x (конкретную точку x), то в этой точке функция y получит конкретное значение $y = f(x)$. А теперь изменим x на некоторое $\Delta x > 0$, то есть перейдем от x к $x + \Delta x$. Причем возьмем Δx такое, чтобы и точка $x + \Delta x$ тоже принадлежала интервалу $(a;\ b)$ (рис. 2.2).

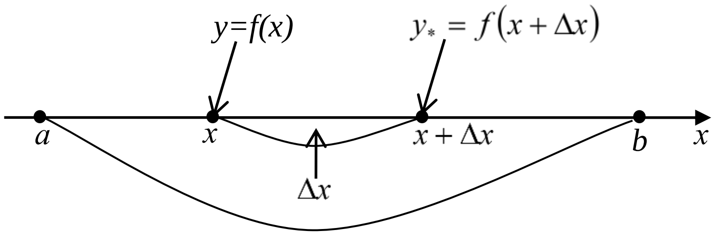


Рис. 2.2

Переход от x к $x + \Delta x$ означает, что аргумент x получил приращение (изменение) Δx. При этом, естественно, и функция $y = f(x)$ получит некоторое изменение (приращение) Δy:

$$\Delta y = y_* - y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1.1}$$

В силу непрерывности функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ (см. (2.5) главы 1).

Приращение Δy функции $y = f(x)$ зависит от исходного значения аргумента x и его приращения Δx. Оно может оказаться как положительным, так и отрицательным. Если окажется, что $\Delta y \succ 0$, то Δy - действительно приращение функции, ибо функция приросла на величину Δy. А если окажется, что $\Delta y \prec 0$, то, наоборот, функция получила не приращение, а убыль на величину Δy. Но и в этом случае величину Δy будем называть приращением функции. Просто это приращение будет не положительным, а отрицательным.

<u>Пример 1</u>. Найти приращение Δy функции $y = x^2$ при *а*) $x = 2$, *б*) $x = -3$ и $\Delta x = 0{,}1$.

<u>Решение.</u> В данном случае $f(x) = x^2$. А значит, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$. Применяя формулу (1.1), получим:

$$а)\ \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2 + 0{,}1)^2 - 2^2 = 0{,}41$$

$$б)\ \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (-3 + 0{,}1)^2 - (-3)^2 = -0{,}59$$

Таким образом, при переходе от $x = 2$ к $x = 2{,}1$ функция $y = x^2$ получила приращение $\Delta y = 0{,}41$, то есть возросла на 0,41. А при переходе от $x = -3$ к $x = -2{,}9$ эта функция получила приращение $\Delta y = -0{,}59$, то есть уменьшилась на 0,59. И это совершенно естественно, если вспомнить график функции $y = x^2$ (параболу), которая убывает при $x \prec 0$ и возрастает при $x \succ 0$.

Вычислив при данных x и Δx приращение Δy данной функции $y = f(x)$, мы должны как-то оценить величину этого приращения - много это или мало. Для этого его нужно с чем-то сравнить. Самый естественный путь – это сравнить приращение Δy функции с приращением Δx ее аргумента. Для этого рассматривается отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть рассматривается отношение приращения функции к приращению ее аргумента. Это отношение показывает, на сколько единиц *в среднем* изменится y, если x увеличится на единицу длины участка $[x; x+\Delta x]$. То есть отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ определяет *среднюю скорость* изменения функции $y = f(x)$ на участке $[x; x+\Delta x]$ оси *ox*.

Проиллюстрируем оправданность этого термина «средняя скорость» на механическом примере. Пусть функция $y = f(x)$ определяет *закон движения некоторой материальной точки по траектории ее движения*, где x – время, а y – координата точки на ее траектории (рис. 2.3). Как и на реальной дороге, координату y точки на траектории ее движения можно понимать как удаленность этой точки от некоторой начальной точки O (от стартовой точки). Зная закон движения $y = f(x)$ движущейся точки, мы можем определить координату y этой точки в любой интересующий нас момент времени x. Тогда за время Δx, прошедшее с момента x до момента $x + \Delta x$, координата y движущейся точки изменится со значения $y = f(x)$ до значения $y_* = f(x + \Delta x)$, то есть точка пройдет путь (точнее, получит перемещение) Δy, определяемое формулой (1.1). Заметим, что это перемещение может быть и положительным, и отрицательным. Положительным оно будет, если точка удаляется от начальной точки O (у нее тогда будет расти y), а отрицательным – если точка приближается к точке O (у нее тогда y будет убывать). При этом средняя скорость движения за время Δx (с момента x до момента $x + \Delta x$) будет равна

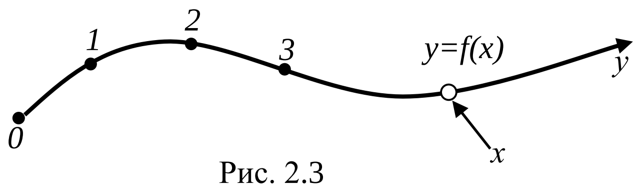


Рис. 2.3

$$v_{cp} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1.2)$$

Таким образом, выражение (1.2) действительно имеет смысл средней скорости изменения функции $y = f(x)$ на участке $[x; x+\Delta x]$.

Однако нас в конечном итоге интересует не средняя скорость изменения функции на участке, а истинная (мгновенная) скорость её изменения *в заданной точке x*. В частности, нас интересует *мгновенная скорость* движения точки по ее траектории (скорость *в заданный момент времени x*).

Чтобы получить эту скорость, нужно, очевидно, стянуть промежуток $[x; x+\Delta x]$ в точку x, то есть устремить Δx к нулю. При этом, в силу непрерывности функции $y = f(x)$, и Δy устремится к нулю, а отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ устремится к искомой мгновенной скорости изменения функции $y = f(x)$ в точке x. То есть мгновенная скорость $v(x)$ изменения функции $y = f(x)$ в точке x - это

$$v(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.3}$$

В частности, $v(x)$ - это мгновенная скорость движения точки по ее траектории в момент времени x, если $y = f(x)$ - закон движения точки.

Определение. Предел (1.3), представляющий собой мгновенную скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x, называется *производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x. Используется несколько различных стандартных обозначений этой производной:

$$y' = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \dot{y} \tag{1.4}$$

Последнее из этих обозначений использовал Ньютон, предпоследнее - Лейбниц, а первые три ввел французский математик Коши. В дальнейшем для обозначения производной функции $y = f(x)$ мы в основном будем использовать обозначение Коши y' (или $f'(x)$), а при необходимости и y'_x (читается: производная функции y по переменной x). В скором будущем нам понадобится и обозначение Лейбница. А обозначение Ньютона использовать не будем – его в основном используют физики.

Итак,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1.5}$$

или подробнее

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.6}$$

– *математическое определение* производной функции $y = f(x)$ в заданной точке x. Читается это определение так: *производная функции – это предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

Если x – время, а y – координата движущейся точки на траектории ее движения (рис. 2.3), то функция $y = f(x)$ определяет закон движения точки, а производная этой функции – мгновенную скорость движения точки по ее траектории в различные моменты времени *x*:

$$y' = f'(x) = v(x) \qquad (1.7)$$

В этом состоит *физический смысл производной функции*.

Но у производной функции есть и наглядный *геометрический смысл*. Для его выяснения рассмотрим рис.2.4. Проведем к графику функции $y = f(x)$ через точку $M(x; f(x))$ и точку $N(x+\Delta x; f(x+\Delta x))$ секущую L_*, а через точку $M(x; f(x))$ касательную *L*. Их углы наклона к оси *ox* обозначим соответственно α_* и α. Из $\Delta\, MNK$ следует:

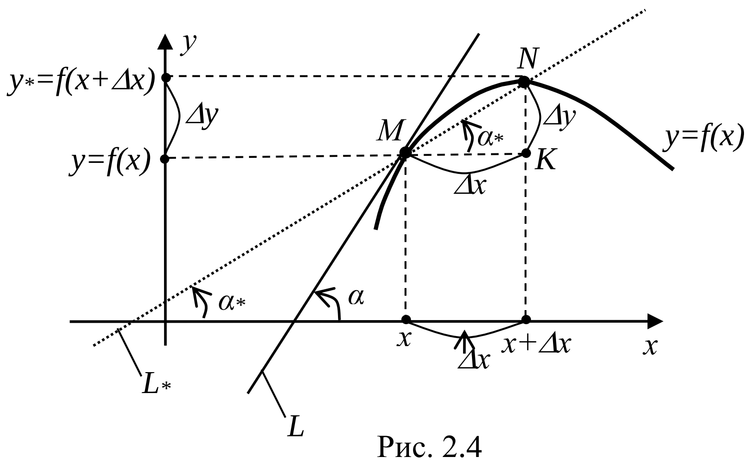


Рис. 2.4

$$\frac{NK}{MK} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha_* \qquad (1.8)$$

Если устремить Δx к нулю, то и Δy устремится к нулю, а точка *N* устремится к точке *M*. Соответственно секущая L_* устремится к касательной *L*, проведенной в точке *M*, а угол наклона α_* секущей устремится к углу наклона α касательной. То есть $\alpha_* \to \alpha$ при $\Delta x \to 0$. Но тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha_* \to tg\,\alpha \text{ при } \Delta x \to 0 \qquad (1.9)$$

Иначе говоря,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha, \qquad (1.10)$$

что с учетом (1.5) дает

$$y' = f'(x) = tg\,\alpha \qquad (1.11)$$

То есть *производная функции* $y = f(x)$ *в точке x – это тангенс угла наклона к оси ox касательной, проведенной к графику функции в точке, у которой абсцисса x* (см. рис. 2.5). В этом и состоит *геометрический смысл производной функции.*

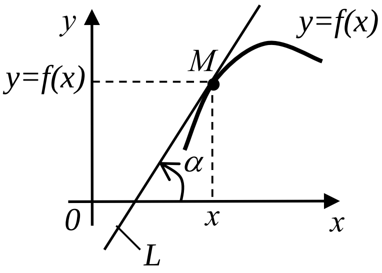


Рис. 2.5

Производной функции можно придать и наглядный *экономический смысл*, причем разносторонний.

1. Пусть, например, $y = f(t)$ – количество произведенной продукции за время *t*. Тогда за время Δt, прошедшее с момента *t* до момента $t + \Delta t$, будет произведено

$\Delta y = f(t+\Delta t) - f(t)$ единиц продукции. При этом отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ – это, очевидно, *средняя производительность труда* на промежутке времени $[t; t+\Delta t]$ длительностью Δt. Она выражает среднее количество продукции, произведенной за единицу времени этого промежутка. А тогда предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y' = f'(t) \tag{1.12}$$

– это так называемая *предельная (истинная) производительность труда в момент времени t.*

2. Пусть *x* – количество выпускаемой продукции (в некоторых единицах), а *y* – соответствующие издержки на ее производство (в рублях). То есть *y* – себестоимость продукции *x*. Тогда $y = f(x)$ – зависимость себестоимости продукции *y* от ее объема *x*.

Если объем продукции вырастет с *x* до $x + \Delta x$, то есть вырастет на Δx единиц, то ее себестоимость вырастет на $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ рублей. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя себестоимость продукции, приходящаяся на единицу ее прироста. А

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \tag{1.13}$$

– так называемая *предельная себестоимость* продукции, определяющая затраты на производство единицы дополнительной продукции, если достигнутый объем производства составляет *x* единиц.

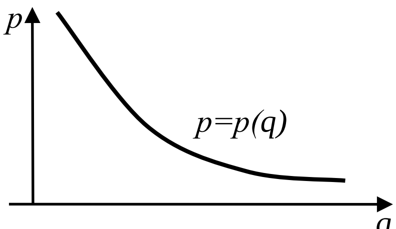


Рис. 2.6

3. Пусть $p = p(q)$ – так называемая *кривая спроса*, определяющая связь между ценой *p* единицы товара и спросом *q* на этот товар (*q* – количество товара, который может быть продан при цене *p* за его единицу) – рис. 2.6.

Кривая спроса, естественно, является убывающей кривой. Ее форма зависит от потребительских свойств товара, от финансового состояния покупателей и от других факторов. При этом

$$R = pq = q \cdot p(q) \tag{1.14}$$

– суммарный доход от продаж. А

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R' = [q \cdot p(q)]' \tag{1.15}$$

– так называемый *предельный доход*. Он определяет доход, полученный от единицы проданной продукции, если эта единица продана дополнительно к объему продаж q.

Эти и другие *предельные величины* широко используются в так называемом *предельном экономическом анализе*. В экономической литературе предельные величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква M. Например, MR – предельный доход R. И так как $R = q \cdot p(q)$, то

$$MR = R' = [q \cdot p(q)]' \qquad (1.16)$$

Дифференцируемость функции в точке и на промежутке

Производная функции, согласно ее математическому определению (1.5) и (1.6) – это некий предел. Но, как и всякий предел, он может оказаться:

а) конечным; б) бесконечным; в) вообще не существовать.

Если для данного x имеет место вариант (а), то есть если при заданном x производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ *существует и конечна*, то эта функция называется *дифференцируемой в точке* x.

Функция, дифференцируемая в *каждой точке* x некоторого промежутка оси ox (например, интервала $(a; b)$ или отрезка $[a; b]$) называется *дифференцируемой на этом промежутке*. Кстати, сама процедура вычисления производной функции называется ее *дифференцированием* (продифференцировать функцию – это значит найти ее производную).

Из геометрического смысла производной функции, определяемого равенством (1.11) и рис. 2.5, вытекают следующие два наглядных *необходимых и достаточных условия* дифференцируемости заданной функции $y = f(x)$ в заданной точке x:

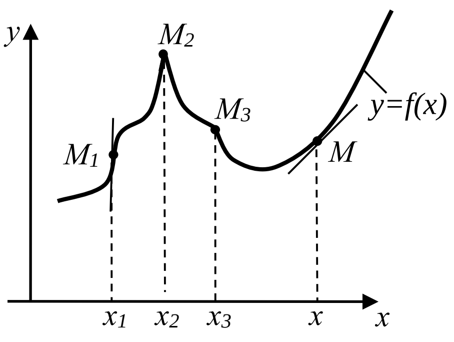


Рис. 2.7

1) Существование касательной к графику функции, проведенной в той точке этого графика, которая имеет абсциссу x.

2) Невертикальность этой касательной (ибо $tg\alpha = tg 90°$ не существует).

Например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 2.7, не дифференцируема в точках x_1, x_2 и x_3.

Действительно, точке x_1 соответствует на графике функции точка M_1 с вертикальной касательной. Точке x_2 (точке максимума функции) соответствует остроконечная вершина M_2, касательная в которой не существует. Точке x_3 соответствует точка M_3 – точка излома графика функции, в которой тоже касательная не существует.

Во всех же остальных точках M графика функции касательную к графику провести можно, и она невертикальна. Значит, для всех остальных x, отличных от (x_1; x_2; x_3), существует производная функции. То есть во всех остальных точках x функция $y = f(x)$ дифференцируема.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке. Обратное не гарантировано*.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Это значит, что ее производная $y' = f'(x)$ существует в точке x и конечна. То есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

существует и конечен. По определению предела это значит, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y' = f'(x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

То есть при малых Δx имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y'$, откуда $\Delta y \approx y' \cdot \Delta x$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем меньше Δx. Устремляя в нем $\Delta x \to 0$, получаем, что и $\Delta y \to 0$. А это, в силу (2.5) главы 1, и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x. Первая часть теоремы доказана.

Обратно, если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке x, то это еще не значит, что она дифференцируема в этой точке. Например, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 2.7, непрерывна в любой точке x, ибо её график сплошной (без разрывов). И тем не менее в точках x_1, x_2 и x_3, как было показано выше, она не дифференцируема.

Упражнения

1. Опираясь на геометрический смысл производной показать, что
   а) производная функции $y = 2x - 3$ для любого x равна 2;
   б) производная функции $y = -3$ для любого x равна 0;
   в) производная функции $y = x^2$ для $x > 0$ положительна, а для $x < 0$ отрицательна.
2. Уравнение движения точки по ее траектории (рис. 2.3) имеет вид: $y = \sqrt{x}$. Показать, что точка тормозит при своем движении.
3. Функция $p = p(q)$ – уравнение кривой спроса (рис. 2.6). Показать, что для любых допустимых q производная этой функции отрицательна.

§ 2. Производные основных элементарных функций. Таблица производных. Правила дифференцирования

Опираясь на математическое определение производной (1.6), а также на ее физический (1.7) и геометрический (1.11) смысл, можно найти производные всех основных элементарных функций.

Пример 1. Пусть $y = f(x) = C$ (C – произвольная константа). Найдем производную y' этой функции. То есть найдем производную C' константы C.

Решение. Его можно получить тремя способами.

а) Способ 1 – геометрический.

Графиком функции $y = C$ является горизонтальная прямая. Касательной к этой прямой, проведенной в любой ее точке, будет сама эта прямая. Ее угол наклона α к оси *ox* равен нулю. Но $tg\,0 = 0$. Значит, согласно (1.11), $y' = C' = 0$.

б) Способ 2 – физический.

Функция $y = C$ от x не зависит, то есть с изменением x не меняется. А значит, скорость $v(x)$ ее изменения равна нулю. Но ведь скорость изменения функции, согласно (1.7) – это производная функции. Таким образом, если $y = C$, то $y' = C' = 0$. Физический смысл этого вывода очевиден: если координата y движущейся точки неизменна, то точка стоит. А значит, скорость ее движения равна нулю.

в) Способ 3 – математический.

Воспользуемся математическим определением (1.6) производной функции:

$$y' = C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \text{у нас } f(x) = C; \\ \text{тогда } f(x+\Delta x) = C \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Итак, разными способами получаем один и тот же вывод: если $y = C$, то $y' = C' = 0$.

Пример 2. Пусть $y = f(x) = x$. Найдем производную $y' = x'$ этой функции.

Решение. Его наиболее просто получить геометрическим способом. Графиком функции $y = x$ является прямая, представляющая собой биссектрису первого и третьего координатных углов. Ее угол наклона к оси *ox* составляет 45°. Касательная к этой прямой в любой ее точке (при любом x) совпадает с этой же прямой. Поэтому, опираясь на геометрический смысл производной (1.11), получаем: $y' = x' = tg\,45° = 1$. То есть $x' = 1$. Этот же результат, заметим, следует и из математического определения производной (1.6):

$$y' = x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left| \begin{array}{l} \text{у нас } f(x) = x; \\ \text{тогда } f(x+\Delta x) = x + \Delta x \end{array} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Пример 3. Пусть $y = f(x) = x^2$. Найдем производную $y' = (x^2)'$ этой функции.

Решение. Графиком функции $y = x^2$ является парабола. Касательная к ней в разных ее точках имеет разное направление (разный угол наклона α к оси *ox*). Поэтому использовать геометрическую формулу (1.11) для нахождения производной этой функции в данном случае затруднительно. Затруднительно использовать и физический смысл производной (1.7). Тогда остается воспользоваться её математическим определением (1.6):

$$y' = (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left| \begin{matrix} \text{у нас } f(x) = x^2; \\ \text{тогда } f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, если $y = x^2$, то $y' = (x^2)' = 2x$.

Используя математическое определение производной (1.6), можно найти производные всех основных элементарных функций. Опуская соответствующие выкладки, приведем уже в готовом виде таблицу производных этих функций.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $C' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $(x^2)' = 2x$;
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

5^* $(e^x)' = e^x$;

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

6^*. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (2.1)
13. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Таблицу производных желательно выучить наизусть.

Обратим внимание на то, что: *а*) производные степенной и показательной функции (формулы 4 и 5) находятся по разным формулам; *б*) что из всех показательных функций a^x наиболее простую производную имеет функция e^x; *в*) что из всех логарифмических функций $\log_a x$ наиболее простую производную имеет натуральный логарифм $\ln x$.

Нахождение производных многих других элементарных функций (более сложных, не входящих в эту таблицу) осуществляется на основе следующих правил вычисления производных (*правил дифференцирования функций*):

1. $(u+v)' = u' + v'$;
2. $(u-v)' = u' - v'$;
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. (2.2)

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – любые две дифференцируемые функции, а C – любая константа.

Таблица производных (2.1) и правила дифференцирования (2.2) известны еще из курса школьной математики, поэтому их вывод, основанный на использовании определения производной (1.6), опускаем.

<u>*Пример 4*</u>. $y = 2x^2 - 3x + 5$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = (2x^2 - 3x + 5)' = (2x^2)' - (3x)' + (5)' = 2(x^2)' - 3(x)' + (5)' = 2 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0 = 4x - 3$$

<u>*Пример 5*</u>. $y = \sqrt{x}$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \left| \text{учтем, что } (x^n)' = nx^{n-1} \right| = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Полученный результат

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} , \tag{2.3}$$

наряду с формулами (2.1), полезно запомнить.

<u>*Пример 6*</u>. $y = (2x + 3)\sin x$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = ((2x + 3) \cdot \sin x)' = \left| \begin{matrix} \text{учтем, что} \\ (u \cdot v)' = u'v + uv' \end{matrix} \right| = (2x + 3)' \cdot \sin x + (2x + 3) \cdot (\sin x)' =$$
$$= 2\sin x + (2x + 3)\cos x .$$

<u>*Пример 7*</u>. $y = \dfrac{1}{x}$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left| \begin{matrix} \text{учтем, что} \\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \end{matrix} \right| = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Полученный результат

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \tag{2.4}$$

тоже полезно запомнить.

<u>Производная сложной функции</u>

Пусть $y = y(u)$, а $u = u(x)$ – любые две дифференцируемые функции своих аргументов. Тогда функция $y = y(u(x))$ – так называемая *сложная функция от x* (она представляет собой функцию от функции). Найдем ее производную $y' = y'_x$ (производную от y по x). Для этого дадим аргументу x

некоторое приращение Δx, то есть перейдем от x к $x+\Delta x$. Приращение Δx величины x вызовет некоторое приращение Δu величины u, а то, в свою очередь, вызовет некоторое приращение Δy величины y. Так как функции $y = y(u)$ и $u = u(x)$ являются, по условию, дифференцируемыми функциями своих аргументов, то они являются и непрерывными функциями своих аргументов (см. теорему в § 1). То есть при $\Delta x \to 0$ и $\Delta u \to 0$, и $\Delta y \to 0$. А тогда, согласно (1.5), получаем:

$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta u\to 0)}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x .$$

Итак, если $y = y\big(u(x)\big)$ – сложная функция от x, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Или, опуская значок x (но подразумевая его) запишем короче:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \Leftrightarrow y' = y'_u \cdot u' \tag{2.5}$$

Формула (2.5) представляет собой *правило вычисления производной (правило дифференцирования) сложной функции*.

Собственно говоря, суть правила (2.5) проста. А именно, если функция $y = y(x)$ – простая функция от x (из числа основных элементарных функций, чьи производные содержатся в таблице (2.1)), то ее производная и выглядит, и находится просто: $y' = y'_x$. А если $y = y(u)$, где $u = u(x)$ – две простых функции, то $y = y\big(u(x)\big)$ – уже сложная функция от x. Ее производная $y' = y'_x$ по x находится уже по формуле (2.5): сначала находим производную от функции $y = y(u)$ по переменной u (точно так же, как находим производную от функции $y = y(x)$ по переменной x), а затем умножаем ее на производную функции $u = u(x)$ по переменной x.

Чтобы сделать наглядным применение этого правила, приведем таблицу сравнения, содержащую производные некоторых простых и аналогичных им сложных функций от x:

Производные простых функций (x – независимая переменная)	Производные сложных функций ($u = u(x)$ – любая дифференцируемая функция)
1. $(x^2)' = 2x$	1. $(u^2)' = 2u \cdot u'$
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	2. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
4. $(e^x)' = e^x$	4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

(2.6)

6. $(\sin x)' = \cos x$	6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
(……)	(……)

Таблица (2.6) наглядно иллюстрирует разницу между производными простых и сложных функций.

<u>*Пример 8*</u>. $y = \ln\sin x$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = \left(\ln\sin x\right)' = \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что } (\ln x)' = 1/x; \\ \text{значит, } \ (\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'; \\ \text{у нас } \ u = \sin x \end{array} \right| = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = ctg\, x$$

<u>*Пример 9*</u>. $y = \cos 3x$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = \left(\cos 3x\right)' = \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что } (\cos x)' = -\sin x; \\ \text{значит}, (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \\ \text{у нас } \ u = 3x; \end{array} \right| = -\sin 3x \cdot (3x)' = -3\sin 3x$$

<u>*Пример*</u> *10*. $y = \sqrt{1-x^2}$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \left| \begin{array}{l} \textit{учтем, что } (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \\ \textit{значит}, (\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'; \\ \textit{у нас } u = 1-x^2; \end{array} \right| = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>*Пример*</u> *11*. $y = tg^3 4x$; $y' = ?$

<u>*Решение*</u>.

$$y' = \left(tg^3 4x\right)' = \left((tg\, 4x)^3\right)' = \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что } (x^3)' = 3x^2; \\ \text{значит, } (u^3)' = 3u^2 \cdot u'; \\ \text{у нас } \ u = tg\, 4x \end{array} \right| = 3(tg\, 4x)^2 \cdot (tg\, 4x)' =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что } (tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}; \\ \text{значит}, (tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'; \\ \text{у нас } \ u = 4x \end{array} \right| = 3tg^2 4x \cdot \frac{1}{\cos^2 4x}\cdot(4x)' = \frac{12tg^2 4x}{\cos^2 4x}.$$

Производная функции, заданной неявно

Если функция $y = f(x)$ задана в неявном виде, то есть задана уравнением $F(x; y) = 0$ (в этом уравнении *y* не выражен через *x*, и выразить его не удается), то при нахождении производной y' такой функции поступают следующим образом:

1) Дифференцируют обе части уравнения $F(x; y) = 0$ по *x*, помня при этом, что *y* – это функция от *x*. В результате появляется некоторое равенство $\Phi(x; y; y') = 0$, содержащее искомую производную y'.

2) Выражают из полученного равенства эту производную.

Таким образом, производную y' функции *y*, заданной неявно уравнением $F(x; y) = 0$, находят по схеме:

$$F(x; y) = 0 \Rightarrow \big(F(x; y)\big)'_x = (0)'_x \Rightarrow \Phi(x; y; y') = 0 \Rightarrow y' = \varphi(x; y) \qquad (2.7)$$

Пример 12. Найти производную y' функции *y*, заданной неявно уравнением $\sin xy + y - x^2 = 0$.

Решение.

$$\sin xy + y - x^2 = 0 \Rightarrow (\sin xy + y - x^2)'_x = (0)'_x \Rightarrow \cos xy \cdot (xy)'_x + y' - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos xy \cdot (x'y + xy') + y' - 2x = 0 \Rightarrow \cos xy \cdot (y + xy') + y' - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy' \cos xy + y' = 2x - y\cos xy \Rightarrow y' = \frac{2x - y\cos xy}{x\cos xy + 1}$$

Производная функции, заданной параметрически

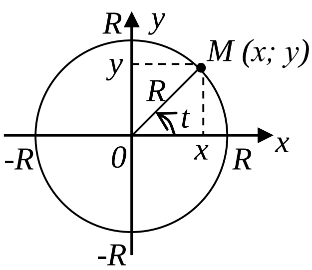
Если функция задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \text{ - независимый параметр}), \qquad (2.8)$$

то ее производную $y' = y'_x$ находят по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (2.9)$$

Подтвердим эту формулу. Пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – дифференцируемые функции параметра *t*. Зафиксируем некоторое *t*, а затем придадим ему приращение Δt. При этом *x* и *y* получат некоторые приращения Δx и Δy, причем при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$, и $\Delta y \to 0$ (функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – дифференцируемые, а значит, и непрерывные). А тогда



$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta t \to 0)}} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Рис. 2.8

Пример 13. Функция $y = y(x)$, заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},$$

представляет собой параметрическое уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом *R* (рис. 2.8).

Найдем производную $y' = y'_x$ этой функции:

$$y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(R\sin t)'_t}{(R\cos t)'_t} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -ctg\, t$$

Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ – некоторая заданная функция, а $y' = f'(x)$ – ее производная. Тогда $(y')' = y''$ – *производная второго порядка* от функции *y*. Применяют и другие обозначения этой производной:

$$(y')' = y'' = y''_{x^2} = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \ddot{y} \qquad (2.10)$$

Далее,

$$(y'')' = y''' = y'''_{x^3} = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \dddot{y} \qquad (2.11)$$

– *производная третьего порядка* от функции *y*. И т.д. Кстати, обычную производную $y' = f'(x)$ часто называют *производной первого порядка*.

Пример 14. $y = \sin x$; $y''' = ?$

Решение. Чтобы найти y''', сначала нужно найти y' и y'':

$y' = (\sin x)' = \cos x$; $y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x$; $y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x$.

Пример 15. Функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 = 4$. Найти y''.

Решение. Сначала найдем y':

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (x^2 + y^2)'_x = (4)'_x \Rightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Теперь найдем и y'':

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{1 \cdot y - x \cdot (-x/y)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = \left| \begin{matrix} \textit{учтем, что} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{matrix} \right| = -\frac{4}{y^3}$$

Пример 16. Функция $y = f(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$.

Найти $y'' = y''_{x^2}$.

Решение. Сначала найдем $y' = y'_x$: $y'_x = -ctg\, t$ (см. пример 13). А теперь найдем $y'' = y''_{x^2}$:

$$y'' = y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-ctg\,t)'_t}{(R\cos t)'_t} = \frac{1/\sin^2 t}{-R\sin t} = -\frac{1}{R\sin^3 t}.$$

<u>Физический смысл производной второго порядка</u>

Если $y = f(x)$ – уравнение движения точки по ее траектории (см. рис. 2.3), то, как мы знаем, ее производная $y' = f'(x)$ (производная первого порядка) представляет собой скорость $v(x)$ движения точки (мгновенную скорость движения) – см. (1.7). Но тогда производная второго порядка $y'' = (y')' = v'(x)$ будет иметь смысл «скорость изменения скорости» движения точки. В физике такая величина называется ускорением. Поэтому

$$y'' = f''(x) = v'(x) = a(x) \qquad (2.12)$$

– ускорение движения точки в момент *x*. В этом и состоит физический смысл производной второго порядка.

<u>*Пример 17*</u>. Как известно, уравнение движения свободно падающего в безвоздушном пространстве тела, начавшего свое падение в момент $t = 0$, имеет вид: $s = \frac{gt^2}{2}$ (*s* – путь, пройденный падающим телом за время *t*). Найдем скорость $v = v(t)$ и ускорение $a = a(t)$ падающего тела:

$$v = s' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2}\cdot 2t = gt;$$

$$a = s'' = (s')' = v' = (gt)' = g.$$

То есть ускорение *a* падающего тела неизменно и равно *g* – ускорению свободного падения ($g \approx 9{,}8$ м/сек^2). А скорость *v* падающего тела возрастает пропорционально времени по формуле $v = gt$.

Упражнения

1. Найти угол наклона к оси *ox* касательной, проведенной к параболе $y = x^2$ в точке $M(2;4)$.

<u>*Ответ*</u>: $\alpha = arctg\,4 \approx 76°$.

2. Найти на параболе $y = x^2$ такую точку $M(x;y)$, чтобы касательная к параболе, проведенная в этой точке, составила с осью *ox* угол $\alpha = 45°$.

<u>*Ответ*</u>: $M(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$.

3. В момент времени $t = 1$ найти скорость *v* и ускорение *a* точки, движущейся по оси *ox* по закону $x = 5 - 2t + 10t^2$.

<u>*Ответ*</u>: $v(1) = 18$; $a(1) = 20$.

4. Количество *y* произведенной за время *t* продукции описывается функцией $y = 200t^2 + 100t$. Найти производительность труда предприятия.

Ответ: $100+400t$ (ед. продукции за ед. времени).

5. Функция $y=2x+10\ln(x+1)$ определяет зависимость себестоимости продукции у (в рублях) от объема х выпускаемой продукции (в некоторых единицах). Найти предельную себестоимость продукции.

Ответ: $y'=2+\dfrac{10}{x+1}$ (руб/ед.).

6. Кривая спроса $p=p(q)$ имеет уравнение $p=\dfrac{10}{q+2}$. Найти предельный (маржинальный) доход от реализации продукции.

Ответ: $R'=[q\cdot p(q)]'=\dfrac{20}{(q+2)^2}$ (ден. ед./ед. товара).

7. Найти производную $y'=y'_x$ функций:

а) $y=\dfrac{1}{x^2}$; б) $y=\sqrt{8-x^3}$; в) $y=xe^{-3x}$; г) $y+arctg\,y=x$; д) $\begin{cases} x=R(t-\sin t) \\ y=R(1-\cos t) \end{cases}$

Ответ: а) $y'=-\dfrac{2}{x^3}$; б) $y'=\dfrac{-3x^2}{2\sqrt{8-x^3}}$; в) $y'=(1-3x)e^{-3x}$;

г) $y'=\dfrac{y^2+1}{y^2+2}$; д) $y'=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

8. Найти производную $y''=y''_{x^2}$ функций:

а) $y=\cos^2 4x$; б) $x-\sin 2y=0$; в) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t. \end{cases}$.

Ответ: а) $y''=-32\cos 8x$; б) $y''=\dfrac{\sin 2y}{2\cos^3 2y}$; в) $y''=\dfrac{t^2+1}{4t^3}$.

9. Найти производную функции $y=(a+bx)^2$. Причем сделать это двумя способами: 1) раскрыв квадрат разности; 2) не раскрывая его.

Ответ: $y'=2a(ax+b)$.

10. Найти производные функций: а) $y=(a-bx)^3$; б) $y=(1-5x^2)^{10}$.

Ответ: а) $y'=-3b(a-bx)^2$; б) $y'=-100x(1-5x^2)^9$.

11. Найти производные функций: а) $y=Sin^2 4x$; б) $y=\sqrt{1+Cos^3 2x}$.

Ответ: а) $y'=4Sin8x$; б) $y'=-\dfrac{3Cos^2 2x\cdot Sin2x}{\sqrt{1+Cos^3 x}}$.

12. Найти производные функций: а) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$; б) $y=2xe^{-x^2}$;

в) $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$.

Ответ: а) $y' = \dfrac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$; б) $y' = 2(1-2x^2)e^{-x^2}$; в) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

13. $f(x) = \dfrac{Cos^2 x}{1+Sin^2 x}$. Показать, что $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$.

14. Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$. Найти $y'(0)$. *Ответ*: $y'(0) = \dfrac{1}{3}$.

15. Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x\ln y - y\ln x = 1$. Найти $y'(1)$. *Ответ*: $y'(1) = e^2$.

16. Показать, что функция $y = -\dfrac{e^{-x^2}}{2x^2}$ удовлетворяет уравнению $xy' + 2y = e^{-x^2}$.

17. Показать, что функция $y = xe^{-\frac{1}{x}}$ удовлетворяет уравнению $x^3y'' - xy' + y = 0$.

18. Точка движется по оси ox по закону $x = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ (x - координата движущейся точки, t - время). Определить скорость и ускорение точки. В какие моменты времени точка меняет направление своего движения? Показать на оси ox схему движения точки.

§ 3. Исследование функций с помощью производных

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ возрастает на некотором интервале $(a;b)$ оси ox (с ростом x растет и y) и дифференцируема на этом интервале, то для любого x из этого интервала $y' = f'(x) > 0$ (производная имеет знак (+)). А если она убывает на этом интервале (y убывает с ростом x) и дифференцируема на нем, то для любого x из этого интервала $y' = f'(x) < 0$ (производная имеет знак (–)).

Доказательство.

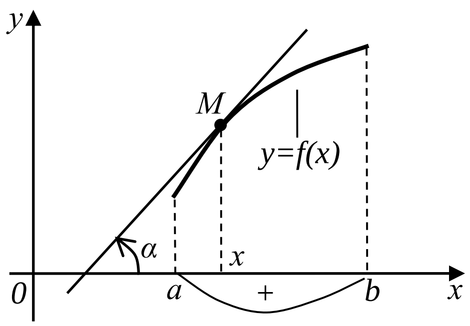


Рис. 2.9

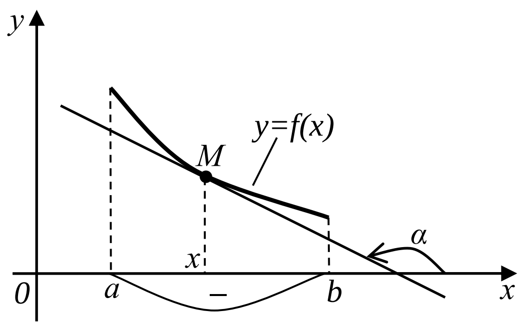


Рис. 2.10

Рассмотрим сначала рис. 2.9. На нем изображен график возрастающей и дифференцируемой на интервале $(a;b)$ функции $y=f(x)$. В каждой точке M этого графика касательная составляет с осью *ox* острый угол α ($0° < \alpha < 90°$). Но тангенсы острых углов, как известно, положительны. Значит, согласно геометрическому смыслу производной (1.11), и производная $y'=f'(x)$ положительна для любых *x* из интервала $(a;b)$ возрастания функции.

А теперь рассмотрим рис. 2.10, на котором изображен график убывающей на интервале $(a;b)$ функции $y=f(x)$. Здесь для любой точки M графика функции (а значит, для любого x из интервала $(a;b)$) угол α наклона касательной, проведенной к графику функции, тупой ($90° < \alpha < 180°$). Но тангенсы таких углов отрицательны. А значит, согласно (1.11), и производная $y'=f'(x)$ отрицательна.

Следствие теоремы 1. Если на некотором интервале $(a;b)$ оси *ox* в любой его точке x производная функции $y=f(x)$ положительна, то функция возрастает на этом интервале. А если отрицательна – то убывает. Это следствие играет очень важную роль в исследовании функций. Оно позволяет по знаку производной функции определять, растет или убывает функция, и где именно (для каких x) растет, и где (для каких x) убывает.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y=x^2$. Ее производная $y'=2x$. Она положительна при $x>0$ и отрицательна при $x<0$. Значит, при $x>0$ функция $y=x^2$ возрастает, а при $x<0$ она убывает. График этой функции (всем известная парабола) наглядно подтверждает сказанное.

Применение производной функции к нахождению точек экстремума функции

Напомним (см. § 1), что термин «точки экстремума» – это общее название точек максимума и минимума функции. А под ними, в свою очередь, понимаются абсциссы вершин и впадин графика функции (проекции вершин и впадин на ось оx). Или, если не прибегать к геометрической трактовке, точки экстремума функции – это те значения ее аргумента x, при которых функция $y=f(x)$ принимает экстремальные (пиковые) значения – максимальные или минимальные. Точек экстремума у функции $y=f(x)$ столько, сколько вершин и впадин у ее графика.

Рассмотрим рис. 2.11. На нем изображен график непрерывной функции $y=f(x)$, имеющей и интервалы возрастания, и интервалы убывания, и точки экстремума:

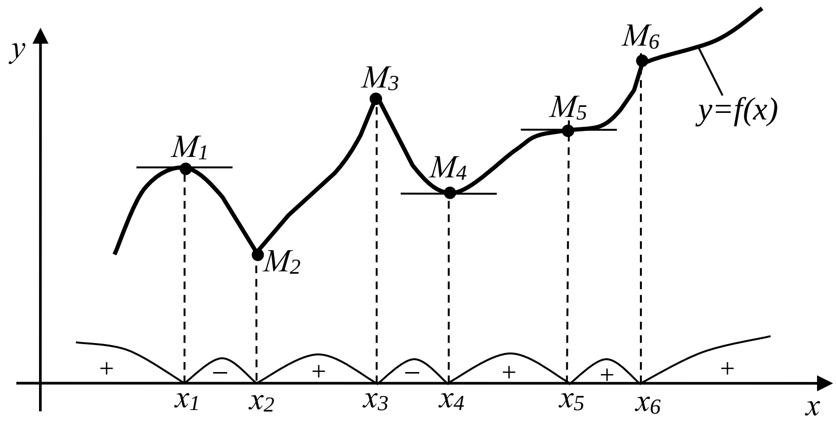


Рис. 2.11

Интервалы возрастания функции помечены знаком (+), а интервалы убывания – знаком (–). Согласно доказанной выше теореме 1, это заодно и знаки производной функции $y = f(x)$.

Точками экстремума данной функции являются точки (x_1, x_2, x_3, x_4). Причем точки x_1 и x_3 – точки максимума, а x_2 и x_4 – точки минимума. Точки x_5 и x_6 точками экстремума функции не являются, так как соответствующие им точки графика M_5 и M_6 – не вершины и не впадины этого графика.

Точки экстремума разделяют собой интервалы возрастания и убывания функции. В точках максимума совершается переход от возрастания функции (слева от точки максимума) к ее убыванию (справа от точки максимума). То есть в точках максимума знак производной функции меняется с (+) слева на (–) справа. А в точках минимума, наоборот, совершается переход от убывания функции к ее возрастанию. То есть в точках минимума знак производной функции меняется с (–) слева на (+) справа.

Сами же точки экстремума не принадлежат ни к интервалам возрастания, ни к интервалам убывания функции. Потому в точках экстремума производная не может быть ни положительной, ни отрицательной. Значит, в этих точках она или равна нулю, или ее не существует вообще.

Этот вывод понятен и с геометрической точки зрения. Действительно, производная функции, согласно ее геометрическому смыслу (1.11) и рис. 2.5, связана с касательной к графику функции. А именно, представляет собой тангенс угла наклона этой касательной к оси *ox*. Но точкам экстремума функции соответствуют на ее графике вершины и впадины, в которых касательная к графику или параллельна оси *ox* (если вершина или впадина графика округлая, то есть гладкая), или эта касательная отсутствует вообще (если вершина или впадина острая). В первом случае угол наклона α касательной к оси *ox* равен нулю. Значит, и $tg\alpha = 0$, а значит, и производная $y' = f'(x) = 0$. Во втором случае угол α не существует вообще, а значит, не существует для данной точки экстремума x и производная $y' = f'(x)$. В частности, для рис. 2.11 имеем:

$$y'(x_1) = 0; \quad y'(x_2) \text{ – не сущ.}; \quad y'(x_3) \text{ – не сущ.}; \quad y'(x_4) = 0.$$

Ясно, что в любой точке экстремума производная функции или равна нулю, или не существует. Однако не любая точка x, в которой производная равна нулю или не существует, непременно будет точкой экстремума. В частности, на рис. 2.11 $y'(x_5)=0$; $y'(x_6)$ не существует, и тем не менее ни точка x_5, ни точка x_6 не являются точками экстремума функции $y=f(x)$.

Все сказанное выше о точках экстремума функции можно оформить в виде теоремы.

Теорема 2. Необходимое условие экстремума.

Для того, чтобы некоторая точка x являлась точкой экстремума функции $f(x)$, необходимо, чтобы в этой точке производная $y'=f'(x)$ функции или равнялась нулю, или не существовала. Это условие не является достаточным.

Таким образом, лишь те точки (значения x), в которых производная $y'=f'(x)$ функции равна нулю или не существует, могут быть точками экстремума этой функции. Но еще не факт, что все такие точки будут точками экстремума. Иначе говоря, точки (значения x), в которых $y'=f'(x)=0$ или $y'=f'(x)$ не существует, являются *лишь подозрительными на экстремум*. Чтобы выяснить суть каждой подозрительной точки, нужно посмотреть знак производной слева и справа от неё. Здесь возможны три варианта:

1) Если слева от подозрительной на экстремум точки знак производной (+), а справа (–), то эта подозрительная точка – точка максимума.
2) Если слева от подозрительной на экстремум точки знак производной (–), а справа (+), то эта подозрительная точка – точка минимума.
3) Если слева и справа от подозрительной на экстремум точки знак производной один и тот же, то эта подозрительная точка – не точка экстремума.

Сказанное наглядно иллюстрирует рис. 2.11. Таким образом, становится понятной и очевидной следующая

Схема исследования функции $y=f(x)$ на возрастание-убывание и точки экстремума

1. Стандартное начало исследования любой функции таково: находим область ее определения. То есть находим все те значения x, для которых существует (можно найти) значение функции $y=f(x)$. Заодно устанавливаем интервалы непрерывности и точки разрыва функции.

2. Находим производную $y'=f'(x)$.

3. Находим точки (значения x), подозрительные на экстремум. То есть находим те точки (значения x), в которых производная функции или равна нулю, или не существует:

а) $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=(x_1;x_2;...)$

б) y' не существует $\Rightarrow x=(x_1^*;x_2^*;...)$

4. Наносим все найденные в пунктах (а) и (б) подозрительные на экстремум точки на область определения функции (на ось *ox*) и фиксируем (например, дугами) интервалы, на которые разобьется область определения этими точками. Так как внутри каждого такого интервала производная функции существует и не обращается в нуль, то в каждом интервале производная сохраняет свой знак, который может измениться лишь при переходе к другому интервалу. С помощью вычисления производной в пробных внутренних точках интервалов определяем знак производной в каждом интервале. По найденным знакам производной устанавливаем интервалы возрастания и убывания функции, а по смене знака производной определяем точки экстремума функции (точки максимума и минимума).

5. В найденных точках максимума и минимума вычисляем значения функции $y = f(x)$ и тем самым определяем вершины и впадины графика функции, отмечая заодно, гладкие они или острые.

Пример 1. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2$ на возрастание-убывание и точки экстремума.

Решение. Действуем по изложенной выше схеме.

1. Находим область определения функции. Функция $y = x^3 - 3x^2$ определена (а следовательно, и непрерывна) для любых *x*, то есть на всей числовой оси *ox* $(-\infty < x < \infty)$. Значит, её график – сплошная (без разрывов) линия.

2. Найдем производную y':

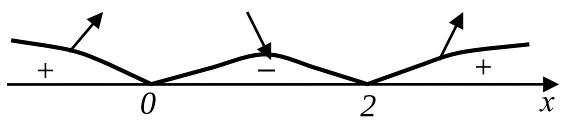
$$y' = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

3. Найдем точки (значения *x*), подозрительные на экстремум:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0;\ x_2 = 2)$.

б) y' не существует $\Rightarrow$ таких *x* нет.

4. Нанесем найденные подозрительные на экстремум точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ на область определения функции (на ось *ox*). Ось *ox* этими точками разобьется на три интервала:



$$y' = 3x(x-2)$$

С помощью пробных точек, взятых на каждом интервале, определяем знаки производной $y' = 3x(x-2)$ в этих интервалах (они отмечены на рис. выше). Тем самым устанавливаем интервалы возрастания функции $y = x^3 - 3x^2$ (они помечены стрелкой вверх) и интервал ее убывания (стрелка вниз), а также устанавливаем, что точка $x_1 = 0$ – точка максимума функции, а точка $x_2 = 2$ – точка ее минимума.

5. Находим (вычисляем) значения функции $y = x^3 - 3x^2$ в точках ее максимума и минимума, устанавливая тем самым вершины и впадины графика функции:

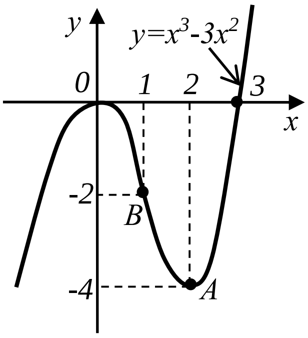


Рис. 2.12

$$x = x_{\max} = 0 \Rightarrow y = y_{\max} = 0;$$

Точка $O(0;0)$ – вершина графика функции (гладкая, т.к. $y'(0) = 0$).

$$x = x_{\min} = 2 \Rightarrow y = y_{\min} = -4;$$

Точка $A(2;4)$ – впадина графика функции (гладкая, т.к. $y'(2) = 0$).

6. В дополнение к проведенному исследованию найдем еще точки пересечения графика функции с осями координат:

а) С осью *ox*:

$$y = 0 \Leftrightarrow y = x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0;\ x_2 = 3)$$

б) С осью *oy*: $x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 3\cdot 0^2 = 0$.

А теперь построим этот график (рис. 2.12):

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции (глобального максимума и глобального минимума)

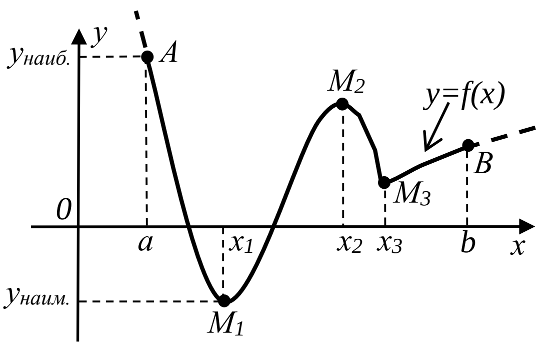


Рис 2.13

Пусть $y = f(x)$ – функция, непрерывная на некотором отрезке $[a;b]$ оси *ox* (рис. 2.13)

Ставится задача: указать схему нахождения тех точек отрезка $[a;b]$ оси *ox*, в которых функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего значения $y_{наиб.}$ и своего наименьшего значения $y_{наим.}$, и найти эти $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$. Кстати, эти $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$ называют *глобальным максимумом и глобальным минимумом* функции.

Сразу отметим, что такие точки x в которых имеет место (достигается) и глобальный максимум, и глобальный минимум, на отрезке $[a;b]$ заведомо существуют (это доказано). А вот на интервале $(a;b)$ их может и не быть. То есть на интервале функция своих наибольшего и наименьшего значений может и не иметь. Например, функция $y = x^2$ на отрезке $[0;2]$ имеет свое наименьшее значение (глобальный минимум) $y_{наим.} = 0$, и достигает она его в точке $x = 0$. И она имеет свое наибольшее значение (глобальный максимум) $y_{наиб.} = 4$, и достигает она его в точке $x=2$. А вот на интервале $(0;2)$ своих наибольшего и наименьшего значений функция $y=x^2$, очевидно, не имеет (не достигает).

Вернемся к рис. 2.13, на котором изображена произвольная непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$. Здесь $y_{наиб.}$ достигается функцией на конце a отрезка $[a;b]$, а $y_{наим.}$ – в точке x_1, являющейся одной из точек минимума функции. И вообще, очевидно, что и при любой другой форме графика непрерывной функции наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a;b]$ достигаются ею или в её точках экстремума, содержащихся на этом отрезке, или на концах отрезка. Отсюда вытекает следующая

схема нахождения $y_{наиб.}$ *и* $y_{наим.}$ *функции* $y=f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$:

1. Находим производную $y'=f'(x)$.
2. Находим принадлежащие отрезку $[a;b]$ точки, подозрительные на экстремум.
3. Не исследуя этих точек, вычисляем значение функции $y=f(x)$ во всех найденных подозрительных точках, а также на концах a и b отрезка $[a;b]$. Из всех найденных значений y выбираем $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$. А заодно устанавливаем, в каких точках отрезка $[a;b]$ эти $y_{наиб.}$ и $y_{наим.}$ достигаются.

Пример 2. На отрезке $[-1;3]$ найти наибольшее $y_{наиб.}$ и наименьшее $y_{наим.}$ значения функции $y=x^4-8x^2$.

Решение. Реализуем изложенную выше схему.

1. Найдем y':

$$y'=(x^4-8x^2)'=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x-2)(x+2).$$

2. Найдем на отрезке $[-1;3]$ точки (значения x), подозрительные на экстремум:

а) $y'=0 \Leftrightarrow 4x(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow (x_1=0;\ x_2=2;\ x_3=-2)$.

б) y' не существует $\Rightarrow$ таких x нет.

На отрезке $[-1;3]$ содержатся лишь две подозрительные на экстремум точки: это $x_1=0$ и $x_2=2$.

3. Вычисляем значении функции $y=x^4-8x^2$ в обеих найденных подозрительных точках, а также на концах отрезка, и выберем из найденных значений функции наибольшее и наименьшее:

$$y(0)=0;\ y(2)=-16;\ y(-1)=-7;\ y(3)=9$$

Ответ: $y_{наиб.}=y(3)=9$; $y_{наим.}=y(2)=-16$.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

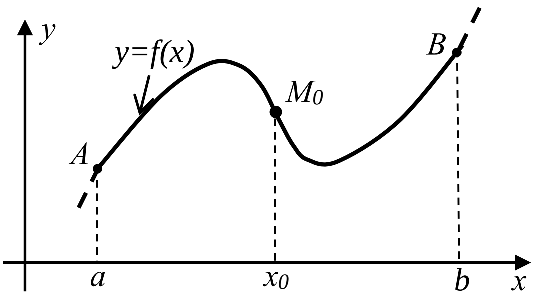


Рис. 2.14

Понятие о выпуклости, вогнутости и точках перегиба функции $y = f(x)$ дадим, исходя из рис. 2.14. На этом рисунке изображен график функции, выпуклой на интервале $(a;x_0)$, вогнутой на интервале $(x_0;b)$, и у которой точка x_0, разделяющая интервалы выпуклости и вогнутости, есть *точка перегиба функции*. Кстати, точка M_0 называется *точкой перегиба графика функции* (не путать точку перегиба функции x_0 и точку перегиба её графика M_0). Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции – важные характеристики любой функции, поэтому полезно уметь их находить.

Рассмотрим подробнее функцию $y = f(x)$ на ее интервале выпуклости $(a;x_0)$ (рис. 2.15 (а)) и на ее интервале вогнутости (рис. 2.15 (б)).

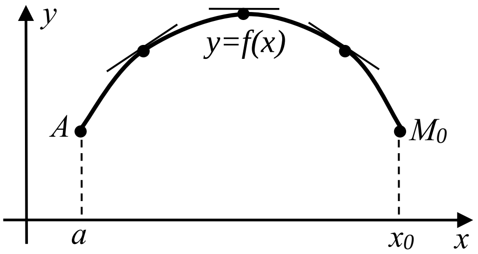


Рис. 2.15 (*а*)

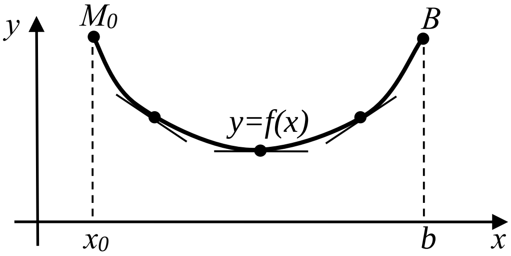


Рис. 2.15 (*б*)

Для выпуклой функции (рис. 2.15 (а)) касательная к ее графику в любой его точке расположена выше графика, причем с увеличением абсциссы x точки касания эта касательная поворачивается по часовой стрелке. Это значит, что с увеличением x угол α наклона касательной к оси ox уменьшается. Но тогда уменьшается и угловой коэффициент касательной $k = tg\alpha$. А значит, с увеличением x уменьшается (убывает) равная ему производная функции $y' = f'(x)$. Но если некая функция убывает, то, как мы знаем, ее производная отрицательна. Значит, $(y')' = y'' = f''(x) < 0$ на всем интервале $(a;x_0)$ выпуклости функции $y = f(x)$.

Аналогичное рассуждение приводит к выводу, что если функция $y = f(x)$ вогнута на некотором интервале $(x_0;b)$ (см. рис. 2.15 (б)), то для любого x из этого интервала $y'' = f''(x) > 0$ (проведите это рассуждение самостоятельно).

Верно, естественно, и обратное: если на некотором интервале оси ox вторая производная функции положительна, то функция вогнута на этом интервале. А если эта производная отрицательна – то функция выпукла на указанном интервале.

Теперь перейдем к точкам перегиба функции. Так как эти точки разграничивают интервалы выпуклости и вогнутости и, следовательно, не принадлежат ни тем, ни другим, то в точках перегиба вторая производная функции не может быть ни положительной, ни отрицательной. А значит, в этих точках она или равна нулю, или не существует.

Но не все точки x, в которых $y'' = f''(x) = 0$ или $y'' = f''(x)$ не существует, непременно должны быть точками перегиба. Точками перегиба будут лишь те из них, в которых вторая производная $y'' = f''(x)$ меняет знак (с (+) на (–) или с (–) на (+)). Таким образом, точки оси *ox*, в которых $y'' = f''(x) = 0$ или $y'' = f''(x)$ не существует, являются лишь <u>подозрительными на перегиб</u>. Окончательное выяснение сути этих точек производится после исследования знака второй производной слева и справа от каждой из них. Из всего сказанного вытекает следующая

<u>*схема исследования функции*</u> $y = f(x)$ <u>*на выпуклость-вогнутость*</u>
<u>*и точки перегиба*</u>*:*

1. Находим область определения функции, а заодно устанавливаем интервалы ее непрерывности и точки разрыва (стандартное начало любого исследования функции).

2. Находим вторую производную $y'' = f''(x)$.

3. Находим точки (значения *x*), подозрительные на перегиб. То есть находим те точки (значения *x*), в которых вторая производная функции или равна нулю, или не существует:

а) $y'' = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = (x_1; x_2; ...)$

б) y'' не существует $\Rightarrow x = (x_1^*; x_2^*; ...)$

4. Наносим все найденные подозрительные на перегиб точки на область определения функции (на ось *ox*) и отмечаем (например, дугами) интервалы, на которые разобьется этими дугами область определения функции. В каждом из этих интервалов выясняем знак второй производной $y'' = f''(x)$. По установленным знакам этой производной отмечаем интервалы выпуклости и вогнутости функции ((–) – выпуклость, (+) – вогнутость), а также точки перегиба функции.

5. Вычисляем значения функции $y = f(x)$ во всех найденных точках ее перегиба и находим тем самым точки перегиба графика функции.

<u>*Пример 3*</u>. Исследовать на выпуклость-вогнутость и точки перегиба функцию $y = x^3 - 3x^2$ (в примере 1 она уже исследовалась на возрастание-убывание и точки экстремума).

<u>*Решение*</u>. Реализуем изложенную выше схему.

1. Функция $y = x^3 - 3x^2$ определена, а следовательно и непрерывна для любых x от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Найдем y'':

$$y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = (y')' = 6x - 6 = 6(x-1).$$

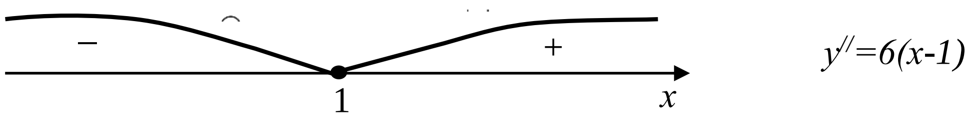
3. Найдем точки (значения x), подозрительные на перегиб:

$$\text{а) } y'' = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 .$$

$$\text{б) } y'' \text{ не существует} \Rightarrow \text{таких } x \text{ нет.}$$

4. Нанесем на ось *ох* найденную подозрительную на перегиб точку $x = 1$. Ось *ох* (область определения функции) разобьется этой точкой на два интервала:

5.



Определяем знаки второй производной $y'' = 6(x-1)$ в этих интервалах (они отмечены на рис. выше). Тем самым устанавливаем интервалы выпуклости (знак $\cap$) и вогнутости (знак $\cup$) , а также устанавливаем, что $x = 1$ – точка перегиба функции.

6. Вычисляем значение функции $y = x^3 - 3x^2$ в точке ее перегиба $x = 1$ и тем самым определим точку $B(1;-2)$ перегиба графика функции (она указана на рис. 2.12).

Общая схема исследования функции

Пусть $y = f(x)$ – некоторая заданная функция. Требуется провести ее всестороннее (полное) исследование и построить ее график. Указанное полное исследование функции можно провести по следующей схеме.

1. Находим область определения функции. Заодно устанавливаем интервалы ее непрерывности и точки разрыва.

2. Исследуем функцию на четность-нечетность и тем самым устанавливаем возможную симметрию графика функции относительно оси *оу* или относительно начала координат. Для этого записываем выражение $f(-x)$ и сравниваем его с $f(x)$:

а) Если $f(-x) \equiv f(x)$, то функция $y = f(x)$ – четная. Ее график симметричен относительно оси *оу* (рис. 2.16 (а)).

б) Если $f(-x) \equiv -f(x)$, то функция $y = f(x)$ – нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат (рис. 2.16 (б)).

в) Если не имеет место ни вариант (а) ни вариант (б), то функция $y = f(x)$ – общего вида (ее график симметрией (а) и (б) не обладает).

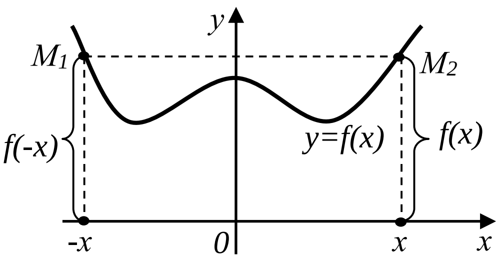


Рис. 2.16 (*а*)

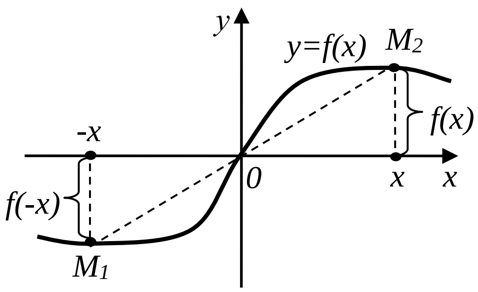


Рис. 2.16 (б)

3. Исследуем функцию на периодичность (на повторяемость ее графика). Из элементарных функций это имеет смысл делать лишь для тригонометрических функций, ибо прочие функции заведомо не периодичны.

4. Исследуем поведение функции возле найденных в пункте 1 точек ее разрыва, а также возле границ области ее определения, учитывая при этом информацию, полученную в пунктах 2 и 3. Заодно устанавливаем (определяем) вертикальные и невертикальные асимптоты графика функции (см. § 3 главы 1).

5. Находим интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума (с помощью первой производной $y' = f'(x)$). Заодно находим вершины и впадины графика функции и устанавливаем их тип (гладкие; острые).

6. Находим интервалы выпуклости и интервалы вогнутости функции и точки ее перегиба (с помощью второй производной $y'' = f''(x)$). Заодно находим точки перегиба графика функции.

7. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

8. Строим график функции.

<u>*Пример 4*</u>. Провести полное исследование функции $y = x + \frac{1}{x}$ и построить ее график.

<u>*Решение*</u>. Реализуем изложенную выше схему.

1. Область определения функции $y = x + \frac{1}{x}$ – любые *x*, кроме $x = 0$. То есть функция определена (а следовательно, и непрерывна) на всей числовой оси *ox*, кроме точки $x = 0$, которая, таким образом, является единственной точкой разрыва функции.

2. Исследуем функцию $y = x + \frac{1}{x}$ на четность-нечетность. Имеем: $f(x) = x + \frac{1}{x}$; тогда $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -(x + \frac{1}{x})$. Как видим, $f(-x) \equiv -f(x)$. Значит, наша функция – нечетная, ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому в дальнейшем будем исследовать функцию лишь для $x > 0$, ибо для $x < 0$ можно будет использовать указанную выше симметрию графика функции относительно начала координат..

3. Функция $y = x + \frac{1}{x}$ – алгебраическая (не тригонометрическая), а следовательно, не периодична.

4. Исследуем поведение функции возле точки ее разрыва $x = 0$ (справа, при $x \to +0$), а также при $x \to +\infty$ (на правой границе области ее определения). Для этого вычислим два предела нашей функции - при $x \to +0$ и при $x \to +\infty$.

а) $\lim\limits_{x \to +0}(x + \frac{1}{x}) = \left(0 + \frac{1}{+0}\right) = +\infty$. То есть функция $y = x + \frac{1}{x} \to +\infty$ при $x \to +0$. А это значит, что вертикальная прямая с уравнением $x = 0$ (ось *оу*) является вертикальной асимптотой графика функции. К ней справа (при $x \to +0$) неограниченно приближается график функции, устремляясь при этом вверх (рис. 2.17 (*а*)):

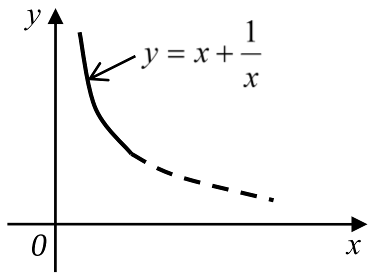


Рис. 2.17 (*а*)

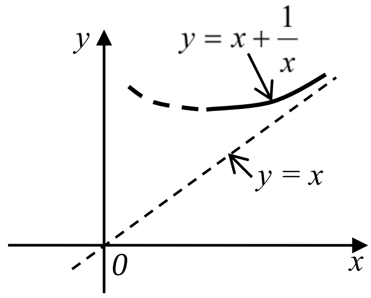


Рис. 2.17 (*б*)

б) $\lim\limits_{x \to +\infty}(x + \frac{1}{x}) = \left(+\infty + \frac{1}{+\infty}\right) = +\infty$.То есть функция $y = x + \frac{1}{x} \to +\infty$ при $x \to +\infty$. При этом, очевидно, при $x \to +\infty$ функция $y = x + \frac{1}{x}$ стремится к $+\infty$ эквивалентно функции $y = x$, так как $\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$. А это значит, что график нашей функции $y = x + \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ стремится к прямой $y = x$. То есть прямая $y = x$ – асимптота (наклонная асимптота) графика нашей функции. Причем график функции $y = x + \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ стремится к прямой $y = x$ сверху, ибо $x + \frac{1}{x} > x$ для всех $x > 0$ (рис. 2.17 (*б*)).

5. Найдем интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функции (схема такого исследования изложена выше).

а) Находим производную y':

$$y' = (x + \frac{1}{x})' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2};$$

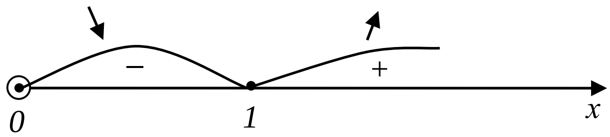
б) Найдем точки (значения *x*), подозрительные на экстремум:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 1;\ x_2 = -1).$$

$$y' \text{ не существует } \Rightarrow x = 0.$$

Точку $x = 0$ исследовать не будем, так как она не входит в область определения функции. Не будем исследовать и отрицательную точку $x_2 = -1$ (см. пункт 2).

в) Нанесем оставшуюся подозрительную на экстремум точку $x_1 = 1$ на область определения функции (на ось *ox*). При этом ограничимся рассмотрением лишь положительной полуоси $x > 0$:



$$y' = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

В обоих получившихся интервалах найдем знак производной y' и отметим его. Тем самым устанавливаем интервал возрастания $(1;+\infty)$ и интервал убывания $(0;1)$ функции. Заодно устанавливаем, что $x = 1$ – точка минимума функции.

г) Найдем значение функции в точке минимума и тем самым определим впадину графика функции:

$x = x_{\min} = 1 \Rightarrow y = y_{\min} = 2$; точка $A(1;2)$ – впадина графика функции (гладкая, т.к. $y'(1) = 0$).

6. Найдем интервалы выпуклости и интервалы вогнутости функции, а также точки перегиба функции и ее графика (схема исследования изложена выше).

а) Найдем y'':

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2};\ y'' = (y')' = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{x^4} = -\frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

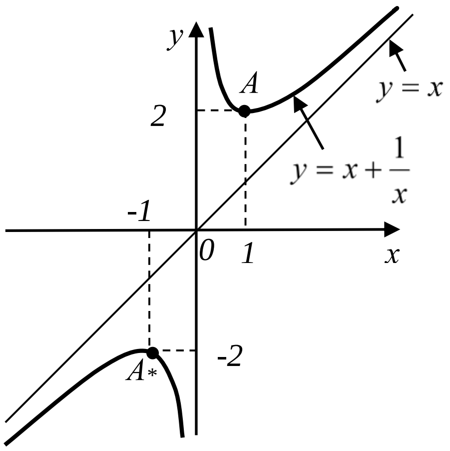


Рис.2.18

Так как $y'' = \frac{2}{x^3} > 0$ для всех $x > 0$, то для всех $x > 0$ функция наша вогнутая. То есть точек перегиба у нее нет.

7. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

а) С осью *ox*:

$$y = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 0 \Rightarrow \text{таких } x \text{ нет.}$$

б) С осью *oy*:

$$x = 0 \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{x} \text{ – не сущ.}$$

Таким образом, ни с осью *ox*, ни с осью *oy* график нашей функции не пересекается.

8. Строим график функции – сначала для $x > 0$, а затем, по симметрии относительно начала координат, и для $x < 0$ (рис. 2.18).

Упражнения

1. Сеткой длиной 120 метров нужно огородить прямоугольную площадку, примыкающую к стене. Каковы должны быть размеры этой площадки, чтобы ее площадь была максимальной?

Ответ: 60м × 30м.

2. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты, а из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был максимальным?

Ответ: $\frac{1}{6}a$.

3. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была максимальной.

Ответ: 20 см.

4. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить размеры и площадь этого треугольника.

Ответ: $S_{\max} = R^2$ при высоте прямоугольника $\frac{R}{\sqrt{2}}$ и длине $R\sqrt{2}$.

5. Из круга вырезается сектор, содержащий угол α, а затем сектор сворачивается в конус (в кулек). При каком значении угла α объем конуса будет наибольшим?

Ответ: при $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 294^0$.

6. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом $32\,м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ: 4×4×2 *м*.

7. Два коридора пересекаются под прямым углом. Ширина одного из них равна 2,4*м*, другого 1,6*м*. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно горизонтально перенести из одного коридора в другой.

Ответ: $\approx 5{,}6$*м*.

8. Вблизи завода A проходит железная дорога к городу B. Под каким углом α к железной дороге нужно провести шоссе, соединяющее завод A с железной дорогой, чтобы доставка продукции до города B была максимально дешевой, если стоимость 1 тонны-километра при перевозке по шоссе в m раз дороже, чем по железной дороге?

Ответ: $\cos\alpha = \frac{1}{m}$.

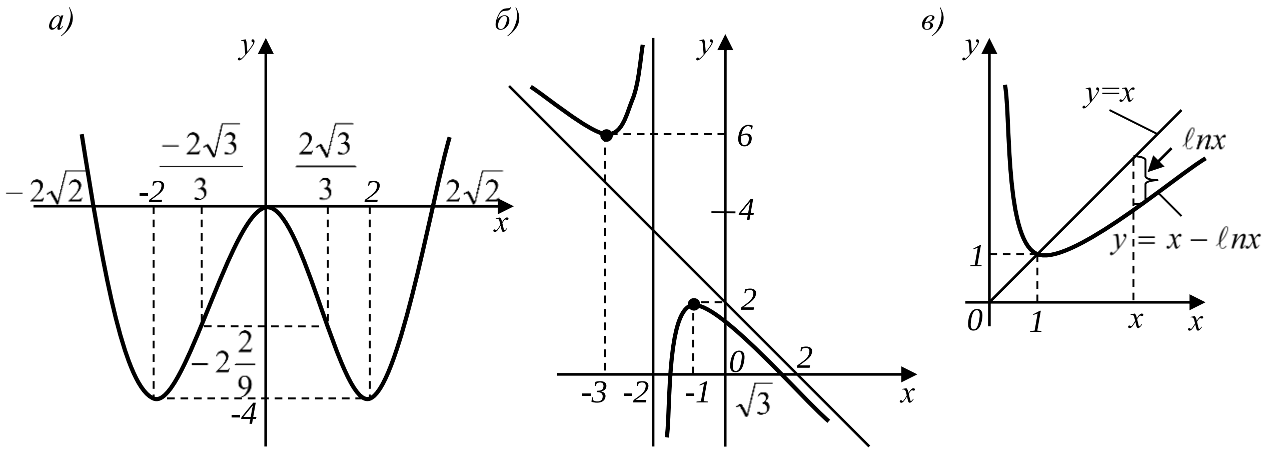
9. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему силой F. Под каким углом α к горизонту нужно направить силу F, чтобы величина ее была наименьшей? Коэффициент трения покоя между грузом и плоскостью равен k.

<u>*Ответ*</u>: $tg\alpha = k$. При этом $F = \dfrac{kP}{Cos\alpha + kSin\alpha}$.

10. Провести полное исследование и построить графики функций:

$$\text{а) } y = \frac{x^4}{4} - 2x^2; \quad \text{б) } y = \frac{3 - x^2}{x + 2}; \quad \text{в) } y = x - \ln x.$$

<u>*Ответ*</u>:



11. Провести полное исследование и построить графики функций:

$$a)\ y = xe^{-\frac{x^2}{2}};\ \text{б) } y = x^2e^{-x};\ \text{в) } y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2};\ \text{г) } y = x\sqrt{1-x};\ \text{д) } y = \frac{1+\ln x}{x};$$

$$e)\ y = Sin2x - x \text{ в интервале } \left(-\frac{\pi}{2} \prec x \prec \frac{\pi}{2}\right);\quad ж)\ y = 2Sinx + Cosx \quad (0 \prec x \prec \pi).$$

§ 4. Некоторые другие приложения производной

<u>1. Приближенное решение уравнений методом половинного деления.</u>

Пусть требуется решить некоторое уравнение $f(x) = 0$. Решить его – это значит найти все его корни. То есть найти те значения неизвестной *x*, которые удовлетворят уравнению. Корни уравнения $f(x) = 0$ имеют и наглядный геометрический смысл: это точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью *ox*.

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная на заданном отрезке $[a;b]$ функция, то есть ее график – сплошная (непрерывная) линия для всех *x* этого отрезка. Тогда очевидно следующее: если на концах этого отрезка (в точках a и b) функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков, то график этой функции непременно пересечет отрезок $[a;b]$ оси *ox* хотя бы один раз. А значит, уравнение $f(x)=0$ заведомо будет иметь на этом отрезке хотя бы один корень (один корень x_1 на рис. 2.19 (*а*) и три корня (x_1, x_2, x_3) на рис. 2.19 (*б*)).

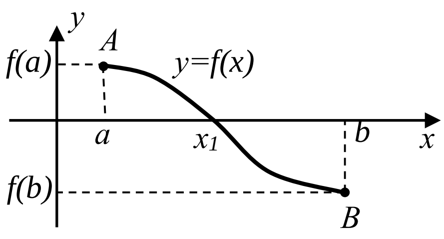


Рис.2.19 (*а*)

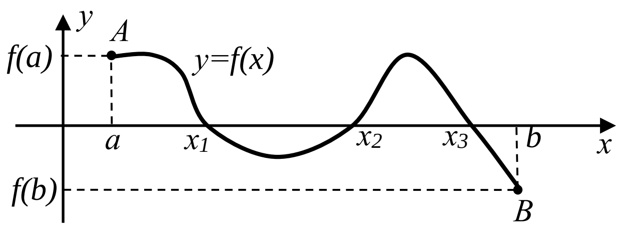


Рис. 2.19(*б*)

В частности, если на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$ дифференцируема (это значит, что на отрезке $[a;b]$ в каждой его точке x существует производная $y'=f'(x)$), и эта производная на всем отрезке сохраняет свой знак, то при знаке (+) этой производной функция $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ монотонно растет, а при знаке (–) монотонно убывает. В любом из этих вариантов график функции $y=f(x)$, имеющей на концах отрезка $[a;b]$ значения разных знаков, пересечет этот отрезок только один раз (как, например, на рис. 2.19 (*а*)). А значит, уравнение $f(x)=0$ будет иметь на отрезке $[a;b]$ только один корень x_1.

Простейшим и вместе с тем эффективным методом численного нахождения этого корня x_1 является *метод половинного деления*. Суть его в следующем:

1) Находим середину c_1 отрезка $[a;b]$ и вычисляем $f(c_1)$. Искомый корень x_1 окажется, очевидно, в той из половин $[a;c_1]$ или $[c_1;b]$ отрезка $[a;b]$, на концах которой функция $y=f(x)$ имеет разные знаки. Выбираем эту половину.

2) Находим середину c_2 той половины отрезка $[a;b]$, на которой находится искомый корень x_1, и вычисляем $f(c_2)$. Выбираем ту половину найденной в пункте 1 половины, на концах которой функция $y=f(x)$ имеет разные знаки. Именно на ней находится искомый корень x_1 уравнения $f(x)=0$.

3) Потом полученный отрезок (четвертинку исходного отрезка $[a;b]$) опять делим пополам, и т.д.

В итоге, последовательно сужая промежуток оси *ох*, на котором содержится искомый корень x_1 уравнения $f(x)=0$, через несколько шагов получим достаточно узкий промежуток (например, через 10 шагов исходный промежуток $[a;b]$ уменьшится в $2^{10}\approx 1000$ раз, через 20 шагов – в $2^{20}\approx 1$ миллион раз, и т.д.). Любая точка этого промежутка (например, его середина) может быть принята за приближенное значение искомого корня x_1. И корень этот, очевидно, может быть найден с любой заданной точностью, что и делается с помощью соответствующей программы на ЭВМ.

Примечание. Если известно, что уравнение $f(x)=0$ имеет несколько корней (x_1, x_2, …) – см. например, рис. 2.19 (*б*), то отделяя каждый из них своим промежутком и используя для каждого такого промежутка изложенную выше схему половинного деления, можно найти все эти корни. А чтобы узнать, сколько корней имеется у данного уравнения $f(x)=0$, следует представлять себе, хотя бы в общих чертах, график функции $y=f(x)$. То есть нужно исследовать эту функцию. И в этом исследовании главное – это определение интервалов непрерывности и точек разрыва функции, исследование ее на четность-нечетность и периодичность, определение интервалов возрастания-убывания и точек экстремума.

<u>Пример 1</u>. Определить количество корней уравнения $x^3-3x^2+2=0$ и отделить некоторым промежутком каждый из них.

<u>Решение</u>. Рассмотрим функцию $y=x^3-3x^2+2$. Эта функция определена (а следовательно, и непрерывна) для всех x, $-\infty<x<+\infty$. Функция эта общего вида (ни четная и ни нечетная) и не периодическая. Далее, исследуя ее на возрастание-убывание и точки экстремума (проделайте это по изложенной выше схеме самостоятельно), устанавливаем, что интервалы $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$ являются интервалами возрастания функции, а интервал $(0;2)$ – интервал ее убывания; $x=0$ – точка максимума функции, а точка $A(0;2)$ – вершина ее графика; $x=2$ – точка минимума функции, а точка $B(2;-2)$ – впадина ее графика. При $x\to+\infty$ функция $y\to+\infty$, а при $x\to-\infty$ функция $y\to-\infty$. По этим результатам можно уже схематично построить график функции $y=x^3-3x^2+2$ (рис. 2.20). Из этого графика видим, что он пересекает ось *ox* три раза – в точках (x_1, x_2, x_3). То есть уравнение $x^3-3x^2+2=0$ имеет три корня (x_1, x_2, x_3). Корень x_1 находится на промежутке $[-1;0]$; корень x_2 – на промежутке $[0;2]$, корень x_3 – на промежутке $[2;3]$. Каждый из них с любой заданной точностью может быть найден изложенным выше методом половинного деления.

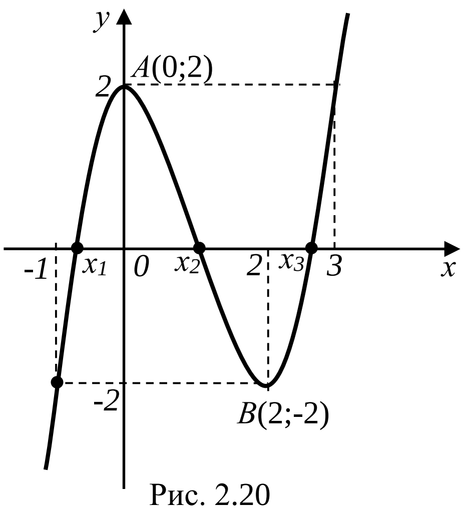


Рис. 2.20

Впрочем, так как $x_2=1$ – точное значение второго корня, то можно точно найти и значения корней x_1 и x_3:

$$x^3-3x^2+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2)=0 \Leftrightarrow \left\{ x_2=1;\ x_1=1-\sqrt{3};\ x_3=1+\sqrt{3} \right\}$$

<u>2. Правило Лопиталя вычисления пределов.</u>

Это правило состоит в следующем. Если требуется найти предел вида

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \tag{4.1}$$

где x_0 – число или символ $\pm\infty$, и этот предел приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}, \tag{4.2}$$

Словесная формулировка правила Лопиталя (4.2) такова: предел отношения бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

Доказательство. Исчерпывающее доказательство правила Лопиталя довольно громоздко. В связи с этим ограничимся рассмотрением случая, когда предел (4.1) приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = 0; \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0; \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \left(\frac{0}{0} = ? \right). \tag{4.3}$$

При этом будем считать, что x_0 – некоторое конечное число.

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то в силу равенства (2.3) главы 1 $f_1(x_0) = 0$ и $f_2(x_0) = 0$. Если же эти функции в точке x_0 разрывны, то их значения при x_0 не равны нулю (у них другие значения или они там вообще не определены). Тогда переопределим (или доопределим) их в точке x_0 так, чтобы стало $f_1(x_0) = 0$ и $f_2(x_0) = 0$. После этого, в силу того же равенства (2.3) главы 1, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ станут непрерывными в точке x_0. Далее, будем считать, что обе эти функции имеют и непрерывные производные в некоторой окрестности точки x_0, включая саму эту точку. То есть будем считать эти функции *непрерывно дифференцируемыми* в окрестности точки x_0. И еще будем считать, что $f_2'(x_0) \neq 0$. Тогда получим:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{f_2(x) - f_2(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{введем обозначение:} \\ x - x_0 = \Delta x \ (\Delta x \to 0); \\ \text{тогда} \ \ x = x_0 + \Delta x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)}{\Delta x}}{\dfrac{f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0)}{\Delta x}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0)}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{f_1'(x_0)}{f_2'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}.$$

Доказательство закончено.

Примечание. Предел отношения производных, стоящий в правой части равенства (4.2), тоже может приводить к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Тогда правило Лопиталя можно применить и к нему. То есть можно применить это правило повторно.

Пример 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

Пример 4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right) = (....) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)...2\cdot 1\cdot x^0} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

Последние два пример показывают, что при $x \to \infty$ $\ln x$ растет несравненно медленнее, чем x, а e^x – несравненно быстрее, чем x^n при любом значении *n*.

Пример 6.

$$\lim_{x \to 0}(x\ln x) = \left(0\cdot(-\infty) = ?\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} = ?\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \left(0^0 = ?\right)$.

Для вычисления этого предела введем обозначение: $y = x^x$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} y$. Учитывая, что $\ln y = x\ln x$, находим:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0} x\ln x = (\text{см. пример } 6) = 0$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\ln y = 0$. То есть при $x \to 0$ и $\ln y \to 0$, а значит, $y \to 1$, ибо $\ln 1 = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$, а значит, $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

Упражнения

1. В примере 1 было показано, что уравнение $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ имеет три корня: $x_1 \in [-1;0]$; $x_2 = 1$; $x_3 \in [2;3]$. Методом половинного деления найти корни x_1 и x_3 с точностью до 0,01 и сравнить эти значения с точными.

Ответ: $x_1 \approx -0{,}73$; ($x_1 = 1 - \sqrt{3} = -0{,}73205...$ – точно).

$x_3 \approx 2{,}73$; ($x_3 = 1 + \sqrt{3} = 2{,}73205...$ – точно).

2. С помощью правила Лопиталя найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+e^x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)tg\frac{x}{2}$; д) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Ответ: а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) ∞; г) 2; д) $\frac{1}{e}$.

3. С помощью правила Лопиталя доказать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

4. С помощью правила Лопиталя доказать, что при $a > 1$ и любом n

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n} = +\infty.$$

§ 5. Дифференциал функции

Понятие дифференциала функции тесно связано с понятием ее производной. Как и производная функции, дифференциал функции принадлежит к числу важнейших понятий математического анализа и введен в математику Ньютоном и Лейбницем параллельно с понятием производной.

Вспомним определение производной функции $y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке *x* (§ 1, формулы 1.5 и 1.6):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{5.1}$$

Здесь Δx – приращение аргумента *x*, а $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – соответствующее приращение функции *y*.

Будем считать, что данная функция $y = f(x)$ дифференцируема в рассматриваемой фиксированной точке *x*. То есть будем считать, что производная $y' = f'(x)$ в этой точке существует и конечна. Тогда, согласно (5.1),

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y' = f'(x) \text{ при } \Delta x \to 0 \tag{5.2}$$

А это значит, что при малых значениях Δx будем иметь:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y' \Leftrightarrow \Delta y \approx y' \cdot \Delta x \tag{5.3}$$

Причем приближенные равенства (5.3) будут тем точнее, чем меньше Δx (и соответственно чем меньше Δy).

А теперь будем считать приращение Δx аргумента функции $y = f(x)$ не просто малым, а *бесконечно малым*, и назовем его *дифференциалом аргумента* *x*. Введем (следуя Лейбницу) для него и специальное обозначение:

$$dx \text{ – дифференциал аргумента } x. \tag{5.4}$$

Таким образом, *дифференциал dx аргумента x – это бесконечно малое приращение* Δx *этого аргумента*. Конечно, только что введенное понятие дифференциала переменной *x* – математическая абстракция (она сродни диаметру точки или толщине линии). Но математика постоянно пользуется абстракциями, поэтому еще одна абстракция пугать нас не должна.

Если приращение Δx аргумента *x* бесконечно мало ($\Delta x = dx$), то и приращение Δy функции *y* тоже будет бесконечно мало. Обозначим его символом *dy* и будем называть *дифференциалом функции y*. Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то

$$dy = f(x + dx) - f(x) \text{ – дифференциал функции } y. \tag{5.5}$$

Если теперь в приближенных равенствах (5.3) заменить малые, но конечные Δx и Δy на бесконечно малые *dx* и *dy*, то эти равенства станут *точными*.

$$\frac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y' \cdot dx \tag{5.6}$$

Оба равенства (5.6) имеют важный смысл. Первое из них дает выражение производной y' функции y через отношение дифференциалов dy и dx функции и аргумента. А второе дает выражение дифференциала функции dy через производную функции y' и дифференциал аргумента dx.

Кстати, если учесть, что $y = f(x)$, то последнее равенство (5.6) можно записать подробнее:

$$df(x) = f'(x)dx \tag{5.7}$$

А если еще учесть исходное выражение (5.5) для дифференциала $dy = df(x)$ функции $y = f(x)$, то из последнего равенства получаем:

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx \tag{5.8}$$

Равенство (5.8) позволяет записать значение $f(x+dx)$ функции $f(x)$ в точке $x+dx$, бесконечно близкой к точке x, через значение функции и ее производной в самой точке x. Эта формула имеет большое теоретическое значение.

Если в равенстве (5.8) заменить бесконечно малое dx на малое, но конечное Δx, то вместо точного оно станет приближенным:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \tag{5.9}$$

Равенство (5.9) называется *простейшим вариантом формулы Тейлора*. Эта приближенная формула тем точнее, чем меньше Δx. Она используется для приближенного вычисления значения $f(x+\Delta x)$ по значениям $f(x)$ и $f'(x)$. У формулы (5.9) имеется и ясный геометрический смысл – мы его укажем в следующем параграфе. Там же мы приведем и полный вариант формулы Тейлора.

В частности, применяя эту формулу для функций $f(x) = \sin x$; $f(x) = \ln x$; $f(x) = x^n$; $f(x) = \sqrt[n]{x}$, и т.д., получим следующие интересные формулы для производства приближенных вычислений:

$$\begin{aligned}
&1)\ \sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x;\ (\Delta x \text{ – в радианах})\\
&2)\ \ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x};\\
&3)\ (x+\Delta x)^n \approx x^n\left(1+\frac{n}{x}\cdot \Delta x\right);\ \Rightarrow (1+\alpha)^n \approx 1+n\alpha;\\
&4)\ \sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x}\left(1+\frac{\Delta x}{nx}\right);\ \Rightarrow \sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{n};
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Эти формулы тем точнее, чем меньше Δx (или α). В частности, используя последнюю формулу, получим:

$$\sqrt[4]{15{,}6} = \sqrt[4]{16-0{,}4} = \sqrt[4]{16+(-0{,}4)} \approx \sqrt[4]{16}\left(1+\frac{-0{,}4}{4\cdot 16}\right) = 2(1-0{,}0125) = 1{,}9875.$$

Для сравнения: калькулятор дает $\sqrt[4]{15{,}6}=1{,}98738...$. То есть приближенное значение $\sqrt[4]{15{,}6}$, полученное вручную, отличается от его точного значения лишь в четвертом знаке после запятой.

Вернемся все же к формулам (5.6) и (5.7), служащим для нахождения дифференциала функции $y=f(x)$. На базе этих формул можно установить следующие

<u>*свойства дифференциала функции*</u>:

1. $dC=0$
2. $d(C\cdot f(x))=C\cdot df(x)$
3. $d(u\pm v)=du\pm dv$
4. $d(uv)=udv+vdu$
5. $$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2} \qquad (5.11)$$

Здесь C – любая константа, а $f(x)$, $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – любые дифференцируемые функции. Действительно:

1. $dC=C'\cdot dx=0\cdot dx=0$;
2. $d(u\pm v)=(u\pm v)'dx=(u'\pm v')dx=u'dx\pm v'dx=du\pm dv$.

Совершенно аналогично доказываются и остальные свойства (5.11).

Пусть теперь $y=y(u)$ и $u=u(x)$ – любые две дифференцируемые функции. Тогда $y=y\big(u(x)\big)$ – сложная функция от *x*. И ее дифференциал *dy*, как оказывается, можно найти по любой из двух следующих формул:

$$1)\ dy=y'_x\cdot dx;\qquad 2)\ dy=y'_u\cdot du \qquad (5.12)$$

Формулы (5.12) выражают так называемое *свойство инвариантности формы дифференциала функции*. Согласно этому свойству, дифференциал функции имеет форму произведения производной этой функции на дифференциал ее аргумента независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной (*x*) или функцией (*u*) от другого аргумента.

Действительно, если *x* – независимая переменная, то дифференциал *dy* функции *y*, зависящей от *x*, находится, в соответствии с (5.6), по первой из формул (5.12). Но так как $y=y\big(u(x)\big)$ – сложная функция от *x*, то используя формулу (2.5) для производной сложной функции, получим:

$$dy=y'_x\cdot dx=y'_u\cdot u'_x\cdot dx=y'_u\cdot du$$

То есть приходим ко второй формуле (5.12).

<u>Дифференциалы высших порядков</u>

Найдя дифференциал *dy* данной функции $y=f(x)$, можем затем найти дифференциал от этого дифференциала. Тем самым получим так называемый *дифференциал второго порядка* d^2y (произносится: *дэ два игрек*) данной функции $y = f(x)$:

$$d^2y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = d(f'(x) \cdot dx) = \left(f'(x) \cdot dx\right)'_x \cdot dx = dx \cdot \left(f'(x)\right)'_x \cdot dx =$$
$$= f''(x) \cdot (dx)^2 = y'' \cdot (dx)^2 .$$

Итак, если $y = f(x)$ – некоторая дважды дифференцируемая функция, то ее дифференциал второго порядка d^2y находится по формуле:

$$d^2y = y'' \cdot (dx)^2 \Leftrightarrow d^2 f(x) = f''(x) \cdot (dx)^2 \qquad (5.13)$$

Отсюда, кстати, получаем:

$$y'' = y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ где } dx^2 = (dx)^2 \qquad (5.14)$$

Тем самым находит свое оправдание обозначение Лейбница (2.10) для производной второго порядка функции $y = f(x)$. Аналогично получает оправдание и обозначение (2.11) для производной третьего порядка, которая выражается через дифференциал d^3y (*дэ три игрек*) третьего порядка

$$d^3y = d(d^2y) = y''' \cdot (dx)^3, \text{ откуда } y''' = y'''_{x^3} = \frac{d^3y}{dx^3}, \qquad (5.15)$$

и т.д.

Отметим еще одно существенное обстоятельство. Дифференциал *dy* функции *y* (дифференциал первого порядка), как показано выше, имеет инвариантную (неизменную) форму $dy = y'_x \cdot dx$ независимо от того, является ли аргумент *x* функции *y* независимой переменной или, наоборот, сам является функцией от другой переменной. А вот для дифференциалов высших порядков (d^2y, d^3y, …) *эта инвариантность места не имеет*.

Действительно, пусть $y = y\big(x(t)\big)$ – сложная функция от *t*. Тогда, согласно инвариантности формы первого дифференциала *dy*, имеем:

$$dy = y'_x \cdot dx = y'_t \cdot dt .$$

А вот

$$d^2y = y''_{t^2} \cdot (dt)^2 \neq y''_{x^2} \cdot (dx)^2 \qquad (5.16)$$

Действительно,

$$d^2y = d(dy) = d(y'_x \cdot dx) = d(y'_x) \cdot dx + y'_x \cdot d(dx) = \big((y'_x)'_x \cdot dx\big) \cdot dx + y'_x \cdot d^2x =$$
$$= y''_{x^2} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x \neq y''_{x^2} \cdot dx^2 .$$

Упражнения

1. Найти дифференциалы первого и второго порядков следующих функций:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; б) $s = \frac{gt^2}{2}$; в) $R = 1 - \cos u$, где u – дифференцируемая функция некоторой независимой переменной.

Ответ:

а) $dy = (3x^2 - 6x + 3)dx$; $d^2y = 6(x-1)dx^2$.

б) $ds = gtdt$; $d^2s = gdt^2$.

в) $dR = \sin u\, du$; $d^2R = \cos u \cdot du^2 + \sin u \cdot d^2u$.

2. При измерении стороны куба вместо истинного значения x получено значение $x + \Delta x$, где Δx - допущенная погрешность, малая по сравнению с x. Найти абсолютную и относительную погрешности вычисления объема куба $y = x^3$. Причем найти ее: а) точно; б) приближенно с помощью формулы (5.3) $\Delta y \approx y' \cdot \Delta x$. Сравнить приближенные значения с точными.

Решение. Если вместо истинного значения x стороны куба получено ошибочное ее значение $x + \Delta x$, то вместо точного значения $y = x^3$ объема куба будет получено ошибочное его значение $y_* = (x + \Delta x)^3$. Абсолютная ошибка (абсолютная погрешность) $\Delta y = y_* - y$ при нахождении объема куба составит *точно:*

$$\varepsilon = \varepsilon_y = \Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Найдя ее отношение к истинному объему куба $y = x^3$, найдем *точное* значение относительной погрешности вычисления объема куба. Тем самым мы узнаем, какую долю составляет абсолютная погрешность объема куба по отношению к нему самому:

$$\delta = \delta_y = \frac{\varepsilon_y}{y} = 3\frac{\Delta x}{x} + 3\frac{(\Delta x)^2}{x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{x^3}.$$

А теперь найдем *приближенные значения* этих погрешностей:

$$\varepsilon = \varepsilon_y = \Delta y \approx y'\Delta x = 3x^2\Delta x; \quad \delta = \delta_y = \frac{\varepsilon_y}{y} \approx \frac{3x^2\Delta x}{x^3} = 3\frac{\Delta x}{x} = 3\delta_x.$$

Точные и приближенные выражения для обеих этих погрешностей, как видим, не совпадают – приближенные выражения содержат только первое из тех трех слагаемых, которые содержатся в точных выражениях. Но последние два слагаемых в точных выражениях при малых Δx много меньше первого (главного) слагаемого, так что их без большого ущерба можно и отбросить. А отбросив их, как раз и получим приближенные выражения погрешностей. По величине они будут почти такие же, как точные. Но находятся они гораздо проще, чем точные.

Проиллюстрируем это на числовом примере. Пусть ребро куба составляет x=10см, а при измерении этого ребра допущена погрешность Δx=1мм=0,1см. Тогда:

$y = x^3 = 1000 см^3$ - точное значение объема куба;

$\varepsilon_y = 30+0{,}3+0{,}001=30{,}301\,см^3$ - точно; $\varepsilon_y = 30 см^3$ - приближенно;

$\delta_y = 0{,}03+0{,}0003+0{,}000001 = 0{,}030301$ - точно; $\delta_y = 0{,}03$ - приближенно.

Как видим, действительно точные погрешности вполне можно заменить приближенными.

3. Как известно, площадь круга S радиуса R находится по формуле $S=\pi R^2$, а объем шара V радиуса R – по формуле $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Используя приближенную формулу (5.3), найти:

а) площадь тонкого кругового кольца с внутренним радиусом R и шириной ΔR;

б) объем тонкой сферической оболочки с внутренним радиусом R и толщиной ΔR. Сравнить эти приближенные выражения с точными.

Ответ:

а) $$\begin{cases} S_{кольца} = \Delta S \approx S'_R \cdot \Delta R = 2\pi R \cdot \Delta R - \text{приближенн о;} \\ S_{кольца} = \pi(R+\Delta R)^2 - \pi R^2 = 2\pi R \cdot \Delta R\left(1+\dfrac{\Delta R}{2R}\right) - \text{точно.} \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} V_{оболочки} = \Delta V \approx V'_R \cdot \Delta R = 4\pi R^2 \cdot \Delta R - \text{приближенн о;} \\ V_{оболочки} = \dfrac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3 - \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \cdot \Delta R\left(1+\dfrac{\Delta R}{R}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\Delta R}{R}\right)^2\right) - \text{точно.} \end{cases}$$

4. Используя формулу (5.9) для функции $f(x)=e^x$, вычислить приближенно $e^{-0,2}$.

Ответ: $e^{-0,2} \approx 0{,}8$.

5. Кривая спроса $p=p(q)$ имеет линейный вид $p=a-bq$ ($a>0$; $b>0$). Найти изменение Δq спроса на товар при изменении на Δp цены p единицы этого товара.

Ответ: $\Delta q = -\dfrac{\Delta p}{b}$.

6. Пусть зависимость себестоимости продукции y от объема произведенной продукции x выражается формулой $y=40x-0{,}03x^3$. Найти изменение Δy себестоимости произведенной продукции, если объем x продукции увеличится с 15 ед. до 15,2 ед.

Ответ: себестоимость вырастет на $\Delta y \approx 4$ денежных единицы.

7. Период T колебаний маятника длиной l равен $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Как нужно изменить длину метрового маятника, чтобы его период колебаний уменьшился на 0,1 сек ?

Ответ: маятник нужно сделать короче на $\Delta l \approx 10$ см.

8. С какой точностью нужно измерить абсциссу кривой $xy = 4$ при $x \geq 0{,}5$, чтобы при вычислении ее ординаты допустить погрешность не более 0,1?

<u>Ответ</u>: $|\Delta x| \leq 0{,}006$.

§ 6. Формулы Маклорена и Тейлора

В предыдущем параграфе был получен простейший вариант формулы Тейлора – формула (5.9). Эта формула приближенная, и она тем точнее, чем меньше Δx. Но хотелось бы знать больше. Хотелось бы иметь оценку погрешности этой формулы. А еще лучше – иметь возможность заменить эту формулу на более точную, такую, чтобы ее погрешностью заведомо можно было бы пренебречь. С этой целью проведем в формуле (5.9) переобозначения:

- старое обозначение x – новое обозначение x_0;
- старое обозначение $x + \Delta x$ – новое обозначение x;
- старое обозначение Δx – новое обозначение $x - x_0$.

Тогда формула (5.9) пример вид:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.1}$$

То есть получаем приближенную формулу вида

$$f(x) \approx A_0 + A_1(x - x_0), \tag{6.2}$$

где $A_0 = f(x_0)$; $A_1 = f'(x_0)$. Использование этой приближенной формулы равносильно замене кривой $y = f(x)$ на прямую с уравнением $y = A_0 + A_1(x - x_0)$, которая является касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 с абсциссой x_0 (рис. 2.21).

Действительно, прямая $y = A_0 + A_1(x - x_0)$ проходит через точку $M_0(x_0; f(x_0))$. Кроме того, она имеет угловой коэффициент $k = A_1 = f'(x_0)$. А это и есть, согласно геометрическому смыслу производной (см. 1.11), угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0. Для $x = x_0$ приближенная формула (6.2) становится точной. А для $x \neq x_0$ она, очевидно, тем точнее, чем ближе x к x_0.

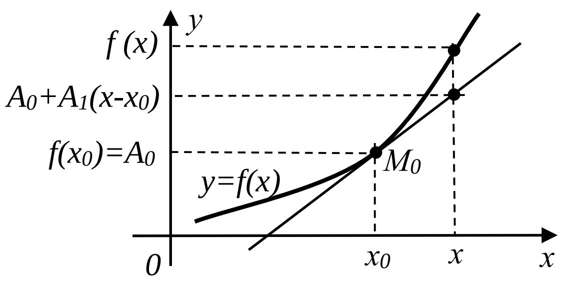


Рис.2.21

Для x, очень близких к x_0, замена кривой $y = f(x)$ на касательную к ней, или как еще говорят, *аппроксимация кривой* её касательной, очевидно, вполне оправдана. Но с удалением x от x_0 расхождение между кривой и касательной к ней может стать существенным, а формула (6.2) может стать слишком грубой.

Возникает естественная мысль: поискать замену кривой не на прямую, а на другую кривую, только более простую (на параболу, гиперболу, и т.д.). В соответствии с этой мыслью приближенные значения функции $f(x)$ для x, близких к x_0, будем искать по обобщению формулы (6.2):

$$f(x) \approx A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + ... + A_n(x-x_0)^n \qquad (6.3)$$

В простейшем случае $n=1$ формула (6.3) совпадает формулой (6.2). А при $n>1$ мы вправе ожидать, что формула (6.3) окажется более точной, чем формула (6.2), и что ее точность будет возрастать с увеличением числа n. Действительно, аппроксимация кривой $y=f(x)$ параболой (при $n=2$), кубической параболой (при $n=3$) и т.д. более естественна, чем аппроксимация кривой линии какой угодной прямой. И чем сложнее аппроксимирующая кривая, тем качественнее может быть осуществлена эта аппроксимация. В том числе и для x, достаточно удаленных от x_0.

Потребуем, чтобы формула (6.3), как и ее частный случай (6.2), была точной при $x=x_0$. Тогда получим:

$$A = f(x_0) \qquad (6.4)$$

Найдем остальные коэффициенты $(A_1; A_2; ... A_n)$ формулы (6.3). Предположим, что функцию $y=f(x)$ можно сколько угодно раз дифференцировать в некоторой окрестности точки x_0, и продифференцируем обе части приближенного равенства (6.3) до n-го порядка включительно:

$$f'(x) \approx A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + ... + nA_n(x-x_0)^{n-1};$$

$$f''(x) \approx 2A_2(x-x_0) + 6A_3(x-x_0)^2 + ... + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}; \qquad (6.5)$$

$$f^{(n)}(x_0) \approx n(n-1)(n-2)...\cdot 2\cdot 1\cdot A_n(x-x_0)^0 = n!A_n$$

Здесь использовано обозначение:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n = n! \text{ (эн – факториал)} \qquad (6.6)$$

В частности,

$$1!=1;\ 2!=1\cdot 2=2;\ 3!=1\cdot 2\cdot 3=6;\ \ldots\ 0!=1 \text{ (по определению)} \qquad (6.7)$$

Приближенные равенства (6.5), как и исходное равенство (6.3), должны быть тем точнее, чем ближе x к x_0. Потребовав, чтобы при $x=x_0$ все они стали точными, получим:

$$f'(x_0)=A_1;\ f''(x_0)=2A_2;\ f'''(x_0)=6A_3;\ \ldots\ f^{(n)}(x_0)=n!A_n$$

Отсюда

$$A_1 = f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!};\ A_2 = \frac{f''(x_0)}{2} = \frac{f''(x_0)}{2!};\ A_3 = \frac{f'''(x_0)}{6} = \frac{f'''(x_0)}{3!};\ \ldots\ A_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (6.8)$$

Подставляя выражения (6.8) в (6.3), получим для x, близких к x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (6.9)$$

Полученная ранее формула (6.1) является простейшим частным случаем этой формулы при $n=1$.

Формула (6.9) – приближенная. Следует ожидать, что ее точность должна повышаться как при приближении x к x_0, так и при увеличении числа ее слагаемых n. Но чтобы убедиться в этом окончательно, следует получить оценку погрешности этой формулы для всех n, начиная с $n=1$.

Обозначим символом $R_n(x)$ эту погрешность ($R_n(x)$ – разность между левой и правой частями формулы (6.9)). Тогда получим *точно для любых x и n*:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (6.10)$$

Формула (6.10) называется *формулой Тейлора*. Последнее слагаемое $R_n(x)$ называется *остаточным членом формулы Тейлора*. Поэтому еще говорят, что (6.10) – это *формула Тейлора с остаточным членом*.

При практическом использовании формулы Тейлора ее остаточный член отбрасывают, переходя тем самым к приближенной формуле (6.9), которую называют *формулой Тейлора без остаточного члена*. А для правомерности отбрасывания (игнорирования) остаточного члена $R_n(x)$ используют его оценку, полученную французским математиком 19-го века Лагранжем:

$$\left[R_n(x)\right] \le \max_{x_0 \le c \le x} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (6.11)$$

Если ε – допустимая погрешность вычисления функции $f(x)$, то для данных x и x_0 подбирают такое значение n, чтобы $|R_n(x)| < \varepsilon$.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора (6.10) принимает вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \quad (6.12)$$

и называется *формулой Маклорена*. Ее остаточный член $R_n(x)$ оценивается по формуле (6.13), вытекающей из (6.11) при $x_0 = 0$:

$$|R_n(x)| \le \max_{0 \le c \le x} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (6.13)$$

Формулой Маклорена, после оценки и отбрасывания ее остаточного члена, пользуются для приближенного вычисления значений $f(x)$ при x, близких к нулю.

Пример 1. Вычислить $\sin 20^\circ$ с точностью до 0,001.

<u>Решение</u>. Рассмотрим функцию $y = f(x) = \sin x$ (x – угол в радианах). Тогда $\sin 20° = \sin\frac{\pi}{9} = f\left(\frac{\pi}{9}\right)$. То есть $\sin 20° = f(x)$ при $x = \frac{\pi}{9}$. Так как $x = \frac{\pi}{9} \approx \frac{1}{3}$ и близок к нулю, то для приближенного вычисления $f(x)$ воспользуется формулой Маклорена (6.12). Но для этого сначала нужно найти такое значение n, чтобы остаточный член $R_n(x)$ этой формулы по абсолютной величине был заведомо меньше 0,001. Тогда, отбросив его в формуле Маклорена (6.12) и подсчитав сумму оставшихся слагаемых, получим нужное значение $f(x) = \sin\frac{\pi}{9}$ с точностью до 0,001.

Сначала оценим первый множитель в формуле (6.13):

$$\max_{x_0 \le c \le x} \left| f^{(n+1)}(c) \right|. \tag{6.14}$$

Имеем:

$$f(x) = \sin x;\ f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x;\ f'''(x) = -\cos x;\ f^{(IV)}(x) = \sin x \ldots$$

Таким образом, производные функции $f(x) = \sin(x)$ любого порядка равны либо $\pm\cos x$, либо $\pm\sin x$. А значит, при любых x они по абсолютной величине не превосходят единицы. Следовательно, при любых $c \in [0;\ x = \frac{\pi}{9}]$ и любых n имеем:

$$\max_{0 \le c \le \frac{\pi}{9}} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \le 1 \tag{6.15}$$

С учетом (6.15) оценка (6.13) остаточного члена формулы Маклорена при $x = \frac{\pi}{9}$ принимает вид:

$$\left| R_n\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| \le \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi}{9}\right)^{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6.16}$$

Оценим значение правой части этого неравенства при различных n:

$$n = 1;\quad \left| R_1\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| \le \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{9}\right)^2 \approx 0{,}061;$$

$$n = 2;\quad \left| R_2\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| \le \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0{,}007;$$

$$n = 3;\quad \left| R_3\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| \le \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \approx 0{,}0006.$$

Для $n > 3$ правая часть неравенства (6.16), а следовательно, и его левая часть, будут еще меньше, чем при $n = 3$. Таким образом, если мы возьмем $n = 3$, то $\left| R_3\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| \le 0{,}0006 < 0{,}001$ – это нас устроит. Тогда записывая формулу Маклорена (6.12) для $f(x) = \sin x = \sin\frac{\pi}{9}$ при $n = 3$ и отбрасывая в ней остаточный член, получим:

$$\sin\frac{\pi}{9} = \sin 0 + \cos 0 \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{-\sin 0}{2!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^2 + \frac{-\cos 0}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{учтем, что} \\ \pi = 3{,}1415926... \approx 3{,}1416 \end{array} \right| \approx 0{,}342$$

Итак, $\sin\frac{\pi}{9} = \sin 20° \approx 0{,}342$ – с точностью до 0,001. Сверяя это значение с табличным (по таблице Брадиса $\sin 20° = 0{,}3420$), видим, что у нас нет расхождения даже в десятитысячных.

Кстати, если бы в формуле Маклорена (6.12) мы взяли $n > 3$ ($n = 4{,}5$, и т.д.), то получили бы значение $\sin 20°$ еще точнее. В принципе – как угодно точно.

Совершенно аналогично с помощью формулы Маклорена (если x близок к 0), или с помощью формулы Тейлора (если x далек от 0, но близок к некоторому удобному для расчетов значению x_0), можно вычислять приближенные значения $f(x)$ и других многократно дифференцируемых функций. Именно на использовании этих формул и основано составление таблиц значений различных функций.

Упражнения

1. Вычислить $e^{-0{,}2}$ с точностью до 0,01 (учесть, что $e^0 = 1$).
   Ответ: $e^{-0{,}2} \approx 0{,}82$.
2. Вычислить $\cos 200°$ с точностью до 0,01 (учесть, что $\cos 180° = -1$).
   Ответ: $\cos 200° \approx -0{,}940$.
3. Вычислить $\sqrt[4]{15{,}6}$ с точностью до 0,00001 (учесть, что $\sqrt[4]{16} = 2$).
   Ответ: $\sqrt[4]{15{,}6} \approx 1{,}98738$.

§ 7. Примеры использования производных функций в экономике

В § 1 был указан смысл производных некоторых экономических функций. Эти производные выражают собой так называемые предельные (маржинальные) величины. А именно, если $y = f(x)$ – некоторая функция, имеющая экономический смысл, то $My = y' = f'(x)$ – предельное (маржинальное) значение y в точке x. Оно характеризует скорость изменения величины y при изменении величины x. В частности, оно может быть предельной производительностью труда, предельной себестоимостью продукции, предельным доходом от продаж, и т.д.

Пример 1. Опытным путем установлено, что объем q продукции, производимой на некотором предприятии одним среднестатистическим рабочим в течение рабочей смены (8 часов), определяется формулой:

$$q = -0{,}05t^3 + 0{,}45t^2 + 5t \quad (0 \le t \le 8)$$

Здесь t – время в часах. Требуется установить зависимость $y = y(t)$ производительности труда рабочего от времени и построить график этой зависимости.

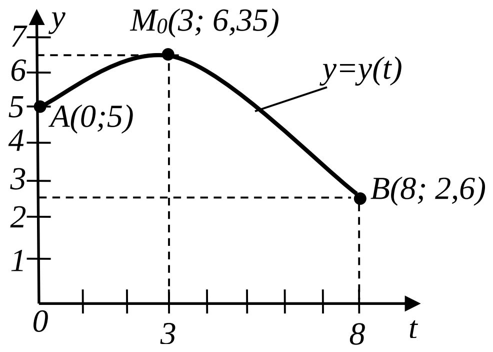


Рис.2.22

Решение.

$$y = q' = -0{,}15t^2 + 0{,}9t + 5 \quad (0 \le t \le 8)$$

Графиком этой зависимости y от t является парабола с ветвями, направленными вниз (рис. 2.22). Приведенный график показывает, что производительность труда в первые три часа работы возрастает (с 5 до 6,35 единиц продукции в час), а потом монотонно падает, и к концу рабочего дня составляет лишь 2,6 единиц продукции в час.

Через производную функции выражается еще одно важное экономическое понятие – *эластичность функции*.

Определение. Эластичностью $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ относительно аргумента x называется предел отношения относительного приращения функции (в %) к относительному приращению аргумента (в %) при приращении аргумента, стремящемся к нулю. То есть

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' \qquad (7.1)$$

Эластичность функции y относительно ее аргумента x показывает, на сколько процентов изменится функция при изменении ее аргумента на 1 %.

а) Если $|E_x(y)| > 1$, то есть если $E_x(y) > 1$ или $E_x(y) < -1$, то функция $y = f(x)$ считается *эластичной в точке x*.

б) Если $|E_x(y)|<1$, то есть если $-1<E_x(y)<1$, то функция $y=f(x)$ считается *неэластичной в точке x*.

в) Если $|E_x(y)|=1$, то есть если $E_x(y)=1$ или $E_x(y)=-1$, то говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x *единичную эластичность*.

Функция, эластичная (неэластичная) в каждой точке x некоторого интервала $(a;b)$ оси ox, называется эластичной (неэластичной) на этом интервале.

Эластичная функция изменяется (растет или убывает) относительно быстрее изменения ее аргумента. Неэластичная функция, наоборот, меняется относительно медленнее изменения ее аргумента. Функция единичной эластичности изменяется с той же относительной скоростью, что и ее аргумент.

Направление изменения функции зависит от знака ее эластичности. В частности, если x и y – положительны, что обычно и бывает в экономических задачах, то знак $E_x(y)$, согласно (7.1), определяется знаком производной y' функции $y=f(x)$. И если $E_x(y)>0$, то $y'=f'(x)>0$. А это значит, что функция $y=f(x)$ растет с ростом x. А если $E_x(y)<0$, то $y'=f'(x)<0$, и функция $y=f(x)$ убывает с ростом x.

Свойства эластичности функции

1. Эластичность функции $y=f(x)$ равна произведению независимой переменной x на так называемый *темп изменения функции* $T_y=(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$:

$$E_x(y)=x\cdot(\ln y)'=x\cdot T_y \qquad (7.2)$$

2. Эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций:

$$E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v) \qquad (7.3)$$

3. Эластичность частного двух функций равна разности эластичностей этих функций:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v) \qquad (7.4)$$

Отметим, что последние два свойства – прямое следствие формулы (7.2) и свойств логарифма:

$$\ln(u\cdot v)=\ln u+\ln v\,;\quad \ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v$$

4. Эластичность взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_y(x)=\frac{1}{E_x(y)} \qquad (7.5)$$

Действительно,

$$E_y(x)=\frac{y}{x}\cdot x'=\frac{y}{x}\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{E_x(y)}$$

Эластичность экономических функций применяется при анализе этих функций. Выясним, например, как влияет эластичность или неэластичность спроса q относительно цены p единицы продукции на суммарный доход от продаж $R=pq$ при условии, что зависимость спроса q на товар от его цены p имеет некоторое уравнение $q=q(p)$. Это уравнение так называемой кривой спроса, которая, очевидно, является убывающей кривой (с увеличением цены p единицы товара спрос q на этот товар, естественно, уменьшается) – см. рис. 2.6.

Подсчитаем предельный (маржинальный) доход от продаж:

$$R'=R'_p=\left[p\cdot q(p)\right]'=1\cdot q(p)+p\cdot q'(p)=q(p)\left[1+\frac{p}{q(p)}\cdot q'(p)\right]=q(p)\left[1+E_p(q)\right] \quad (7.6)$$

где

$$E_p(q)=\frac{p}{q}\cdot q'=\frac{p}{q(p)}\cdot q'(p) \quad (7.7)$$

– эластичность спроса q относительно цены p. Так как и p, и q неотрицательны, а $q'(p)$, как производная убывающей функции, отрицательна, то $E_p(q)<0$.

Если спрос эластичен, то есть если $\left|E_p(q)\right|>1$ (а значит, $E_p(q)<-1$), то, согласно (7.6), $R'_p<0$. А это значит, что зависимость дохода R от цены p является убывающей. То есть с увеличением цены p единицы продукции суммарный доход R от продаж будет уменьшаться. А с уменьшением цены – наоборот увеличиваться. Но уменьшение цены p автоматически ведет к увеличению спроса q. Таким образом, при эластичном спросе с увеличением спроса q увеличивается и доход R. То есть *при эластичном спросе каждая дополнительно проданная единица продукции приносит дополнительный доход*.

Если спрос неэластичен, то есть если $\left|E_p(q)\right|<1$ (а значит, $-1<E_p(q)<0$), то, согласно (7.6), $R'_p>0$. То есть зависимость R от p будет возрастающей. Иначе говоря, с увеличением цены p единицы продукции суммарный доход от продаж R будет увеличиваться. А с уменьшением цены – уменьшаться. Но уменьшение цены автоматически ведет к увеличению спроса, то есть к увеличению объема продаж. И при этом, тем на менее, доход R будет уменьшаться! То есть *при неэластичном спросе каждая дополнительно произведенная и проданная единица продукции будет приносить не доход, а убыток*.

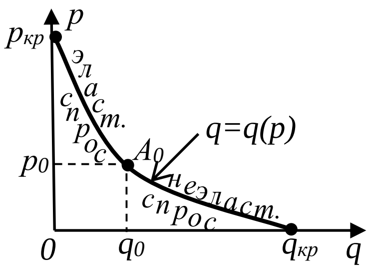


Рис. 2.23(а)

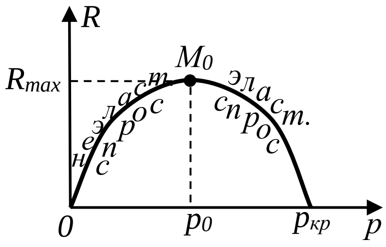


Рис. 2.23(б)

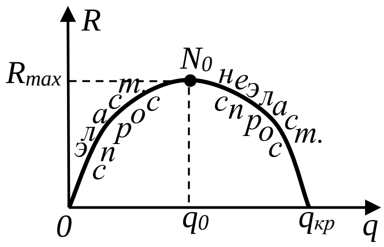


Рис. 2.23(в)

Наконец, если $|E_p(q)|=1$ ($E_p(q)=-1$), то есть если спрос имеет единичную эластичность, то $R'_p=0$. А это значит, что с изменением цены p (а значит, и с изменением объема продаж q) суммарный доход от продаж R не изменится.

Если изобразить зависимости $q=q(p)$, $R=R(p)$ и $R=R(q)$ графически, то результаты проведенного исследования предстанут на рис. 2.23 (а-в). Здесь p_0 и q_0 – оптимальная цена и оптимальный спрос (объем продаж), обеспечивающие максимум дохода R. Им соответствует единичная эластичность спроса. То есть оптимальная цена p_0 единицы товара может быть найдена из уравнения:

$$E_p(q)=-1 \Leftrightarrow \frac{p}{q(p)}\cdot q'(p)=-1 \Rightarrow p=p_0 \qquad (7.8)$$

А оптимальный спрос q_0 может быть найден из уравнения кривой спроса: $q_0=q(p_0)$.

Впрочем, если известны явные выражения $R=R(p)$ и $R=R(q)$, то значения p_0 и q_0 проще найти из равенств:

$$R'_p=0 \Rightarrow p=p_0; \quad R'_q=0 \Rightarrow q=q_0 \qquad (7.9)$$

Согласно рис. 2.23 (б), дохода не будет вообще ($R=0$), когда товар ничего не стоит ($p=0$), или когда цена p достигнет критического значения $p_{кр}$, при котором товар перестанут покупать вообще (этой цене соответствует спрос $q=0$ – см. рис. 2.23 (а). А согласно рис. 2.23 (в) доход от продаж товара будет нулевым, если объем продаж q будет нулевым (этому соответствует критическая цена товара $p_{кр}$), или если объем продаж q достигнет некоторого значения $q_{кр}$, которому, очевидно, соответствует нулевая цена $p=0$ единицы товара. То есть $q_{кр}$ – это тот максимальный объем товара, который покупатели возьмут, если он отдается даром. Имея явные зависимости $R=R(p)$ и $R=R(q)$, можно найти и $p_{кр}$, и $q_{кр}$. Впрочем, естественнее они находятся из уравнения $q=q(p)$ кривой спроса.

Пример 2. Пусть уравнение кривой спроса $q=q(p)$ – линейная убывающая функция $q=a-bp$, где $a>0$ и $b>0$. При этом и функция $p=p(q)=\frac{a}{b}-\frac{q}{b}$ –

линейная и убывающая. Суммарный доход от продаж $R = pq$ можно выразить двояко:

$$\text{а) } R = R(p) = ap - bp^2; \text{ б) } R = R(q) = \frac{aq}{b} - \frac{q^2}{b} \qquad (7.10)$$

Графики обеих этих функций – параболы, направленные ветвями вниз, то есть они представляют собой кривые типа тех, что изображены на рисунках 2.23 (б) и 2.23 (в).

Оптимальную цену p_0 и оптимальный спрос q_0 легко найти по схемам (7.9):

$$\text{а) } R'_p = 0 \Rightarrow a - 2bp = 0 \Rightarrow p = p_0 = \frac{a}{2b} \qquad (7.11)$$

$$\text{б) } R'_q = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{2q}{b} = 0 \Rightarrow q = q_0 = \frac{a}{2}$$

При этом

$$R_{\max} = p_0 q_0 = \frac{a^2}{4b} \qquad (7.12)$$

Критические значения $p_{кр}$ и $q_{кр}$ цены и спроса найдем, приравняв доход R к нулю:

$$\text{а) } R = 0 \Leftrightarrow ap - bp^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \text{ и } p_2 = p_{кр} = \frac{a}{b} \qquad (7.13)$$

$$\text{б) } R = 0 \Leftrightarrow \frac{aq}{b} - \frac{q^2}{b} = 0 \Rightarrow q_1 = 0 \text{ и } q_2 = q_{кр} = a$$

Эластичность $E_p(q)$ спроса q относительно цены p тоже можно выразить двояко – и через p, и через q:

$$\text{а) } E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{a - bp} \cdot (a - bp)' = \frac{-bp}{a - bp}; \qquad (7.14)$$

$$\text{б) } E_p(q) = \frac{-bp}{a - bp} = \left| \text{учтем, что } p = \frac{a}{b} - \frac{q}{b} \right| = \frac{q - a}{q}.$$

На основании формул (7.14) легко убедиться в том, что при оптимальной цене $p_0 = \frac{a}{2b}$ (или, что одно и то же, при оптимальном спросе $q_0 = \frac{a}{2}$) эластичность спроса $E_p(q) = -1$, то есть спрос имеет единичную эластичность. При $0 < q < q_0$ ($p_0 < p < p_{кр}$) эластичность $E_p(q) < -1$, то есть спрос будет эластичным. При $q_0 < q < q_{кр}$ ($0 < p < p_0$) имеем $-1 < E_p(q) < 0$, то есть спрос будет неэластичным.

Все установленное выше можно наглядно проиллюстрировать и на

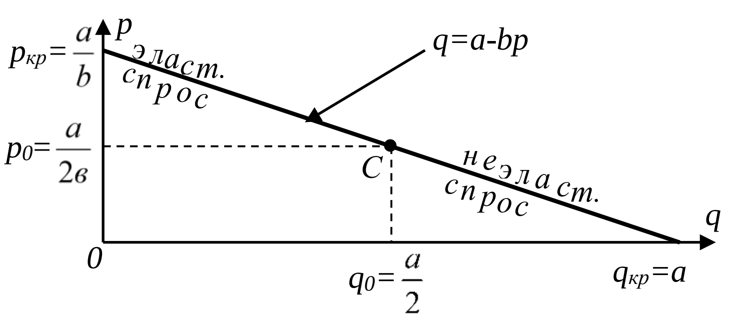


Рис. 2.24

кривой спроса $q = a - bp$ (рис. 2.24).

Отметим, что значение q_0 объема продаж, обеспечивающее максимум дохода от продаж R, еще не обеспечивает максимума прибыли Π от продаж данного товара. Действительно, $\Pi = R - C$, где C – издержки производства (себестоимость товара):

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) \tag{7.15}$$

Прибыль $\Pi(q)$ будет максимальной при том q, при котором $\Pi'(q) = 0$:

$$\Pi'(q) = 0 \Leftrightarrow R'(q) = C'(q) \tag{7.16}$$

Таким образом, прибыль от производства будет максимальной при том объеме продаж q, при котором предельный доход $R'(q)$ равен предельным издержкам $C'(q)$. А это – известный экономический закон.

Наконец, рассмотрим прибыль Π предприятия, если кроме издержек производства с каждой единицы произведенной продукции берется налог t. Тогда при объеме q произведенной продукции суммарный налог T составит $T = tq$ рублей, а общая прибыль предприятия Π выразится формулой:

$$\Pi = \Pi(q;t) = R(q) - C(q) - tq \tag{7.17}$$

Максимум прибыли при заданном налоге t предприятие будет иметь при том объеме продаж q, который соответствует уравнению:

$$\Pi'_q = 0 \Rightarrow R'(q) - C'(q) - t = 0 \Rightarrow q = q(t) \tag{7.18}$$

При этом суммарный налог T с проданной продукции составит

$$T = tq = t \cdot q(t) \tag{7.19}$$

Можно поставить вопрос: при каком t, то есть при какой ставке налога, суммарный налог T будет максимальным? (в этом заинтересованы налоговые органы). Это будет то значение t, при котором $T' = 0$:

$$T' = [t \cdot q(t)]' = 0 \Rightarrow t = t_0$$

Подставляя найденное значение $t = t_0$ в выражение (7.18) для $q = q(t)$, получим: $q_0 = q(t_0)$. Это тот объем производства, при котором при максимуме суммарной прибыли Π предприятия будет максимальным и суммарный налог T на продукцию этого предприятия.

Пример 3. Пусть
$R(q) = 16q - q^2$; $C(q) = q^2 + 1$. Тогда

$$\Pi = \Pi(q;t) = R(q) - C(q) - tq = 16q - 2q^2 - 1 - tq$$

$$\Pi'_q = 0 \Leftrightarrow 16 - 4q - t = 0 \Leftrightarrow q = q(t) = \frac{16-t}{4} = 4 - \frac{1}{4}t$$

$$T = qt = 4t - \frac{1}{4}t^2; \quad T' = 0 \Rightarrow 4 - \frac{1}{2}t = 0 \Rightarrow t = t_0 = 8$$

$$q_0 = q(t_0) = 4 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

Таким образом, максимальная прибыль $\Pi_{\max}$ составит:

$$\varPi_{\max} = \varPi(2;8) = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 1 - 8 \cdot 2 = 7 .$$

А максимальный налог *T* составит:

$$T_{\max} = t_0 \cdot q_0 = 8 \cdot 2 = 16 .$$

Интересно сопоставить эти цифры с цифрами при отсутствии налогообложения, то есть при $t = 0$. В этом случае (убедитесь в этом самостоятельно), $q_0 = 4$; $\varPi_{\max} = 31$. Следовательно, уменьшение налогообложения стимулирует выпуск дополнительной продукции и приводит при этом к резкому увеличению прибыли от ее реализации. Отсюда ясно, почему производители прикладывают столько усилий, чтобы снизить ставку налога *t*.

В экономической теории находят применение не только производные первого порядка, но и производные второго порядка.

Один из знаменитых экономических законов – *закон убывающей доходности* – звучит так: с увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу производственного ресурса (например, численности рабочих, капитальных затрат на производство и т.д.) с некоторого значения этого ресурса убывает.

Сформулируем этот закон на языке математики. Пусть $y = f(x)$ – зависимость объема *y* выпускаемой продукции от используемого на ее производство ресурса *x*. И пусть Δy – дополнительная продукция, полученная при использовании дополнительного к *x* ресурса Δx. Тогда:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{7.20}$$

– продукция, полученная на единицу дополнительного (к *x*) ресурса. Согласно закону убывающей доходности, эта продукция с некоторого $x = x_0$ убывает. А это значит, что с некоторого $x = x_0$ производная функции (7.20) отрицательна:

$$(y')' = y'' = f''(x) < 0 \quad (\text{при } x > x_0) \tag{7.21}$$

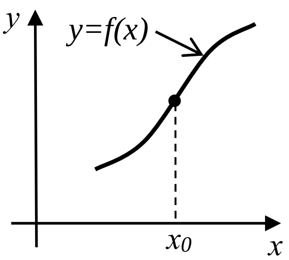


Рис. 2.25

Вспоминая геометрический смысл второй производной, приходим к выводу, что при $x > x_0$ график функции $y = f(x)$ является выпуклым (а до того, при $x < x_0$, он был вогнутым) – рис. 2.25. Данное обстоятельство является отправной точкой для дальнейшего исследования указанной зависимости *y* от *x*. В частности, для подбора аналитического вида $y = f(x)$ этой зависимости.

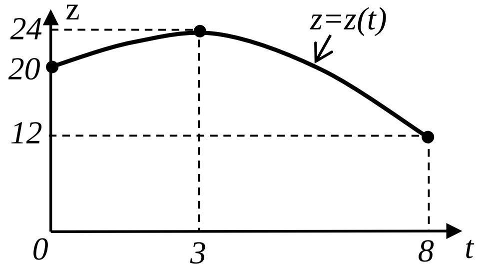


Рис. 2.26

Упражнения

1. Опытным путем установлено, что объем *q* продукции, производимой на

предприятии в течение рабочей смены, определяется формулой:

$$q = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 20t \ \text{(ед.)}$$

Здесь $0 \le t \le 8$ – рабочее время в часах. Исследовать зависимость $z = z(t)$ производительности труда на этом предприятии от времени и построить график этой зависимости.

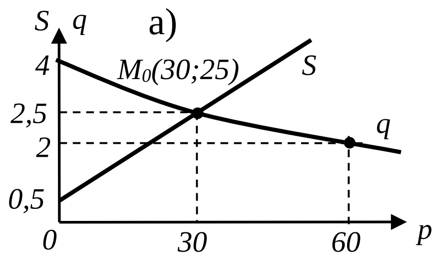
Ответ:

$$z = z(t) = q' = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 20 \ \text{(ед./час)}$$

2. Опытным путем установлены уравнения кривых спроса и предложения:

$$q = \frac{p+120}{p+30}\ ; \quad s = \frac{1}{15}p + 0{,}5\,.$$

Здесь q и s – это соответственно количества продаваемого и предлагаемого к продаже товара при цене единицы товара p.



а) Построить кривые спроса и предложения.

б) Найти равновесную цену p_0 единицы товара, при которой спрос равен предложению.

в) Найти эластичность спроса и эластичность предложения относительно цены p при этой равновесной цене и прокомментировать их экономический смысл.

Ответ:

б) $p_0 = 30$; при этом $q = s = 2{,}5$ (ед.)

в) $E_p(q) = \dfrac{-90p}{(p+120)(p+30)}\ ; \quad E_p(s) = \dfrac{2p}{2p+15}\,.$

При равновесной цене $p_0 = 30$ получаем: $E_{p_0}(q) = -0{,}3\ ; \quad E_{p_0}(s) = 0{,}8\,.$

Это значит, что при увеличении цены p единицы товара на 1 % от равновесной цены $p_0 = 30$ (с 30 до 30,3) спрос на товар q уменьшится на 0,3 %, а предложение от производителей товара s увеличится на 0,8 %. То есть появится товарный излишек в объеме 1,1 %.

Обратно, если цена p уменьшится на 1 %, то спрос q увеличится на 0,3 %, а предложение уменьшится на 0,8 %. То есть возникнет товарный дефицит в объеме 1,1 %.

$\alpha = \frac{Y}{X}$

α

Глава 3
Интегральное исчисление

Интегральное исчисление, наряду с дифференциальным исчислением, принадлежит к числу важнейших составляющих математического анализа. Это исчисление базируется на понятиях неопределенного и определенного интегралов, введенных в математику Ньютоном и Лейбницем в конце 17-го века параллельно с введением ими же понятий производных и дифференциалов функций.

§1. Первообразная для функции и неопределенный интеграл от нее

В дифференциальном исчислении ставилась задача: для данной функции найти ее производную. В интегральном исчислении ставится обратная задача: по производной функции найти саму функцию.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая заданная функция.

Определение. *Всякая функция $y=F(x)$, производная $y' = F'(x)$ которой совпадает с функцией $y = f(x)$, называется первообразной для функции $y = f(x)$.* То есть если $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x)$ будет первообразной для функции $f(x)$ (а $f(x)$ будет производной от своей первообразной $F(x)$).

В частности, функция $y = f(x)$ будет первообразной для своей производной $y' = f'(x)$.

Пример1. Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $\left(x^2\right)' = 2x$.

Отметим, что функция $F(x) = x^2$- не единственная первообразная для функции $f(x) = 2x$. В самом деле, любая функция вида $F(x) = x^2 + C$, где C – произвольная (неопределенная) константа, тоже будет первообразной для функции $f(x) = 2x$. Действительно, $\left(x^2 + C\right)' = 2x$.

И вообще, если $F(x)$ – первообразная для заданной функции $f(x)$, то и все функции вида $F(x)+C$, где C - неопределенная константа, тоже будут первообразными для функции $f(x)$. Действительно, если $F'(x) = f(x)$, то и $\left(F(x) + C\right)' = f(x)$.

Таким образом, найдя какую-либо первообразную $F(x)$ для данной функции $f(x)$, мы сразу можем записать для нее и множество других первообразных:

$$F(x) + C \quad (C \text{ - неопределенная константа}) \qquad (1.1)$$

Более того, мы сейчас докажем, что выражение (1.1) дает *множество всех первообразных для функции f(x).*

Действительно, пусть *F(x)* – какая-либо конкретная первообразная для функции *f(x)*, а $F_*(x)$– любая другая первообразная для этой же функции *f(x)*. Образуем новую функцию $y = y(x) = F_*(x) - F(x)$ и найдем ее производную:

$$y' = F_*'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Как оказалось, эта функция $y = y(x)$ имеет нулевую производную для любого x. Но, как известно, производная функции характеризует скорость изменения функции. Значит, скорость изменения функции $y = y(x)$ для любого x равна нулю. А это значит, что при изменении x функция $y = y(x)$ не меняется (сохраняет постоянное значение).То есть $y = C$, где C - некоторая постоянная. Таким образом, $F_*(x) - F(x) = C$, откуда $F_*(x) = F(x) + C$. То есть действительно любая первообразная $F_*(x)$ для функции $f(x)$ находится среди функций (1.1). Иначе говоря, множество функций (1.1) действительно представляет собой *множество всех первообразных для функций* $f(x)$. Это множество Лейбниц обозначил специальным символом

$$\int f(x)dx \qquad (1.2)$$

и назвал *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$. Здесь знак $\int$ - *знак неопределенного интеграла;* $f(x)$ - *подынтегральная функция;* $f(x)dx$ - *подынтегральное выражение;* x - *переменная интегрирования.*

Так как выражение (1.2) - это лишь другое обозначение выражения (1.1), то можно записать:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (1.3)$$

Таким образом, *отыскивая (вычисляя) неопределенный интеграл* $\int f(x)dx$, *мы тем самым ищем все первообразные* $F(x)+C$ *для подынтегральной функции* $f(x)$. То есть ищем все функции, производные от которых равны $f(x)$. Эти функции (их бесчисленное множество) представляют собой сумму конкретной функции $F(x)$(конкретной первообразной для $f(x)$) и неопределенной константы *С*, которой можно придать любое значение. Из-за наличия этой неопределенной константы в равенстве (1.3) и результат вычисления неопределенного интеграла оказывается неопределенным. Отсюда и термин: неопределенный интеграл.

Если неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ найден верно (то есть множество всех функций $F(x)+C$, являющихся первообразными для подынтегральной функции $f(x)$, найдено верно), то должно выполняться *проверочное для* (1.3) *равенство*:

$$\left(F(x) + C\right)' = f(x) \qquad (1.4)$$

<u>Пример 2.</u>

$\int 2xdx = x^2 + C$ - верно, так как $\left(x^2 + C\right)' = 2x$.

$\int (2x-3)dx = x^2 - 3x + C$ - верно, так как $\left(x^2 - 3x + C\right)' = 2x - 3$.

$\int x^2 dx = x^3 + C$ - неверно, так как $\left(x^3 + C\right)' = 3x^2 \neq x^2$.

Основные свойства неопределенных интегралов

1.Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \tag{1.5}$$

Доказательство. Используя (1.3) и (1.4), получим:

$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \tag{1.6}$$

Доказательство. Вспоминая формулу для нахождения дифференциала функции (формулу (5.7) главы 2), получим:

$$d\int f(x)dx = d\left(F(x) + C\right) = \left(F(x) + C\right)' dx = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс неопределенная константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C \tag{1.7}$$

Доказательство:

$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

4. Нахождение функции $F(x)$ по ее дифференциалу $dF(x)$:

$$\text{если } dF(x) = f(x)dx, \text{ то } F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx. \tag{1.8}$$

Доказательство. Если $dF(x) = f(x)dx$, то $f(x) = F'(x)$. А это значит, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Но этих первообразных для функции $f(x)$ имеется бесчисленное количество, и все они находятся посредством вычисления $\int f(x)dx$.

Примечание. Функция $F(x)$ определяется по формуле (1.8) неоднозначно – она определяется с точностью до неопределенной константы C, которая появится после вычисления $\int f(x)dx$. Поэтому для однозначного определения функции $F(x)$ по ее дифференциалу $dF(x) = f(x)dx$ нужно задать некоторое дополнительное условие для этой функции. Таким условием, в частности, может быть следующее условие: $F(x_0) = A$, где x_0 и A - заданные числа.

Пример 3. Найти функцию $F(x)$, если известно, что $dF(x)=\cos x dx$ и что $F(0)=1$.

Решение. Используя (1.8), получаем:

$$dF(x)=\cos x dx \Rightarrow F(x)=\int dF(x)=\int \cos x dx=\sin x+C.$$

Мы получили бесчисленное множество функций $F(x)$:

$$F(x)=\sin x+C \quad (C \text{ - неопределенная константа}).$$

Константу C найдем из дополнительного условия $F(0)=1$:

$$F(0)=1 \Rightarrow \sin 0+C=1 \Rightarrow C=1.$$

Таким образом, получаем окончательно: $F(x)=\sin x+1$.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx \quad (k-\text{константа},\ k\neq 0) \tag{1.9}$$

Доказательство. Рассмотрим правую часть равенства (1.9):

$$k\int f(x)dx=k(F(x)+C)=kF(x)+kC=kF(x)+C_*,$$

где $C_*=kC$ - неопределенная константа (если $k\neq 0$). Таким образом, равенство (1.9) принимает вид:

$$\int kf(x)dx=kF(x)+C_*.$$

А это равенство верно, что подтверждает его проверка:

$$(kF(x)+C_*)'=kF'(x)+0=kf(x)$$

6. Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\ldots\pm\int f_n(x)dx \tag{1.10}$$

Доказательство. Вычисляя правую часть равенства (1.10), получаем:

$$\begin{aligned}&\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\ldots\pm\int f_n(x)dx=\\&=[F_1(x)+C_1]\pm[F_2(x)+C_2]\pm\ldots\pm[F_n(x)+C_n]=\\&=[F_1(x)\pm F_2(x)\pm\ldots\pm F_n(x)]+[C_1\pm C_2\pm\ldots\pm C_n]=F(x)+C,\end{aligned}$$

где

$$F(x)=[F_1(x)\pm F_2(x)\pm\ldots\pm F_n(x)];\quad C=[C_1\pm C_2\pm\ldots\pm C_n].$$

Таким образом, доказываемое равенство (1.10) принимает вид:

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)]dx=F(x)+C$$

А оно верно, так как

$$(F(x)+C)'=F'(x)=[F_1(x)\pm F_2(x)\pm\ldots\pm F_n(x)]'=f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x).$$

Таблица основных неопределенных интегралов.

$$1.\int 0\cdot dx = C \qquad\qquad 8.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$2.\int 1\cdot dx = \int dx = x + C \qquad\qquad 9.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$3.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \ (n \neq -1) \qquad\qquad 10.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$4.\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad\qquad 11.\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C \qquad (1.11)$$

$$5.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad\qquad 12.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$5^*.\int e^x dx = e^x + C \qquad\qquad 13.\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\, arctg\frac{x}{a} + C$$

$$6.\int \cos x dx = \sin x + C \qquad\qquad 14.\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$7.\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad\qquad 15.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$$

Используя проверку (1.4) для неопределенного интеграла (1.3), легко убедиться в истинности каждого из результатов таблицы (1.11). Проверим, например, первые четыре неопределенные интеграла.

1) $C' = 0$ – верно; 2) $(x + C)' = 1$ - верно; 3) $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \dfrac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$ - верно;

4а) Если $x \succ 0$, то $|x| = x$, и (4) принимает вид: $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$. А это верно, так как $(\ln x + C)' = \dfrac{1}{x}$.

4б) Если $x \prec 0$, то $|x| = -x$, и (4) принимает вид: $\int \dfrac{dx}{x} = \ln(-x) + C$. А это верно, так как $(\ln(-x) + C)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$.

Совершенно аналогично дифференцированием правой части можно подтвердить и все остальные равенства в таблице (1.11).

Таблица (1.11) содержит лишь наиболее простые неопределенные интегралы. А вот в математических справочниках содержатся многие сотни (и даже тысячи) наиболее часто встречающихся на практике и уже вычисленных неопределенных интегралов. К таким справочникам относятся, например, следующие:

1.Бронштейн И.Н. и Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М., «Наука», 1981.

2.Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М. «Наука», 1977.

3.Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.

Таким образом, если требуется вычислить некоторый неопределенный интеграл, то его можно просто поискать в таблице интегралов справочника. Если же нужного интеграла в справочнике нет, то этот интеграл, так или иначе, стараются свести к одному или нескольким табличным интегралам. О методах такого сведения мы поговорим в следующем параграфе.

А сейчас пока лишь отметим следующее важное обстоятельство, связанное с интегрированием функций (с вычислением неопределенных интегралов) и отличающее интегрирование от дифференцирования. Производная $f'(x)$ любой элементарной функции $f(x)$ всегда может быть найдена, и она опять же элементарная функция. А вот неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ не от всякой элементарной функции $f(x)$ может быть записан через элементарные функции вида *F(x)+C* . Иначе говоря, не всякий неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ может быть сведен к табличным. А стало быть, не всякий неопределенный интеграл может быть вычислен в явном виде. Такие, не сводимые к табличным, неопределенные интегралы называются *неберущимися* (ибо вычислить неопределенный интеграл – это, на математическом жаргоне, «взять» интеграл). Неберущимися являются многие, даже совсем простые на первый взгляд, неопределенные интегралы. Например, такие:

$$1. \int e^{-x^2} dx \text{ - интеграл Пуассона}$$

$$2. \int \frac{dx}{\ln x} \text{ - интегральный логарифм} \qquad (1.12)$$

$$3. \int \frac{\cos x}{x} dx \text{ - интегральный косинус.}$$

$$4. \int \frac{\sin x}{x} dx \text{ - интегральный синус.}$$

Эти и другие неберущиеся интегралы не могут быть найдены точно. Они могут быть найдены лишь приближенно. В соответствии с равенством (1.3) нахождение неопределенного интеграла сводится к нахождению какой-либо первообразной для подынтегральной функции. Вот эту первообразную для подынтегральной функции можно, используя машинные методы, подобрать приближенно с нужной степенью точности. Конкретнее об этом будет сказано в §4.

Упражнения

1. Показать, что на всей числовой оси ox функция $F(x)=\sqrt{1+x^2}$ является первообразной для функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Найти все первообразные для функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ответ: $F_*(x)=\sqrt{1+x^2}+C$.

3. Верно ли равенство: $\int \sin 2x dx=\sin^2 x+C$?

Ответ: верно.

4.Найти функцию $F(x)$, если $F^/(x)=2x^3$ и $F(1)=0$.

Ответ: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{2}$.

§2. Основные методы интегрирования

Основных методов интегрирования, то есть основных методов вычисления неопределенных интегралов, *четыре*:

1) Непосредственное интегрирование.
2) Интегрирование с помощью подстановки (с помощью замены переменной интегрирования).
3) Интегрирование по частям.
4) Приближенное интегрирование.

1.Непосредственное интегрирование.

Этот метод основан на тождественных преобразованиях подынтегральной функции с последующим применением свойств неопределенных интегралов и таблицы основных неопределенных интегралов.

Пример 1.

Вычислить $\int (2x^2-3x+5)dx.$

***Решение*. Оно очевидно:**

$$\int (2x^2-3x+5)dx=\int 2x^2dx-\int 3xdx+\int 5dx=$$

$$=2\int x^2dx-3\int xdx+5\int dx=2\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)-3\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right)+5(x+C_3)=$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+(2C_1-3C_2+5C_3)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

Итак,

$$\int\left(2x^2-3x+5\right)dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

Здесь C - неопределенная константа, представляющая собой комбинацию $2C_1$-$3C_2$+$5C_3$ неопределенных констант (C_1; C_2; C_3).

<u>*Проверка:*</u>

$$\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C\right)^{/}=\frac{2}{3}\cdot 3x^2-\frac{3}{2}\cdot 2x+5\cdot 1+0=2x^2-3x+5$$ - верно.

Этот пример показывает, что при разбиении неопределенного интеграла на сумму или разность нескольких неопределенных интегралов появляется и несколько неопределенных констант. Но они затем объединяются в одну неопределенную константу. Поэтому при записи суммы или разности нескольких интегралов их неопределенные константы можно не писать, а записать лишь одну общую неопределенную константу C в самом конце.

<u>*Пример 2*</u>. Вычислить $\int tg^2x dx$.

<u>*Решение*</u>:

$$\int tg^2xdx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=tgx-x+C$$

.<u>*Проверка:*</u>

$$\left(tgx-x+C\right)^{/}=\frac{1}{\cos^2 x}-1+0=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=tg^2x$$ - верно.

2. <u>Интегрирование с помощью подстановки (с помощью замены переменной интегрирования)</u>

Суть этого метода в следующем. Пусть требуется вычислить некоторый неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Нередко его можно упростить, сведя к табличному, путем замены переменной интегрирования x на какую-то новую переменную (на переменную t), используя подходящую подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$- некоторая дифференцируемая функция. Тогда получим следующую <u>*схему вычисления неопределенного интеграла с помощью подстановки*</u>:

$$\int f(x)dx=\int\underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{g(t)}dt=\int g(t)dt=\left|\begin{matrix}\textit{вычисляем этот}\\ \textit{упростившийся интеграл}\end{matrix}\right|=G(t)+C=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{делаем обратную к } x=\varphi(t)\\ \textit{подстановку } \quad t=t(x)\end{matrix}\right|=\underbrace{G(t(x))}_{F(x)}+C=F(x)+C$$

Естественно, что применяемая подстановка будет оправданной лишь в том случае, если полученный в результате ее применения интеграл $\int g(t)dt$ будет проще, чем исходный интеграл $\int f(x)dx$.

Примечание. В практических случаях чаще удобнее делать не подстановку вида $x=\varphi(t)$, а подстановку вида $t=\varphi(x)$.

Пример 3. Вычислить $\int \frac{x^2dx}{x+1}$.

Решение:

$$\int \frac{x^2dx}{x+1}=\left|\begin{array}{l} \textit{сделаем подстановку}:\ x+1=t.\ \textit{Тогда}\ x=t-1; \\ x^2=(t-1)^2=t^2-2t+1;\quad dx=d(t-1)=(t-1)'dt=dt \end{array}\right|=\int \frac{(t^2-2t+1)dt}{t}=$$

$$=\int\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=\int tdt-2\int dt+\int\frac{dt}{t}=\left|\textit{эти интегралы табличные}\right|=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|+C=\left|\begin{array}{l}\textit{делаем обратную}\\ \textit{подстановку}\quad t=x+1\end{array}\right|=\frac{(x+1)^2}{2}-2(x+1)+\ln|x+1|+C.$$

Пример 4. Вычислить $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left|\begin{array}{l}\textit{сделаем подстановку}:\ \sqrt{a^2-x^2}=t.\ \ \textit{Тогда}\ \ a^2-x^2=t^2;\\ d(a^2-x^2)=d(t^2);\ \ (a^2-x^2)'dx=(t^2)'dt;\ \ -2xdx=2tdt;\ \ xdx=-tdt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{-tdt}{t}=-\int dt=-t+C=\left|\textit{учтем, что}\quad t=\sqrt{a^2-x^2}\right|=-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 5. Вычислить $\int\cos 4xdx$.

Решение:

$$\int\cos 4xdx=\left|\begin{array}{l}\textit{сделаем подстановку}:\ \ 4x=t.\ \ \textit{Тогда}\ \ x=\frac{t}{4};\\ dx=d\left(\frac{t}{4}\right);\ \ dx=\left(\frac{t}{4}\right)'dt;\ \ dx=\frac{1}{4}dt\end{array}\right|==$$

$$\int\cos t\cdot\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\cos tdt=\frac{1}{4}(\sin t+C)=\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}C==$$

$$\left|\begin{array}{l}\textit{учтем, что}\ \ t=4x,\ \textit{и еще учтем, что}\ \ \frac{1}{4}C\ \ -\\ \quad\textit{- это неопределенная константа}\ \ C\end{array}\right|=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

Пример 6. Вычислить $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Решение:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \textit{сделаем подстановку}: \quad \ln x = t. \\ \textit{тогда} \quad d(\ln x) = dt; \quad (\ln x)'dx = dt; \quad \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \left| \textit{учтем, что} \quad t = \ln x \right| = \frac{1}{3}\ln^3 x + C.$$

<u>*Пример 7.*</u> Вычислить $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$.

<u>*Решение:*</u>

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+1} = \left| \begin{array}{l} \textit{сделаем подстановку}: \quad x^4 = t. \quad \textit{Тогда} \quad d\left(x^4\right) = dt; \\ \left(x^4\right)' dx = dt; \quad 4x^3 dx = dt; \quad x^3 dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{4}}{t^2+1} = \int \frac{dt}{4\left(t^2+1\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\left(arctgt + C\right) = \frac{1}{4}arctgt + \frac{1}{4}C = \frac{1}{4}arctgx^4 + C.$$

<u>3. Интегрирование по частям</u>

Этот метод основан на использовании формулы

$$\int u dv = uv - \int v du, \tag{2.2}$$

которая называется *формулой интегрирования по частям*. В этой формуле $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - любые две дифференцируемые функции, для которых существуют и $\int u dv$, и $\int v du$.

Докажем эту формулу. Опираясь на формулу для дифференциала произведения двух функций

$$d(uv) = udv + vdu$$

(формула (5.11) главы 2), и интегрируя обе части этого равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

Применяя теперь свойство (1.7) неопределенных интегралов к интегралу слева, получим:

$$uv + C = \int udv + \int vdu, \text{ откуда } \int udv = uv - \int vdu + C.$$

В правой части $\int vdu$ даст, после своего вычисления, некоторую функцию плюс неопределенную константу. Вместе с уже имеющейся там неопределенной константой *С* этих констант в правой части окажется две. Поэтому одну из них (а именно, константу *С*) можно отбросить, так как эти две константы все равно объединятся в одну. В итоге как раз и получим формулу (2.2)

<u>Примечание</u>. При вычислении $\int udv$ по формуле интегрирования по частям (2.2) нам придется вычислить два неопределенных интеграла (выполнить работу, состоящую из двух частей). Сначала по имеющемуся дифференциалу dv функции v нужно будет найти саму функцию v. Для этого используем формулу (1.8):

$$\text{если } dv = f(x)dx\text{, то } v = \int dv = \int f(x)dx = F(x) + C \qquad (2.3)$$

Таким образом, получаем: $v = F(x) + C$. То есть получаем не одну, а множество функций v. Но нам нужна лишь одна из них (любая). Проще всего получить ее, отбросив в (2.3) константу C:

$$v = \int dv = \int f(x)dx = F(x) + C = \left| \textit{отбрасываем } C \right| = F(x) \qquad (2.4)$$

По этой схеме находится функция v. Затем, в соответствии с формулой (2.2), нужно выполнить вторую часть работы - вычислить интеграл $\int vdu$.

Формулу (2.2) для вычисления $\int udv$ по частям есть смысл применять, если можно вычислить оба интеграла: и $\int dv$, и $\int vdu$.

Пример 8. Вычислить $\int x^2 \ln x dx$.

Решение.

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{c} \textit{Применим формулу интегрирования по частям.} \\ \textit{Пусть } u = \ln x, \textit{ а } dv = x^2 dx. \textit{ Тогда} \\ du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx; \quad v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C = \left|\textit{отбросим } C\right| = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int vdu = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Пример 9. Вычислить $\int x \cos 3x dx$.

Решение.

$$\int x \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Сначала сделаем подстановку}: \ 3x = t. \\ \textit{Тогда} \quad x = \frac{t}{3}; \quad dx = d\left(\frac{t}{3}\right) = \left(\frac{t}{3}\right)' dt = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t}{3} \cdot \cos t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{9} \int t \cos t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{А теперь применим интегрирование по частям.} \\ \textit{Пусть } u = t, \textit{ а } dv = \cos t dt. \textit{ Тогда } du = dt; \\ v = \int dv = \int \cos t dt = \sin t + C = \left|\textit{отбросим } C\right| = \sin t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{9}\left(uv - \int vdu\right) = \frac{1}{9}\left(t \cdot \sin t - \int \sin t dt\right) = \frac{1}{9}\left(t \sin t + \cos t\right) + C =$$

$$= \left| \textit{учтем, что } t = 3x \right| = \frac{x}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C.$$

В примере 9 применены и подстановка, и интегрирование по частям.

В заключение этого параграфа укажем следующее. Проблема вычисления неопределенных интегралов – гораздо более сложная, чем проблема вычисления производных. Среди неопределенных интегралов и много неберущихся. Однако доказана теорема (см. §4): если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке оси *ox* (например, на отрезке $[a;b]$ оси *ox*), то на этом промежутке существует и $\int f(x)dx$, то есть существует множество первообразных *F(x)+C* для подынтегральной функции *f(x).* Но только не всегда эти первообразные можно выразить через элементарные функции. В этих случаях (случаях неберущихся интегралов) применяют приближенное интегрирование. Один из путей такого приближенного интегрирования будет указан в §4, другой – в главе 5 «Ряды».

Упражнения

1. Подтвердить правильность вычисления неопределенных интегралов:

а) $\int 3x^2dx = x^3 + C$; б) $\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$; в)

$$\int arctgx dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

2.Вычислить путем непосредственного интегрирования следующие неопределенные интегралы:

а) $\int\left(8x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx$; в) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$;

г) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$; д) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$; е) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$.

<u>*Ответы*</u>:

а) $2x^4 + 4\sqrt{x} + C$; б) $2x^5 - \frac{1}{x^3} + C$; в) $e^x + tgx + C$;

г) $-ctgx - tgx + C$; д) $tgx - ctgx + C$; е) $\frac{x^3}{3} - x + arctgx + C$.

3. С помощью подходящей подстановки вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int\cos 8x dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$; в) $\int\frac{ctgx}{\sin x}dx$; г) $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$; д) $\int\frac{dx}{(3-2x)^4}$;

е) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; ж) $\int\frac{dx}{x^2-4x+4}$; з) $\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$; и) $\int\cos^2 xdx$; к) $\int\cos^3 xdx$.

<u>*Ответы:*</u>

а) $\frac{1}{8}\sin 8x + C$; б) $-\sqrt{3-2x} + C$; в) $-\frac{1}{\sin x} + C$; г) $\ln|1+\ln x| + C$;

д) $\frac{1}{6(3-2x)^3} + C$; е) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C$.

ж) $\frac{1}{2-x} + C$; з) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$; и) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; к) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

4. Вычислить интегрированием по частям следующие неопределенные интегралы:

$$а)\ \int \frac{\ln x}{x^2}dx;\quad б)\ \int \arcsin x dx;\quad в)\ \int \frac{xdx}{\cos^2 x};\quad г)\ \int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx.$$

<u>*Ответы:*</u>

$$а)\ -\frac{1}{x}(\ln x+1)+C;\quad б)\ x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C;$$

$$в)\ xtgx+\ln|\cos x|+C;\quad г)\ -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+4x+8\right)+C.$$

5. Указать по справочнику «Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., «Наука», 1981» номера табличных интегралов, с помощью которых в готовом виде или после незначительных преобразований можно получить все шесть интегралов пункта 3 и все четыре интеграла пункта 4 данных упражнений.

<u>*Ответы:*</u>

<u>Пункт 3</u>. а) 313; б) 124; в) 381; г) 478; д) после подстановки $x^4=t$ приводится к виду 57; е) после подстановки $-x^2=t$ приводится к виду 447.

<u>Пункт 4</u>. а) 471; б) 488; в) 330; г) 449.

§3. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Определенные интегралы, как и неопределенные интегралы, введены в математику Ньютоном и Лейбницем. К понятию неопределенного интеграла их привела проблема нахождения первообразных для заданной функции, то есть задача, обратная задаче нахождения производных функций. А к понятию определенного интеграла их привела совсем другая проблема - проблема точного решения ряда фундаментальных для практики числовых задач, к рассмотрению которых мы сейчас и переходим.

<u>1.Задача о вычислении площади произвольной криволинейной трапеции.</u>

Рассмотрим рис. 3.1(а), где $y=f(x)$ – некоторая непрерывная на $[a;b]$ функция.

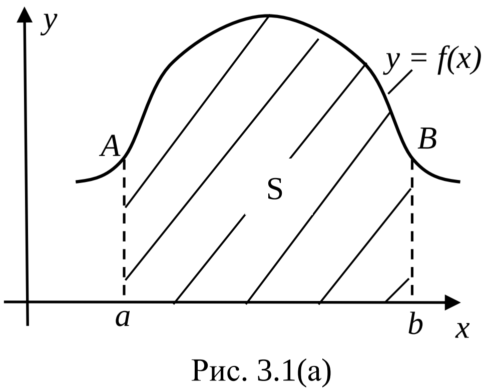


Рис. 3.1(а)

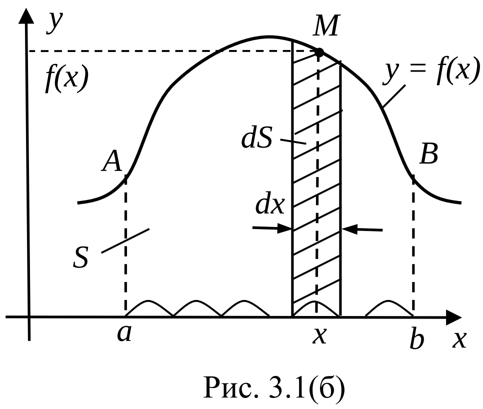


Рис. 3.1(б)

Заштрихованная на этом рисунке фигура называется *криволинейной трапецией.* А S - площадь этой трапеции. Поставим, вслед за Ньютоном и Лейбницем, задачу: вывести формулу для площади S этой трапеции при заданных a, b и $f(x)$.

<u>*Решение*</u>. Разобьем мысленно отрезок $[a;b]$ оси ox (основание трапеции) на бесконечно малые участки, как это показано на рис. 3.1(б). Для простоты будем считать их одинаковыми по длине. Эту бесконечно малую длину каждого участка обозначим символом dx. Если через концы этих участков провести вертикальные прямые, то вся криволинейная трапеция разобьется на бесконечно большое число бесконечно узких вертикальных полосок шириной dx. Рассмотрим одну из таких полосок (любую), и найдем ее площадь dS (см. рис. 3.1(б)).

Возьмем в основании полоски некоторую произвольную точку x. Так как полоска бесконечно узкая (то есть она представляет собой вертикальную нить), то x – это точка, являющаяся основанием этой нити. Согласно рис. 3.1(б), площадь dS рассматриваемой полоски (нити) можно найти, умножив ее высоту $f(x)$ на ширину dx. То есть

$$dS = f(x)dx \tag{3.1}$$

Впрочем, такой была бы площадь dS полоски, если бы полоска была прямоугольником с основанием dx и высотой $f(x)$. Но наша полоска имеет сверху криволинейную границу, а $f(x)$- высота, на которой находится лишь одна из точек (точка M) этой границы. Все остальные точки указанной верхней границы полоски находятся, вообще говоря, на другой, хотя и бесконечно близкой к $f(x)$, высоте. Так что формула (3.1) для площади каждой из полосок, на которые мы мысленно разбили криволинейную трапецию, не точная, а приближенная. Но очевидно, чем уже полоска, тем точнее формула для ее площади dS. А так как наша полоска (как и все остальные) не просто узкая, а *бесконечно узкая*, то мы вправе считать формулу (3.1) *точной.*

Складывая теперь площади dS всех вертикальных полосок, найдем, *причем точно*, и всю площадь S криволинейной трапеции:

$$S = \sum dS = \sum f(x)dx \tag{3.2}$$

Эта сумма необычная: слагаемые в ней бесконечно малые, а число слагаемых бесконечно велико (S - сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых). Этой сумме Лейбниц дал специальное обозначение

$$\sum f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{3.3}$$

и назвал ее *определенным интегралом от функции* $f(x)$. Здесь $f(x)$– подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x – переменная интегрирования; a и b - пределы интегрирования (нижний и верхний).

Итак, согласно (3.2) и (3.3),

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{3.4}$$

- площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 3.1(а).

2. <u>Задача о вычислении пути при переменной скорости движения.</u>

Пусть некоторая материальная точка движется по некоторой траектории с известной в каждый момент времени t переменной скоростью $v = v(t)$. Требуется получить формулу для пути (перемещения) s, пройденного точкой по траектории своего движения с некоторого данного момента времени t_1 до некоторого данного момента времени t_2.

<u>Решение</u>. Если бы скорость v движения точки была постоянной, то поставленная задача никакого труда бы не представляла: путь равен скорости, умноженной на время. То есть $s = v(t_2 - t_1)$. Но у нас скорость точки $v = v(t)$ переменная (в разные моменты времени t она разная). Для такого случая разобьем мысленно временной промежуток $[t_1; t_2]$ на бесконечно малые промежутки времени dt и найдем путь ds, проходимый точкой за каждое время dt.

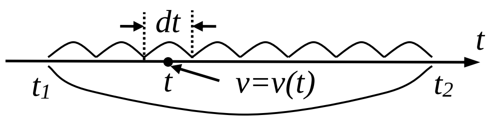


Рис. 3.2

Рассмотрим один из промежутков dt (любой) и выберем на этом промежутке некоторую точку (некоторый момент времени) t. В этот момент времени скорость движения точки равна $v = v(t)$ (рис.3.2). Практически такой же, в силу малости dt, она будет в других точках (в другие моменты времени) этого же промежутка времени. То есть можем считать, что в течение времени dt точка движется практически с постоянной скоростью $v = v(t)$. А тогда путь ds, пройденный точкой за время dt, найдется по формуле:

$$ds = v(t)dt \tag{3.5}$$

Впрочем, таким был бы путь ds, если бы в течение времени dt точка двигалась строго с постоянной скоростью $v = v(t)$. Но эта скорость хоть и незначительно, но все же меняется в течение времени dt. Поэтому формула (3.5) не точная, а приближенная. Однако очевидно, что с уменьшением времени dt она будет становиться все точнее и точнее. А так как наш промежуток времени dt не просто мал, а *бесконечно мал*, то мы вправе считать формулу (3.5) *точной*.

Складывая теперь пути ds, пройденные точкой за все промежутки времени dt, найдем, *причем точно*, и общий путь s (общее перемещение точки по траектории ее движения) за время от момента t_1 до момента t_2:

$$s = \sum ds = \sum v(t)dt \tag{3.6}$$

Формула (3.6) по своей структуре совершенно аналогична формуле (3.2). Она, как и формула (3.2), представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. То есть представляет собой определенный интеграл вида (3.3):

$$\sum v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \qquad (3.7)$$

Итак, получаем окончательно: если $v = v(t)$ - переменная скорость движения точки, то перемещение s, пройденное точкой по траектории ее движения, найдется по формуле:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \qquad (3.8)$$

3.<u>Задача о нахождении работы переменной силы</u>

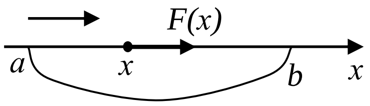


Рис. 3.3

Пусть по оси *ox* из точки *a* в точку *b* под действием заданной переменной силы $F = F(x)$ движется материальная точка (точка приложения силы $F(x)$) - см. рис. 3.3. Требуется вывести формулу для работы *A*, которую совершит сила *F(x)* при перемещении точки *x* из положения *a* в положение *b*.

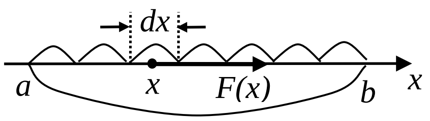


Рис. 3.4

<u>*Решение*</u>. Если бы сила $F = F(x)$, приложенная к движущейся точке x, была постоянной, то мы нашли бы работу A по известной школьной формуле $A = F \cdot s = F \cdot (b - a)$. Но у нас сила переменная - она меняется с изменением координаты x движущейся точки. В связи с этим разобьем мысленно промежуток [*a*; *b*] на бесконечно малые участки длиной dx и найдем работу dA силы $F = F(x)$ на каждом участке (рис. 3.4).

Если x – некоторая точка на участке dx, то очевидно, что

$$dA = F(x)dx \qquad (3.9)$$

Мы записали эту формулу, считая, что в любой точке, находящейся на данном участке dx, сила, действующая на движущуюся точку, такая же, как и в выбранной точке x, то есть постоянная. Но это, вообще говоря, не так: во время прохода точкой участка dx действующая на нее сила, хоть и незначительно, но меняется. Впрочем, изменение этой силы на dx тем меньше, чем меньше dx. А значит, с уменьшением dx формула (3.9) будет становиться все точнее и точнее. Но так как наш участок dx не просто мал, а бесконечно мал, то формулу (3.9) мы вправе считать *точной.*

А теперь, складывая работы dA силы $F = F(x)$ на всех участках dx, на которые мы разбили отрезок [*a*; *b*], мы получим, *причем точно*, всю искомую работу *A*:

$$A = \sum dA = \sum F(x)dx \qquad (3.10)$$

А так как, по аналогии с равенствами (3.2) и (3.7),

$$\sum F(x)dx = \int_a^b F(x)dx, \tag{3.11}$$

то получим окончательно:

$$A = \int_a^b F(x)dx \tag{3.12}$$

Это и есть формула для работы A, которую совершит переменная сила $F = F(x)$, если её точка приложения x переместится вдоль оси ox из положения a в положение b (рис. 3.3).

4. <u>Задача о нахождении объема производства при заданной производительности труда</u>

Пусть функция $z = f(t)$ описывает изменение производительности труда рабочего, бригады или целого предприятия с течением времени t. Требуется найти формулу для объема R произведенной продукции с момента времени t_1 до момента времени t_2, где t_1 и t_2 - заданные числа.

<u>*Решение*</u>. Если бы производительность труда $z = f(t)$ (количество продукции, производимой в единицу времени) была постоянной, то искомый объем R произведенной продукции мы нашли бы, умножив производительность труда на время работы, то есть нашли бы по формуле $R = z \cdot (t_2 - t_1)$. Но, по условию, производительность труда $z = f(t)$ меняется со временем. Чтобы в этом случае найти искомый объем R произведенной продукции, нужно, очевидно, разбить промежуток времени $[t_1; t_2]$ на бесконечно малые промежутки времени dt, выбрать внутри каждого dt произвольную точку t, найти объем $dR = z(t)dt$ произведенной за время dt продукции, и сложить все dR - то есть по существу проделать ту же процедуру, что была проделана в предыдущих трех задачах. В итоге получим формулу

$$R = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt, \tag{3.13}$$

совершенно аналогичную формулам (3.4), (3.8) и (3.12). Эта формула выражает объем продукции, произведенной за время от t_1 до t_2, через производительность труда $z = f(t)$.

Итак, мы получим итоговые формулы (3.4), (3.8), (3.12) и (3.13) для четырех рассмотренных выше и имеющих важное практическое значение задач. Можно было бы и продолжить рассмотрение аналогичных задач, но мы ограничимся теми, что уже рассмотрели. Вместо этого осмыслим ту общую идею, которая была заложена при решении всех этих задач. А эта идея следующая: нужную нам величину мы мысленно разбиваем на бесконечно малые части, а затем, складывая все эти части (их бесконечно много!), получаем искомую величину. Эта величина оказывалась выраженной через новое математическое понятие - определенный интеграл. Теперь, очевидно, нужно понять, какими свойствами обладают определенные интегралы и как их вычислять.

Упражнения

1. Пусть отрезок [a; b] оси ox – материальная нить, у которой $\rho = \rho(x)$- заданная линейная плотность вещества, распределенного по этой нити (линейная плотность - это масса единицы длины). Получить формулу для массы m всей нити.

Ответ:
$$m = \int_a^b \rho(x)dx \tag{3.14}$$

2. Пусть V – объем тела вращения, образованного вращением криволинейной трапеции (рис. 3.1(а)) вокруг оси ox . Получить формулу для объема V этого тела.

Ответ:
$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \tag{3.15}$$

3. Пусть L – длина участка AB кривой $y = f(x)$ с абсциссами концов a и b (рис. 3.1(а)). Получить формулу для длины этого участка.

Ответ:
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \tag{3.16}$$

§4. Свойства и вычисление определенных интегралов

Начнем с того, что введем понятие определенного интеграла без привязки его к каким-либо геометрическим, физическим и экономическим задачам. То есть введем его абстрактно, математически.

Пусть $y = f(x)$ - некоторая непрерывная функция, заданная на некотором числовом промежутке [a; b] оси ox. Разобьем его на бесконечно большое число бесконечно малых участков длиной dx и выберем на каждом dx некоторую точку x. Так как каждый из этих участков бесконечно мал (то есть фактически представляет собой точку), то x и есть эта точка (рис. 3.5). Тогда $f(x)dx = dM$ - бесконечно малое число (смысл его зависит от смысла функции $f(x)$ и может быть самым разным - см. предыдущий параграф). А сумма всех этих бесконечно малых чисел dM называется *определенным интегралом*

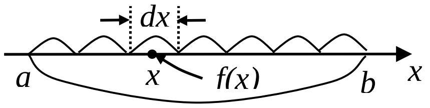


Рис. 3.5

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

от функции $f(x)$ с пределами интегрирования a и b (нижним и верхним).

Ниже мы покажем, что при непрерывной подынтегральной функции $f(x)$ и конечных пределах интегрирования a и b определенный интеграл (4.1) заведомо существует (представляет собой некоторое конечное число M). То есть при указанных условиях

$$\int_a^b f(x)dx = \sum f(x)dx = \sum dM = M \text{ - число.} \qquad 4.2)$$

Равенство (4.2) будем считать *математическим определением определенного интеграла*. Определенным он называется потому, что в отличие от неопределенного интеграла $\int f(x)dx$, представляющего собой бесчисленное множество функций, он представляет собой вполне определенное число. Таким образом, несмотря на внешнее сходство в обозначениях определенного и неопределенного интегралов, это совершенно разные вещи. Впрочем, как это ни удивительно, между ними имеется тесная связь. Но об этом – в конце параграфа.

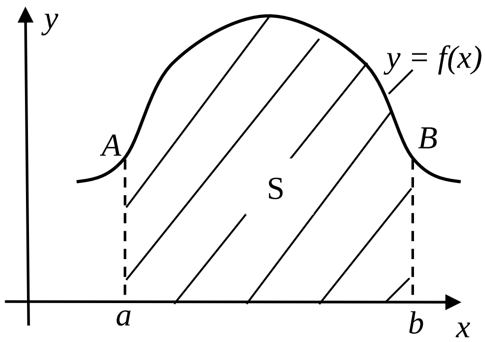


Рис. 3.6

А сейчас подтвердим, что в случае непрерывной подынтегральной функции и конечных пределов интегрирования определенный интеграл (4.1) действительно представляет собой некоторое конечное число. Для этого рассмотрим все возможные случаи относительно функции $f(x)$.

а) Пусть непрерывная функция $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$. Тогда, согласно (3.4), определенный интеграл (4.1) можно представлять себе как площадь S криволинейной трапеции (рис. 3.6). И эта площадь S заведомо представляет собой число:

$$\int_a^b f(x)dx = S \text{ - число} \qquad (4.3)$$

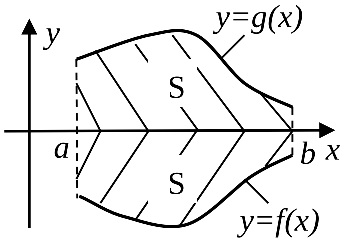


Рис. 3.7

б) Пусть непрерывная функция $f(x) \leq 0$ для всех $x \in [a; b]$. Тогда функция $-f(x) = g(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$ (см. рис. 3.7). В этом случае

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum f(x)dx = \sum -g(x)dx = \\ &= -\sum g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx = -S \end{aligned} \qquad (4.4)$$

То есть и в этом случае $\int_a^b f(x)dx$ - число (только отрицательное). А именно, этот интеграл, как и в случае (а), представляет собой площадь S криволинейной трапеции, заключенной между осью *ох* и графиком функции $y = f(x)$, только со знаком минус (рис. 3.8):

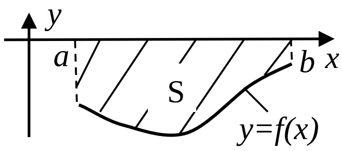


Рис. 3.8

$$\int_a^b f(x)dx = -S \tag{4.5}$$

в) Наконец, если на части $[a; c]$ отрезка $[a; b]$ функция $f(x) \geq 0$, а на другой части $[c; b]$ этого отрезка функция $f(x) \leq 0$ (рис. 3.9), то

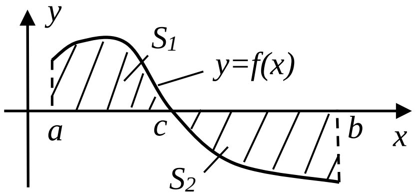


Рис. 3.9

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{(a \leq x \leq b)} f(x)dx = \sum_{(a \leq x \leq c)} f(x)dx + \sum_{(c \leq x \leq b)} f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

То есть и в этом случае $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой число.

Итак, подтверждение получено: *для любой непрерывной на конечном промежутке* $[a; b]$ *функции f(x) определенный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *существует (представляет собой некоторое число).*

Заметим, что определенные интегралы рассматривают и для разрывных подынтегральных функций, а также тогда, когда пределы интегрирования бесконечные. В таких случаях определенные интегралы могут и не существовать. Об этих интегралах мы поговорим позднее, в §6.

Основные свойства определенных интегралов

Наиболее просто и естественно установить эти свойства, опираясь на какой-либо наглядный смысл определенного интеграла. Например, на то, что любой определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ связан, согласно (4.3), (4.5) и (4.6), с площадями криволинейных трапеций. Но использовать этот геометрический смысл определенного интеграла для вывода его свойств в самом общем случае, то есть в случае знакопеременной функции *y = f(x)*, не очень удобно. Удобнее и нагляднее установить эти свойства, если, в соответствии с (3.12), считать определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ работой *А* силы *f(x)* (силы любого направления, а значит, и любого знака), когда точка приложения *x* этой силы перемещается вдоль оси *ох* из положения *a* в положение *b* (рис. 3.10).

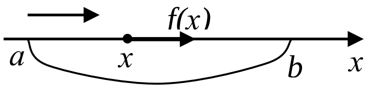


Рис. 3.10

$$\int_a^b f(x)dx = A \qquad (4.7)$$

Тогда сразу становятся очевидными следующие

<u>Свойства определенных интегралов</u>:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = A$ – число (число A может быть любого знака). (4.8)

2) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = (...) = A \qquad (4.9)$$

(переменную интегрирования в определенном интеграле можно обозначить как угодно – результат от этого не изменится).

3) $$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (4.10)$$

(ибо если перемещение точки отсутствует, то работа любой силы *f(x)* равна нулю).

4) $$\int_a^b 0 \cdot dx = 0 \qquad (4.11)$$

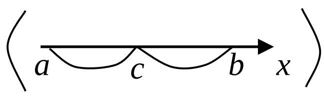
(ибо если сила отсутствует, то и работа отсутствует).

5) $$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a \qquad (4.12)$$

(ибо работа постоянной единичной силы численно равна перемещению точки под действием этой силы).

6) $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad (4.13)$$

7) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (4.14)$$



8) $$\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm ... \pm \int_a^b f_n(x)dx \qquad (4.15)$$

9) $$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k - \text{любая константа}) \qquad (4.16)$$

10) Если *f(x)* $\le$ *g(x)* для всех $x \in [a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$ (4.17)

(физический смысл последних пяти свойств продумать самостоятельно).

11) Пусть $m = [f(x)]_{наим}$ и $M = [f(x)]_{наиб}$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$. Тогда

$$m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b) \qquad (4.18)$$

Действительно, так как $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a; b]$, то применяя свойство (4.17) и затем свойства (4.16) и (4.12), мы и получим двойное неравенство (4.18). Это неравенство часто используется для прикидки (*грубой оценки*) величины $\int_a^b f(x)dx$.

<u>*Пример 1.*</u> Оценить величину $\int_1^3 \sqrt{8+x^3}dx$.

<u>*Решение*</u>. Так как функция $f(x) = \sqrt{8+x^3}$ монотонно возрастает на отрезке [1; 3], то $m = f(1) = \sqrt{9} = 3$, а $M = f(3) = \sqrt{35} \approx 5{,}9$. Поэтому по формуле грубой оценки (4.18) получаем:

$$6 < \int_1^3 \sqrt{8+x^3}dx < 11{,}8$$

<u>*Пример 2.*</u> Оценить величину $\int_0^\pi \frac{dx}{x+\cos x}$.

<u>*Решение*</u>. Минимальное m и максимальное M значения функции $y = f(x) = \frac{1}{x+\cos x}$ на промежутке $[0; \pi]$ не очевидны, так как с возрастанием x в выражении $x + \cos x$ первое слагаемое растет, а второе убывает. Чтобы разобраться в поведении функции y, найдем ее производную:

$$y' = \left(\frac{1}{x+\cos x}\right)' = \frac{\sin x - 1}{(x+\cos x)^2}.$$

Так как $\sin x \leq 1$ для всех x, то $y' \leq 0$ для всех x. А значит, функция $y = \frac{1}{x+\cos x}$ убывает на всей области своего определения, в том числе и на отрезке $[0; \pi]$. Таким образом, на отрезке $[0; \pi]$

$$m = [f(x)]_{наим} = f(\pi) = \frac{1}{\pi+\cos\pi} = \frac{1}{\pi-1};\ M = [f(x)]_{наиб} = f(0) = \frac{1}{0+\cos 0} = 1$$

Следовательно, грубая оценка (4.18) для данного интеграла имеет вид:

$$\frac{\pi}{\pi-1} < \int_0^\pi \frac{dx}{x+\cos x} < \pi \Leftrightarrow 1{,}47 < \int_0^\pi \frac{dx}{x+\cos x} < 3{,}14.$$

<u>Вычисление определенных интегралов (приближенное и точное). Формула Ньютона-Лейбница</u>

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, согласно его математическому определению (4.2), представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, образованных по схеме рисунка 3.5. Для непрерывной подынтегральной функции *f(x)* и конечных пределов интегрирования *a* и *b* этот интеграл, как было показано выше, заведомо существует (представляет собой некоторое число). Но найти его напрямую, следуя указанной на рис. 3.5 схеме, очевидно, невозможно, ибо эта схема содержит бесконечное число действий. По этой схеме его можно найти лишь приближенно.

Для этого промежуток интегрирования [*a; b*] следует разбить не на бесконечно малые участки *dx*, которых будет бесконечно много, а на конечное число (скажем, на 100) частичных промежутков одинаковой (или не одинаковой) конечной длины Δx. Затем на каждом Δx выбрать некоторую точку *x* (скажем, середину) и подсчитать сумму

$$\sum f(x) \cdot \Delta x$$

из уже конечного числа (из 100) слагаемых. Эта сумма будет *приближенным значением* определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Если нужно получить более точный результат, то нужно сделать более мелкое разбиение промежутка интегрирования (скажем, разбить его не на 100 частичных промежутков, а на 200, 300, и т. д.). Работы будет больше, зато результат станет точнее. Собственно, таким путем (с некоторыми непринципиальными усовершенствованиями указанной схемы) и вычисляют приближенно определенные интегралы на ЭВМ. Используя свое быстродействие, ЭВМ делает такое мелкое разбиение промежутка интегрирования, что полученный ею результат практически не отличается от точного. ЭВМ умеют и оценивать точность полученного результата.

Например, стандартная точность вычисления определенных интегралов в компьютерной программе MATHCAD – 15 верных десятичных знаков после запятой, что, естественно, далеко выходит за границы практических потребностей. Эта программа, по желанию пользователей, позволяет получить и до нескольких тысяч верных десятичных знаков после запятой. Тем не менее, *абсолютно точного* результата ЭВМ дать не в состоянии.

И тут возникает вопрос: а нельзя ли все-таки вычислять определенные интегралы абсолютно точно? Ответ на это вопрос такой: можно, хотя далеко и не всегда. Для точного подсчета определенных интегралов, если оно возможно, применяется знаменитая формула Нютона-Лейбница, Она сводит вычисление определенных интегралов к вычислению неопределенных.

Суть ее в следующем. Пусть *f(x)* – непрерывная на [*a; b*] функция, так что $\int_a^b f(x)dx$ заведомо существует. И пусть вычислен неопределенный интеграл от функции *f(x)*:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{4.19}$$

Тогда *точное значение* $\int_a^b f(x)dx$ можно найти по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{4.20}$$

Здесь *F(x)* – любая первообразная для функции *f(x)*. Формула (4.20) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Для доказательства формулы Ньютона-Лейбница докажем сначала, что функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \ (a \le x \le b) \tag{4.21}$$

то есть определенный интеграл с переменным верхним пределом, имеет на [*a; b*] производную *Φ´(x)*, совпадающую с *f(x)*. То есть *Φ´(x) = f(x)*.

Действительно,

$$\Phi'(x) = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\Phi(x+dx) - \Phi(x)}{dx} \tag{4.22}$$

Но

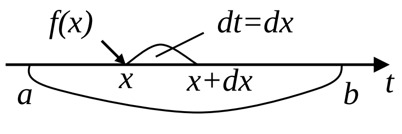


Рис. 3.11

$$\Phi(x+dx) - \Phi(x) = \int_a^{x+dx} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$
$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+dx} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+dx} f(t)dt \tag{4.23}$$

В последнем интеграле интегрирование происходит на бесконечно малом промежутке [*x; x+dx*] оси *t* длиной *dx*. На нем, при его разбиении на бесконечно малые промежутки *dt*, уместится лишь один такой промежуток *dt = dx* (см. рис. 3.11). Выбирая на нем в качестве произвольно выбираемой точки *t* точку *x* и следуя схеме (4.2) вычисления определенного интеграла, получим по этой схеме лишь одно слагаемое:

$$\Phi(x+dx) - \Phi(x) = \int_x^{x+dx} f(t)dt = f(x)dx \tag{4.24}$$

А значит, согласно (4.22), получаем:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) \ (a \le x \le b) \tag{4.25}$$

Отметим, что заодно мы доказали следующий принципиальный факт, который мы обещали доказать в конце §2: у любой непрерывной на [*a; b*] функции $f(x)$ имеется первообразная $F(x)$. Ею, в частности, является функция $\Phi(x)$. А значит, для любой непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$ существует для $x \in [a; b]$ и неопределенный интеграл (4.19). Хотя, как мы уже замечали в §1, он далеко не всегда может быть выражен через элементарные функции (может оказаться неберущимся). Найдя приближенно (машинным путем) функцию $\Phi(x)$, мы тем самым найдем приближенно и $\int f(x)dx$.

А теперь перейдем непосредственно к доказательству формулы Ньютона-Лейбница (4.20). Пусть $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$ на $[a; b]$. Так как она может отличаться от указанной выше первообразной $\Phi(x)$ лишь на константу, то

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C \quad (a \le x \le b) \tag{4.26}$$

Полагая в этом равенстве $x = a$, получаем:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C \tag{4.27}$$

Значит, равенство (4.26) принимает вид:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) \quad (a \le x \le b) \tag{4.28}$$

А теперь, полагая в (4.28) $x = b$, получим:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a), \text{ откуда } \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \tag{4.29}$$

Но это, по сути, и есть формула (4.20) Ньютона-Лейбница.

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Решение. Вычислим сначала $\int \sin x dx$ (он табличный):

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (\text{значит, } F(x) = -\cos x)$$

А тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = \cos 0 - \cos\pi = 1 - (-1) = 2.$$

Геометрическая иллюстрация полученного результата изображена ниже:

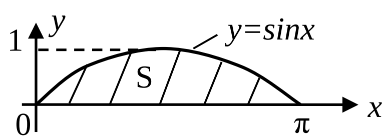


Рис. 3.12

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = S = 2 \text{ (кв. ед.)} \tag{4.30}$$

Формула Ньютона-Лейбница (4.20) принадлежит к числу важнейших формул высшей математики. Она позволяет просто, а главное, точно вычислять определенные интегралы. А значит, позволяет находить точные значения многих нужных для практики величин (площадей криволинейных фигур; пройденных телами путей при переменных скоростях их движения; работ переменных сил, и многое другое). То есть позволяет решать те задачи, которые элементарная математика решить не в состоянии. Но эта формула может быть использована, если только соответствующий неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ – из берущихся. В противном случае неизвестна первообразная *F(x)* для функции *f(x)*, а значит, нечего подставить и в формулу (4.20) Ньютона-Лейбница.

Если неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ неберущийся, то соответствующий ему определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ может быть найден лишь приближенно. Например, с помощью ЭВМ – так, как об этом говорилось выше, перед выводом формулы Ньютона-Лейбница.

Упражнения

1. На основании формулы (4.18) (формулы грубой оценки определенных интегралов) оценить величину следующих интегралов:

$$\text{а)} \int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx; \quad \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}.$$

<u>*Ответ:*</u> а) $2 < \int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx < 2{,}24$; б) $\frac{2}{9} < \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} < \frac{2}{7}$.

2. Сравнив подынтегральные функции интегралов $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ и $\int_0^1 tg\frac{x}{2}dx$, выяснить, какой из них больше.

<u>*Ответ:*</u> $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx > \int_0^1 tg\frac{x}{2}dx$.

3. Доказать, что для всех $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ справедливо неравенство $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$, и с его помощью доказать, что $1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\pi}{2}$.

4. Доказать, что $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ заключен между $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ и $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70$.

5. Найти площадь *S*, заключенную между параболой $y = x^2 - 4x$ и осью о*x*.

<u>*Ответ:*</u> $S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = 10\frac{2}{3}$

6. Найти работу А, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если для ее растяжения на 1 см необходима сила в 20 н.

<u>Указание.</u> При решении задачи использовать закон Гука: величина удлинения пружины пропорциональна растягивающей ее силе.

Ответ: $A = 2000\int\limits_0^{0{,}06} x\,dx = 3{,}6\ (\partial ж)$.

7. Производительность труда $z = f(t)$ среднестатистического рабочего на некотором предприятии представляет собой функцию

$$z = -0{,}15t^2 + 0{,}9t + 5 \quad (0 \le t \le 8)$$

Найти объем q продукции, производимой рабочим за смену (8 часов).

Ответ: $q = \int\limits_0^8 (-0{,}15t^2 + 0{,}9t + 5)dt = 43{,}2\ (ед)$.

8. Подтвердить правильность следующих формул для вычисления площадей фигур:

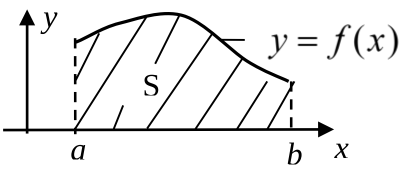


Рис. 3.13

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

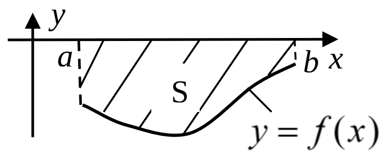


Рис. 3.14

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

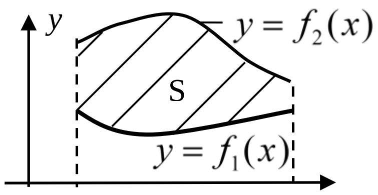


Рис. 3.15

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

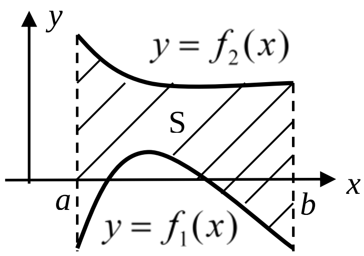


Рис. 3.16

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 2x + 1$.

Ответ: $S = 10\frac{2}{3}$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y = -x^3$ и прямой, проходящей через точки $M_1(-2; 8)$ и $M_2(2; -8)$.

Ответ: $S = 8$.

§5. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям. Использование четности – нечетности подынтегральной функции

1. Подстановка в определенных интегралах.

Пусть *y = f(x)* – непрерывная на промежутке [*a; b*] оси *ox* функция, а $x = \varphi(t)$- непрерывная на промежутке [*α; β*] функция, имеющая к тому же на [*α;β*] непрерывную производную (то есть *x = φ(t)* – непрерывно дифференцируемая на [*α; β*] функция). Кроме того, будем считать, что когда переменная *t* меняется от *α* до *β*, то переменная *x = φ(t)* меняется от *a* до *b*. Таким образом, *φ(α) = b* и *φ(β) = b*. Тогда при вычислении $\int_a^b f(x)dx$ можно совершить подстановку по следующей схеме:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку } x = \varphi(t); \\ \text{тогда } dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt; \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \right| =$$

$$= \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{g(t)}dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha) \qquad (5.1)$$

Докажем правомочность схемы (5.1). Пусть

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (5.2)$$

Здесь *F(x)* – некоторая первообразная для функции *f(x)*. То есть *F′(x) = f(x)*. Но тогда, по правилу вычисления производной сложной функции,

$$(F(\varphi(t)))'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \qquad (5.3)$$

Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \qquad (5.4)$$

Равенство результатов (5.2) и (5.4) и доказывает правомочность схемы (5.1).

Кстати, сравнивая схему (5.1) вычисления определенных интегралов с помощью подстановки с аналогичной схемой (2.1) вычисления неопределенных интегралов, можно увидеть и то, что в этих схемах общее, и то, что различно.

Примечание. На практике часто бывает удобнее делать подстановку не вида $x = \varphi(t)$, а вида $t = \varphi(x)$.

Пример1. Вычислить $\int\limits_0^3 \sqrt{1+x}dx.$

Решение:

$$\int\limits_0^3 \sqrt{1+x}dx = \left| \begin{array}{c} \text{Сделаем подстановку}: \sqrt{1+x} = t. \text{ Тогда } 1+x=t^2; \\ x=t^2-1; \quad dx = d\left(t^2-1\right) = \left(t^2-1\right)' dt = 2tdt; \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^2 t\cdot 2tdt = 2\int\limits_1^2 t^2 dt = \left| \begin{array}{l} \text{Учтем, что} \int t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} + C \text{ и применим} \\ \text{формулу Ньютона - Лейбница} \end{array} \right| =$$

$$= 2\cdot \frac{t^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}\cdot t^3\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^3-1^3\right) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

2. Вычисление определенных интегралов по частям.

Мы уже знаем, что по частям можно вычислять неопределенные интегралы. Для этого используется формула (2.2). Но по частям можно вычислять и определенные интегралы. Это делается по внешне похожей формуле (5.5):

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu \tag{5.5}$$

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – любые две непрерывные на $[a;\ b]$ функции, имеющие на этом промежутке и непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$ (то есть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a;\ b]$ функции).

Докажем формулу (5.5). Учтем, что

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{5.6}$$

Функция $u'v + uv'$, стоящая в этом равенстве справа, согласно указанным выше условиям для функций u и v, является непрерывной на промежутке $[a;\ b]$. Значит, существует определенный интеграл от нее:

$$\int\limits_a^b (u'v+uv')dx = \int\limits_a^b v\cdot u'dx + \int\limits_a^b u\cdot v'dx = \int\limits_a^b vdu + \int\limits_a^b udv \tag{5.7}$$

С другой стороны, согласно (5.6), функция uv является первообразной для функции $u'v + uv'$. А значит, по формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int\limits_a^b (u'v+uv')dx = uv\Big|_a^b \tag{5.8}$$

Сравнивая (5.7) и (5.8), приходим к доказываемой формуле (5.5).

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

Решение:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \text{Применим интегрирование по частям. Пусть } u = x, \text{ а } dv = \sin x dx. \\ \text{Тогда } du = dx, \text{ а } v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x + C = |\text{отбрасываем C}| = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= uv\Big|_a^b - \int_a^b v du = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx =$$

$$= -(\pi\cos\pi - 0\cos 0) + \sin x\Big|_0^{\pi} = -(-\pi) + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

2. Использование четности-нечетности подынтегральной функции при вычислении определенных интегралов с симметричными пределами интегрирования.

а) Если *f(x)* – непрерывная и четная на промежутке [-*a; a*] функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \qquad (5.9)$$

б) Если *f(x)* – непрерывная и нечетная на промежутке [-*a; a*] функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad (5.10)$$

Доказательство. Рассмотрим рисунки 3.17 (а) и 3.17 (б), соответствующие случаям (а) и (б) соответственно.

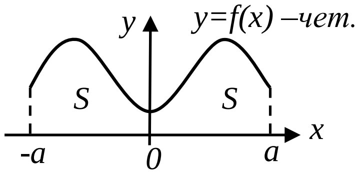


Рис. 3.17(а)

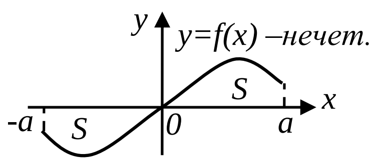


Рис. 3.17(б)

а) Если *f(x)* – четная на [-*a; a*] функция, то согласно рис. 3.17 (а) и формуле (4.3) получаем:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = S + S = 2S = 2\int_0^a f(x)dx$$

б) Если *f(x)* – нечетная на [*a; b*] функция, то согласно рис. 3.17 (б) и формулам (4.3) и (4.5) получаем:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -S + S = 0.$$

Пример 3. Упростить, а затем и вычислить $\int\limits_{-2}^{2}(6x^2+5x^3)dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-2}^{2}(6x^2+5x^3)dx = 6\int\limits_{-2}^{2}x^2dx + 5\int\limits_{-2}^{2}x^3dx = \left|\begin{array}{l} x^2 \text{ - четная функция;} \\ x^3 \text{ - нечетная функция;}\end{array}\right| = 6\cdot 2\int\limits_{0}^{2}x^2dx + 5\cdot 0 =$$

$$= 12\int\limits_{0}^{2}x^2dx = 12\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \left.4x^3\right|_0^2 = 4\cdot 2^3 - 0 = 32.$$

Упражнения

1. Вычислить с помощью подходящих подстановок:

$$\text{а) } \int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{x+1}; \quad \text{б) } \int\limits_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\cdot xdx; \quad \text{в) } \int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}dx.$$

Ответы: а) $1-\ln 2$; б) $21\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$.

2. Вычислить интегрированием по частям:

$$\text{а) } \int\limits_{1}^{2}\frac{\ln xdx}{x^2}; \quad \text{б) } \int\limits_{0}^{1}xe^{-x}dx; \quad \text{в) } \int\limits_{0}^{\pi}x^2\sin xdx.$$

Ответы: а) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; б) $1-\frac{2}{e}$; в) π^2-4.

3. Вычислить $\int\limits_{0}^{2}\arcsin\frac{x}{4}dx$, сделав в этом интеграле сначала подстановку $\frac{x}{4}=t$, а затем применив интегрирование по частям.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}-4\approx 0{,}507.$

4. Доказать, не вычисляя, что

а) $\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2-x^3}\right)dx=0$; б) $\int\limits_{-a}^{a}xe^{-k|x|}dx=0$ (a и k - любые числа).

5. Доказать, что $\int\limits_{-a}^{a}f(|x|)dx = 2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$.

§6. Несобственные интегралы

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть $y = f(x)$ – заданная и непрерывная для всех $x \geq \alpha$ функция. Тогда для любого $b \geq a$ существует $\int_a^b f(x)dx$. Поставим вопрос о пределе этого интеграла при $b \to \infty$.

<u>Определение.</u>

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx \qquad (6.1)$$

называется *несобственным интегралом от функции f(x) с бесконечным верхним пределом.* Если этот предел *существует и конечен*, то несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется *сходящимся*. А если же он не существует или равен $\pm\infty$, то этот несобственный интеграл называется *расходящимся.*

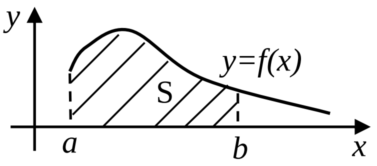


Рис. 3.18

Если $f(x) \geq 0$ для всех $x \geq a$, то у несобственного интеграла (6.1) имеется очевидный геометрический смысл, вытекающий из геометрического смысла (4.3) обычного определенного интеграла. Действительно, согласно рис. 3.18

$$\int_a^b f(x)dx = S \qquad (6.2)$$

А тогда

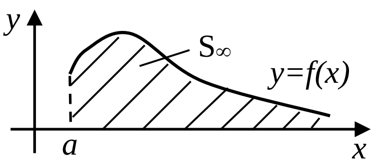


Рис. 3.19

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} S = S_\infty \qquad (6.3)$$

Здесь S_∞ - площадь бесконечно протяженной в направлении оси *ox* криволинейной трапеции (рис. 3.19). Несмотря на свою бесконечную протяженность, её площадь может оказаться и конечной. Но это может произойти лишь в случае, когда $y = f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Да и то, если функция $y = f(x) \to 0$ при $x \to \infty$ достаточно быстро.

Подтвердим это на примерах.

<u>*Пример 1.*</u> Найти площадь S_∞, изображенную на рис. 5.20.

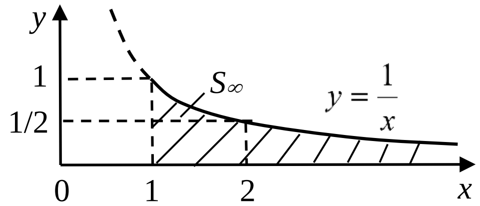


Рис. 3.20

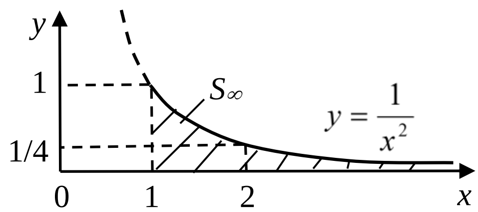


Рис. 3.21

<u>*Решение:*</u>

$$S_\infty = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty,$$

так как $\ln b \to \infty$ при $b \to \infty$.

Итак, $S_\infty = \infty$. И это несмотря на то, что функция $y = \frac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$. Несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty$, а значит, он расходится.

<u>*Пример 2.*</u> Найти площадь S_∞, изображенную на рис. 3.21.

<u>*Решение:*</u>

$$S_\infty = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Здесь $S_\infty = 1$. То есть бесконечно протяженная фигура имеет конечную площадь. Это произошло потому, что подынтегральная функция $\frac{1}{x^2} \to 0$ при $x \to \infty$ достаточно быстро (по крайней мере, гораздо быстрее, чем подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ в предыдущем примере). Несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$, то есть в результате дал число. А значит, он сходится.

<u>*Пример 3*</u>. Выяснить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_0^\infty \cos x dx$.

<u>*Решение*</u>. Вычислим это интеграл:

$$\int_0^\infty \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty}\sin b$$

– не существует. Это очевидно, если вспомнить поведение графика функции $y = \sin x$ (синусоиды) при $x \to \infty$. Таким образом, $\int_0^\infty \cos x dx$ не существует, а значит, он расходится. Впрочем, это и не могло быть иначе, ибо подынтегральная функция $\cos x$ не стремится к нулю при $x \to \infty$.

Заметим, что при вычислении несобственных интегралов типа $\int_a^\infty f(x)dx$, как и при вычислении обычных определенных интегралов $\int_a^b f(x)dx$, можно сразу применять формулу Ньютона-Лейбница, минуя нахождение предела:

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a). \text{ Здесь } F(\infty) = \lim_{x\to\infty}F(x) \qquad (6.4)$$

Действительно:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty}(F(b)-F(a)) = F(\infty)-F(a).$$

Если значение *F(∞)* существует и конечно, то согласно формуле (6.4) Ньютона-Лейбница сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

<u>Примечание.</u> Совершенно аналогично интегралам с бесконечным верхним пределом можно рассматривать несобственные интегралы с бесконечным нижним пределом и даже с обоими бесконечными пределами интегрирования. То есть интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx; \qquad (6.5)$$

Для их вычисления тоже можно применять формулу Ньютона-Лейбница.

<u>Пример 4.</u>

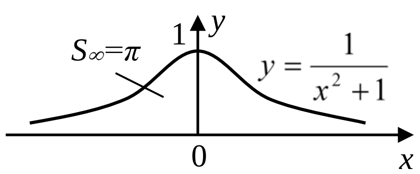


Рис. 3.22

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg}(-\infty) = \left|\begin{matrix}\text{учтем, что}\\ \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x\end{matrix}\right| =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\infty = \left|\operatorname{arctg}\infty = \lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\right| = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Итак, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \pi$ (число), то есть этот интеграл сходится. Его величина π равна площади S_∞ бесконечно протяженной в обе стороны фигуры, изображенной на рис. 3.22.

Заметим, что сам факт сходимости-расходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования не обязательно устанавливать с помощью прямого вычисления этих интегралов. Это вопрос часто можно решить и гораздо проще, сравнив данный несобственный интеграл с каким-либо другим, для которого сходимость-расходимость уже установлена.

Пусть, например, для всех $x \in [a;\infty)$ имеет место неравенство *f(x)≤ g(x),* где *y* =

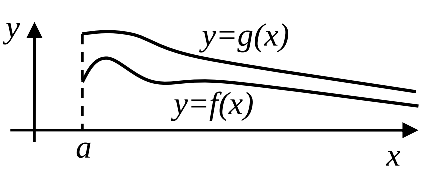


Рис. 3.23

f(x) и $y = g(x)$ – две непрерывные и неотрицательные функции (рис. 3.23). Тогда очевидно, что

$$0 < \int_a^\infty f(x)dx < \int_a^\infty g(x)dx \tag{6.6}$$

Из неравенства (6.6) и рис. 3.23 очевидным образом следует так называемый *признак сравнения несобственных интегралов*:

1) Если $\int_a^\infty g(x)dx = A$ (число) – интеграл сходится, то и $\int_a^\infty f(x)dx = B$ (число) – интеграл сходится, причем $B<A$.

2) Если $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$ - расходится, то и $\int_a^\infty g(x)dx = \infty$ - расходится. (6.7)

3) Если $\int_a^\infty g(x)dx = \infty$ - расходится, то $\int_a^\infty f(x)dx = ?$ - об этом интеграле сразу ничего сказать нельзя.

4) Если $\int_a^\infty f(x)dx = B$ (число) - сходится, то $\int_a^\infty g(x)dx = ?$ - об этом интеграле сразу ничего сказать нельзя.

Здесь, по идее, та же ситуация, что и с возможностью поднятия штангистом двух разных весов:

1) Если он может поднять больший вес, то он может поднять и меньший.

2) Если он не может поднять меньший вес, то он не сможет поднять и больший.

3) Если он не может поднять больший вес, то про меньший вес ничего сразу сказать нельзя, всё зависит от того, насколько он меньше.

4) Если он может поднять меньший вес, то про больший вес сразу ничего сказать нельзя, всё зависит от того, насколько он больше.

В качестве функции *g(x)*, с которой на промежутке $x \in [a;\infty)$ сравнивают данную функцию *f(x),* часто используют функцию $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, а в качестве интеграла сравнения – интеграл $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, учитывая при этом, что при $a > 0$ и любых α функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ - положительная и непрерывная функция, и что (подтвердите это самостоятельно)

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)\cdot a^{\alpha-1}}, \text{если } \alpha > 1 \text{ - интеграл сходится} \\ \infty, \text{если } \alpha \le 1 \text{ - интеграл расходится} \end{cases} \tag{6.8}$$

Пример 5. Исследовать на сходимость-расходимость $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{2x^3+5}$

Решение. Очевидно, что $0 < \frac{1}{2x^3+5} < \frac{1}{2x^3}$ для всех $x \in [2; \infty)$. Поэтому

$$0 < \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{2x^3+5} < \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{2x^3} = \frac{1}{2}\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

Но согласно (6.8) интеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится. Поэтому, по признаку сравнения, сходится и $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{2x^3+5}$ (он представляет собой некоторой конкретное число). Более того, предыдущее неравенство дает и оценку этого числа: так как, согласно $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}$, то $0 < \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{2x^3+5} < \frac{1}{16}$.

Пример 6. Исследовать на сходимость-расходимость $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$.

Решение. Очевидно, что

$$\frac{1}{2x+\sqrt{x}} > \frac{1}{2x+x} = \frac{1}{3x} \text{ для всех } x \in [3; \infty).$$

Следовательно,

$$\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt{x}} > \frac{1}{3}\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x}.$$

Но последний интеграл равен ∞. Следовательно, равен ∞ и $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt{x}}$. То есть он расходится.

Примечание. Справедлив и более сильный (обобщенный) признак сравнения, который применим для любых непрерывных и неотрицательных на $[a; \infty)$ функций. А именно, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \tag{6.9}$$

то есть если функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ ($f(x) \sim g(x)$) при $x \to \infty$, то несобственные интегралы

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{\infty} g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 2. Исследовать на сходимость-расходимость $\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^3-2x^2+5}$.

Решение. Очевидно, что на промежутке интегрирования $10 \le x \prec \infty$ знаменатель $x^3 - 2x^2 + 5$ для всех x положителен и нигде в нуль не обращается. Поэтому подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 + 5}$ неотрицательна и непрерывна для всех $x \in [10;\ \infty)$. При этом

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + 5} = \frac{1}{x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} \sim \frac{1}{x^3} \text{ при } x \to \infty$$

Но, согласно (6.8), $\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится. Поэтому и $\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + 5}$ сходится.

Теперь перейдем к более сложному случаю несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования, когда подынтегральная функция знакопеременна на своей области интегрирования (рис. 3.24). Тогда

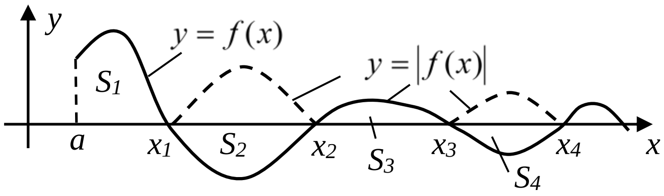


Рис.3.24

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int\limits_{x_2}^{x_3} f(x)dx + ... = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + ... = \qquad (6.10)$$
$$= (S_1 + S_3 + ...) - (S_2 + S_4 + ...) = A - B,$$

где A>0 – сумма площадей, находящихся над осью ox, а B>0 – сумма площадей, находящихся под осью ox.

Рассмотрим еще один несобственный интеграл, только уже от $|f(x)|$:

$$\int\limits_a^{\infty} |\ f(x)\ |\ dx = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + ... = (S_1 + S_3 + ...) + (S_2 + S_4 + ...) = A + B \qquad (6.11)$$

а) Допустим, что $\int\limits_a^{\infty} |\ f(x)\ |\ dx$ сходится. Тогда $A + B$ – *конечное* положительное число. А значит, и его положительные слагаемые A и B – *конечные* положительные числа. Но тогда и их разность $A - B$ – *конечное* число (его знак может быть любым). А значит, согласно (6.10), несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится.

б) Допустим, что $\int\limits_a^{\infty} |\ f(x)\ |\ dx$ расходится (равен $+\infty$). Тогда сумма $A + B = +\infty$, а значит, или A, или B, или оба они одновременно равны $+\infty$. Но их разность $A - B$ может оказаться как бесконечной, так и конечной. То есть $\int_a^\infty f(x)dx$ может как сходиться, так и расходиться.

Если $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, и при этом $\int_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то говорят, что $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится абсолютно*. Величину абсолютно сходящегося несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ можно и оценить:

$$0 \le \left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|dx \qquad (6.12)$$

Действительно, неравенство (6.12) равносильно очевидному неравенству

$$0 \le |A - B| \le A + B \ \ (A \ge 0 \text{ и } B \ge 0) \qquad (6.13)$$

А если $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, но при этом $\int_a^\infty |f(x)|dx$ расходится, то говорят, что $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится условно*.

<u>*Пример 8*</u>. Показать, что $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ сходится, причем абсолютно.

<u>*Решение.*</u> Рассматривая $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx$ и используя признак сравнения (6.7), получаем:

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$$

Таким образом, $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx$ сходится. Но тогда и $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ сходится, причем абсолютно. Более того, мы можем произвести, используя неравенство (6.12), оценку этого интеграла:

$$0 \le \left|\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx\right| \le \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$$

То есть абсолютная величина интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ заключена в пределах [0; 1].

Пример 9. Доказать, что $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ сходится, но условно.

Решение. Применим к этому интегралу формулу (5.5) интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \text{Пусть u} = \frac{1}{\text{x}}, d\upsilon = \sin x dx. \text{Тогда} \\ du = d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}dx; \upsilon = \int d\upsilon = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= u\upsilon\Big|_1^\infty - \int\limits_1^\infty \upsilon du = -\frac{\cos x}{x}\Bigg|_1^\infty - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx = -0 + \frac{\cos 1}{1} - \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}$, как и рассмотренный в примере 8 интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$, сходится. А значит, сходится и $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Но сходится он условно, ибо $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \infty$ (расходится).

Действительно, так как $-1 \le \sin x \le 1$ для всех *x*, то $\sin^2 x \le |\sin x|$ для всех *x*. А значит

$$0 < \int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx < \int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx = \int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

Но

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx = \infty - \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$$

Последний интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$, как и аналогичные интегралы $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx$ и $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$, сходится (это можно подтвердить интегрированием по частям). То есть $\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$ - число. А значит, $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx = \infty$ (расходится). Но тогда и бóльший интеграл $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \infty$ (расходится). То есть $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ сходится, но условно.

2. Несобственные интегралы с конечными пределами интегрирования от неограниченных функций

Под указанными несобственными интегралами понимаются интегралы вида $\int\limits_a^b f(x)dx$, где *f(x)* – разрывная в некоторой точке (точках) конечного промежутка интегрирования [*a; b*] функция, обращающаяся в этих точках в бесконечность (любого знака).

Будем пока считать, что такая точка одна, и эта точка – правая крайняя точка промежутка интегрирования (верхний предел *b* интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$). То есть будем считать, что функция *f(x)* непрерывна на полуинтервале [*a; b*), причем

$$f(x) \to \pm\infty \text{ при } x \to b \qquad (6.14)$$

Под интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ в этом случае, по определению, понимается предел обычного определенного интеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0 \ (\varepsilon > 0)$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (6.15)$$

Этот интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом от функции, неограниченной на правом конце промежутка интегрирования*. Если он существует и конечен, то он называется *сходящимся.* Если же не существует или равен +∞ или -∞, то он называется *расходящимся*.

В частности, если *f(x)*≥0 на [*a; b*) и *f(x)* → +∞ при *x* → *b*, то геометрическую иллюстрацию равенства (6.15) дают рисунки 3.25(а) и 3.25(б):

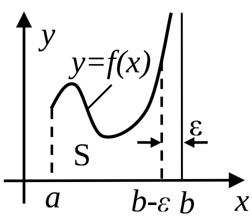


Рис. 3.25(а)

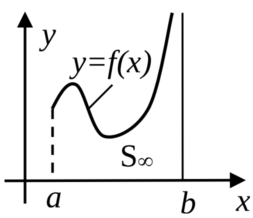


Рис. 3.25(б)

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = S$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S_\infty \qquad (6.16)$$

Таким образом, согласно рис. 3.25(б), $\int\limits_a^b f(x)dx = S_\infty$ - площадь бесконечно протяженной вдоль оси *оу* криволинейной трапеции. А она, как и площадь S_∞ на рис. 3.19, может оказаться как конечной, так и бесконечной. То есть несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ можно на основе его прямого вычисления по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \text{ Здесь } F(b) = \lim_{x\to b} F(x) \tag{6.17}$$

Подтвердим это, исходя из определения (6.15):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[F(b-\varepsilon) - F(a)\right] = F(b) - F(a)$$

<u>*Пример 10.*</u> Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

<u>*Решение.*</u> Этот интеграл действительно несобственный, так как его подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ имеет особую точку $x = \frac{\pi}{2}$, в которой $\cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, а значит, в которой функция $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ обращается в бесконечность:

$$\frac{1}{\cos^2 x} \to +\infty \text{ при } x \to \frac{\pi}{2}$$

Вычисляя указанный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница (6.17), получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл расходится.

<u>*Примечание*</u>. Мы ввели понятие несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от функции *f(x)*, неограниченной (обращающейся в бесконечность) на правом конце промежутка интегрирования [*a; b*]. Но этот же интеграл будет несобственным, если *f(x)* неограниченна на левом конце промежутка интегрирования (в точке *a*), а также в некоторой внутренней его точке *c*. В последнем случае $\int_a^b f(x)dx$ разбивают на два несобственных интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{6.18}$$

Оба эти интеграла с особой точкой на краю промежутка интегрирования можно вычислять по формуле Ньютона-Лейбница.

Пример 11. Вычислив несобственный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, доказать сходимость этого интеграла. Полученному результату дать геометрическую иллюстрацию.

Решение. Данный интеграл действительно несобственный, так как его подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(0 \le x \le 4)$ обращается в ∞ в точке $x = 0$ ($f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ при $x \to 0)$. Вычислим его по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_0^4 = 2\sqrt{x}\Big|_0^4 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{0}) = 4$$

Таким образом $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится. Его геометрическая иллюстрация дана на рис. 3.26.

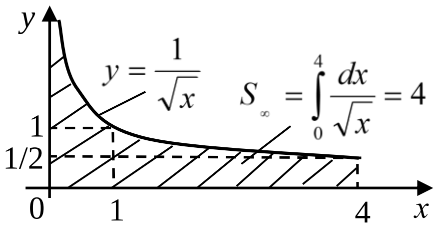


Рис. 3.26

Заметим, что вопрос о сходимости-расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций, как и вопрос о сходимости-расходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования, совсем не обязательно выяснять, вычисляя эти интегралы. Можно попробовать сравнить данный несобственный интеграл с каким-либо другим с теми же пределами интегрирования.

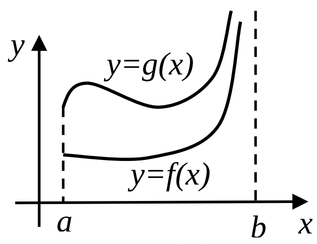


Рис. 3.27

Пусть, например, $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – две непрерывные в полуинтервале $[a;\ b)$ и неотрицательные функции. И пусть $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a;\ b)$. Пусть, кроме того, $f(x) \to +\infty$ и $g(x) \to +\infty$ при $x \to b$ (рис. 3.27). Тогда, очевидно,

$$0 < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx \tag{6.19}$$

Из этого неравенства очевидным образом вытекает следующий *признак сравнения:*

а) Если $\int\limits_a^b g(x)dx$= (число)– сходится, то и $\int\limits_a^b f(x)dx$ =(число)– сходится.

$$\text{б) Если } \int\limits_a^b f(x)dx = \infty \text{ – расходится, то и } \int\limits_a^b g(x)dx = \infty \text{ – расходится} \qquad (6.20)$$

В качестве функции *g(x)*, с которой сравнивают данную функцию *f(x)*, часто используют функцию $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$, учитывая при этом, что

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ если } \alpha < 1 \text{ - сходится} \\ \infty, \text{ если } \alpha \ge 1 \text{ - расходится} \end{cases} \qquad (6.21)$$

<u>*Пример 12.*</u> Исследовать на сходимость-расходимость $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}$.

<u>*Решение.*</u> Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}} \to +\infty$ при $x \to 1$, поэтому данный интеграл является несобственным. При этом очевидно, что для всех $x \in [0; 1)$

$$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

Но $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, согласно (6.21), сходится. Поэтому и меньший интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится. Более того, можем оценить и значение этого интеграла:

$$0 < \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = 2.$$

Впрочем, мы можем вычислить этот интеграл и точно:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}} = \left| \begin{matrix} \text{сделаем подстановку}: \sqrt{1-x} = t. \\ \text{тогда } x = 1-t^2;\ dx = -2tdt; \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \ \ 1 \\ \hline t & 1 \ \ 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^0 \frac{(1-t^2)^2(-2tdt)}{t} = 2\int\limits_0^1 (1-t^2)^2 dt = 2\int\limits_0^1 (1-2t^2+t^4)dt = \frac{16}{15}$$

Упражнения

1. Прямым вычислением несобственного интеграла $\int\limits_2^\infty \dfrac{\ln x}{x^2}dx$ исследовать его на сходимость-расходимость.

Ответ: $\int\limits_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{\ln 2+1}{2}$ – интеграл сходится.

2. Используя признак сравнения (6.7) и учитывая, что $\frac{\pi}{4}\le \operatorname{arctg} x \prec \frac{\pi}{2}$ для всех $x \in [1;\infty)$, исследовать на сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx; \quad \text{б) } \int\limits_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx.$$

Ответ: а) расходится; б) сходится.

3. Используя обобщенный признак сравнения (6.9), показать, что из двух несобственных интегралов

$$\text{а) } \int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}; \quad \text{б) } \int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

интеграл (а) расходится, а интеграл (б) сходится.

4. Показать, что $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx$ при $a\neq 0$ и $k\neq 0$ сходится абсолютно.

5. Показать, что $\int\limits_a^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ при любом $a>0$ сходится условно.

6. Вычислив несобственный интеграл $\int\limits_0^{1}\frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$, подтвердить его сходимость.

7. Вычислив несобственный интеграл $\int\limits_0^{2}\frac{\ln x dx}{x}$, подтвердить его расходимость.

8. Используя признак сравнения (6.20), показать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{3}\frac{dx}{3+2x-x^2}$ расходится. Подтвердить это прямым вычислением интеграла.

Глава 4
Дифференциальные уравнения

§1. Общие понятия и определения

Определение 1. *Уравнение, содержащее хотя бы одну из производных y', y'', y''',… неизвестной функции $y = y(x)$, называется дифференциальным уравнением для этой функции.* Сама функция y и её аргумент x могут входить, а могут и не входить в дифференциальное уравнение. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Таким образом,

$$F(x; y; y') = 0 \tag{1.1}$$

- общий вид дифференциального уравнения первого порядка;

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \tag{1.2}$$

- общий вид дифференциального уравнения второго порядка, и т.д.

В соответствии со сказанным выше в уравнении первого порядка (1.1) обязательно наличие лишь y', а наличие x и y не обязательно. В уравнении второго порядка (1.2) обязательно наличие лишь y'', а наличие остальных его элементов x, y и y' не обязательно.

Определение 2. *Решением (частным решением) дифференциального уравнения на некотором промежутке $[a; b]$ оси ох называется любая функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех $x \in [a;b]$ дифференциальному уравнению, то есть обращающая его в тождество (верное числовое равенство* $0=0$*).* Графики частных решений $y = f(x)$ дифференциального уравнения называется его *интегральными кривыми*.

Например, функция $y = x^2$ является частным решением дифференциального уравнения первого порядка $y'-2x = 0$ для всех x от $-\infty$ до $+\infty$. А интегральной кривой, соответствующей данному частному решению, является парабола с уравнением $y = x^2$.

Определение 3. *Решить дифференциальное уравнение (любого порядка) – это значит найти все его частные решения, то есть найти все функции $y = f(x)$, удовлетворяющие этому уравнению.* Формула, содержащая все (или почти все) частные решения дифференциального уравнения, называется его *общим решением.* Частные решения, не содержащиеся в общем решении, называются *особыми решениями* дифференциального уравнения.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y'-2x = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $y' = 2x$. Следовательно, все функции y, удовлетворяющие этому уравнению, являются первообразными для функции $2x$ (см. §1, глава 3). Но множество всех первообразных для данной функции – это неопределенный интеграл от неё. Поэтому все частные решения дифференциального уравнения $y'-2x = 0$ найдутся по формуле:

$$y = \int 2x dx = x^2 + C$$

Формула $y = x^2 + C$ представляет собой общее решение дифференциального уравнения $y'-2x = 0$. Эта формула содержит в себе множество функций (ибо C – неопределенная константа), и все эти функции - частные решения дифференциального уравнения $y'-2x = 0$. Особых решений у этого дифференциального уравнения нет. Интегральными кривыми данного дифференциального уравнения являются параболы $y = x^2 + C$ (их бесконечно много). Все частные решения, входящие в общее решение $y = x^2 + C$, являются ими для всех x от $-\infty$ до $+\infty$.

А теперь сделаем следующее важное замечание. Функция $y = f(x)$, являющаяся частным решением данного дифференциального уравнения, может быть им лишь для тех x, для которых определена и она, и все её производные, входящие в дифференциальное уравнение. Вносит свои ограничения и сама структура дифференциального уравнения (что-то в нем может находиться под корнем, что-то под логарифмом и т.д.). А так как у разных функций, вообще говоря, разные области определения (особенно с учетом областей определения их производных), то разные частные решения *y = f(x)* дифференциального уравнения удовлетворяют этому уравнению, вообще говоря, на разных числовых множествах оси *ox*.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $yy' = x$.

Решение. Проведем следующие тождественные преобразования:

$$yy' = x \Leftrightarrow y\frac{dy}{dx} = x \Leftrightarrow ydy = xdx \Leftrightarrow \int ydy = \int xdx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + C \quad (C = 2C_2 - 2C_1) \quad \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + C}.$$

Множество функций $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$ содержит в себе все частные решения дифференциального уравнения $yy' = x$. Таким образом, формула $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$ является общим решением этого уравнения. Особых решений у него нет.

А теперь проанализируем полученное общее решение уравнения $yy' = x$.

а) Если $C>0$, то и функции $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$, и их производные $y' = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + C}}$ определены для любых $x \in (-\infty;+\infty)$. Следовательно, при $C>0$ эти функции являются решениями дифференциального уравнения $yy' = x$ при любых x.

б) Если $C=0$, то получаем две функции $y = \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$, которые определены для любых $x \in (-\infty;+\infty)$. Но вот производные у них существует для любых x, кроме точки $x=0$, что наглядно демонстрируют графики этих функции (см. рис. 4.1(а) и 4.1 (б)).

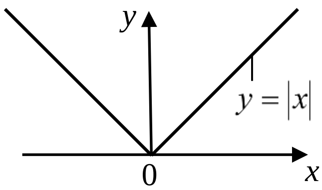


Рис. 4.1(а)

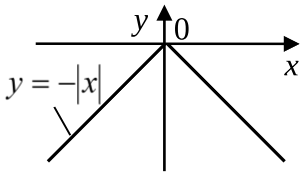


Рис. 4.1(б)

Действительно, согласно геометрическому смыслу производной (глава 2, формула 1.11) производная функции связана с касательной к графику функции. А такой касательной к графикам функций $y = \pm|x|$ при $x=0$, очевидно, не существует. Поэтому функции $y = \pm|x|$ является решениями дифференциального уравнения $yy' = x$ для всех x, кроме $x=0$.

в) Если $C<0$, то $-C = A^2 > 0$, и тогда получаем функции $y = \pm\sqrt{x^2 - A^2}$, которые определены лишь при $x \geq A$ и при $x \leq -A$, причем их производные $y' = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 - A^2}}$ определены строго при $x>A$ и при $x<-A$. Поэтому функции $y = \pm\sqrt{x^2 - A^2}$ являются решениями дифференциального уравнения $yy' = x$ лишь на интервалах $x>A$ и $x<-A$. При изменении величины A меняются и эти интервалы.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнения первого порядка $y' = xy^2$.

Решение. Очевидно, что функция $y=0$ является решением (частным решением) данного дифференциального уравнения. Поищем возможные другие решения этого уравнения, когда $y \neq 0$. Для этого проведем следующие тождественные преобразования данного уравнения:

$$y' = xy^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = xy^2 \Leftrightarrow |\text{разделим переменные } x \text{ и } y| \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = xdx \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$|\text{проинтегрируем обе части}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2 \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2+C}{2} \left(C = 2C_2 - 2C_1\right) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{x^2+C}$$

Функции $y = -\frac{2}{x^2+C}$ (их бесчисленное множество), как и функция y=0, представляют собой частные решения дифференциального уравнения $y' = xy^2$ (убедитесь в этом, найдя y' и подставив y и y' в это уравнение). У каждой из этих функций своя область определения, зависящая от величины константы C. В формуле $y = -\frac{2}{x^2+C}$ содержатся все частные решения дифференциального уравнения $y' = xy^2$, кроме решения $y = 0$ (оно не получается по этой формуле ни при каком значении C). Таким образом, формула $y = -\frac{2}{x^2+C}$ представляет собой общее решение дифференциального уравнения $y' = xy^2$. А $y = 0$ – особое решение этого уравнения. Заметим, что и интегральная кривая, соответствующая этому особому решению y=0 (ось ox) кардинально отличается от кривых $y = -\frac{2}{x^2+C}$.

В примерах (1) – (3) мы решили три различных дифференциальных уравнения первого порядка, и у каждого из них оказалось бесчисленное множество частных решений. Произошло это потому, что в процессе решения каждого из них мы применяли операцию интегрирования (операцию вычисления неопределенных интегралов). Интегрирование привело к появлению неопределенной константы интегрирования C, которая затем вошла в выражение для искомой функции y: $y = y(x;C)$. Таким образом, мы получили множество частных решений дифференциального уравнения. Это множество включало в себя или все частные решения дифференциального уравнения (в примерах 1 и 2), или почти все (в примере 3). Поэтому это множество $y = y(x;C)$ частных решений дифференциального уравнения представляло собой общее решение этого уравнения.

По такой схеме (интегрированием) находят общее решение любого дифференциального уравнения первого порядка $F(x; y; y') = 0$. Действительно, чтобы решить такое уравнение, то есть чтобы найти те функции $y = f(x)$, которые ему удовлетворяют, нужно «вытащить» функцию y из-под знака её производной. А это как раз и делается с помощью процедуры интегрирования – процедуры, обратной дифференцированию.

Итак, *схема получения общего решения любого дифференциального уравнения первого порядка, содержащая три этапа, такова*:

$$F(x; y; y') = 0 \Rightarrow |\text{интегрируем уравнение}| \Rightarrow \Phi(x; y; C) = 0 \Rightarrow y = y(x; C) \qquad (1.3)$$

Отметим, что далеко не всегда удается осуществить третий, последний этап этой схемы и получить общее решение дифференциального уравнения в явном виде, то есть в виде $y = y(x;C)$, когда y выражен через x и C. Тогда заканчивают работу на втором этапе, то есть оставляют общее решение в неявном виде $\Phi(x;y;C) = 0$.

Общее решение дифференцированного уравнения, в каком бы виде (явном, неявном) оно ни было получено, называют ещё *общим интегралом* дифференцированного уравнения. Ибо в любом случае получается оно в результате интегрирования этого уравнения.

Поиск общего решения дифференциального уравнения – это магистральный путь решения этого уравнения. Но на этом пути могут быть ответвления, какие-то частные случаи, которые не вписываются в схему поиска общего решения. И в этих ответвлениях могут быть обнаружены частные решения $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$,… дифференциального уравнения, которые не войдут в его общее решение (подтверждением этого служит пример 3). Их тоже нужно найти (не потерять). В противном случае дифференциальное уравнение окажется решенным неполноценно.

В заключении данного параграфа укажем, в таких задачах естествознания следует ожидать появления дифференциальных уравнений.

Так как решениями дифференциальных уравнений являются функции, а каждая функция $y = f(x)$ в принципе описывает процесс изменения одной переменной (y) при изменении другой переменной (x), то дифференциальные уравнения, по идее, должны широко встречаться в задачах по исследованию различного рода процессов (физических, химических, биологических, технологических, экономических, общественных, и т.д.). В следующих параграфах мы приведём примеры, подтверждающие это предположение.

Упражнения

1. Решить дифференциальное уравнение $y' - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 0$.

   Ответ: $y = \frac{x\sqrt{x}}{3} + C$ - общее решение.

2. Решить дифференциальное уравнение $y' = y$.

   Ответ: $y = Ce^x$ - общее решение.

3. Решить дифференциальное уравнение $y' = (y-1)^2$.

   Ответ: $y = 1 - \frac{1}{x+C}$ - общее решение; y=1 – особое решение.

§2. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Общее решение любого дифференциального уравнения первого порядка $F(x; y; y') = 0$, как это следует из схемы его получения (1.3), содержит бесчисленное множество частных решений. Возникает естественный вопрос: как из этого множество частных решений выделить интересующее нас конкретное частное решение? Иначе говоря, как из множества интегральных кривых данного дифференциального уравнения выделить нужную интегральную кривую?

Ответ почти очевиден: для этого на плоскости *xoy* нужно задать некоторую точку $M_0(x_0; y_0)$, через которую должна пройти искомая интегральная кривая. Тогда её уравнение $y = f(x)$ и будет тем частным решением, которое выделяется из прочих (рис. 4.2).

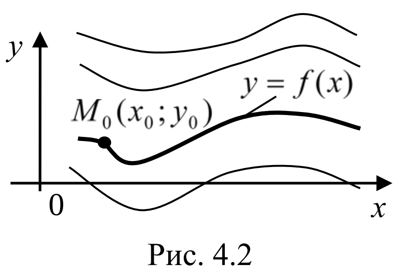


Рис. 4.2

Задание точки $M_0(x_0; y_0)$ равносильно заданию условия: при $x = x_0$ должен быть $y = y_0$. То есть для искомого, выделяемого из прочих, частного решения $y = f(x)$ данного дифференциального уравнения должно выполняться условие: $y(x_0) = y_0$. Это условие называется *начальным условием* для дифференциального уравнения. Начальным оно называется потому, что очень часто в реальных задачах по исследованию различного рода процессов роль независимой переменной x играет время t, а начальным значением x_0 является начальный момент времени t_0 (обычно $t_0 = 0$). Тогда начальное условие $y(x_0) = y_0$ показывает, какое значение y_0 имела искомая функция $y = f(x)$, описывающая исследуемый процесс, в начальный момент времени x_0. Ну, а сама функция $y = f(x)$, если нас не интересует предыстория процесса, то есть времена $x < x_0$, ищется для $x > x_0$.

Если дифференциальное уравнение первого порядка $F(x; y; y') = 0$ задано вместе с начальным для него условием $y(x_0) = y_0$, то говорят, что для этого уравнения задана *задача Коши*:

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Решить её - это значит найти те частные решения $y = f(x)$ дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$, которые еще удовлетворяют и заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$. С точки зрения рисунка 4.2 решить задачу Коши (2.1) – это значит найти уравнения $y = f(x)$ всех интегральных кривых дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$, проходящих через начальную точку $M_0(x_0; y_0)$.

Как правило, задача Коши (2.1) имеет единственное решение $y = f(x)$. То есть через заданную начальную точку $M_0(x_0; y_0)$ проходит единственная интегральная кривая $y = f(x)$ дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$ (как на рис. 4.2). И такая начальная точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *обыкновенной точкой* дифференциального уравнения.

Но бывает, что ни одна из интегральных кривых не проходит через заданную начальную точку $M_0(x_0; y_0)$. А бывает, что задача Коши имеет несколько решений. То есть бывает, что через начальную точку $M_0(x_0; y_0)$ проходит несколько интегральных кривых. В обоих этих случаях такая начальная точка называется *особой точкой* дифференциального уравнения.

Если задача Коши имеет единственное решение $y = f(x)$, то это значит, что процесс, который описывается этой единственной функцией, идет, начиная с точки $M_0(x_0; y_0)$, вполне однозначно.

Если задача Коши не имеет решений, то такой процесс вообще невозможен.

А если задача Коши имеет несколько решений, то эти решения описывает некий *ветвящийся* в точке $M_0(x_0; y_0)$ процесс. Такие процессы, заметим, в природе тоже имеют место. Например, при нулевой температуре вода находится в неустойчивом состоянии, ибо может затем и оставаться жидкостью (одна возможная ветвь процесса), и начать превращаться в лед (другая возможная ветвь).

Подавляющее число исследуемых на практике процессов – это обычные, однозначно идущие процессы. Поэтому и задачи Коши для этих процессов имеют единственное решение. Тем не менее, сколько решений будет у конкретной задачи Коши (2.1) и каковы они, окончательно выясняется в процессе её решения.

А *схема решения задачи Коши* (2.1) такова:

1. Решаем дифференциальное уравнение $F(x; y; y') = 0$ и находим все его решения. То есть интегрированием этого уравнения находим его общее решение (желательно в явной форме $y = y(x; C)$, а если это не удастся, то в неявной форме $\Phi(x; y; C) = 0$), а также находим его возможные особые решения $y = f_1(x); \quad y = f_2(x); \ldots$.

2. Подставляем начальные значения $x = x_0$ и $y = y_0$ в общее решение и получаем уравнение для нахождения константы C:

$$y_0 = y(x_0; C) \text{ или } \varPhi(x_0; y_0; C) = 0 \qquad (2.2)$$

Решая это уравнение, находим значение C. Обычно это значение одно. Тогда это свидетельство того, что $M_0(x_0; y_0)$ - обыкновенная точка дифференциального уравнения. Но этих значений может быть и несколько: $C = \{C_1;\ C_2\ ...\}$, или их может не быть вообще. Тогда $M_0(x_0; y_0)$ - особая точка дифференциального уравнения.

3. Подставляем каждое из найденных значений C в общее решение и получаем частные решения дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$, выделяемые из его общего решения:

$$y = y(x; C_1); \quad y = y(x; C_2); \ldots, \text{ - решения в явном виде;}$$

$$\varPhi(x; y; C_1) = 0; \quad \varPhi(x; y; C_2) = 0; \ldots \text{ - решения в неявном виде.} \qquad (2.3)$$

Они и являются решениями задачи Коши (2.1).

4. Проверяем, нет ли среди особых решений $y = f_1(x); \quad y = f_2(x); \ldots.$ дифференциального уравнения $F(x; y; y') = 0$ таких, которые удовлетворяют начальному условию $y(x_0) = y_0$. Если такие найдутся, они тоже будут решениями задачи Коши (2.1).

Пример1. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение.

1. Сначала решим дифференциальное уравнение $y' = xy^2$. Оно уже решено ранее – его решение найдено в примере 3, §1:

$$y = -\frac{2}{x^2 + C} \text{ - общее решение;} \quad y = 0 \text{ – особое решение.}$$

2. Подставим начальные значения $(x = 0;\ y = 1)$ в общее решение и найдем C:

$$1 = -\frac{2}{0^2 + C} \Rightarrow C = -2$$

3. Подставим $C = -2$ в общее решение и получим частное решение

$$y = -\frac{2}{x^2 - 2} = \frac{2}{2 - x^2}.$$

Эта функция является решением данной задачи Коши.

4. Обратим внимание на особое решение y=0. Начальному условию y(0)=1 оно не удовлетворяет, поэтому решением данной задачи Коши не является.

Ответ: $y = \dfrac{2}{2 - x^2}$ - единственное решение поставленной задачи Коши.

Пример 2. Материальное тело поднято на высоту h и в начальный момент времени t=0 отпущено в свободное падение. Описать математически процесс падения тела. А именно, найти зависимость $v = v(t)$ скорости v падающего тела от времени t, и найти зависимость $s = s(t)$ пути s, пройденного падающим телом, от времени t. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Как известно, все свободно падающие тела падают с постоянным ускорением $g \approx 9{,}8$ м/сек^2 - с ускорением свободного падения. А так как ускорение – это производная от скорости, то получаем: $v' = g$. Это - дифференциальное уравнение первого порядка для искомой функции $v = v(t)$. Учтём еше, что в начальный момент времени $t = 0$ тело покоилось, а значит, выполняется начальное условие: $v(0)=0$. В итоге для определения функции $v=v(t)$ получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} v'=g \\ v(0)=0 \end{cases}$$

Решим эту задачу.

1. Сначала решим дифференциальное уравнение:

$$v'=g \Leftrightarrow \frac{dv}{dt}=g \Leftrightarrow dv=gdt \Leftrightarrow \int dv=g\int dt \Leftrightarrow v=gt+C$$

Это – общее решение уравнения $v'=g$, содержащее все его решения. Особых решений у него нет.

2. Используем начальное условие $v(0)=0$ и найдем *C*:

$$0 = g0+C \Rightarrow C = 0.$$

3. Подставим C=0 в общее решение $v=gt+C$ и получим окончательно: $v=gt$. Это и есть решение поставленной задачи Коши (единственное). И заодно $v=gt$ - это искомая зависимость скорости v падающего тела от времени t.

А теперь займёмся поиском зависимости $s=s(t)$ пути s от времени t. Учтём, что $s'=v$ и что $s(0)=0$. Тогда для определения этой зависимости получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} s'=gt \\ s(0)=0 \end{cases}$$

Решим эту задачу.

1. Сначала решим дифференциальное уравнение $s'=gt$:

$$s'=gt \Leftrightarrow s=\int gtdt=g\int tdt=\frac{gt^2}{2}+C\,; \quad s=\frac{gt^2}{2}+C$$

Это - общее решение уравнения $s'=gt$, содержащее все его решения. Особых решений у него нет.

2. Используем начальное условие $s(0)=0$ и найдём *C*:

$$0=\frac{g\cdot 0^2}{2}+C \Rightarrow C=0.$$

3. Подставим C=0 в общее решение $s=\frac{gt^2}{2}+C$ и получим окончательно: $s=\frac{gt^2}{2}$.

Это и есть решение рассматриваемой задачи Коши. И заодно $s=\frac{gt^2}{2}$ - это искомая зависимость пути s, проходимого свободно падающим телом, от времени t.

<u>*Ответ*</u>: $v=v(t)=gt;\ s=s(t)=\frac{gt^2}{2}$ - известные школьные формулы.

<u>*Пример3.*</u> Дать математическое описание демографического процесса (процесса изменения численности населения со временем) для достаточно крупного населённого региона, если в начальный момент времени $t=0$ численность населения региона составляла y_0 человек.

<u>*Решение.*</u> Пусть $y=y(t)$ – искомая зависимость численности y населения региона от времени t. И пусть за время Δt, прошедшее с некоторого момента t до момента $t+\Delta t$, родилось $(\Delta y)_1$ человек и умерло $(\Delta y)_2$ человек. Эти количества, очевидно,

пропорциональны как исходной (в момент t) численности населения $y = y(t)$, так и величине временно́го промежутка Δt. То есть

$$(\Delta y)_1 = k_1 y \Delta t\,; \quad (\Delta y)_2 = k_2 y \Delta t$$

Здесь k_1 и k_2 – некоторые числовые коэффициенты, связанные соответственно с уровнем рождаемости и уровнем смертности в данном регионе. Тогда общее изменение Δy численности населения за время Δt найдется по формуле:

$$\Delta y = (\Delta y)_1 - (\Delta y)_2 = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t = k y \Delta t\,.$$

Здесь $k = k_1 - k_2$. Из полученного равенства следует: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = ky$. Устремляя здесь $\Delta t \to 0$ (при этом, очевидно, и $\Delta y \to 0$), то есть переходя к бесконечно малым $\Delta t = dt$ и $\Delta y = dy$, получим:

$$\frac{dy}{dt} = ky\,, \text{ или } \; y' = ky\,.$$

Это – дифференциальное уравнение первого порядка для искомой функции $y = y(t)$. Дополняя это заданным начальным условием $y(0) = y_0$, получим для этой функции задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Решим эту задачу.

1. Сначала решим дифференциальное уравнение $y' = ky$. Функция $y = 0$ является его очевидным частным решением. Но это, очевидно, не та функция, которую мы ищем – она не удовлетворяет начальному условию, да и вообще она означает, что население в регионе отсутствует.

Будем искать те решения уравнения $y' = ky$ для которых $y \neq 0$:

$$y' = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = k\int dt \Leftrightarrow \ln|y| = kt + C \Leftrightarrow |y| = e^{kt+C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^{kt} \Leftrightarrow y = \pm e^C \cdot e^{kt} \Leftrightarrow \Big| \pm e^C - \textit{это } C \Big| \Leftrightarrow y = Ce^{kt}$$

Итак, $y = Ce^{kt}$ - общее решение дифференциального уравнения $y' = ky$. В него, кстати, при $C = 0$ входит и отмеченное ранее нулевое решение $y = 0$. То есть в найденном общем решении содержатся все решения дифференциального уравнения.

2. Используем начальное условие $y(0) = y_0$ и найдём C:

$$y_0 = Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = y_0.$$

3. Подставим $C = y_0$ в общее решение $y = Ce^{kt}$ и получим искомое решение задачи Коши:

$$y = y_0 e^{kt}\,.$$

Это и есть искомая зависимость $y = y(t)$ численности y населения региона от времени t.

Проанализируем эту зависимость.

а) Если $k \succ 0$, то численность населения y экспоненциально растёт со временем (рис. 4.3(а)).

б) Если $k \prec 0$, то численность населения y экспоненциально убывает со временем (рис. 4.3(б)).

в) Если $k = 0$, то $y = y_0$, то есть численность населения региона не меняется (рис. 4.3(в).

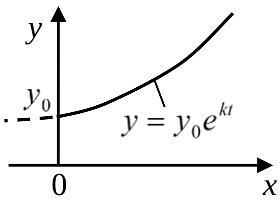


Рис. 4.3(а)

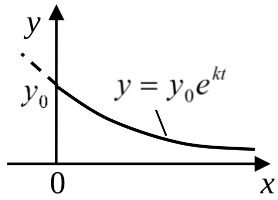


Рис. 4.3(б)

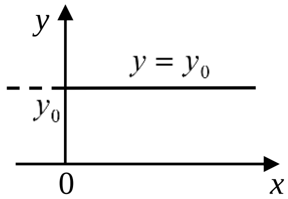


Рис. 4.3(в)

Какой именно будет величина k для данного региона, можно выяснить опытным путём. Пусть, например, перепись населения показала, что в некоторый момент времени t_* в регионе проживало y_* человек. Подставляя эти данные в формулу $y = y_0e^{kt}$, можем найти k:

$$y_* = y_0e^{kt_*} \Leftrightarrow e^{kt_*} = \frac{y_*}{y_0} \Leftrightarrow kt_* = \ln\frac{y_*}{y_0} \Leftrightarrow k = \frac{1}{t_*}\ln\frac{y_*}{y_0}.$$

Примечание. Полученная формула $y = y_0e^{kt}$ будет верно описывать демографический процесс в регионе, если уровень рождаемости и уровень смертности в нем не меняются со временем. То есть если коэффициенты k_1 и k_2 рождаемости и смертности не меняются со временем. А значит, если не меняется со временем и итоговый коэффициент $k = k_1 - k_2$. Но это, как известно, не так: с течением времени, в силу разных причин, ситуация и со смертностью, и с рождаемостью может существенно измениться. Поэтому полученную формулу $y = y_0e^{kt}$ при конкретном числовом значении k оправданно применять лишь на протяжении достаточно ограниченного периода времени. В другой период времени тоже можно применять эту формулу, но уже при другом значении k.

Пример 4. Рассмотрим задачу о математической модели естественного роста выпуска продукции.

Пусть $y = y(t)$- объем продукции некоторого предприятия, реализованной к моменту времени t. Будем считать, что вся продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p за единицу продукции независимо от объема продаж $y(t)$. Это значит, что рынок данной продукции длительное время является ненасыщенным – удается продавать по фиксированной цене p практически любые объемы этой продукции.

Доход R от продаж составит: $R = R(t) = p \cdot y(t)$. Будем считать, что некоторая часть этого дохода используется в качестве инвестиций в производство выпускаемой продукции. То есть объем инвестиций $I(t)$ составит:

$$I(t) = m \cdot R(t) = mpy(t) \qquad (2.4)$$

Здесь $0 < m < 1$ – так называется *норма инвестиций.* Она показывает, какая часть дохода возвращается в производство. Если этих инвестиций не делать, роста производства продукции не будет.

Чем больше объем инвестиций $I(t)$, тем быстрее растёт объем производства $y(t)$ продукции, которая затем поступает на продажу. В модели естественного роста это значит, что скорость роста объема производства $y'(t)$ (так называемая *акселерация производства*) пропорциональна объему инвестиций $I(t)$:

$$y'(t) = l \cdot I(t). \tag{2.5}$$

Здесь

$$\frac{1}{l} = \frac{I(t)}{y'(t)} \tag{2.6}$$

- так называемая *норма акселерации*, которая показывает, каким должен быть объём инвестиций $I(t)$, чтобы обеспечить единичную скорость роста объема производства (обеспечить рост на единицу продукции за единицу времени). Подставляя (2.4) в (2.5), получим

$$y' = ky, \tag{2.7}$$

где $k = mpl$ – числовой коэффициент. Равенство (2.7) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка для функции $y(t)$. Дополняя его некоторым начальным условием $y(0) = y_0$, получим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Эта задача полностью совпадает с задачей Коши для демографического процесса (см. пример 3). Значит, у них полностью совпадают и решения:

$$y = y_0 e^{kt} \tag{2.9}$$

Заметим, что условие постоянства цены p единицы продаваемой продукции, то есть условие ненасыщенности рынка, не может выполнятся всегда, при любых t. С увеличением объема продаж $y(t)$ на некотором этапе рынок насыщается, спрос на товар падает, и дальнейшее увеличении объема продаж возможно лишь при снижении цены p на него – в соответствии с классической убывающей кривой спроса $p = p(y)$. Если учесть эту зависимость p от y, то выражение (2.4) для $I(t)$ примет вид:

$$I(t) = mp(y)y(t) \tag{2.10}$$

А вместо (2.7) из (2.5) получим:

$$y' = np(y)y(t), \tag{2.11}$$

где $n = ml$. Это дифференциальное уравнение вместе с начальным условием $y(0) = y_0$ составит задачу Коши

$$\begin{cases} y' = np(y)y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

для определения функции $y(t)$, характеризующей объем продаж при насыщенном спросе, когда рост объема продаж возможен лишь при снижении цены p на продаваемую продукцию. Эта функция, естественно, будет отличаться от функции (2.9) (будет более сложной).

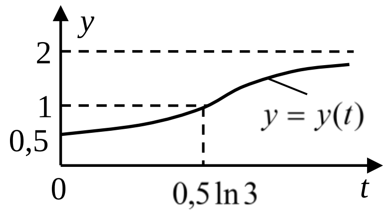
Упражнения

1. Сформулировать и решить задачу по определению скорости *v=v(t)* свободно падающего тела массой *m* при условии, что учитывается сопротивление воздуха, пропорциональное скорости падения тела.

<u>*Ответ:*</u> $\begin{cases} mv' = mg - kv \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right).$

2. Сформулировать и решить задачу по определению объема *y=y(t)* реализованной продукции в условиях насыщенного спроса, если известно, что кривая спроса *p= p(y)* задаётся уравнением *p*=2-*y*; норма инвестиций *m*=0,5; норма акселерации $\frac{1}{l} = 2$; *y*(0)=0,5 – начальное условие.

<u>*Ответ:*</u> $\begin{cases} y' = (2-y)y \\ y(0) = 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{1+3e^{-2t}};$



3. При условиях предыдущей задачи 2 найти эластичность $E_p(y)$ объема продаж относительно цены *p* и определить условия, при которых продажи продукции являются эластичными и неэластичными.

<u>*Ответ:*</u> $E_p(y) = \frac{p}{y}\cdot y'_p = \frac{p}{y}\cdot\frac{dy}{dp} = \frac{p}{y}\cdot\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = \frac{p}{y}\cdot\frac{1}{p'} = \frac{p}{y}\cdot\frac{1}{-1} = \frac{y-2}{y}.$

Если 0,5<*y*<1, то есть если $0 < t < 0{,}5\ln 3$, то $E_p(y) < -1$, и продажи представляют собой эластичный процесс (продажи растут относительно быстрее снижения цены). Доход от продаж при снижении цены возрастает. А если 1<*y*<2, то есть если $t > 0{,}5\ln 3$, то $-1 < E_p(y) < 0$, и продажи представляют собой неэластичный процесс (продажи растут относительно медленнее снижения цены). Доход от продаж растёт при увеличении цены товара (см. §7 главы 2).

§3. Основные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка и их решение

В этом параграфе мы подробнее остановимся на вопросах решения (интегрирования) дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$F(x; y; y') = 0$$

Общая схема получения общего решения таких уравнений указана в (1.3). Для полноценного решения дифференциального уравнения не должны быть потеряны и его особые решения (если они есть).

К сожалению, схема (1.3) не всегда может быть реализована. Во-первых, уравнение сначала нужно подготовить к интегрированию, что не всегда удается. Но даже если оно подготовлено к интегрированию, в процессе самого интегрирования могут появиться неберущиеся интегралы, что тоже не позволит реализовать схему (1.3) и получить общее решение дифференциального уравнения интегрированием (или, как ещё говорят, получить общее решение *в квадратурах*). Тем не менее ряд наиболее простых (и наиболее важных для практики) типов дифференциальных уравнений первого порядка заведомо можно проинтегрировать. И как это делается – сейчас рассмотрим.

1.Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

Это - дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x) \qquad (3.1)$$

Решение такого уравнения очевидно: всякая функция y, удовлетворяющая этому уравнению, является первообразной для функции $f(x)$. А значит, любое частное решение $y = y(x)$ этого уравнения может быть найдено в результате интегрирования функции $f(x)$:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C \qquad (3.2)$$

Формула (3.2) представляет собой общее решение уравнения (3.1). Она содержит в себе все частные решения этого уравнения. Особых решений у уравнения (3.1) нет.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это – дифференциальные уравнения вида

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (3.3)$$

Решение таких уравнений производится по следующей схеме.

1) Сначала находим такие числовые значения y, при которых $f_2(y) = 0$:

$$f_2(y) = 0 \Rightarrow y = (y_1; y_2 ...) \qquad (3.4)$$

Функции $(y = y_1; \quad y = y_2 ...)$ являются, очевидно, частными решениями уравнения (3.3), ибо при подстановке каждой из них в это уравнение получим тождество 0=0. Эти функции - кандидаты в особые решения уравнения (3.3).

2) Теперь находим все остальные решения $y = y(x)$ уравнения (3.3), для которых $f_2(y) \neq 0$. Делаем это по схеме:

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ | разделим выражения с *x* и *y* (разделим переменные *x* и *y*)) |$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \Leftrightarrow |\text{ интегрируем обе части }| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx \Leftrightarrow F_2(y) = F_1(x) + C \qquad (3.5)$$

Полученное равенство $F_2(y) = F_1(x) + C$ представляет собой общее решение уравнения (3.3) в неявном виде (его общий интеграл). Если в нем можно выразить y, приводим его к явному виду $y = y(x; C)$.

3) Смотрим, не входят ли в найденное общее решение какие-нибудь частные решения, найденные в пункте 1. Если такие найдутся – их в ответе, в дополнение к общему решению, приводить не надо. А оставшиеся частные решения из пункта 1, не вошедшие в общее решение, должны быть приведены в качестве особых решений.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = 4x(y-1)$.

Решение. Данное уравнение – уравнение вида $y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$ при $f_1(x) = 4x$ и $f_2(y) = y - 1$, то есть это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его по изложенной выше схеме.

1) $f_2(y)=0 \Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow y=1.$

Итак, одно частное решение уравнения $y'=4x(y-1)$ уже найдено: это функция $y=1$.

2) Найдём по схеме (3.5) общее решение этого уравнения, содержащее все остальные его частные решения:

$$y'=4x(y-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=4x(y-1) \Leftrightarrow |\text{ разделяем переменные } x \text{ и } y| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y-1}=4xdx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\text{ интегрируем обе части }| \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y-1}=\int 4xdx \Leftrightarrow \ln|y-1|=2x^2+C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y-1|=e^{2x^2+C} \Leftrightarrow |y-1|=e^C \cdot e^{2x^2} \Leftrightarrow y-1=\pm e^C \cdot e^{2x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\text{ неопределенную константу } \pm e^C \text{ опять обозначим буквой } C\,| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y-1=Ce^{2x^2} \Leftrightarrow y=Ce^{2x^2}+1$$

Последнее равенство и есть искомое общее решение в явном виде. Отметим, что найденное в пункте 1 частное решение $y=1$ получается из общего при C=0. То есть оно входит в общее решение. Таким образом, общее решение $y=Ce^{2x^2}+1$ дифференциального уравнения $y'=4x(y-1)$ содержит все его частные решения. Особых решений у уравнения нет.

3. Однородные дифференциальные уравнения

Это – дифференциальные уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.6}$$

Такие уравнения сводятся к уравнениям (3.3) с разделяющимися переменными после введения новой известной функции $z=\dfrac{y}{x}$. Действительно, пусть

$$\frac{y}{x}=z; \text{ тогда } y=zx;\ y'=z'x+zx'=z'x+z \tag{3.7}$$

С учетом равенств (3.7) уравнение (3.6) примет вид:

$$z'x+z=f(z) \Leftrightarrow z'=\frac{f(z)-z}{x} \tag{3.8}$$

А это - уравнение вида $z'=f_1(x)\cdot f_2(z)$ при $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$ и $f_2(z)=f(z)-z$, то есть уравнение с разделяющимися переменными для новой неизвестной функции z. Найдя все его решения $z=z(x)$, затем по формуле $y=zx$ найдем и все решения $y=y(x)$ исходного уравнения (3.6).

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение первого порядка

$$(y-x)ydx+x^2dy=0$$

Решение. Сначала убедимся в том, что это действительно дифференциальное уравнение первого порядка, а заодно и определим его тип:

$$(y-x)ydx+x^2dy=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2} \Leftrightarrow y'=(1-\frac{y}{x})\cdot\frac{y}{x}$$

Это – уравнение вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, то есть однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Для его решения введем вместо y новую известную функцию z:

$$\frac{y}{x} = z; \text{ тогда } y = zx, \text{ а } y' = z'x + z$$

С учетом этого наше дифференциальное уравнение примет вид:

$$xz' = -z^2 \Leftrightarrow z' = -\frac{z^2}{x}.$$

Это – уравнение вида $z' = f_1(x) \cdot f_2(z)$ при $f_1(x) = \frac{-1}{x}$ и $f_2(z) = z^2$, то есть уравнение с разделяющимися переменными. Решим его по соответствующей таким уравнениям схеме (как в примере 1).

1) $f_2(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Итак, одно частное решение z уже найдено: это функция $z = 0$.

2) Найдем общее решение уравнения $z' = -\frac{z^2}{x}$, содержащее все его остальные частные решения $z \neq 0$:

$$z' = -\frac{z^2}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{z^2}{x} \Leftrightarrow | \text{разделяем переменные } x \text{ и } z | \Leftrightarrow \frac{dz}{z^2} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow | \text{интегрируем обе части} | \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{z} = -(\ln|x| + C) \Leftrightarrow z = \frac{1}{\ln|x| + C}$$

Это – общее решение уравнения $z' = -\frac{z^2}{x}$. Заметим, что найдено в пункте 1 частное решение $z = 0$ этого уравнения не получается из общего решения $z = \frac{1}{\ln|x| + C}$ ни при каком значении *C*. Следовательно, $z = 0$ – это особое решение указанного уравнения.

Ну а теперь, найдя все функции z и учитывая, что $y = zx$, можем записать и все функции y, то есть все решения исходного дифференциального уравнения $(y - x)ydx + x^2 dy = 0$:

$$y = \frac{x}{\ln|x| + C} \text{ - общее решение; } y = 0 \text{ – особое решение.}$$

4. <u>Линейные однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.</u>

Это – уравнения вида

$$y' + p(x)y = 0 \tag{3.9}$$

Линейным оно называется потому, что и неизвестная функция y, и её производная y' входят в это уравнение линейно (в первой степени) - аналогично тому, как входят x и y в линейную функцию $y = kx + b$. А добавка «однородное» связана с тем, что правая часть уравнения (3.9) представляет собой нуль. Если же там будет не нуль, то такое уравнение будет называться линейным неоднородным (его решению посвящён следующий пункт 5).

Уравнение (3.9) является заодно и уравнением с разделяющимся переменными вида (3.3) при $f_1(x) = -p(x)$ и $f_2(y) = y$. Из этого следует схема его решения:

1) $f_2(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Таким образом, одно частное решение уравнения (3.9) (тривиальное решение) мы уже имеем: это функция $y = 0$.

2) Найдем общее решение уравнения (3.9):

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Leftrightarrow | \text{ разделяем переменные } x \text{ и } y | \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| = F(x) + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{F(x)+C} \Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^{F(x)} \Leftrightarrow y = \pm e^C \cdot e^{F(x)} \Leftrightarrow y = Ce^{F(x)} \Leftrightarrow y = Cy_0(x) \quad (3.10)$$

Итак, общее решение уравнения (3.9) имеет вид $y = Cy_0(x)$, где $y_0(x) = e^{F(x)}$ - одно из частных решений этого уравнения (оно выделяется из общего решения, если положить в нем *C*=1). Заметим, что и тривиальное решение $y = 0$ уравнения (3.9) содержится в его общем решении (получается из него при *C*=0). Таким образом, в общем решении

$$y = Cy_0(x) \quad (3.11)$$

линейного однородного дифференциального уравнения (3.9) содержатся все его частные решения.

Структура (3.11) общего решения уравнения (3.9) показывает, что достаточно найти какое – либо частное решение $y_0(x)$ этого уравнения. После этого по формуле (3.11) можно записать и его общее решение.

5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Это - уравнения вида

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (3.12)$$

Докажем теорему:

Общее решение уравнения (3.12), *содержащее все его частные решения, может быть получено по формуле*

$$y = Cy_0(x) + y_*(x), \quad (3.13)$$

где $Cy_0(x)$ *– общее решение линейного однородного уравнения* (3.9), *а* $y_*(x)$ *– какое – либо частное решение линейного неоднородного уравнения* (3.12).

Доказательство. Пусть $y_* = y_*(x)$ – некоторое конкретное частное решение уравнения (3.12), а $y = y(x)$ – любое другое его частное решение. Тогда одновременно имеем:

$$\begin{cases} y' + p(x)y = f(x) \\ y_*'(x) + p(x) = f(x) \end{cases}$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, получим:

$$(y - y_*)' + p(x)(y - y_*) = 0$$

То есть функция $y - y_*$ удовлетворяет линейному однородному уравнению (3.9), а значит, эта функция входит в его общее решение (3.11). Таким образом,

$$y - y_* = Cy_0(x) \Leftrightarrow y = Cy_0(x) + y_*(x)$$

Теорема доказана.

Согласно формуле (3.13), определяющей структуру общего решения линейного неоднородного уравнения (3.12), получение этого общего решения равносильно решению двух частных проблем.

<u>Проблема 1:</u> решить линейное однородное дифференциальное уравнение (3.9) и получить его общее решение (3.11).

<u>Проблема 2</u>: найти (или подобрать) какое - либо частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного уравнения (3.12).

Схема решения первой из этих проблем указана выше (см. (3.10)). А вторую проблему для произвольной функций $f(x)$ в общем случае можно решить так называемым *методом вариации произвольной постоянной.*

Суть этого метода в следующем. Будем искать частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного дифференциального уравнения (3.12) в виде

$$y_* = C(x)y_0(x) \tag{3.14}$$

То есть в виде, аналогичном виду (3.11) общего решения линейного однородного уравнения (3.9), только с заменой произвольной константы *C* на неизвестную функцию $C(x)$. Находя из (3.14) y'_*:

$$y'_* = C'(x)y_0(x) + C(x)y'_0(x), \tag{3.15}$$

и подставляя в уравнение (3.12) вместо y и y' выражения (3.14) и (3.15) для y_* и y'_*, получим:

$$C'(x)y_0(x) + C(x)\left[y'_0(x) + p(x)y_0(x)\right] = f(x) \tag{3.16}$$

Учитывая, что $y_0(x)$ - одно из частных решений линейного однородного уравнения (3.9), получаем, что квадратная скобка в (3.16) равна нулю. Значит, (3.16) принимает вид:

$$C'(x)y_0(x) = f(x) \tag{3.17}$$

Отсюда находим $C'(x)$, а по ней и $C(x)$:

$$C'(x) = \frac{f(x)}{y_0(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)}dx = F(x) + C =$$

$$=|\text{ отбрасываем } C\text{, чтобы получить конкретную функцию } C(x)| = F(x). \tag{3.18}$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в формулу (3.14), получим искомое частное решение $y_* = y_*(x)$ неоднородного уравнения (3.12). А затем, по формуле (3.13), получим и общее решение этого уравнения .

<u>*Пример 3*</u>. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = ytgx + 2\sin x \tag{3.19}$$

<u>*Решение.*</u> Данное уравнение

$$y' - tgx \cdot y = 2\sin x \tag{3.20}$$

имеет вид (3.12) при $p(x) = -tgx$ и $f(x) = 2\sin x$, то есть является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Следовательно, его общее решение, содержащее все его частные решения, может быть найдено по формуле (3.13).

Найдем оба слагаемых этой формулы. Для этого решим следующие две проблемы.

<u>Проблема 1.</u> Решим соответствующее неоднородному уравнению (3.20) однородное уравнение

$$y' - tgx \cdot y = 0 \tag{3.21}$$

и найдем его общее решение $y = Cy_0(x)$. Для этого реализуем схему (3.10):

$$y' - tgx \cdot y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = tgx \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = tgxdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int tgxdx \Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| + \ln|\cos x| = C \Leftrightarrow \ln|y\cos x| = C \Leftrightarrow |y\cos x| = e^C \Leftrightarrow y\cos x = \pm e^C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\cos x = C \Leftrightarrow y = \frac{C}{\cos x} \Leftrightarrow y = Cy_0(x), \text{ где } \quad y_0(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Итак,

$$y = Cy_0(x) = \frac{C}{\cos x} \quad \left(y_0(x) = \frac{1}{\cos x} \right) \tag{3.22}$$

- общее решение линейного однородного уравнения (3.21).

Проблема 2. Найдем частное решение $y_* = C(x)y_0(x)$ линейного неоднородного уравнения (3.20). Функция $y_0(x)$ уже найдена. А функцию $C(x)$ найдем по схеме (3.18):

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)} dx = \int \frac{2\sin x}{\frac{1}{\cos x}} dx = \int 2\sin x \cos x dx = \int \sin 2x dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C = |\text{ отбросим C }| = -\frac{1}{2}\cos 2x. \tag{3.23}$$

Итак,

$$y_* = C(x)y_0(x) = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} \tag{3.24}$$

- частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (3.20).

А теперь по формуле (3.13) с учетом (3.22) и (3.24) запишем и искомое общее решение линейного неоднородного уравнения (3.20):

$$y = \frac{C}{\cos x} - \frac{\cos 2x}{2\cos x}. \tag{3.25}$$

Примечание. Довольно часто частное решение $y_*(x)$ линейного неоднородного уравнения можно подобрать, не применяя метода вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим, например, следующие неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка (3.12) при постоянном $p(x) = p$:

$$1)\ y' + py = a;\ \ 2)\ y' + py = ax + b;\ \ 3)\ y' + py = ax^2 + bx + c;\ \dots \tag{3.26}$$

Частное решение $y_*(x)$ каждого из таких уравнений можно подобрать, разыскивая его в форме, совпадающей с формой его правой части. То есть соответственно в форме:

$$1)\ y_* = A;\ 2)\ y_* = Ax + B;\quad 3)\ y_* = Ax^2 + Bx + C;\ \dots \tag{3.27}$$

Здесь $A, B, C, \dots$ - неизвестные коэффициенты, которые найдутся, если подставить функцию y_* вместе с её производной y_*' в соответствующее уравнение (3.26) и сравнить затем коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях x. Этот метод подбора функции $y_*(x)$ называется *метод неопределенных коэффициентов.*

Пример 4. Методом неопределенных коэффициентов подобрать частное решение $y_*(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + 2y = 6x^2 - 1 \tag{3.28}$$

Решение. Правая часть данного уравнения представляет собой квадратный трехчлен вида ax^2+bx+c при a = 6, b = 0, c = -1. Поэтому и частное решение $y_*(x)$ этого уравнения будем искать в виде квадратного трехчлена

$$y_* = Ax^2 + Bx + C \qquad (3.29)$$

Учитывая, что $y_* = 2Ax + B$ и подставляя y_* и y'_* вместо y и y' в уравнение (3.28), получим:

$$2Ax + B + 2(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 - 1 \Leftrightarrow 2Ax^2 + 2(A+B)x + (B+2C) = 6x^2 - 1 \qquad (3.30)$$

Если y_* - частное решение уравнения (3.28), то после его подстановки в это уравнение должно получаться тождество – равенство, верное при любых x. Значит, равенство (3.30) должно быть тождеством. А это будет, если

$$\begin{cases} 2A = 6 \\ 2(A+B) = 0, \\ B + 2C = -1 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \\ C = 1 \end{cases}$$

Итак,

$$y_* = y_*(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

- частное решение уравнения (3.28). И в этом легко убедиться, сделав проверку.

5. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Имеется еще несколько типов дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих свое решение интегрированием (решение в квадратурах):

$$1)\ y = f(y');\quad 2)\ x = f(y');$$
$$3)\ y' + p(x)y = f(x)y^n;\quad 4)\ y = f_1(y')x + f_2(y');\ \ldots \qquad (3.31)$$

Вопрос о схемах их интегрирования опустим (он описан в литературе). Но имеется множество дифференциальных уравнений первого порядка, не допускающих решение в квадратурах. Например, невозможно применить интегрирование даже к такому простому, на первый взгляд, дифференциальному уравнению, как уравнение $y' = x^2 + y^2$. Эти и другие не решаемые в квадратурах дифференциальные уравнения решаются лишь приближенно. Точнее, всегда имеется возможность построить с нужной точностью интегральную кривую решения $y = y(x)$ любой задачи Коши вида

$$\begin{cases} y' = f(x; y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0 \le x \le b), \qquad (3.32)$$

если только это решение существует и единственно (а его существование и единственность, как правило, следует из прикладного смысла решаемой задачи Коши). Разработаны и используются на практике различные численные методы приближенного решения задачи Коши вида (3.32): метод Эйлера; метод Рунге – Кутта; метод Адамса – Крылова; метод малого параметра, и др. Для примера рассмотрим идею наиболее простого из них – метода Эйлера.

Пусть $y = y(x)$ искомое решение задачи Коши (3.32) для $x \in [x_0; b]$, где $[x_0; b]$ - заданный промежуток оси *ox*. Функция $y = y(x)$ может считаться найденной, если построен с достаточной точностью ее график.

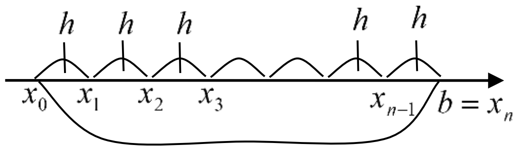


Рис. 4.4

Для построения нужного нам графика функции $y = y(x)$ разобьем отрезок $[x_0; b]$ на некоторое число *n* частичных промежутков одинаковой ширины $h = \dfrac{b - x_0}{n}$ (рис.4.4). Здесь

$$x_1 = x_0 + h;\; x_2 = x_0 + 2h;\; x_3 = x_0 + 3h;\; \dots x_k = x_0 + kh; \dots\; b = x_n = x_0 + nh \qquad (3.33)$$

Пусть $\{y_0; y_1; y_2; y_3; \dots y_k; \dots y_n\}$ - значения искомой функции $y = y(x)$ в точках $\{x_0; x_1; x_2; x_3; \dots x_k; \dots x_n\}$ соответственно. Заметим, что значение $y_0 = y(x_0)$ уже задано начальным условием задачи Коши (3.32). А остальные значения $\{y_1; y_2; \dots y_n\}$ можно, следуя методу Эйлера, найти последовательно одно за другим – правда, приближенно.

1) <u>Нахождение</u> y_1:

Используя приближенную формулу (6.1) главы 2, получим:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow y_1 \approx y_0 + y'(x_0)h \qquad (3.34)$$

Эта формула приближенная, и она тем точнее, чем меньше h. А так как, согласно равенствам (3.32), $y'(x_0) = f(x_0; y_0)$, то получим:

$$y_1 \approx y_0 + f(x_0; y_0)h \qquad (3.35)$$

По этой формуле и находится приближенное значение y_1. Оно получится тем точнее, чем меньше будет h.

2) <u>Нахождение остальных значений</u> $\{y_2; y_3; \dots y_n\}$:

Эти значения последовательно, друг за другом, находятся по той же идее, что использовалась и для нахождения y_1. То есть они находятся по формулам:

$$y_2 \approx y_1 + f(x_1; y_1)h;\;\; y_3 \approx y_2 + f(x_2; y_2)h;\;\; \dots\;\; y_n \approx y_{n-1} + f(x_{n-1}; y_{n-1})h \qquad (3.36)$$

Так как каждая из последующих формул (3.36) использует предыдущее значение y, найденное приближенно, то ошибка в определении все новых и новых значений y будет, вообще говоря, возрастать (накапливаться). Однако, уменьшая шаг h, будем уменьшать и эту ошибку, которую, таким образом, можно сделать как угодно малой.

Линия L_*, построенная по точкам

$$M_0(x_0; y_0);\;\; M_1(x_1; y_0);\;\; M_2(x_2; y_2);\; \dots\; M_n(x_n; y_n), \qquad (3.37)$$

представляет собой приближенный график искомого решения $y = y(x)$ задачи Коши (3.32) (рис. 4.5). Эта линия называется *кривой Эйлера*. С помощью ЭВМ можно подобрать и аналитическое уравнение $y = y(x)$ кривой Эйлера, то есть аналитическое выражение для

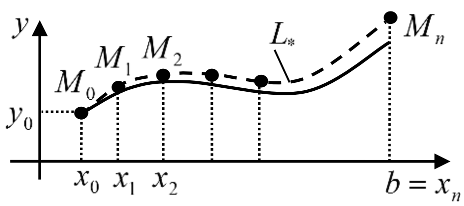


Рис. 4.5

приближенного решения задачи Коши (3.32) (если, конечно, такое аналитическое выражение для каких–то целей необходимо).

Методы Рунге – Кутта и Адамса – Крылова основаны на той же идее построения графика искомого решения $y = y(x)$ задачи Коши (3.32) по точкам, что и метод Эйлера. Эти методы сложнее, но зато и тоньше, ибо позволяют найти узловые значения $\{y_1; y_2; \ldots y_n)$ функции y при том же шаге h гораздо более точно, чем они находятся по методу Эйлера. Численную реализацию каждого из этих методов можно осуществить, воспользовавшись стандартными программами для ЭВМ.

Есть, впрочем, и другая идея приближенного решения задачи Коши (3.32), которую используют, например, такие методы, как метод последовательных приближений, метод малого параметра, и некоторые другие. При реализации этих методов строится последовательность аналитически выраженных функций

$$\{y = y_1(x);\ y = y_2(x);\ y = y_3(x);\ \ldots) \quad (x_0 \le x \le b),$$

каждая из которых дает приближенное выражение для искомой функции $y = y(x)$ сразу на всем заданном промежутке $[x_0; b]$ оси *ox*. При этом каждая последующая функция (3.38) представляет искомую функцию точнее, чем предыдущая. Останавливая процесс построения этих функций на некотором этапе, можно получить аналитическое выражение искомой функции $y = y(x)$ с любой заданной точностью. Реализация такой схемы решения задачи Коши (3.32) тоже осуществляется на ЭВМ.

Упражнения

1. Решить задачу Коши :

$$\begin{cases} y' = 4 + e^{2x} \\ y(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $y = 4x + \frac{1}{2}e^{2x} - 1$.

2. Решить дифференциальное уравнение: $y' = 2\sqrt{y}$.

Ответ: $y = (x + C)^2$ - общее решение; $y = 0$ – особое решение.

3. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xyy' = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Ответ: $y = x$.

4. Решить уравнение $y' = (x + y)^2$. Указание: сделать замену $z = x + y$.

Ответ: $y = tg(x + C) - x$.

5. Скорость охлаждения тела в воздухе, согласно закону Ньютону, пропорциональна разности температур тела и воздуха. Если при температуре воздуха 20^0 тело охлаждается со 100^0 до 60^0 за 20 минут, то за какое время его температура понизится: а) до 30^0? б) до 20^0 ?

Ответ: а) за 1 час; б) за $t = \infty$.

6. Выяснить тип дифференциального уравнения $e^x(y + y') = 1$ и решить его.

<u>*Ответ:*</u> это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, а $y = e^{-x}(x + C)$ - его общее решение.

7. Методом неопределённых коэффициентов найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y' - 4y = x + 2$, а затем найти и его общее решение.

<u>*Ответ:*</u>

$y_*(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{16}$ - частное решение; $y = Ce^{4x} - \frac{1}{4}x - \frac{9}{16}$ - общее решение.

8. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} (3x-1)dy + y^2dx = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

<u>*Ответ:*</u> $y = \frac{3}{\ln|1-3x| + 1}$.

9. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} 2\sqrt{4-x^3}dy + 3x^2y^2dx = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

<u>*Ответ:*</u> $y = -\frac{1}{\sqrt{4-x^3} - 1}$.

§4. Дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка, согласно (1.2), таков:

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \tag{4.1}$$

Простейшим из дифференциальных уравнений второго порядка является уравнение вида

$$y'' = f(x). \tag{4.2}$$

Общее решение этого уравнения, содержащее все его частные решения, находится его последовательным двукратным интегрированием:

$$\begin{gathered} y'' = f(x) \Leftrightarrow (y')' = f(x) \Leftrightarrow y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1 \Leftrightarrow \\ y = \int (F(x) + C_1)dx = \int F(x)dx + C_1\int dx = \Phi(x) + C_1x + C_2 \end{gathered} \tag{4.3}$$

Это общее содержит две неопределенные константы C_1 и C_2.

Аналогичной будет ситуация и с решением любого дифференциального уравнения второго порядка (4.1). Действительно, если для нахождения общего решения дифференциального уравнения первого порядка $F(x; y; y') = 0$ это уравнение необходимо было один раз проинтегрировать (см. схему (1.3)), то для нахождения общего решения уравнения второго порядка (4.1) это уравнение, как и простейшее уравнение (4.2), нужно проинтегрировать дважды. То есть

схема получения общего решения любого дифференциального уравнения второго порядка в принципе такова:

$$\begin{gathered} F(x; y; y'; y'') = 0 \Leftrightarrow |\text{ дважды интегрируем }| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Phi(x; y; C_1; C_2) = 0 \Leftrightarrow y = y(x; C_1; C_2) \end{gathered} \tag{4.4}$$

Кроме полученного по схеме (4.4) общего решения $\Phi(x;y;C_1;C_2)=0$ (неявного) или $y=y(x;C_1;C_2)$ (явного) у дифференциального уравнения (4.1) могут быть и особые решения $y=f_1(x);\ y=f_2(x);\ldots$, которые тоже не должны быть потеряны.

Решение дифференциальных уравнений второго порядка представляет собой, естественно, гораздо более сложную задачу, чем решение уравнений первого порядка. Подготовить и провести двукратное интегрирование дифференциального уравнения второго порядка, то есть получить его решение в квадратурах, удаётся далеко не для всякого уравнения. Чаще всего это удаётся для уравнений, допускающих понижение своего порядка. То есть для уравнений второго порядка, допускающих своё преобразование в уравнение первого порядка. Среди таких уравнений отметим следующие.

1. Уравнения, не содержащие функции y.

Это – уравнения вида:

$$F(x;y';y'')=0 \quad \text{(в уравнении нет } y\text{)}. \tag{4.4}$$

Если ввести новую неизвестную функцию p, зависящую от x, по формуле

$$y'=p \quad (p=p(x)) \tag{4.5}$$

и учесть, что

$$y''=(y')'=p', \tag{4.6}$$

то уравнение второго порядка (4.4) преобразуется в уравнение первого порядка

$$F(x;p;p')=0 \tag{4.7}$$

Интегрируя его (если это удастся), найдем его общее решение $p=p(x;C_1)$, а значит, согласно (4.5), получим:

$$y'=p(x;C_1) \tag{4.8}$$

Интегрируя теперь уже уравнение (4.8), получим:

$$y=\int p(x;C_1)dx=\Phi(x;C_1)+C_2 \tag{4.9}$$

Это и есть общее решение уравнения (4.4).

Заметим, что если у уравнения (4.7) окажутся особые решения $p=p_1(x)$; $p=p_2(x);\ldots$, то будут особые решения

$$y=\int p_1(x)dx=f_1(x)+C_1^*; \quad y=\int p_2(x)dx=f_2(x)+C_2^*; \quad \ldots \tag{4.10}$$

и у уравнения (4.4). Причем, в силу произвольности констант $C_1^*;C_2^*;\ \ldots$, их будет бесчисленное количество.

Пример 1. Решить уравнение

$$(1+x^2)y''-2xy'=0 \tag{4.11}$$

Решение. Данное уравнение является уравнением вида (4.4), так как в нем нет y. Вводя, в соответствии с (4.5) и (4.6), новую неизвестную функцию $p=p(x)$, получим для этой функции уравнение первого порядка:

$$(1+x^2)p'-2xp=0 \Leftrightarrow p'=\frac{2xp}{1+x^2} \tag{4.12}$$

Это – дифференциальное уравнение вида $p' = f_1(x) f_2(p)$ при $f_1(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ и при $f_2(p) = p$. То есть, в соответствии с (3.3), это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решим его по соответствующей схеме, изложенной в предыдущем параграфе.

$$1)\ \ f_2(p) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \qquad (4.13)$$

Итак, одно частное решение уравнения (4.12) уже найдено: это функция $p = 0$.

2) Найдем общее решение уравнения (4.12), содержащее все его остальные частные решения:

$$p' = \frac{2xp}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow |\text{ разделяем переменные } x \text{ и } p\ | \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\text{ интегрируем обе части }| \Leftrightarrow \qquad (4.14)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{2xdx}{1+x^2} \Leftrightarrow \ln|p| = \ln(1+x^2) + C_1 \Leftrightarrow \ln\frac{|p|}{1+x^2} = C_1 \Leftrightarrow \frac{|p|}{1+x^2} = e^{C_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |p| = e^{C_1}(1+x^2) \Leftrightarrow p = \pm e^{C_1}(1+x^2) \Leftrightarrow p = C_1(1+x^2)$$

Это – общее решение уравнения (4.12). В него входит и найденное ранее частное решение $p = 0$ (оно получается из общего решения $p = C_1(1+x^2)$ при C_1=0). То есть в него входят все частные решения уравнения (4.12). А теперь, учитывая, что $y' = p$, получим:

$$y' = C_1(1+x^2) \Leftrightarrow y = C_1\int(1+x^2)dx \Leftrightarrow y = C_1(x + \frac{x^3}{3}) + C_2 \qquad (4.15)$$

Это – общее решение уравнения (4.11). В него входят все частные решения этого уравнения.

2. <u>Уравнения, не содержащие аргумента</u> x.

Это – уравнения вида:

$$F(y; y'; y'') = 0 \qquad (4.16)$$

Такое уравнение, как и уравнение (4.4), можно преобразовать в уравнение первого порядка с помощью той же замены $y' = p$, только здесь функция p должна зависеть от y: $p = p(y)$. А так как y зависит от *x*, то и p зависит от *x*, только сложным образом ($p = p(y(x))$ – сложная функция от *x*). С учетом этого получаем:

$$y' = p \ \ (p = p(y)); \text{ тогда } y'' = (y')' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p \qquad (4.17)$$

С учетом выражений (4.17) для y' и y'' уравнение (4.16) примет вид:

$$F(y; p; p\frac{dp}{dy}) = 0 \qquad (4.18)$$

Это – дифференциальное уравнение первого порядка для функции $p = p(y)$. Интегрируя его (если это удастся), найдем его общее решение $p = p(y; C_1)$. А учитывая, что $p = y'$, получим:

$$y' = p(y; C_1) \tag{4.19}$$

Это – еще одно дифференциальное уравнение первого порядка, только уже для функции y. Интегрируя его, получим его общее решение, а значит, и общее решение исходного уравнения второго порядка (4.16):

$$\Phi(x; y; C_1; C_2) = 0 \tag{4.20}$$

Если у уравнений (4.18) и (4.19) будут особые решения, то будут особые решения и у уравнения (4.16) – их тоже нужно не потерять.

3. Задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка

В §2 мы рассматривали задачу Коши (2.1) для дифференциальных уравнений первого порядка. Она состояла из дифференциального уравнения и начального условия. Начальное условие было предназначено для определения неопределенной константы *C*, содержащейся в общем решении дифференциального уравнения первого порядка.

Но в общем решении любого дифференциального уравнения второго порядка таких неопределенных констант две (см.(4.4)). Поэтому для их определения нужны два дополнительных (начальных) условия. В качестве таких условий для некоторого начального значения $x = x_0$ задают начальное значение y_0 искомой функции $y = y(x)$ и начальное значение y_1 ее производной $y' = y'(x)$. В итоге получается задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} F(x; y; y'; y'') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{4.21}$$

Как и задача Коши (2.1) для дифференциальных уравнений первого порядка, задача Коши (4.21) для уравнений второго порядка имеет, как правило, единственное решение $y = y(x)$. Факт существования и единственности решения задачи Коши любого порядка для практических задач вытекает обычно из самого существа рассматриваемой задачи.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} (1 + x^2)y'' - 2xy' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \tag{4.22}$$

Решение. Сначала решим дифференциальное уравнение $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$.
Оно решено выше (см. пример 1); его общее решение, содержащее все его решения, имеет вид

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2 \tag{4.23}$$

2. Используем начальные условия задачи (4.22) и найдем значения констант C_1 и C_2, входящих в (4.23):

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} y=C_1(x+\dfrac{x^3}{3})+C_2 \\ y'=C_1(1+x^2) \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 0=C_1\cdot 0+C_2 \\ 3=C_1(1+0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=0 \\ C_1=3 \end{cases} \tag{4.24}$$

3. Подставим C_1=3 и C_2=0 в общее решение (4.23) и получим искомое решение задачи Коши (4.22) (единственное):

$$y=x^3+3x \tag{4.25}$$

<u>4. Приближенное решение дифференциальных уравнений второго порядка</u>

Если дифференциальное уравнение второго порядка (4.1) не удается проинтегрировать, то есть применить к его решению схему (4.3), то его решают приближенно. Точнее, приближенно решают не само дифференциальное уравнение, имеющее бесчисленное множество решений, а задачу Коши (4.21) для него, если она заведомо имеет решение, и это решение единственно. Особенно удобно решать задачу Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относительно y'':

$$\begin{cases} y''=F(x;y;y') \\ y(x_0)=y_0 \qquad\qquad (x_0\le x\le b) \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases} \tag{4.26}$$

Как и для задачи (3.32), для задачи (4.26) разработаны эффективные численные методы приближенного решения с помощью ЭВМ. Само решение осуществляется по стандартной программе, имеющейся во многих пакетах математических программ. Например, в пакетах MATHCAD, MATLAB. На выходе машина выдает график искомой функции $y=f(x)$ $(x_0\le x\le b)$, а также график ее производной $y'=f(x)$.

Упражнения

1. Решить уравнение: $y''=4\cos 2x$

<u>*Ответ:*</u> $y=-\cos 2x+C_1x+C_2$

2. Решить задачу Коши: $\begin{cases} yy''+(y')^2+1=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

<u>*Ответ:*</u> $y=\sqrt{1-x^2}$.

3. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y''=\dfrac{x-4}{x^3} \\ y(1)=-\dfrac{1}{2} \\ y'(1)=1 \end{cases}$$

<u>*Ответ:*</u> $y=-\ln|x|-\dfrac{2}{x}-x+2{,}5$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = y' \cdot ctgx \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

Ответ: $y = -\cos x$.

5. Доказать, что любое частное решение дифференциального уравнения $y'' + w^2 y = 0$ (уравнения свободных гармонических колебаний с циклической частотой w) может быть записано в виде $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$.

Доказательство. Подставляя функцию $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$ в уравнение $y'' + w^2 y = 0$, убеждаемся, что она удовлетворяет этому уравнению при любых значениях констант C_1 и C_2. То есть является его частным решением. Осталось показать, что за счет подбора констант C_1 и C_2 можно получить любо частное решение данного уравнения. То есть показать, что можно подобрать константы C_1 и C_2 так, что функция $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$ будет удовлетворять начальным условиям вида

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (*)$$

при любых заданных числах ($x_0; y_0; y_1$).

Для функции $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$ эта система примет вид:

$$\begin{cases} C_1 \cos wx_0 + C_2 \sin wx_0 = y_0 \\ -C_1 w \sin wx_0 + C_2 w \cos wx_0 = y_1 \end{cases}$$

Это – система двух линейных уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2. Найдем Δ - главный определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos wx_0 & \sin wx_0 \\ -w \sin wx_0 & w \cos wx_0 \end{vmatrix} = w \cos^2 wx_0 + w \sin^2 wx_0 = w^2 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет единственное решение $(C_1; C_2)$ при любых заданных ($x_0; y_0; y_1$). Найдя эти C_1 и C_2, мы получим функцию $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$, являющуюся частным решением дифференциального уравнения $y'' + w^2 y = 0$ и удовлетворяющую заданным начальным условиям (*). Доказательство закончено.

Глава 5

Ряды

В данной главе мы обсудим следующий интересный и важный для практики вопрос: существуют ли суммы бесконечного числа слагаемых? И если существуют, то как их найти?

Вспомним, что с суммой бесконечного числа слагаемых мы уже встречались ранее в главе 3 при рассмотрении определенных интегралов. Но там были специфические суммы – суммы бесконечно малых слагаемых. Здесь же рассмотрим суммы бесконечного числа слагаемых, когда слагаемые произвольны.

§1. Числовые ряды

Определение. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \tag{1.1}$$

представляющее собой сумму бесконечного числа слагаемых, называется *рядом.* Если слагаемые (члены) ряда (a_1; a_2; a_3; …) – числа, то ряд называется *числовым.* А если они являются функциями, то ряд является *функциональным.* В этом параграфе мы будем рассматривать лишь числовые ряды.

Ключевым понятием любого ряда (1.1) является его сумма, то есть сумма всех тех слагаемых, которые содержатся в ряде. Так как в нем бесконечное число слагаемых, то его сумму нельзя получить прямым сложением всех слагаемых – так, как мы это делаем при складывании конечного числа слагаемых. Действительно, процесс суммирования членов ряда не будет иметь конца, и мы, таким образом, сумму ряда никогда не найдем. Поэтому и к определению, и к нахождению суммы ряда должен быть применен какой-то другой подход.

И этот подход состоит в следующем. Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \tag{1.2}$$

- сумма первых n слагаемых ряда (1.1), которую называют n-ой частичной суммой ряда. В частности,

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \; … \tag{1.3}$$

С изменением n будет меняться и частичная сумма S_n, причем при увеличении n она будет включать в себя все больше и больше слагаемых ряда (1.1). Тогда сумму всего этого ряда естественно определить как предел суммы S_n при $n \to \infty$. То есть, *по определению,*

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S_\infty = S \tag{1.4}$$

- сумма ряда (1.1). В обозначении S_∞ суммы ряда значок ∞ указывает на то, что речь идет о сумме бесконечного числа слагаемых. Впрочем, этот значок обычно опускают и сумму ряда обозначают просто символом S .

Сумма ряда S_∞, как и всякий предел, может существовать, а может и не существовать, может быть бесконечной, а может быть и конечной. Если сумма ряда существует и конечна, ряд называется *сходящимся*. А если эта сумма равна $+\infty$, или $-\infty$, или она не существует вообще, то ряд называется *расходящимся*.

Имеются способы (о них мы будем говорить ниже) выяснения вопроса о том, сходится или расходится данный числовой ряд. Если удалось установить, что ряд сходится, то у него есть конечная сумма S. Иногда её можно найти точно. Но чаще – только приближенно по формуле

$$S = S_\infty \approx S_n, \tag{1.5}$$

где S_n (см. (1.2)) – сумма первых n слагаемых ряда. Смысл формулы (1.5) состоит в том, что при нахождении суммы сходящегося ряда суммируется лишь некоторая часть его слагаемых (первые n слагаемых), а остальные просто отбрасываются. Результат будет получаться тем точнее, чем больше n. Есть и возможность оценки погрешности, допускаемой при замене $S = S_\infty$ на S_n , хотя в общем случае этот вопрос и непростой.

Пример 1. Показать, что ряд

$$0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \dots \tag{1.6}$$

сходится и имеет сумму $S = 1$.

Решение. Для данного ряда имеем:

$$S_1 = 0{,}9;\ \ S_2 = 0{,}9 + 0{,}09 = 0{,}99;\ \ S_3 = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 = 0{,}999;\ \dots$$

$$S_n = 0{,}99....9 \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty = S = 1. \tag{1.7}$$

Как оказалось, сумма S ряда - число, поэтому ряд сходится. И так как эта сумма равна 1, то можем записать:

$$0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \dots = 1 \tag{1.8}$$

Пример 2. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots \tag{1.9}$$

расходится.

Решение. Очевидно, что для данного ряда

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

То есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty = S = \infty \tag{1.10}$$

А значит, ряд (1.9) расходится, ибо его сумма бесконечна:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots = \infty \tag{1.11}$$

Пример 3. Показать, что ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \tag{1.12}$$

расходится.

Решение. Для данного ряда

$$S_1 = 1;\ \ S_2 = 1-1 = 0;\ \ S_3 = 1-1+1 = 1;\ \ S_4 = 1-1+1-1 = 0;\ \ldots$$

То есть
$$S_n = \begin{cases} 1, \text{ если } n \text{ четно;} \\ -1, \text{ если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \qquad (1.13)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S_\infty = S$ - не существует (сумма ряда не существует). А значит, ряд расходится.

Пример 4. Рассмотрим числовой ряд вида

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots \qquad (1.14)$$

Этот ряд известен еще из курса элементарной математики под названием «сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q». Как известно, эта сумма существует и конечна (а, значит, ряд (1.14) сходится) лишь для бесконечно убывающей геометрической прогрессии, при $-1 < q < 1$. Причем

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \qquad (-1 < q < 1) \qquad (1.15)$$

При $q \neq (-1;1)$ ряд (1.14) расходится, так как конечной суммы не имеет.

1. Очевидные свойства числовых рядов

а). Отбрасывание у ряда конечного числа его членов или, наоборот, добавление к ряду конечного числа новых слагаемых не влияет на его сходимость - расходимость (а влияет только на величину его суммы, если она существует и конечна).

б). Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S,$ то

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n = Ca_1 + Ca_2 + Ca_3 + \ldots = CS.$$

То есть умножение (деление) всех членов ряда на некоторое число C не влияет на его сходимость – расходимость, а влияет только на его сумму, которая увеличивается (уменьшается) в соответствующее число раз (в C раз).

в). Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_a$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_a \pm S_b$.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема. Для сходимости любого числового ряда (1.1) необходимо, чтобы $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то есть чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Допустим, что ряд (1.1) сходится. Это значит, что существует и конечна его сумма S_∞, которая определяется пределом (1.4). Учитывая, что $S_n = S_{n-1} + a_n$, откуда следует, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S_\infty - S_\infty = 0$$

То есть действительно $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *если a_n не стремится к нулю при $n\to\infty$, то ряд сходиться не может – он заведомо расходится*.

Примечание. Условие $a_n \to 0$ при $n\to\infty$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости числового ряда (1.1). Это значит, что оно еще не гарантирует сходимости ряда. Иначе говоря, возможна ситуация, когда $a_n \to 0$ при $n\to\infty$, и тем не менее ряд (1.1) расходится.

Классическим примером такого ряда является *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \qquad (1.16)$$

Необходимое условие сходимости $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n\to\infty$ для этого ряда очевидным образом выполняется. И тем не менее этот ряд расходится, так как его сумма $S = \infty$.

Докажем это. Для этого рассмотрим рис. 5.1. На этом рисунке изображена бесконечно протяженная в горизонтальном направлении ступенчатая фигура, состоящая из заштрихованных прямоугольников, площади которых соответственно равны ($1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$). То есть суммарная площадь S этой заштрихованной фигуры как раз равна сумме S гармонического ряда (1.16). Но эта площадь S заведомо больше площади S_0 между осью ox и гиперболой $y = \frac{1}{x}$ в пределах для x от 1 до ∞. А

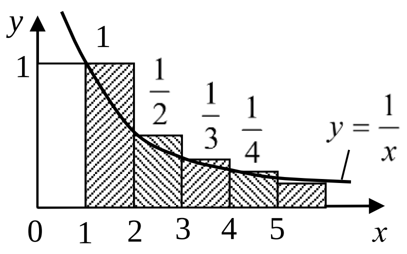


Рис. 5.1

$$S_0 = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^{\infty} = \ln x\Big|_1^{\infty} = \ln\infty - \ln 1 = \infty - 0 = \infty.$$

И так как $S > S_0$, то и $S = \infty$. Таким образом, гармонический ряд расходится, ибо его сумма S равна ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty \qquad (1.17)$$

3. Положительные числовые ряды. Достаточные признаки сходимости

Определение. *Числовой ряд* (1.1) *называется положительным, если все его слагаемые a_n – положительные числа.* Частичная сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ такого ряда при любом значении n тоже, естественно, положительна, причем с увеличением номера n она монотонно возрастает. Следовательно, имеются всего две возможности:

1) $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$;

2) $S_n \to S$ при $n \to \infty$, где S – некоторое положительное число.

В первом случае ряд расходится, во втором сходится. Какая из этих двух возможностей реализуется, зависит, очевидно, от поведения слагаемых a_n ряда при $n \to \infty$. Если эти слагаемые стремятся к нулю, причем делают это достаточно быстро, то ряд будет сходиться. А если они не стремятся к нулю, или стремятся к нему, но недостаточно быстро, то ряд будет расходиться.

Например, у гармонического ряда (1.16) слагаемые $a_n = \frac{1}{n}$ хоть и убывают, стремясь к нулю, но делают это довольно медленно. Поэтому гармонический ряд оказался расходящимся. А вот у положительного ряда (1.6) слагаемые стремятся к нулю гораздо быстрее, поэтому он оказался сходящимся.

Еще пример. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots \qquad (1.18)$$

называется *обобщенным гармоническим рядом* (при $\alpha = 1$ это будет обычный гармонический ряд). Если исследовать его на сходимость – расходимость аналогично тому, как исследовался гармонический ряд (1.16) (с помощью рисунка, подобного рисунку 5.1), то можно установить (попробуйте это сделать самостоятельно), что обобщенный гармонический ряд расходится при $\alpha \le 1$ (его сумма $S = +\infty$) и сходится при $\alpha > 1$ (его сумма S – конечное положительное число). И это понятно: при $\alpha \le 1$ слагаемое $\frac{1}{n^{\alpha}}$ обобщенного гармонического ряда убывают медленнее слагаемых $\frac{1}{n}$ гармонического ряда. А так как гармонический ряд расходится (скорость убывания его слагаемых недостаточна для сходимости), то тем более при $\alpha \le 1$ будет расходиться и обобщенный гармонический ряд (1.18). А при $\alpha > 1$ слагаемые $\frac{1}{n^{\alpha}}$ ряда (1.18) будут, очевидно, убывать быстрее, чем слагаемые $\frac{1}{n}$ гармонического ряда (1.16). И этой возросшей скорости убывания оказывается достаточно для сходимости ряда (1.18).

Можно эти соображения изложить строже, в виде так называемого *признака сравнения положительных числовых рядов*.

Его суть в следующем. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad (1.19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \qquad (1.20)$$

- два произвольных положительных числовых ряда. И пусть $b_n > a_n$ для всех n=1,2,… . То есть (1.20) – ряд с бóльшими членами, чем ряд (1.19). Тогда очевидно, что:

1) Если ряд с бóльшими членами сходится, то и ряд с меньшими членами сходится.

2) Если ряд с меньшими членами расходится (его сумма равна $+\infty$), то и ряд с бóльшими членами тоже расходится (его сумма тем более равна $+\infty$).

3) Если ряд с бóльшими членами расходится (его сумма равна $+\infty$), то про ряд с меньшими членами сразу ничего сказать нельзя.

4) Если ряд с меньшими членами сходится (его сумма – число), то про ряд с бóльшими членами сразу ничего сказать нельзя.

Здесь всё аналогично, например, со следующей практической ситуацией:

1) Если больший предмет в коробку влез, то и меньший влезет.

2) Если меньший предмет в коробку не влез, то и больший не влезет.

3) Если больший предмет в коробку не влез, то про меньший однозначно сразу ничего сказать нельэя.

4) Если меньший предмет в коробку влез, то про больший однозначно сразу ничего сказать нельэя.

Замечание 1. В формулировке всех четырех пунктов признака сравнения можно условие $b_n > a_n$, с помощью которого сравниваются ряды и которое должно выполняться для всех n=1,2,3,…, заменить на это же условие $b_n > a_n$, справедливое не для всех n, а лишь начиная с некоторого номера N, то есть для $n>N$, ибо отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Замечание 2. Признак сравнения положительных числовых рядов допускает обобщение. А именно, если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = L \quad (0 < L < \infty), \tag{1.21}$$

то есть если

$$b_n \sim La_n \qquad \text{при} \qquad n \to \infty \tag{1.22}$$

(b_n эквивалентны La_n при $n \to \infty$), то положительные числовые ряды (1.19) и (1.20) сходятся или расходятся одновременно. Данное замечание оставим без доказательства.

Пример 5. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \tag{1.23}$$

расходится (его сумма равна $+\infty$). Действительно, сравнивая этот ряд с гармоническим (1.16), слагаемые которого меньше слагаемых ряда (1.23) для всех n>1, сразу приходим к этому выводу на основании пункта 2 признака сравнения. Его расходимость следует и из того, что это – обобщенный гармонический ряд (1.18) при $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Пример 6. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2^1}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots \qquad (1.24)$$

- это положительный ряд с меньшим для всех n>1 слагаемыми, чем у ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots \qquad (1.25)$$

Но ряд (1.25) представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Такой ряд, согласно (1.15), сходится и имеет сумму S=1. Но тогда сходится и меньший ряд (1.24), причем его сумма $0<S_\infty<1$.

Пример 7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2+1}$ - положительный числовой ряд, у которого слагаемые

$$a_n=\frac{2n+3}{n^2+1}=\frac{2+\frac{3}{n}}{n+\frac{1}{n}}\sim\frac{2}{n} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=2\cdot\infty=\infty$ расходится в силу (1.17). Значит, в соответствии с (1.22), расходится и данный ряд со слагаемыми a_n.

Признак Даламбера. Этот признак состоит в следующем. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ - положительный числовой ряд. Найдем предел q отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (1.26)$$

Французский математик и механик 19-го века Даламбер доказал, что при q<1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится; при q>1 он расходится; при q=1 вопрос о сходимости - расходимости ряда остается открытым. Доказательство признака Даламбера опускаем.

Пример 8. Исследовать на сходимость – расходимость положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$.

Решение. Применим к этому ряду признак Даламбера. Для этого по формуле (1.26) вычислим q:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\begin{array}{l}\text{у нас } a_n=\dfrac{3n+1}{2^n};\\ \text{тогда } a_{n+1}=\dfrac{3(n+1)+1}{2^{n+1}}=\dfrac{3n+4}{2^n\cdot 2}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{6n+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{6+\frac{2}{n}}=\frac{3+0}{6+0}=\frac{1}{2}.$$

Так как $q=\frac{1}{2}<1$, то данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$ сходится.

<u>*Интегральный признак Коши.*</u> Этот признак состоит в следующем. Если члены a_n положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ монотонно убывают, то этот ряд и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}a_x dx$ сходятся или расходятся одновременно. Здесь $a_x=f(x)$ - непрерывная монотонно убывающая функция, принимающая при $x = n$ значения a_n членов ряда.

Доказательство интегрального признака Коши, как и признака Даламбера, опустим. Это доказательство, кстати, использует в принципе ту же геометрическую идею, что была применена при доказательстве расходимости гармонического ряда (1.16).

<u>*Пример 9.*</u> Исследуем на сходимость – расходимость обобщенный гармонический ряд (1.18). При $\alpha=1$ мы получаем гармонический ряд (1.16), который, как мы доказали, расходится. При $\alpha<1$ ряд (1.18) тем более будет расходиться, так как его члены больше членов гармонического ряда. Осталось исследовать случай $\alpha>1$. Применим к ряду (1.18) при $\alpha>1$ интегральный признак Коши. Для этого вычислим несобственный интеграл $\int_1^{\infty}a_x dx$:

$$\int_1^{\infty}a_x dx=\left|\text{ у нас } a_n=\frac{1}{n^{\alpha}};\text{ значит, } a_x=\frac{1}{x^{\alpha}}\right|=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\int_1^{\infty}x^{-\alpha}dx=\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\left.\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right|_1^{\infty}=-\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\infty^{\alpha-1}}-\frac{1}{1^{\alpha-1}}\right)=-\frac{1}{\alpha-1}(0-1)=\frac{1}{\alpha-1}.$$

В результате получили конечное число $\frac{1}{\alpha-1}$. Таким образом, $\int_1^{\infty}a_x dx$ сходится. Но тогда, по интегральному признаку Коши, сходится и ряд (1.18). То есть

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}+\infty,\ \text{если } \alpha\le 1\\ S>0 - \text{конечное число, если } \alpha>1\end{cases}\tag{1.27}$$

4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ..., \quad \text{где} \quad a_n > 0 \ (n = 1,2,...) \qquad (1.28)$$

называется *знакочередующимся.* Сходимость – расходимость знакочередующихся рядов устанавливается по *признаку Лейбница.* Он формулируется следующим образом.

Если члены знакочередующегося ряда (1.28) *монотонно убывают по абсолютной величине, стремясь при этом к нулю, то есть если*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots, \quad и \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (1.29)$$

то знакочередующийся ряд (1.28) *сходится, причем его сумма S заключена в интервале* $0 < S < a_1$, *то есть не превосходит первого члена ряда.*

Доказательство.

1. Сначала рассмотрим произвольную частичную сумму S_{2m} с четным числом слагаемых ряда (1.28). Учитывая монотонное убывание (1.29) членов ряда, приходим к выводу, что

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) > 0\ , \qquad (1.30)$$

причем с ростом m сумма S_{2m} возрастает. С другой стороны, для любого m имеем:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1 \qquad (1.31)$$

Таким образом, с увеличением m частичная сумма S_{2m} монотонно растет, но всегда меньше a_1. Отсюда по теореме Вейерштрасса (§1, глава 1) следует, что существует

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S\ , \ \text{причем} \ S < a_1 \qquad (1.32)$$

2. Рассмотрим теперь частичную сумму S_{2m+1} ряда (1.28) с нечетным числом слагаемых: $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. Тогда, согласно (1.32) и (1.29),

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S \qquad (1.33)$$

Таким образом, и при четных, и при нечетных значениях номера n для частичных сумм S_n знакочередующегося ряда (1.28) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ \text{- число, причем} \quad 0 < S < a_1 \qquad (1.34)$$

А это и означает, что S – сумма ряда (1.28), причем $0 < S < a_1$. Признак Лейбница доказан.

Примечание. Признак Лейбница позволяет не только устанавливать сходимость – расходимость знакочередующегося ряда (1.28), но и позволяет, при условии его сходимости, находить сумму S с любой заданной точностью. Действительно, сложив в ряде (1.28) какое-либо число N его первых слагаемых и отбросив остальные, мы фактически отбросим знакочередующийся ряд, начинающийся со слагаемого a_{N+1}, сумма которого, по признаку Лейбница, не будет превосходить этого первого отброшенного слагаемого. Значит, и ошибка при вычислении суммы S знакочередующегося ряда не будет превосходить первого из отброшенных слагаемых этого ряда. Этим обстоятельством широко пользуются для приближенного нахождения сумм сходящихся знакочередующихся рядов с нужной точностью.

Пример 10. Показать, что знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}+\ldots \tag{1.35}$$

сходится, и найти его сумму S с точностью до 0,01.

Решение. Данный ряд сходится по признаку Лейбница. Для нахождения его суммы S с точностью 0,01 найдем первое из слагаемых этого ряда, по абсолютной величине меньше 0,01. Это, очевидно, пятое слагаемое $\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$. Отбрасывая его и остальные, следующие за ним, слагаемые, получим:

$$S \approx S_4 = 1-\frac{1}{8}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}=0{,}8964\ldots \approx 0{,}90.$$

5. Числовые ряды с произвольными по знакам слагаемыми

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - числовой ряд с произвольными по знакам слагаемыми. Наряду с этим рядом рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то есть ряд, составленный из модулей слагаемых исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Справедлива следующая *теорема*:

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то автоматически сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причем сходимость последнего называется *абсолютной.*

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может сходиться несмотря на то, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится. Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условной.*

Доказательство. Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ и } S_n^* = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \tag{1.36}$$

- n-ые частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ соответственно. Для указанных частичных сумм, очевидно, имеем:

$$S_n = S_n' - S_n'' ; \quad S_n^* = S_n' + S_n'' \tag{1.37}$$

Здесь $S_n^{'}$ - сумма положительных слагаемых, входящих в S_n, а $S_n^{''}$ - сумма модулей отрицательных слагаемых, входящих в S_n. Положительные суммы $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$, очевидно, растут с увеличением *n*.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n^* = S_*$ - конечное положительное число, являющееся суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Но $S_n^* = S_n^{'} + S_n^{''}$, поэтому $S_n^{'} < S_n^*$ и $S_n^{''} < S_n^*$. А так как возрастающая с номером *n* частичная сумма S_n^* при любом *n* меньше своего предела S_*, то и растущие с номером *n* величины $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$ тоже при любом номере *n* меньше S_*. По теореме Вейерштрасса (§1, глава 1) приходим к выводу, что при $n\to\infty$ величины $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$ имеют некоторые конечные положительные пределы $S^{'}$ и $S^{''}$, каждый из которых меньше S_*, но которые в сумме составляют S_*:

$$S_* = \lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty}(S_n^{'} + S_n^{''}) = \lim_{n\to\infty} S_n^{'} + \lim_{n\to\infty} S_n^{''} = S^{'} + S^{''} \qquad (1.38)$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^{'} - S_n^{''}) = \lim_{n\to\infty} S_n^{'} - \lim_{n\to\infty} S_n^{''} = S^{'} - S^{''} = S \qquad (1.39);$$

- конечное число. А это значит, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Пункт 1 теоремы мы доказали.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то его сумма $S_* = S^{'} + S^{''} = +\infty$. Это значит, что по крайней мере одна из положительных сумм, $S^{'}$ или $S^{''}$, равна $+\infty$ (одна или обе). Но их разность $S = S^{'} - S^{''}$ не обязательно будет бесконечной: в случае, когда $S^{'} = +\infty$ и $S^{''} = +\infty$, сумма $S = S^{'} - S^{''}$ (сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) может оказаться и конечной. То есть, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может оказаться сходящимся несмотря на то, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ из его модулей будет расходящимся. В таком случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будет сходиться, но условно.

Абсолютно и условно сходящиеся ряды кардинально различаются по характеру своей сходимости. А именно, любая перестановка слагаемых в абсолютно сходящемся ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не меняет его суммы. А вот если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то за счет соответствующей перестановки слагаемых его сумму можно сделать какой угодно.

Действительно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то сумма S' его положительных слагаемых и сумма S'' модулей его отрицательных слагаемых – два конечных положительных числа. При любой перестановке слагаемых эти суммы не меняются, а следовательно, не меняется и сумма $S = S' - S''$ всего ряда. А вот если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $S' = +\infty$ и $S'' = +\infty$, а $S = S' - S''$ - конечное число. Но тогда имеется возможность отдельно из положительных и отдельно из отрицательных слагаемых ряда набрать любую сумму. А значит, и итоговую сумму всего ряда можно сделать какой угодно.

Пример 11. Знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (1.40)$$

сходится по признаку Лейбница. Но сходится условно, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots, \qquad (1.41)$$

составленный из модулей ряда (1.40), расходится (ибо (1.41) – гармонический ряд). Значит, у данного знакочередующегося ряда (1.40) есть конечная сумма S

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = S, \qquad (0 < S < 1) \qquad (1.42)$$

но эту сумму можно изменить за счет перестановки слагаемых ряда.

Подтвердим это. Для этого переставим слагаемые ряда так, чтобы в нем после одного положительного слагаемого следовали два отрицательных:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} S \qquad (1.43)$$

Как видим, такая перестановка слагаемых ряда привела к уменьшению его суммы в два раза.

Такое необычное поведение условно сходящегося ряда (1.40), как и вообще всех условно сходящихся рядов, связано с тем, что его сходимость обусловлена не высокой скоростью убывания слагаемых (как это имеет место у абсолютно сходящихся рядов), а лишь взаимной компенсацией медленно убывающих чередующихся положительных и отрицательных слагаемых. При перестановке слагаемых эта взаимная компенсация слагаемых ряда нарушается, а следовательно, меняется и его сумма.

Упражнения

1. Выполняется ли для ряда

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$$

необходимое условие сходимости? Какова сумма S этого ряда?

Ответ: не выполняется; $S = +\infty$.

2. Записать несколько первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)\cdot 5^n}$. Показать, что этот ряд сходится. Сколько членов ряда нужно просуммировать, чтобы найти его сумму с точностью до 0,01? Найти эту сумму S с указанной точностью.

Ответ: $S \approx S_2 = \frac{1}{15}+\frac{2}{125} \approx 0{,}08$.

3. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$.

Ответ: ряд сходится.

4. С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Ответ: ряд расходится.

5. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots .$$

В случае сходимости выяснить, сходится он абсолютно или условно, а также найти его сумму S с точностью 0,1.

Ответ: ряд сходится абсолютно; $S \approx S_2 = \frac{8}{9} \approx 0{,}9$.

6. Показать, что сумма S условно сходящегося ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ увеличится в полтора раза, если после каждых двух положительных его слагаемых поместить одно отрицательное.

7. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$.

Указание. Использовать тот факт, что $\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$;....

Ответ: $S=1$.

8. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+....$

Ответ: $S=\frac{1}{2}$.

9. Построить ряд, соответствующий знаменитой апории Зенона об Ахиллесе и черепахе и показать, что этот ряд сходится. А значит, Ахиллес догонит черепаху.

§2. Функциональные ряды (общие положения)

Определение 1. *Ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \ , \tag{2.1}$$

слагаемыми которого являются функции, называется функциональным.

Если зафиксировать аргумент x, то каждая функция $u_n(x)\ (n=1,2,...)$ станет числом, а ряд (2.1) станет числовым рядом. При одних значениях x этот ряд может оказаться сходящимся, при других – расходящимся.

Определение 2. *Областью сходимости* функционального ряда (2.1) называется множество всех тех значений x, при которых ряд сходится. Остальные значения x составляют его *область расходимости*.

Нас, естественно, в первую очередь будут интересовать области сходимости функциональных рядов, а также суммы рядов в их областях сходимости.

Пусть D – область сходимости данного функционального ряда (2.1). На практике область D может выглядеть по-разному: быть промежутком или интервалом оси ox, представлять собой всю ось ox или единственную ее точку, даже быть пустым множеством (последний случай – неинтересный). Для каждого $x \in D$ этот ряд имеет конечную сумму $S=f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \ = f(x) \quad (x \in D) \tag{2.2}$$

При исследовании любого функционального ряда встают две основные задачи:

1) Определение его области сходимости D.
2) Определение его суммы $f(x)$ для $x \in D$. (2.3)

Не менее интересна и обратная проблема: подобрать такой функциональный ряд из возможно более простых слагаемых $u_n(x)$, чтобы он в своей области сходимости D имел сумму, совпадающую с заданной функцией $f(x)$ (то есть чтобы выполнялось равенство (2.2)). Эта проблема называется проблемой разложения заданной функции $f(x)$ в функциональный ряд. Качество решения этой проблемы будет тем выше, чем проще подберется этот ряд; чем быстрее он будет сходиться; тем шире будет его область сходимости D.

Важность решения этой проблемы очень велика. Ведь разлагаемая в функциональный ряд (2.2) функция $f(x)$ может быть сложной и даже не выразимой через элементарные функции. Например, она может быть первообразной для некоторой функции $g(x)$, для которой неопределенный интеграл

$$\int g(x)dx = f(x) + C$$

является неберущимся. А слагаемые $u_n(x)$ функционального ряда (2.2), сумма которого будет равна $f(x)$, могут, наоборот, оказаться достаточно простыми элементарными функциями, легко анализируемыми и вычисляемыми. Поэтому получив разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots \quad (x \in D) \tag{2.4}$$

нужной нам функции $f(x)$ в такой функциональный ряд, мы в итоге получим возможность для $x \in D$ оперировать не с самой функцией $f(x)$, а с ее составляющими $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, которые и проще, и удобнее самой функции.

В следующем параграфе задачи (2.3) и (2.4) будут рассмотрены для двух наиболее простых и важных типов функциональных рядов:

1) Для степенных рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{2.5}$$

2) Для обобщенных степенных рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots \tag{2.6}$$

§3. Степенные ряды. Ряды Маклорена и Тейлора

Начнем с того, что найдем область сходимости степенного ряда (2.5). Для этого проанализируем положительный числовой ряд, составленный из его модулей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n = |a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + |a_3| \cdot |x|^3 + \ldots \tag{3.1}$$

Применим к нему признак Даламбера. Для этого найдем q (см. (1.26)):

$$q = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \; ; \tag{3.2}$$

Введем обозначение

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}\ ,\ \text{откуда}\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3.3}$$

Тогда выражение для q примет вид:

$$q=\frac{|x|}{R} \tag{3.4}$$

Согласно признаку Даламбера:

1) Если $q<1$, то есть если $|x| < R$, или, что одно и то же, если $-R < x < R$, то ряд (3.1) сходится. А вместе с ним сходится, причем абсолютно, и ряд (2.5).

2) Если $q>1$, то есть $|x|>R$ или, что одно и то же, если $x > R$ или $x < -R$, то ряд (3.1) расходится. Заметим, что при этом и ряд (2.5) тоже не будет сходиться, ибо условие $q=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}>1$ для любого положительного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ означает, что начиная с некоторого номера N, то есть при $n >N$, отношение $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ становится больше 1 и остается таковым для любых $n >N$. А это значит, что для $n >N$ будет $b_{n+1}>b_n$. То есть начиная с номера N члены b_n положительного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ растут, а значит, заведомо не стремятся к нулю. Получается нарушенным необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n$, а заодно – и степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, ибо слагаемые первого из них – просто модули последнего. То есть действительно при $x > R$ и $x < -R$ ряд (2.5) будет расходиться.

3) Наконец, если $q = 1$, то есть если $x = \pm R$, то о сходимости – расходимости и ряда (3.1), и ряда (2.5) сразу ничего сказать нельзя. Этот случай нужно исследовать особо.

Итак, <u>выводы:</u>

Степенной ряд (2.5) *сходится при* $-R < x < R$*; расходится при* $x > R$ *и* $x < -R$*; при* $x = \pm R$ *он может как сходиться, так и расходиться* (рис. 5.2).

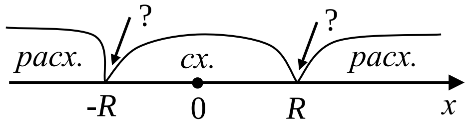


Рис.5.2

Величина R, определяемая по формуле (3.3), называется *радиусом сходимости* степенного ряда (2.5). А интервал (- $R;\ R$) называется *интервалом сходимости* этого степенного ряда. Областью сходимости D степенного ряда (2.5), таким образом, является его интервал сходимости (- $R;\ R$) и, возможно, его концы.

<u>*Пример 1*</u>. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)2^n}$.

Решение. Данный ряд – это ряд вида (2.5) при $a_n = \dfrac{1}{(n+3)2^n}$. Определим, используя формулу (3.3), его радиус сходимости R:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{(n+3)\cdot 2^n}}{\dfrac{1}{(n+4)\cdot 2^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+8}{n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{8}{n}}{1+\dfrac{3}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2\,.$$

Итак, данный степенной ряд сходится при $x \in (-2; 2)$ и, возможно, еще в точках $x = \pm 2$. Для всех остальных x он расходится.

Исследуем ряд при $x = \pm 2$.

1) Если $x = 2$, то наш ряд примет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Это – гармонический ряд (1.17) без первых двух своих членов. А значит, он расходится.

2) Если $x = -2$, то получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+3)\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(n+3)\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots$$

Это – знакочередующийся ряд, сходящийся по признаку Лейбница.

Таким образом, областью сходимости D степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+3)2^n}$ является полуинтервал $[-2; 2)$.

Степенные ряды (2.5) обладают замечательным свойством: внутри интервала сходимости $(-R; R)$ их можно почленно дифференцировать и интегрировать. Это значит, что если

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = f(x), \quad (-R < x < R) \tag{3.5}$$

то

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \; (-R < x < R) \tag{3.6}$$

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_c^d x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_c^d =$$

$$=a_0 x\Big|_c^d + a_1 \frac{x^2}{2}\Big|_c^d + a_2 \frac{x^3}{3}\Big|_c^d + \dots \; (-R < c \le x \le d < R). \qquad (3.7)$$

Эти факты примем без доказательства. Ограничимся лишь приведением примеров их использования.

<u>*Пример 2*</u>. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad (3.8)$$

Это – степенной ряд вида (2.5) при $a_n = 1$ (n = 0, 1, 2, …). Его радиус сходимости R, согласно формуле (3.3), равен 1: R = 1. То есть ряд (3.8) сходится в интервале (-1; 1), причем на обоих концах этого интервала он, очевидно, расходится. А так как этот ряд представляет собой еще и сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем x, то известна, согласно (1.15), и его сумма:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1) \qquad (3.9)$$

Заменяя в (3.9) x на $-x$, получим еще один степенной ряд с известной суммой:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} \qquad (-1 < x < 1) \qquad (3.10)$$

Если теперь почленно продифференцировать равенства (3.9) и (3.10), то получим еще два разложения:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1 < x < 1) \qquad (3.11)$$

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad (-1 < x < 1) \qquad (3.12)$$

А если равенство (3.10) почленно проинтегрировать в промежутке [0; t], где $t \in (-1;\ 1)$, то получим:

$$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots = \ln(1+t) \;\; (-1 < t < 1) \qquad (3.13)$$

Или в обычных обозначениях (заменив t на x):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln(1+x) \qquad (-1 < x < 1) \qquad (3.14)$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $x \to 1$, получим интересный результат:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \approx 0{,}69 \qquad (3.15)$$

Равенства (3.9) – (3.14) являются разложениями в степенные ряды, расположенные слева, тех функций, которые находятся справа.

Рассмотрим теперь общую проблему разложения любой заданной функции *f(x)* в степенной ряд (2.5). Для этого обратимся к формуле Маклорена (6.12) главы 2:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \quad (3.16)$$

Здесь

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c \in (0; x) \quad (3.17)$$

- остаточный член формулы Маклорена (3.16), записанный в форме Лагранжа.

Допустим, что функция *f(x)* имеет при $x = 0$ производные любого порядка. И допустим, что для некоторого множества значений аргумента x $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда переходя в формуле Маклорена (3.16) к пределу при $n \to \infty$, для этих значений x получим:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (3.18)$$

Формула (3.18) представляет собой не что иное, как разложение функции *f(x)* в степенной ряд. Этот ряд называется *рядом Маклорена*. Разложение (3.18) верно и может быть использовано лишь для тех *x*, для которых $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Обычно это имеет место для всех *x* из области сходимости ряда Маклорена.

Пример 3. Пусть $f(x) = e^x$. Тогда $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = ... = e^x$, а значит, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = ... = e^0 = 1$. Разложение Маклорена (3.18) в данном случае примет вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (3.19)$$

Выясним теперь, для каких значений x оно справедливо. Для этого выпишем и проанализируем остаточный член $R_n(x)$. Так как $f^{(n+1)}(x) = e^x$ при любом n, то

$$|R_n(x)| = e^c \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad c \in (0; x) \quad (3.20)$$

Покажем, что $|R_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x \in (-\infty; +\infty)$. Для этого рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|R_n(x)|$. Применим к нему признак Даламбера:

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{|R_{n+1}(x)|}{|R_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \quad (3.21)$$

- при любом x. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|R_n(x)|$ сходится при любом x. Но тогда, в силу необходимого условия сходимости любого ряда, $|R_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. И это выполняется для любых x, $-\infty < x < +\infty$. Значит, и разложение (3.19) справедливо для любых x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad (3.22)$$

Совершенно аналогично можно получить разложения и многих других важных функций в степенной ряд Маклорена. Например:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty,\ x - \text{в радианах}) \qquad (3.23)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (-\infty < x < \infty,\ x - \text{в радианах}) \qquad (3.24)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots \ (-1 < x < 1,\ \alpha - \text{любое}) \qquad (3.25)$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (-1 \le x \le 1) \qquad (3.26)$$

Разложения (3.22) – (3.26) и им подобные широко используются как для приближенного вычисления значений стоящих слева функций с любой заданной точностью, так и для различных математических операций с указанными функциями.

<u>*Пример 3*</u>. Вычислить $e^{-0,2}$ с точностью до 0,0001.

<u>*Решение.*</u> Используя разложение (3.22) при x = - 0,2, получим:

$$e^{-0,2} = 1 + (-0,2) + \frac{(-0,2)^2}{2!} + \frac{(-0,2)^3}{3!} + \frac{(-0,2)^4}{4!} + \ldots =$$
$$= 1 - 0,2 + 0,02 - 0,001333\ldots + 0,000066\ldots - \ldots\ldots .$$

Отбрасывая в получившемся знакочередующемся ряде четвертое слагаемое, меньшее допустимой погрешности 0,0001, и все последующие за ним, которые еще меньше, получим с требуемой точностью:

$$e^{-0,2} \approx 1 - 0,2 + 0,02 - 0,0013 = 0,8187.$$

<u>*Пример 4.*</u> Вычислить приближенно с точностью до 0,001 неберущийся определенный интеграл $\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{x}dx$.

<u>*Решение*</u>. Используя разложение (3.24), получим:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{x}dx = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\frac{(2x)^8}{8!}-...\right)}{x}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 - \frac{2}{315}x^8 + ...}{x}dx = \int_0^1 (2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{45}x^5 - \frac{2}{315}x^7 + ...)dx =$$

$$= \left(2\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{4}{45}\cdot\frac{x^6}{6} - \frac{2}{315}\cdot\frac{x^8}{8} + ...\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{2}{135} - \frac{1}{1260} + ...$$

Отбрасывая в получившемся знакочередующемся числовом ряде четвертое слагаемое, которое меньше допустимой погрешности 0,001, и все последующие за ним, получим с требуемой точностью 0,001:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{2}{135} \approx 0{,}819. \qquad (3.27)$$

Пример 5. Построить в виде степенного ряда приближенное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Эта задача, заметим, не имеет точного решения, так как дифференциальное уравнение $y' = x^2 + y^2$ не может быть решено в квадратурах.

Решение. Искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде ряда Маклорена:

$$y = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ... \quad (-R < x < R) \qquad (3.29)$$

Для неизвестных коэффициентов $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)\ldots$ этого ряда получаем:

1) $y(0) = 1$ - согласно начальному условию задачи Коши (3.28).

2) $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$ согласно обоим равенствам задачи Коши (3.28).

3) Дифференцируя обе части уравнения $y' = x^2 + y^2$, получим: $y'' = 2x + 2y\cdot y'$. Полагая здесь $x = 0$ и учитывая, что $y(0) = 1$ и $y'(0) = 1$, получим: $y''(0) = 2\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 = 2$;

4) Дифференцируя обе части равенства $y'' = 2x + 2y\cdot y'$, получим: $y''' = 2 + 2(y'\cdot y' + y\cdot y'')$, откуда $y'''(0) = 2 + 2(1\cdot 1 + 1\cdot 2) = 8$.

Продолжая этот процесс, можем получить $y^{(4)}(0)$; $y^{(5)}(0)$, и т.д. В итоге на основании (3.29) искомое решение $y = y(x)$ задачи Коши (3.28) примет вид:

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + ... \qquad (-R < x < R) \qquad (3.30)$$

На основании общей теории дифференциальных уравнений можно доказать, что ряд (3.30) сходится для всех $x \in (-\infty;+\infty)$. То есть его радиус сходимости $R=\infty$. Ограничиваясь найденными первыми четырьмя слагаемыми этого ряда, получим следующее приближенное решение задачи Коши (3.28):

$$y \approx 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{3.31}$$

Оно будет тем точнее, чем ближе x к нулю.

Обобщенные степенные ряды. Ряд Тейлора

Ряд вида (2.6) называется *обобщенным степенным рядом*. Сделав в нем замену $x - x_0 = t$, получим обычный степенной ряд вида (2.5):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots \tag{3.32}$$

Он, как мы знаем, сходится на интервале $-R < t < R$, где

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3.33}$$

- радиус сходимости ряда (3.32). Тогда эта величина R определяет и интервал сходимости обобщенного степенного ряда (2.6):

$$-R < t < R \;\Leftrightarrow\; -R < x - x_0 < R \;\Leftrightarrow\; x_0 - R < x < x_0 + R$$

То есть областью сходимости ряда (2.6) является интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ и, возможно, его концы (рис. 5.3).

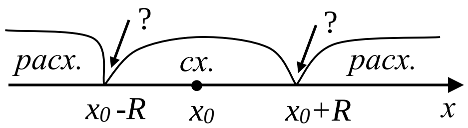


Рис.5.3

Различные функции $f(x)$ можно раскладывать не только в обычные степенные ряды, используя разложение Маклорена (3.18), но и в обобщенные степенные ряды. А именно, если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0, то для такой функции можно записать разложение вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots \tag{3.34}$$

Это разложение называется *разложением функции* $f(x)$ *в степенной ряд Тейлора*. Оно вытекает из формулы Тейлора (формула (6.10) главы 2) и справедливо для всех x, для которых остаточный член

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad c \in (x_0; x) \tag{3.35}$$

этой формулы стремится к нулю при $n \to \infty$. Обычно это выполняется для всех x, входящих в интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ сходимости ряда Тейлора (3.34).

Сравнивая разложение (3.18) функции $f(x)$ в ряд Маклорена и разложение (3.34) этой же функции в ряд Тейлора, видим, что разложение Маклорена использует в качестве опорной точки значение $x = 0$, а разложение Тейлора – произвольное значение $x = x_0$. Поэтому говорят, что разложение Маклорена – это разложение функции в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$, а разложение Тейлора – это разложение функции в степенной ряд в окрестности точки $x = x_0$. С удалением x от опорной точки (от нуля для ряда Маклорена и от x_0 для ряда Тейлора) сходимость каждого из этих рядов ухудшается (идет медленнее). А при достаточно больших x, выходящих за интервалы их сходимости, разложение заданной функции $f(x)$ в эти ряды становится заведомо несправедливым.

Пример 6. Получить разложение функции $y = \ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

Решение. Опираясь на формулу (3.34) и учитывая, что

$$f(x) = \ln x; \quad f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}; \ \dots ,$$

а значит,

$$f(x_0) = f(1) = \ln 1 = 0; \quad f'(1) = 1; \quad f''(1) = -1; \quad f'''(1) = 2; \quad f^{(4)}(1) = -6; \ \dots$$

получим:

$$\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \qquad (3.36)$$

Анализируя остаточный член (3.35) (анализ этот опускаем), можно показать, что $|R_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ для $0 \prec x \le 2$. Значит, для этих x верно и разложение Тейлора (3.36):

$$\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \quad (0 \prec x \le 2) \qquad (3.37)$$

Впрочем, разложение (3.37) можно было бы получить проще, опираясь на полученное ранее разложение (3.14), если сделать в нем замену $1+x$ на x.

Упражнения

1. Определить область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

Ответ: $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$.

2. Записать в виде степенного ряда функцию $\Phi(x)=\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}dt}$ и вычислить $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$, взяв в получившемся ряду столько членов, сколько нужно для того, чтобы погрешность вычисления была меньше 0,001.

<u>*Ответ:*</u>

$$\Phi(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}-\frac{x^7}{336}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty);\qquad \Phi(\frac{1}{3})\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\approx 0{,}327.$$

3. Использую биноминальное разложение (3.25), найти $\sqrt[5]{0{,}8}$ с точностью до 0,001.

<u>*Ответ:*</u> $\sqrt[5]{0{,}8}\approx 0{,}956$.

4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=4$ (по степеням $x-4$) функцию $f(x)=\sqrt{x}$ и найти значения переменной x, для которых будет справедливо полученное разложение.

<u>*Ответ:*</u>

$$\sqrt{x}=2\left[1+\frac{x-4}{2^3\cdot 1!}-\frac{(x-4)^2}{2^6\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot(x-4)^3}{2^9\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(x-4)^4}{2^{12}\cdot 4!}+\ldots\right]\quad(0<x<8)$$

5. Применяя почленное дифференцирование или интегрирование, найти суммы рядов:

1) $1+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots.=f_1(x)$; 2) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots.=f_2(x)$

<u>*Ответ:*</u> $f_1(x)=arctgx+1\quad(-1\prec x\leq 1)$; $f_2(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(-1\prec x\prec 1)$

Глава 6
Функции многих переменных

§1. Основные понятия

До сих пор, встречаясь с функциями, мы имели дело с функциями вида $y = f(x)$, то есть с функциями одного аргумента (одной переменной) x. Однако многие теоретические и прикладные задачи требуют для своего решения использования функций нескольких переменных. А именно, функций вида $z = f(x; y)$ – функций двух переменных; функций вида $u = f(x; y; z)$ – функций трех переменных, и т.д. Причем в реальных теоретических и прикладных задачах функции многих переменных встречаются даже чаще, чем функции одной переменной. Действительно, в реальных условиях каждая исследуемая величина y зависит, вообще говоря, от многих величин $(x_1; x_2; ...; x_n)$, то есть представляет собой функцию $y = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ многих переменных. И только если влияние на величину y какой-то одной из этих переменных (например, x_1) существенно больше, чем влияние остальных, то пренебрегая этими остальными переменными, получим функцию $y = f(x_1)$ одной переменной. Это простейший и наиболее легко анализируемый случай, который мы и изучали до сих пор.

Например, путь s, проходимый свободно падающим телом, реально зависит от многих величин: от времени падения t, плотности воздуха ρ, массы m и объема V тела, и т.д. То есть $s = f(t; \rho; m; V; ...)$ – функция многих переменных. И только пренебрегая влиянием на путь s сопротивления воздуха, а значит, исключая влияние на s величин ρ, m, V и т.д., получим известную еще из школьной физики зависимость $S = f(t) = \dfrac{gt^2}{2}$, представляющую собой функцию одной переменной t.

Впрочем, исследуемая величина может и существенно зависеть от нескольких других величин, так что влиянием ни одной из них на исследуемую величину пренебречь нельзя. Например, ток I, проходящий через некоторое сопротивление R, существенно зависит от величины этого сопротивления и напряжения U на концах этого сопротивления: $I = \dfrac{U}{R}$ (закон Ома). Еще пример: прибыль предприятия R существенно зависит от цены p единицы продукции этого предприятия, от количества q единиц проданной продукции, от денежных затрат z на производство и реализацию проданной продукции: $R = pq - z$. То есть величина R является функцией по меньшей мере трех переменных $(p; q; z)$, каждая из которых существенна.

Такие примеры указывают на то, что в математике должен быть разработан аппарат исследования функций многих переменных. Такой аппарат давно разработан. Во многом он использует те же понятия и идеи, что и аппарат исследования функций одной переменной. Однако есть и существенные различия. В чем они состоят – об этом ниже.

1. Основные понятия, связанные с функциями одной переменной

Пусть $y = f(x)$ – произвольная функция одной переменной: x – независимая переменная (аргумент), y – функция. Как всем известно, суть этой функции такова: $x \to y$ (по x находится y). Множество D всех тех значений независимой переменной x, для которых можно найти y, называется областью определения функции $y = f(x)$. Если функцию y можно найти для любого x ($-\infty < x < +\infty$), то есть для любой точки x числовой оси ox, то область D определения этой функции занимает всю ось ox. Если же это возможно не для любого x, то область определения D функции $y = f(x)$ представляет собой некоторую часть оси ox – например, отрезок $[a; b]$ (рис. 6.1).

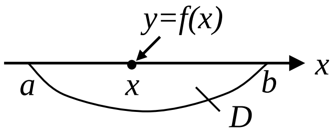


Рис. 6.1

Иллюстрации, изображенной на рис. 6.1, можно для наглядности придать и какой-то реально осязаемый смысл. Например, можно себе представить, что отрезок $[a; b]$ оси ox – это тонкий материальный стержень, неравномерно нагретый вдоль своей оси, а $y = f(x)$ – температура в точке x этого отрезка. Впрочем, функции $y = f(x)$ можно придать совершенно другой смысл. Например, можно считать, что y – объем произведенной продукции при затратах x на ее производство.

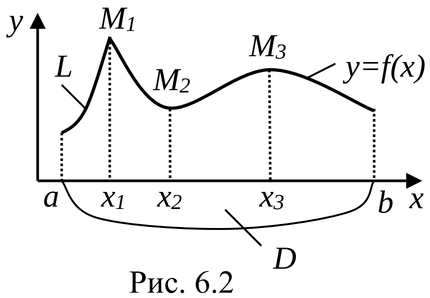


Рис. 6.2

Характер изменения функции y при изменении ее аргумента x очень наглядно демонстрирует график функции, который в принципе представляет собой некоторую линию L на плоскости xoy (рис. 6.2).

График функции $y = f(x)$ (линия L) состоит из точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$. Точки $(M_1; M_2; M_3)$ – вершины и впадины графика функции, а их проекции на ось ox (на область определения D этой функции) называются, как мы знаем, точками экстремума функции (точками ее максимума и минимума). Известна и схема нахождения этих важнейших для функции $y = f(x)$ точек через ее производную $y' = f'(x)$ (см. главу 2, §3).

2. Основные понятия, связанные с функциями двух переменных

Пусть $z = f(x; y)$ – произвольная функция двух переменных: x и y – независимые переменные, z – функция от этих переменных. Суть такой функции аналогична сути функции одной переменной: $(x; y) \to z$ (по x и y находится z). Множество D всех тех пар значений независимых переменных $(x; y)$, для которых можно найти зависимую переменную (функцию) z, называется областью определения функции $z = f(x; y)$. Так как каждая пара чисел $(x; y)$

представляет собой некоторую точку плоскости *xoy*, то область определения *D* функции $z = f(x; y)$ состоит из точек этой плоскости. Если функция $z = f(x; y)$определена для любых $(x; y)$, то область *D* будет занимать всю плоскость *xoy*. А если не для любых - то какую-то ее часть. И для каждой точки $M(x; y)$ области *D* можно найти значение величины $z = f(x; y)$ (рис. 6.3).

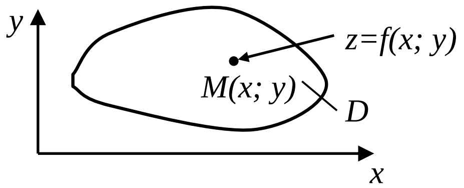


Рис. 6.3

Для наглядности рисунку 6.3 можно придать и какой-нибудь реальный наглядный смысл. Например, можем считать, что *D* – неравномерно нагретая пластинка, а $z = f(x; y)$ – температура в точках $M(x; y)$ этой пластинки. Или на пластинку *D* что-то давит, а $z = f(x; y)$ – давление в точке $M(x; y)$ этой пластинки. Или даже *D* – поле, чем-нибудь засеянное, а $z = f(x; y)$ – урожайность посеянной культуры в точках этого поля. И так далее.

Характер изменения функции $z = f(x; y)$ при изменении ее аргументов *x* и *y* (то есть при изменении точки $M(x; y)$) можно наглядно изобразить на графике функции. График функции $z = f(x; y)$ состоит из точек $N(x; y; z)$ пространства, для которых абсцисса *x* и ордината *y* – это координаты точек $M(x; y)$ её области определения *D*, а аппликата *z* находится по формуле $z = f(x; y)$ (рис. 6.4).

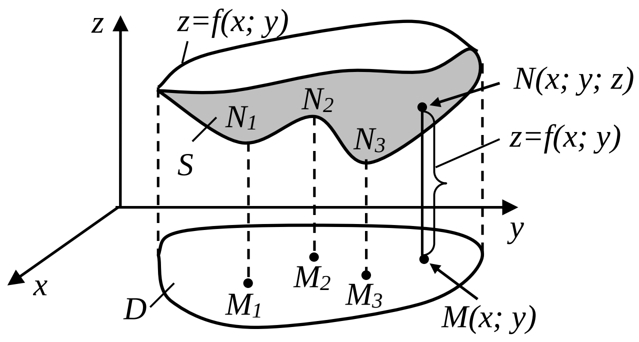


Рис. 6.4

То есть графиком произвольной функции $z = f(x; y)$ в принципе является некоторая поверхность *S* в пространстве. Эта поверхность может иметь вершины и впадины ($N_1; N_2; N_3;$ ...). Их проекции ($M_1; M_2; M_3;$ ...) на плоскость *xoy* (на область определения *D*) называются *точками экстремума функции* (точками ее максимума и минимума). Сравнивая рис. 6.2 и 6.4, легко видеть и то общее, что имеется между точками экстремума функций одной и двух переменных, и в чем разница между ними. Есть и математическая схема нахождения точек экстремума функции $z = f(x; y)$ (через так называемые частные производные этой функции). Но об этом – позже, в §3.

3. Основные понятия, связанные с функциями трех переменных

Пусть $u = f(x; y; z)$ – произвольная функция трех переменных: *x, y, z* – независимые переменные, *u* – функция от этих переменных (зависимая переменная). Суть такой функции: $(x; y; z) \to u$ (по *x, y, z* находится *u*). Множество *D* всех тех троек значений независимых переменных (x, y, z), для которых можно найти зависимую переменную (функцию) *u*, называется областью определения функции $u = f(x; y; z)$. Так как каждая тройка чисел (*x, y*,

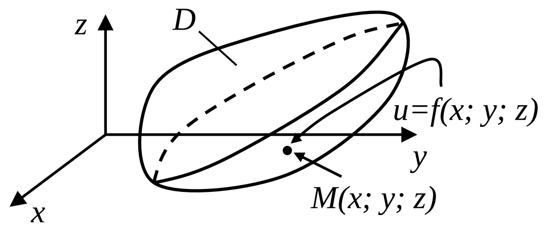


Рис. 6.5

z) представляет собой некоторую точку пространства, то область D определения функции $u = f(x; y; z)$ состоит из точек пространства. Эта область может занимать все пространство или какую-либо его часть. И для каждой точки $M(x, y, z)$ области D можно найти значение величины $u = f(x; y; z)$ (рис. 6.5).

Для наглядности величину u можно представлять себе, например, как температуру в точках $M(x; y; z)$ теперь уже пространственной области D. А можно, разумеется, эту величину $u = f(x; y; z)$ трактовать и совершенно иначе. Например, считать, что u – прибыль предприятия, если продано x единиц продукции этого предприятия при цене y за единицу продукции и при затратах z на произведенную продукцию. И так далее.

Отметим, что графически представить себе ход изменения функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ невозможно, ибо такие функции графика не имеют. Действительно, график функции $u = f(x; y; z)$ должен состоять из точек $N(x; y; z; u)$ с четырьмя координатами, где $u = f(x; y; z)$. То есть из точек четырехмерного пространства, которое физически непредставимо (его используют в математике лишь как математическую абстракцию).

4. Основные понятии, связанные с функциями четырех и более переменных

Пусть, например, функция $u = f(x; y; z; t)$ – произвольная функция четырех переменных $(x; y; z; t)$. Ее область определения D состоит из точек $D(x; y; z; t)$ четырехмерного пространства, то есть наглядно не представима. Графика y этой функции, естественно, тоже нет. Но этой функции, как и функциям большего числа переменных, всегда можно придать самый разнообразный наглядный прикладной смысл. Например, функцию $u = f(x; y; z; t)$ можно считать температурой в пространственной точке $M(x; y; z)$ в момент времени t, когда эта температура меняется со временем (нестационарная температура). Или прибылью от продажи товара при количестве проданного товара x, цене единицы товара y, налоге с продаж z и налоге на прибыль t. Или еще как-нибудь. Естественно, чем от большего числа переменных зависит функция, тем сложнее изучать эту функцию. Наиболее простой случай функции многих переменных – это когда функция зависит лишь от двух переменных. Рассмотрением этого случая мы в основном в дальнейшем и ограничимся.

Упражнения

1. Найти и изобразить на плоскости xoy области определения следующих функций:

$$а)\ z = \frac{1}{x^2 + y^2}; \qquad б)\ z = \frac{1}{x - y}; \qquad в)\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Ответ:

а) $(x \neq 0;\ y \neq 0)$ – *плоскость xoy, за исключением точки* $O(0;0)$.

б) $y \neq x$ – *плоскость xoy, за исключением прямой* $y = x$.

в) $x^2 + y^2 \leq 4$ – круг с центром в тточк $O(0;0)$ и радиусом 2.

2. Дана функция $u = x + y + z$.

а) Найти область определения функции u.

б) Определить те точки $M(x;\ y;\ z)$ области определения функции, для которых $u = 1$.

Ответ:

а) область определения функции u – все пространство *oxyz*;

б) точки плоскости $x + y + z = 1$, которая пересекает оси *ox, oy* и *oz* соответственно в точках $M_1(1;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ 1;\ 0)$, $M_3(0;\ 0;\ 1)$.

§2. Частые производные и полный дифференциал функций многих переменных

Пусть $z = f(x;y)$ – некоторая функция двух переменных. Если зафиксировать одну из переменных (например, y), то функция $z = f(x;y)$ станет функцией лишь одной переменной x. Если теперь найти производную функции z по этой оставшейся переменной x, то эта производная, имеющая несколько разных по форме обозначений

$$z'_x = f'_x(x;y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \quad (\textit{здесь } y = Const), \tag{2.1}$$

называется *частной производной функции z по переменной x.* Аналогично определяется, при фиксированном x и переменном y, *частная производная функции z = f(x; y) по переменной y*:

$$z'_y = f'_y(x;y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \quad (\textit{здесь } x = Const) \tag{2.2}$$

Пример 1. Пусть $z = 2x^2 + y^3 - 3xy^4$. Тогда

$$z'_x = (2x^2 + y^3 - 3xy^4)'_x = 4x + 0 - 3y^4 = 4x - 3y^4;$$
$$z'_y = (2x^2 + y^3 - 3xy^4)'_y = 0 + 3y^2 - 12xy^3 = 3y^2 - 12xy^3.$$

Пользуясь определением производной функции одной переменной (см. главу 2, формулу (1.6)), можем записать и математические определения частных производных функции $z = f(x;\ y)$:

$$\begin{aligned} z'_x &= f'_x(x;y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x;y)}{\Delta x}; \ (y = Const) \\ z'_y &= f'_y(x;y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}; \ (x = Const) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если $u = f(x;y;z)$ – функция трех переменных, то от нее можно вычислить уже три частные производные – по каждой переменной:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x;y;z) \ \ (\textit{здесь}\,(y;\mathrm{z})\text{ - Const})$$
$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x;y;z) \ \ (\textit{здесь}\,(x;\mathrm{z})\text{ - Const}) \qquad (2.4)$$
$$u'_z = \frac{\partial u}{\partial z} = f'_z(x;y;z) \ \ (\textit{здесь}\,(x;\mathrm{y})\text{ - Const})$$

<u>*Пример 2.*</u> Если $u = 2x^2 - y^3 + 5z + 4x^2y^3z^4$, то

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 8xy^3z^4; \quad u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 12x^2y^2z^4; \quad u'_z = \frac{\partial u}{\partial z} = 5 + 16x^2y^3z^3.$$

Совершенно аналогично определяются частные производные функций любого числа переменных.

Все это – так называемые частные производные *первого порядка.* А если от них снова вычислить (взять) частные производные, то получим уже частные производные второго, третьего и т.д. порядков. Например, если $z = f(x;y)$ – функция двух переменных, то

$$(z'_x)'_x = z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad (2.5)$$

– частная производная второго порядка от *z* по *x*;

$$(z'_y)'_y = z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad (2.6)$$

– частная производная второго порядка от *z* по *y*;

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{и} \quad (z'_y)'_x = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad (2.7)$$

– смешанные частные производные второго порядка от *z* по *x* и *y*. Кстати, доказано, что если z''_{xy} и $\mathrm{z}''_{\mathrm{yx}}$ обе существуют, то они и равны:

$$z''_{xy} = z''_{yx} \qquad (2.8)$$

То есть результат вычисления смешанных производных не зависит от порядка дифференцирования (если это дифференцирование возможно и в том, и в другом порядке).

<u>*Пример 3*</u>. Пусть $z = 2x^2 + y^3 - 3xy^4$. Тогда

$$z'_x = 4x - 3y^4; \ z'_y = 3y^2 - 12xy^3; \ z''_{x^2} = (z'_x)'_x = 4; \ z''_{y^2} = (z'_y)'_y = 6y - 36xy^2;$$
$$\mathrm{z}''_{\mathrm{xy}} = (z'_x)'_y = -12y^3; \ \mathrm{z}''_{\mathrm{yx}} = (z'_y)'_x = -12y^3.$$

<u>Примечание</u>. В обозначениях (2.1) – (2.7) для частных производных значок ∂ – с кривым хвостом! В этом его отличие от прямого значка *d*, применяемого в обозначения (1.4), (2.10), (2.11) главы 2 для обычных производных функций одной переменной.

Полный дифференциал функции многих переменных

Для начала рассмотрим это понятие на примере функции двух переменных $z = f(x;y)$. Для этого рассмотрим приращение Δz функции z при условии, что аргументы x и y получат некоторые приращения Δx и Δy:

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y) = \\
&= f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y) + f(x; y+\Delta y) - f(x;y) = \\
&= \frac{f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y)}{\Delta x}\cdot\Delta x + \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}\cdot\Delta y
\end{aligned} \qquad 2.9)$$

Если Δx и Δy малы, то согласно (2.3)

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y)}{\Delta x} \approx f'_x(x; y+\Delta y) \approx f'_x(x;y) \\
&\frac{f(x; y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y} \approx f'_y(x;y)
\end{aligned} \qquad (2.10)$$

Приближенные равенства (2.10) будут тем точнее, чем меньше Δx и Δy. При этом выражение (2.9) для Δz примет вид:

$$\Delta z = \Delta f(x;y) \approx f'_x(x;y)\cdot\Delta x + f'_y(x;y)\cdot\Delta y \qquad (2.11)$$

А теперь будем считать Δx и Δy не просто малыми, а *бесконечно малыми*. В этом случае обозначим их символами dx и dy соответственно и будем называть *дифференциалами аргументов x и y:*

$$\begin{aligned}
&dx \text{ – это бесконечно малое } \Delta x; \\
&dy \text{ – это бесконечно малое } \Delta y.
\end{aligned} \qquad (2.12)$$

При бесконечно малых приращениях аргументов $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$ и приращение функции Δz будет, согласно (2.11), бесконечно малым. Обозначим его символом dz и будем называть *дифференциалом функции z:*

$$dz \text{ – это бесконечно малое } \Delta z \qquad (2.13)$$

При $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$ и $\Delta z = dz$ приближенное равенство (2.11) станет уже *точным:*

$$dz = df(x;y) = f'_x(x;y)dx + f'_y(x;y)dy \qquad (2.14)$$

Или короче:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (2.15)$$

Выражения (2.14) и (2.15) представляют собой так называемый *полный дифференциал функции $z = f(x;y)$ в точке $(x;y)$.*

Аналогично, если $u = f(x;y;z)$ – функция трех переменных, то ее полный дифференциал du в точке $(x;y;z)$ найдется по формуле:

$$du = df(x;y;z) = f_x'(x;y;z)dx + f_y'(x;y;z)dy + f_z'(x;y;z)dz \qquad (2.16)$$

Или короче:

$$du = u_x'dx + u_y'dy + u_z'dz; \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (2.17)$$

А конечное приращение Δu такой функции, соответствующее конечным приращениям Δx, Δy и Δz ее аргументов, найдется по приближенной формуле (2.18), аналогичной формуле (2.11):

$$\Delta u = \Delta f(x;y;z) \approx f_x'(x;y;z)\Delta x + f_y'(x;y;z)\Delta y + f_z'(x;y;z)\Delta z \qquad (2.18)$$

Эта формула тем точнее, чем меньше Δx, Δy и Δz.

Полные дифференциалы функций многих переменных являются аналогами полного дифференциала функции одной переменной $y = f(x)$, который, согласно формуле (5.7) главы 2, определяется равенством:

$$dy = df(x) = f'(x)dx \qquad (2.19)$$

Полные дифференциалы функций многих переменных – это абстрактные понятия. Они, как и дифференциал функции одной переменной, имеют в основном теоретическое значение. А вот приближенные формулы (2.11), (2.18) и им подобные, определяющие конечное приращение функции при конечных приращениях ее аргументов, широко применяются в расчетах и на практике.

Пример 4. При измерении размеров цилиндра (его радиуса основания R и его высоты h) из-за несовершенства измерительных приборов возможно допущение малых ошибок ΔR и Δh соответственно. Найти максимально возможные абсолютную и относительную ошибки при вычислении объема V цилиндра.

Решение. Объем цилиндра $V = \pi R^2 h$ – функция двух переменных R и h. Поэтому, используя формулу (2.11), получим следующее приближенное выражение для *абсолютной ошибки* ΔV при вычислении объема цилиндра V:

$$\Delta V \approx V_R' \cdot \Delta R + V_h' \cdot \Delta h = 2\pi Rh \cdot \Delta R + \pi R^2 \cdot \Delta h \qquad (2.19)$$

Ошибки ΔR и Δh могут быть любых знаков. При разных знаках этих ошибок они будут друг друга компенсировать, поэтому ошибка ΔV объема цилиндра может быть весьма незначительной. Максимально возможной она будет в том случае, если ΔR и Δh будут одинаковых знаков (скажем, обе со знаком (+)). При этом максимально возможная *относительная ошибка* при вычислении объема V найдется по формуле:

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{2\pi Rh \cdot \Delta R + \pi R^2 \cdot \Delta h}{\pi R^2 h} = 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} \tag{2.21}$$

Упражнения

1. Найти частные производные первого порядка функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

<u>*Ответ:*</u> $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

2. Найти частные производные функции $z = \frac{y}{x}$ первого и второго порядков.

<u>*Ответ:*</u> $z'_x = -\frac{y}{x^2}$; $z'_y = \frac{1}{x}$; $z''_{x^2} = \frac{2y}{x^3}$; $z''_{y^2} = 0$; $z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{1}{x^2}$

3. Найти приближенное приращение Δz функции $z = x^2 y$ в точке $M(1;\ 2)$ при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}2$. Сравнить полученное приближенное значение Δz с его точным значением.

<u>*Ответ:*</u>

$$\Delta z \approx z'_x \cdot \Delta z + z'_y \cdot \Delta y = 2xy \cdot \Delta x + x^2 \cdot \Delta y = \begin{vmatrix} x = 1;\ y = 2 \\ \Delta x = 0{,}1;\ \Delta y = -0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}2 \text{ – приближенно}$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 \cdot (y + \Delta y) - x^2 y = (1 + 0{,}1)^2 \cdot (2 - 0{,}2) - 1^2 \cdot 2 = 0{,}178 \text{ – точно.}$$

4. При измерении на местности треугольника получены следующие данные: сторона $a = 100м \pm 2м$; сторона $b = 200м \pm 3м$; угол между ними $\alpha = 60° \pm 1°$. С какой степенью точности (с какой максимальной погрешностью) будет вычислена сторона c ?

<u>*Ответ:*</u> максимальная погрешность для c составит $\pm 4{,}35$м.

5. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = x^y$.

6. Подсчитать приближенно изменение $\Delta\varphi$ функции $\varphi = arctg\frac{y}{x}$, когда x изменяется от 2 до 2,1, а y от 3 до 2,8.

<u>*Ответ:*</u> $\Delta\varphi \approx 0{,}054$.

7. Дана функция $z = \sqrt{x} \cdot \sin\frac{y}{x}$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.

§3. Исследование функций многих переменных на экстремум

Исследование функций многих переменных на экстремум – процедура гораздо более сложная, чем аналогичная процедура для функций одной переменной. Поэтому ограничимся рассмотрением этого вопроса на наиболее простом и наглядном примере функции двух переменных $z = f(x; y)$ (рис. 6.4). Здесь $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ – точки экстремума этой функции. А именно, точки M_1 и M_3 – точки минимума функции, а точка M_2 – точка ее максимума. На рис. 6.4 представлена функция с тремя точками экстремума, но этих точек, естественно, может быть и больше, и меньше.

Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – точка какого-либо экстремума (точка максимума или точка минимума) функции $z = f(x;y)$. Тогда справедлива

Теорема 1.

Если в точке экстремума $M_0(x_0;\ y_0)$ существуют частные производные $z'_x = f'_x(x_0;y_0)$ и $z'_y = f'_y(x_0;y_0)$, то обе они равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0;y_0) = 0 \\ f'_y(x_0;y_0) = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Доказательство.

1) Рассмотрим функцию $f_1(x) = f(x;y_0)$. Так как $f_1(x_0) = f(x_0;y_0)$ – экстремальное значение этой функции, то производная $f'(x)$ этой функции при $x = x_0$, если она существует, равна нулю:

$$f'_1(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'_x(x_0;y_0) = 0 \qquad (3.2)$$

2) Рассмотрим теперь функцию $f_2(y) = f(x_0;y)$. Так как $f_2(y_0) = f(x_0;y_0)$ – экстремальное значение этой функции, то производная $f'_2(y)$ этой функции при $y = y_0$, если она существует, равна нулю:

$$f'_2(y_0) = 0 \Leftrightarrow f'_y(x_0;y_0) = 0 \qquad (3.3)$$

Теорема доказана.

Заметим, что условия (3.1) являются *лишь необходимыми* условиями экстремума в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ дифференцируемой в этой точке функции $z = f(x;y)$. То есть эти условия не являются достаточными условиями того, что в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ функция $z = f(x;y)$ будет иметь экстремум (максимум или минимум). Иначе говоря, точка $M_0(x_0;\ y_0)$, в которой выполняются оба равенства (3.1), является *лишь подозрительной* на экстремум точкой для функции $z = f(x;y)$. Окончательный вывод о характере такой подозрительной на экстремум точки можно сделать с помощью следующей теоремы (приведем ее без вывода):

Достаточные условия экстремума. *Теорема* 2.

Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ – такая точка из области D определения функции $z = f(x;y)$, что для нее выполняются необходимые условия (3.1) экстремума этой функции. То есть $M_0(x_0;\ y_0)$ – подозрительная на экстремум точка. Найдем в этой точке числа

$$A = f''_{x^2}(x_0;y_0); \quad B = f''_{xy}(x_0;y_0); \quad C = f''_{y^2}(x_0;y_0); \quad \Delta = AC - B^2 \qquad (3.4)$$

Тогда:

1) Если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то $M_0(x_0;\ y_0)$ – точка минимума функции $z = f(x;y)$.

2) Если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то $M_0(x_0;\ y_0)$ – точка максимума функции $z = f(x;y)$.

3) Если $\Delta < 0$, то точка $M_0(x_0;\ y_0)$ – не точка экстремума функции $z = f(x;y)$.

4) Если $\Delta = 0$, то вопрос остается открытым. Нужно дополнительное исследование функции $z = f(x;y)$ с привлечением ее частных производных порядка выше второго. Как это делается – рассматривать не будем.

5) *<u>Пример 1.</u>* Пусть x и y – количества двух произведенных товаров; $p_1 = 8$ руб. и $p_2 = 10$ руб. – цена единицы каждого из этих товаров соответственно; $C = 0{,}01(x^2 + xy + y^2)$ – функция затрат (в рублях) на производство этих товаров. Тогда доход R от продажи товаров составит $R = 8x + 10y$ (руб.), а прибыль $П$ составит (в рублях)

$$П = R - C = 8x + 10y - 0{,}01(x^2 + xy + y^2).$$

Найдем объемы x и y товаров, при которых прибыль $П$ будет максимальной.

1) Сначала найдем значения $(x;y)$, подозрительные на экстремум для функции $П$:

$$\begin{cases} П'_x = 0 \\ П'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 0{,}01(2x + y) = 0 \\ 10 - 0{,}01(x + 2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 400 \end{cases}$$

2) Теперь исследуем найденную подозрительную на экстремум для функции $П$ точку $M_0(200;\ 400)$. Для этого найдем в этой точке значения A, B, C, Δ, определяемые выражениями (3.4). Так как

$$П''_{x^2} = (П'_x)'_x = -0{,}02;\ П''_{xy} = (П'_x)'_y = -0{,}01;\ П''_{y^2} = (П'_y)'_y = -0{,}02,$$

и это верно для любых $(x;\ y)$, а значит, и в точке $M_0(200;\ 400)$, то

$$A = П''_{x^2} = -0{,}02;\quad B = П''_{xy} = -0{,}01;\quad C = П''_{y^2} = -0{,}02;\quad Δ = AC - B^2 = 0{,}0003.$$

Так как $\Delta > 0$, а $A < 0$, то точка $M_0(200;\ 400)$ – точка максимума функции $П$. То есть прибыль $П$ от продаж будет максимальной при $x = 200$ *(ед)* и $y = 400$ *(ед)*.

<u>Пример 2.</u> Найти точки экстремума и экстремальные значения функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

<u>Решение</u>. Данная функция z – функция двух переменных, определенная для любых x и y, то есть на всей плоскости xoy, и имеющая в каждой ее точке частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x;\qquad z'_y = 2xy + 2y$$

Сначала найдем точки плоскости xoy, подозрительные на экстремум для данной функции z:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(0;0) \\ M_2(-\frac{5}{3};0) \\ M_3(-1;2) \\ M_4(-1;-2) \end{array} \right.$$

Затем, найдя частные производные второго порядка от функции z, запишем выражения для A, B, C, Δ:

$$A = z''_{x^2} = 12x + 10;\qquad B = z''_{xy} = 2y;\qquad C = z''_{y^2} = 2x + 2;\qquad Δ = AC\text{-}B^2$$

Вычисляя теперь числовые значения этих величин для каждой из четырех подозрительных на экстремум точек, получим следующие выводы об этих точках:

$A(M_1)=10;\ B(M_1)=0;\ C(M_1)=2;\ \Delta(M_1)=20;\Rightarrow M_1(0;0)$ - точка min.

$A(M_2)=-10;\ B(M_2)=0;\ C(M_2)=-\frac{4}{3};\ \Delta(M_2)=\frac{40}{3};\Rightarrow M_2(-\frac{5}{3};0)$ - точка max.

$A(M_3)=-2;\ B(M_3)=4;\ C(M_3)=0;\ \Delta(M_3)=-16;\Rightarrow M_3(-1;2)$ - не точка экстремума.

$A(M_4)=-2;\ B(M_4)=-4;\ C(M_4)=0;\ \Delta(M_4)=-16;\Rightarrow M_3(-1;-2)$ - не точка экстремума.

Теперь найдем два экстремальных значения функции z, определяющие высоту впадины и вершины графика этой функции:

$$z(M_1)=z(0;0)=0; \qquad z(\mathrm{M}_2)=z(-\frac{5}{3};0)=\left(\frac{5}{3}\right)^3.$$

Определение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $z=f(x;y)$ – некоторая непрерывная функция двух переменных, рассматриваемая в замкнутой области $\overline{D}=D+\varGamma$, где D – внутренняя часть области $\overline{D}$, а $\varGamma$ – ее граница (рис. 6.6).

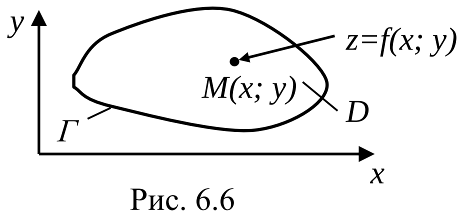


Рис. 6.6

То, что функция $z=f(x;y)$ непрерывна в области $\overline{D}$, означает, что график этой функции (поверхность в пространстве) является сплошной (без разрывов) поверхностью для всех $(x;y)\in\overline{D}$. То есть понятие непрерывности функции двух переменных аналогично понятию непрерывности функции одной переменной (см. главу 1, §2). Как и функции одной переменной, функции двух переменных, образованные из элементарных функций, непрерывны для всех значений своих аргументов, для которых они определены. Это касается и функций трех, четырех и более переменных.

Вернемся к рис. 6.6. Поставим следующий вопрос: в каких точках области $\overline{D}$ функция $z=f(x;y)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений $z_{наиб}$ и $z_{наим}$? И каковы эти значения? Заметим, что эта задача аналогична той, что была рассмотрена в §3 главы 2 для функции одной переменной $y=f(x)$, рассматриваемой на замкнутом отрезке $[a;\ b]$ оси ox.

Очевидно, что искомые точки области $\overline{D}$, в которых функция $z=f(x;y)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений, содержатся либо среди точек экстремума этой функции, находящихся внутри области $\overline{D}$ (в области D), либо находятся где-то на границе $\varGamma$ этой области. В замкнутой области $\overline{D}$ такие точки заведомо найдутся (теорема Вейерштрасса). А в открытой области D (без границы $\varGamma$) таких точек может и не быть.

Из сказанного выше вытекает следующая *схема нахождения этих точек*, аналогичная той, что была изложена в §3 главы 2 для функций одной переменной.

1. Находим все подозрительные на экстремум точки функции $z = f(x;y)$, находящиеся в области D. Это – те точки, в которых обе частные производные $z_x^{'}$ и $z_y^{'}$ равны нулю (или одна равна нулю, а другая не существует; или обе не существуют).

2. Находим все подозрительные на экстремум точки функции $z = f(x;y)$, находящиеся на границе $Г$ области $\overline{D}$. При этом используем уравнение границы $Г$.

3. Не исследуя найденные в пунктах 1 и 2 подозрительные точки (это излишне), находим значения функции $z = f(x;y)$ во всех найденных подозрительных точках и выбираем те из них, где z будет наибольшим и наименьшим.

<u>*Пример 3.*</u> Найти $z_{наиб}$ и $z_{наим}$ функции $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, рассматриваемой в замкнутой области $\overline{D}$, представляющей собой треугольную пластинку с вершинами $O(0;\,0)$, $A(1;\,0)$, $B(0;\,1)$ (рис. 6.7).

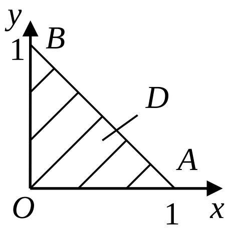


Рис. 6.7

<u>*Решение.*</u> Выполним изложенную выше схему.

1. Найдем внутри треугольника (в области D) точки, подозрительные на экстремум для нашей функции z. Для этого сначала найдем частные производные первого порядка $z_x^{'}$ и $z_y^{'}$:

$$z_x^{'} = 6x - 2; \quad z_y^{'} = 6y - 2.$$

Эти производные существуют (их можно вычислить) для любых *(x; y)*. Следовательно, точками, подозрительными на экстремум, будут лишь те, для которых обе эти частные производные равны нулю:

$$\begin{cases} z_x^{'} = 0 \\ z_y^{'} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2 = 0 \\ 6y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{1}{3};\frac{1}{3}).$$

Точка $M(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$, очевидно, принадлежит области D (рассматриваемому треугольнику). То есть она – подозрительная на экстремум точка для заданной функции z внутри треугольника, причем такая она там единственная.

2. Найдем теперь точки, подозрительные на экстремум, на границе треугольника.

а) Исследуем сначала участок OA границы ($y = 0$; $0 \le x \le 1$). На этом участке $z = 3x^2 - 2x + 2$ $(0 \le x \le 1)$ – функция одной переменной x. Ее производная $z' = 6x - 2$ существует для всех $x \in [0;\,1]$. Поэтому свои экстремальные значения функция z может иметь или в точке, где $z' = 0$, то есть в точке $M_1(\frac{1}{3};0)$, или на концах отрезка OA, то есть в точках $O(0;\,0)$ и $A(1;\,0)$.

б) Исследуем теперь участок *OB* границы треугольника (там $x = 0$; $0 \le y \le 1$). На этом участке функция $z = 3y^2 - 2y + 2$ ($0 \le y \le 1$) – функция одной переменной *y*. Повторяя рассуждения пункта (а), приходим к выводу, что свои экстремальные значения функция *z* может иметь или в точке $M_2(0; \frac{1}{3})$, или на концах отрезка *OB*, то есть в точках *O*(0; 0) и *B*(0; 1).

в) Наконец, исследуем участок *AB* границы. Так как на *AB* (убедитесь в этом) $y = -x + 1$ ($0 \le x \le 1$), то там функция *z* принимает вид: $z = 6x^2 - 6x + 3$ ($0 \le x \le 1$). Ее производная $z' = 12x - 6$, поэтому своих экстремальных значений функция *z* может достигать лишь в точке, где $z' = 0$, то есть в точке $M_3(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, либо на концах отрезка *AB*, то есть в точках *A* и *B*.

Итак, полный набор подозрительных на экстремум точек функции $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в треугольнике *OAB* таков:

$$M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}); \quad M_1(\frac{1}{3}; 0); \quad M_2(0; \frac{1}{3}); \quad M_3(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}); \quad O(0; 0); \quad A(1; 0); \quad B(0; 1).$$

3. А теперь найдем значения функции *z* во всех найденных подозрительных точках и выберем из этих значений наибольшее значение $z_{наиб}$ и наименьшее значение $z_{наим}$:

$$z(M) = 1\frac{1}{3}; \quad z(M_1) = 1\frac{2}{3}; \quad z(M_2) = 1\frac{2}{3}; \quad z(M_3) = 1\frac{1}{2}; \quad z(O) = 2; \quad z(A) = 3; \quad z(B) = 3.$$

Таким образом, $z_{наиб} = 3$ и достигается функцией *z* в треугольнике *OAB* сразу в двух точках – в его вершинах *A* и *B*. А $z_{наим} = 1\frac{1}{3}$ и достигается функцией *z* в треугольнике *OAB* в его внутренней точке $M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$..

<u>*Пример 4.*</u> Городской бюджет имеет возможность потратить на социальное жилье не более 600 млн. рублей, располагая при этом проектами и участками земли под 10 пятиэтажных домов на 90 квартир каждый и под 8 девятиэтажных домов на 120 квартир каждый. Средняя сметная стоимость одной квартиры в пятиэтажном доме составляет 400 тысяч рублей, а в девятиэтажном 500 тысяч рублей. Сколько пятиэтажных и сколько девятиэтажных домов должен построить город, чтобы получить максимальное число квартир?

<u>*Решение*</u>. Пусть *x* – искомое количество пятиэтажных домов, *y* – девятиэтажных, а *z* – общее количество квартир в этих домах:

$$z = 90x + 120y$$

Стоимость всех квартир в пятиэтажных домах составит $90 \cdot 0{,}4 \cdot x = 36x$ млн. рублей, а в девятиэтажных $120 \cdot 0{,}5 \cdot y = 60y$ млн. рублей. Согласно условиям задачи имеем:

$$0 \le x \le 10; \quad 0 \le y \le 8; \quad 36x + 60y \le 600$$

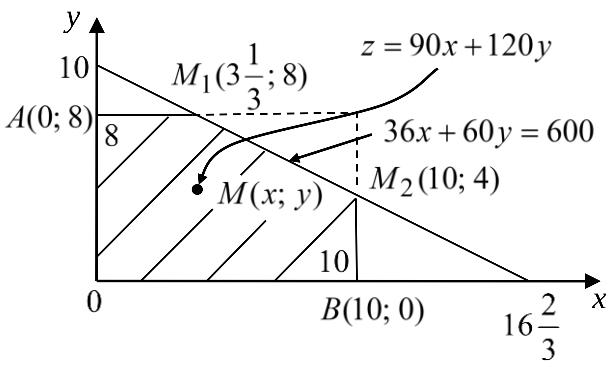


Рис. 6.8

Данные ограничительные неравенства выполняются, очевидно, в пятиугольнике $\overline{D} = OAM_1M_2B$ (рис. 6.8). В этой замкнутой области $\overline{D}$ нужно найти точку *M(x; y)*, для которой функция $z = 90x + 120y$ примет наибольшее значение $z_{наиб}$.

Реализуем изложенную выше схему решения такого рода задач.

1. Найдем внутри пятиугольника точки, подозрительные на экстремум для функции *z*. Так как $z'_x = 90,\ z'_y = 120$, и эти частные производные заведомо не равны нулю, то подозрительных на экстремум точек внутри пятиугольника нет.

2. Найдем точки, подозрительные на экстремум, на границах пятиугольника. На каждом из пяти отрезков, составляющих границу пятиугольника, функция *z* – линейная функция вида $z = ax + by$, а следовательно, своих наибольшего и наименьшего значений она достигает на границах отрезков. То есть искомое наибольшее значение $z_{наиб}$ функция *z* достигает в одной из угловых точек *(O; A; M_1; M_2; B)*. Вычисляя значение *z* в этих точках, получим:

$$z(O) = 0;\ z(A) = 960;\ z(M_1) = 1260;\ z(M_2) = 1380;\ z(B) = 900.$$

Таким образом $z_{наимб} = 1380$ и достигается оно в точке $M_2(10; 4)$. То есть наибольшее число квартир (1380) получится, если будут построены 10 пятиэтажных домов и 4 девятиэтажных.

Упражнения

1. Найти точки экстремума функций:

а) $z = 2x + 3y - x^2 - xy - y^2$; б) $z = x^2 - y^2$; в) $z = x^4 + y^4$.

<u>*Ответ:*</u>

а) $M_0(\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3})$ - точка max; б) нет точек экстремума; в) $M_0(0; 0)$ – точка min.

2. Найти $z_{наиб}$ и $z_{наим}$ функции $z = x^2 - 2xy + 3$, рассматриваемой в замкнутой области, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и осью *ox*.

<u>*Ответ:*</u>

$z_{наиб} = 10\frac{19}{27}$ и достигается в точке $M(-1\frac{1}{3}; 2\frac{2}{9})$.

$z_{наим} = -2$ и достигается в точке $N(1; 3)$.

3. Городской бюджет имеет возможность потратить на социальное жилье не более 600 млн. рублей, располагая при этом проектами и участками земли под 8 пятиэтажных домов на 90 квартир каждый и под 5 девятиэтажных домов на 120 квартир каждый. Средняя сметная стоимость одной квартиры в пятиэтажном доме составляет 600 тысяч рублей, а в девятиэтажном 800 тысяч

рублей. Сколько пятиэтажных и сколько девятиэтажных домов должен построить город, чтобы получить максимальное число квартир?

Ответ: 7 пятиэтажных и 2 девятиэтажных.

4. Транспортное предприятие имеет возможность приобрести не более 12 трехтонных и не более 10 пятитонных автомобилей. Цена трехтонного автомобиля составляет 360 тыс. рублей, пятитонного 540 тыс. рублей. Сколько нужно приобрести автомобилей, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной, если для приобретения автомобилей выделено 7 млн. 200 тыс. рублей.

Ответ: 5 трехтонных и 10 пятитонных.

Литература

1. Под ред. Кремера Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Второе издание, переработанное и дополненное. Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российский Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям. А., «Банки и биржи», 1998.

2. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям. А., «Инфра – М», 1999.

3. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике (в трех частях). Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов экономических специальностей высших учебных заведений. М., «Финансы и статистика», 2000.

4. Малыхин В.И. Математика в экономике. Учебное пособие для экономических специальностей. М., «Инфра – М», 2002.

5. Комогорцев В.Ф., Бардадын Н.Н. Дискретная математика. ФГБОУ «Брянская ГСХА», 2012.

Учебное издание

Комогорцев Владимир Филиппович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

для студентов
сельскохозяйственного вуза

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 26.02.2014 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л.11,68. Тираж 150 экз. Изд. 2612.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА