ФГБОУ ВО «Брянский государственный
аграрный университет»

Кафедра математики, физики и информатики

Ракул Е.А.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СПЕЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Методические указания для бакалавров заочной формы обучения направлений подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Брянская область 2018 г.

ББК 22.1
УДК 51(076)
Р 19

Ракул, Е. А. Задания для самостоятельной работы по дисциплине «Специальная математика»: методические указания для бакалавров заочной формы обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств / Е. А. Ракул. − Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2018. – 31 с.

Рецензенты:
Рыжик В.Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры математики, физики и информатики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования, протокол № 6 от 10.04.2018 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Операционное (*символическое*) *исчисление* применяется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и интегральных уравнений типа свёртки, к которым приводятся задачи по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники.

В учебно-методическом пособии приведены основные понятия операционного исчисления на основе преобразования Лапласа, показано его приложение при решении дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрены различные способы нахождения оригиналов для заданных изображений и способы нахождения изображений для заданных оригиналов. Подобраны 25 вариантов заданий для самостоятельного решения, которые помогут в отработке навыка нахождения оригиналов и изображений.

Правила выполнения и оформления работ

1. Каждая работа должна быть выполнена на листах формата А4 с рамкой и подшита в скоросшиватель.
2. На титульном листе должны быть написаны фамилия, инициалы, номер зачетной книжки студента, название дисциплины, название учебного заведения.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту.
4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания номеров задания, сохраняя номера задач.
5. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, делая необходимые чертежи.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

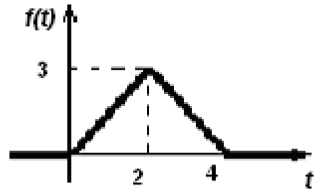
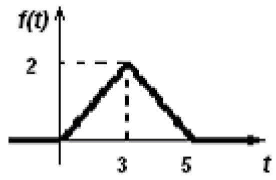
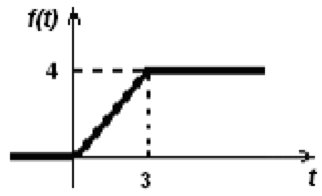
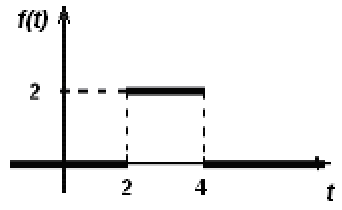
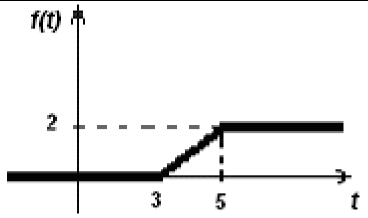
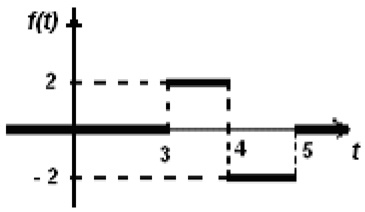
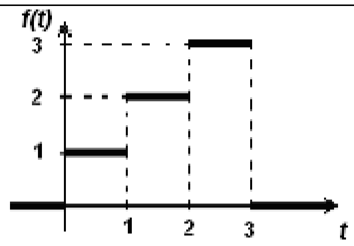
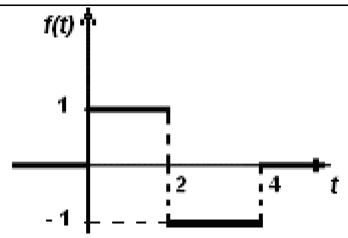
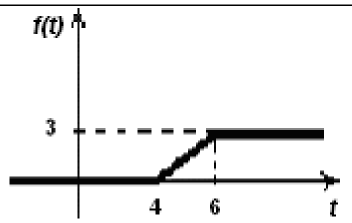
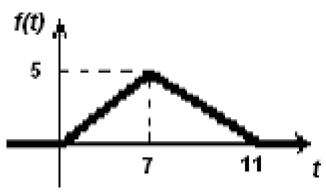
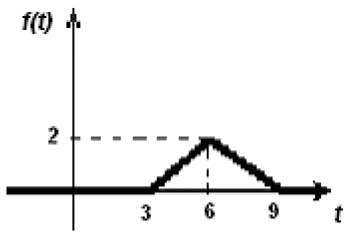
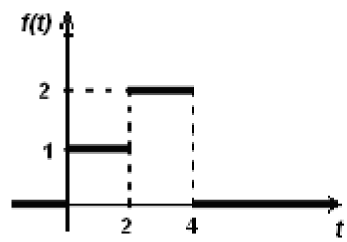
Задача 1. Пользуясь свойством линейности, найти изображение функции $f(t)$.

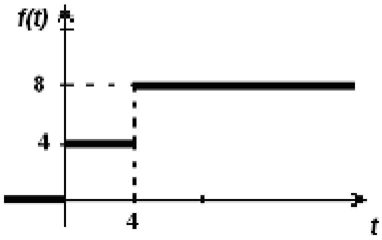
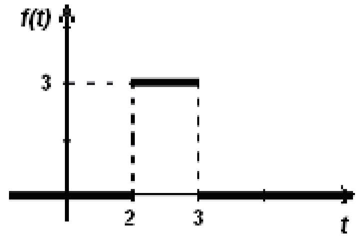
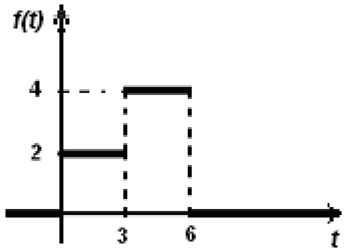
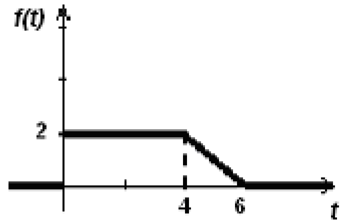
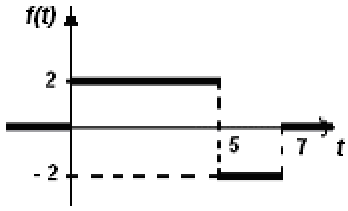
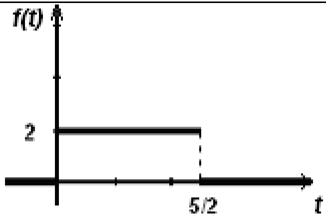
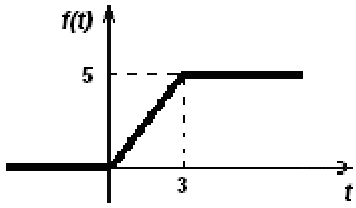
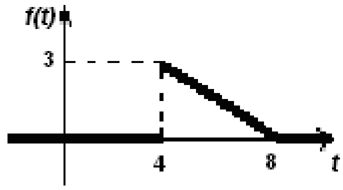
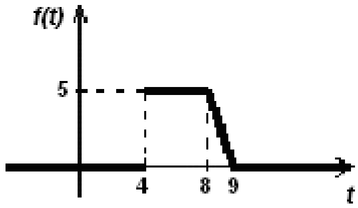
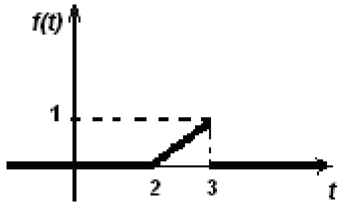
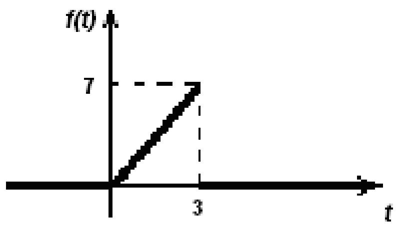
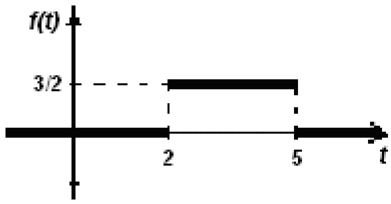
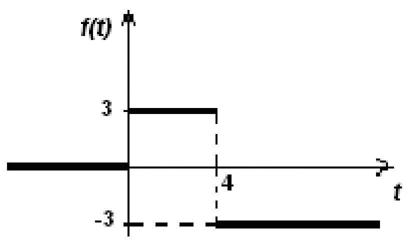
1.1	$f(t)=5sh\,t-4\cos t$	**1.14**	$f(t)=3ch\,t+2sht$
1.2	$f(t)=5\cos t-7\sin t$	**1.15**	$f(t)=3+2e^{t}$
1.3	$f(t)=12+\frac{1}{3}\cos t$	**1.16**	$f(t)=3t-\frac{5}{7}\sin t$
1.4	$f(t)=3t-4\sin t$	**1.17**	$f(t)=5\cos t-1$
1.5	$f(t)=16+2\sin t$	**1.18**	$f(t)=-5t+14cht$
1.6	$f(t)=\frac{1}{2}(ch\,t+\cos t)$	**1.19**	$f(t)=\frac{1}{2}(ch\,t-\cos t)$
1.7	$f(t)=\frac{1}{2}(sh\,t+\sin t)$	**1.20**	$f(t)=\frac{1}{2}(sh\,t-\sin t)$
1.8	$f(t)=e^{t}+2sh\,t$	**1.21**	$f(t)=e^{t}-3t$
1.9	$f(t)=e^{t}+5\sin t$	**1.22**	$f(t)=15e^{t}-7$
1.10	$f(t)=12-\frac{2}{3}\sin t$	**1.23**	$f(t)=\frac{4}{5}(\cos t-2)$
1.11	$f(t)=3+2e^{4t}$	**1.24**	$f(t)=5ch\,t+1$
1.12	$f(t)=t^{2}-4\sin t$	**1.25**	$f(t)=2e^{t}-4ch\,t$
1.13	$f(t)=8(11\cos t-2)$		

Задача 2. Пользуясь теоремой подобия, найти изображение функции $f(t)$.

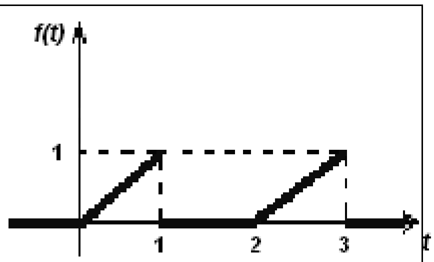
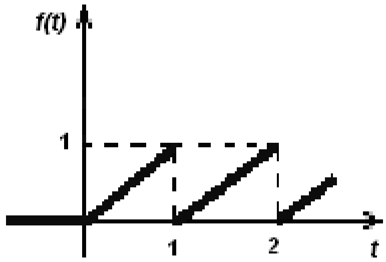
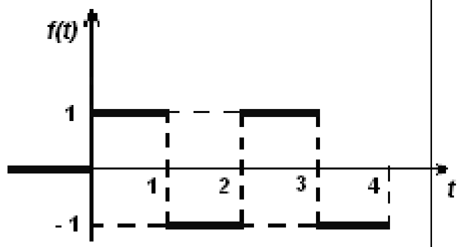
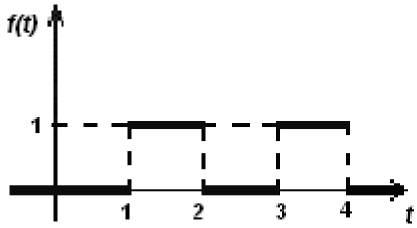
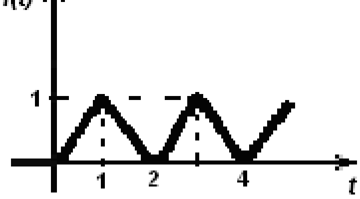
2.1	$f(t)=\sin 2t-\cos 3t$	**2.14**	$f(t)=5\sin 13t+ch\ 4t$
2.2	$f(t)=\sin 7t-2$	**2.15**	$f(t)=7\sin 9t+e^{t}$
2.3	$f(t)=\sin 23t-5\sin 2t$	**2.16**	$f(t)=\cos 5t+13$
2.4	$f(t)=4\cos 6t-33$	**2.17**	$f(t)=\cos\ 2t+12$
2.5	$f(t)=1-4\cos\ 4t$	**2.18**	$f(t)=-\cos\ 10t-10\cos\ 4t$
2.6	$f(t)=sh\,12t+5\cos\ 5t$	**2.19**	$f(t)=sh\ 7t-\cos\ 21t$
2.7	$f(t)=sh\ 4t+\cos\ 11t$	**2.20**	$f(t)=3\,ch\,13t+13\,ch\,3t$
2.8	$f(t)=\sin\ 14t+5\ sh\ 5t$	**2.21**	$f(t)=ch\,17t-7\,sh\ 7t$
2.9	$f(t)=-\frac{3}{4}\cos\ 4t+ch\ 12t$	**2.22**	$f(t)=\frac{12}{17}-\cos 11t$
2.10	$f(t)=ch\ 13t-\frac{5}{13}$	**2.23**	$f(t)=\frac{3}{5}\ sh\ 9t-17$
2.11	$f(t)=33\sin 5t-33$	**2.24**	$f(t)=11\,ch\ 5t+5\sin\ 5t$
2.12	$f(t)=-ch\ 4t-ch\ 14t$	**2.25**	$f(t)=\cos\ 3t+\sin\ 7t$
2.13	$f(t)=-sh\ 6t-\frac{6}{7}\sin\ t$		

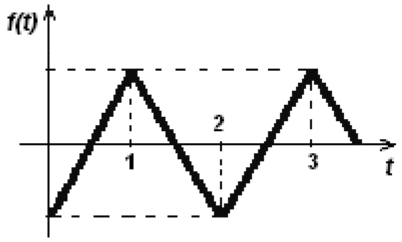
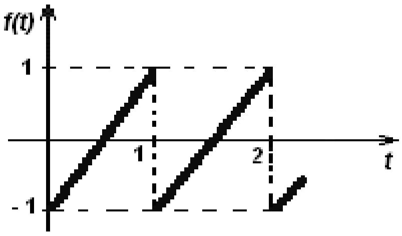
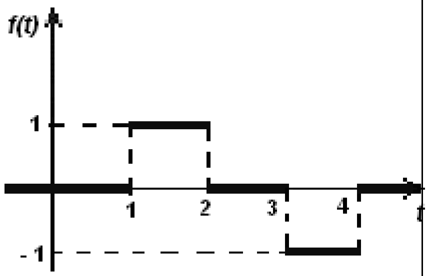
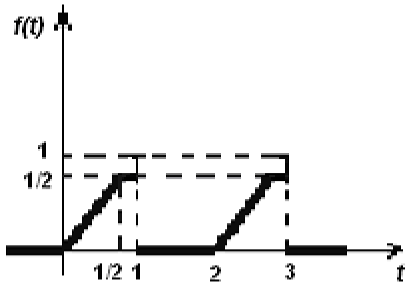
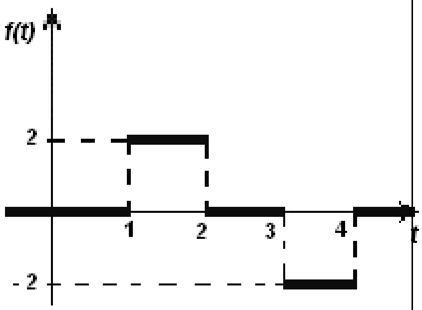
Задача 3. Найти изображения кусочно-непрерывных функций, пользуясь теоремой запаздывания.

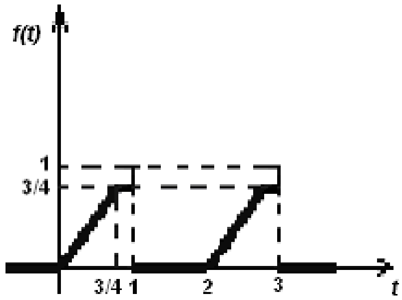
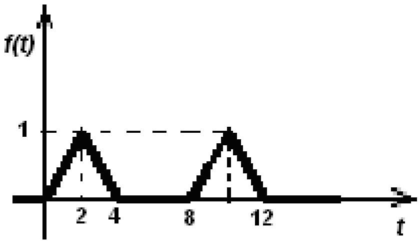
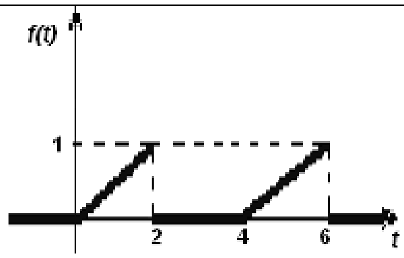
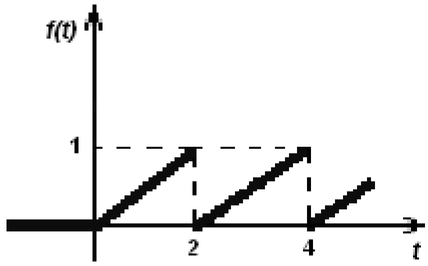
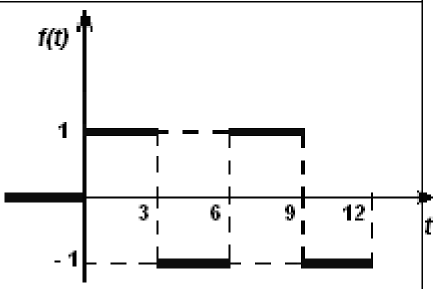
3.1		**3.14**	
3.2		**3.15**	
3.3		**3.16**	
3.4		**3.17**	
3.5		**3.18**	
3.6		**3.19**	

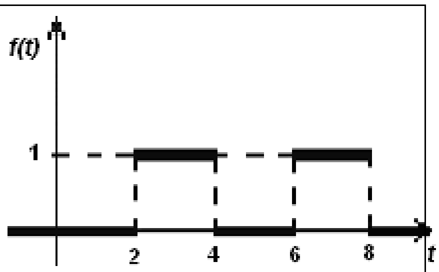
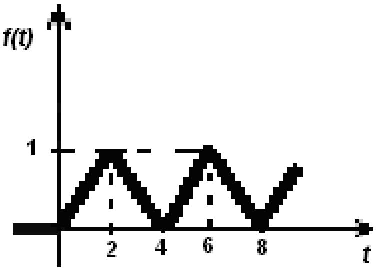
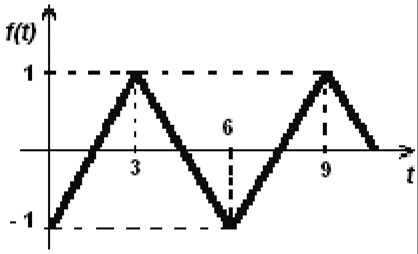
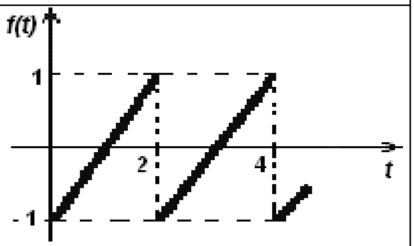
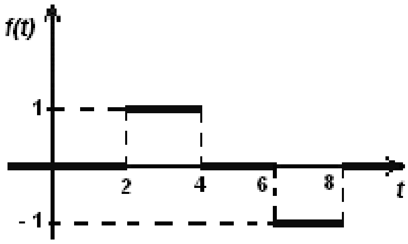
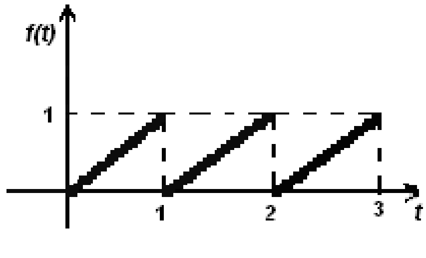
3.7		**3.20**	
3.8		**3.21**	
3.9		**3.22**	
3.10		**3.23**	
3.11		**3.24**	
3.12		**3.25**	
3.13			

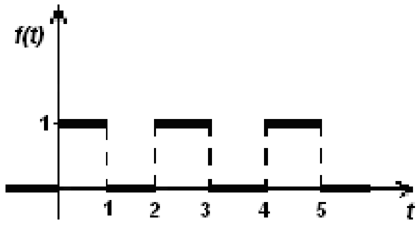
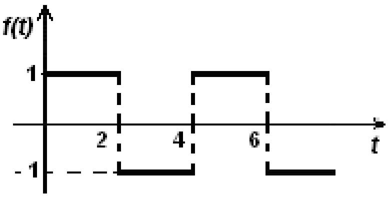
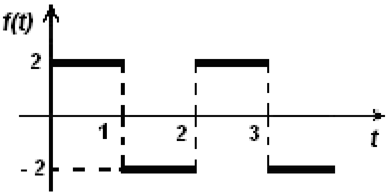
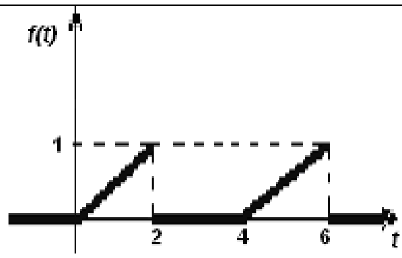
Задача 4. Найти изображение периодической функции.

<table>
<tr><td>4.1</td><td>$$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} t-2n, & 2n<t<2n+1,\\ 0, & 2n+1<t<2n+2, \quad t<0.\end{cases}$$
$n=0,1,2,...$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>$$f(t)=f(t+1)=\begin{cases} t-n, & n<t<n+1,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$
$n=0,1,2,...$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>$$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} 1, & 2n<t<2n+1,\\ -1, & 2n+1<t<2n+2,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$
$n=0,1,2,...$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.4</td><td>$$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} 0, & 2n<t<2n+1, \quad t<0,\\ 1, & 2n+1<t<2n+2,\end{cases}$$
$n=0,1,2,...$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.5</td><td>$$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} t-2n, & 2n<t<2n+1,\\ -t+2(n+1), & 2n+1<t<2n+2,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$
$n=0,1,2,...$</td><td>
</td></tr>
</table>

4.6	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} 2t-(4n+1), & 2n<t<2n+1, \\ -2t+4n+3, & 2n+1<t<2n+2, \\ 0, & t<0, \end{cases}$ $n=0,1,2,...$	
4.7	$f(t)=f(t+1)=\begin{cases} 2t-(2n+1), & n<t<n+1, \\ 0, & t<0, \end{cases}$ $n=0,1,2,...$	
4.8	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases} 0, & 2n<t<2n+1, \ t<0, \\ 1, & 4n+1<t<4n+2, \\ -1, & 4n+3<t<4n+4, \end{cases}$ $n=0,1,2,..$	
4.9	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} t-2n, & 2n<t<2n+\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & 2n+\frac{1}{2}<t<2n+1, \\ 0, & 2n+1<t<2n+2, \quad t<0, \end{cases}$ $n=0,1,2,...$	
4.10	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases} 0, & 2n<t<2n+1, \ t<0, \\ 2, & 4n+1<t<4n+2, \\ -2, & 4n+3<t<4n+4, \end{cases}$ $n=0,1,2,..$	

<table>
<tr><td>4.11</td><td>$$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} t-2n, & 2n<t<2n+\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3}{4}, & 2n+\dfrac{3}{4}<t<2n+1, \\ 0, & 2n+1<t<2n+2, \quad t<0, \end{cases}$$
$n=0,1,2,\ldots$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.12</td><td>$$f(t)=f(t+8)=\begin{cases} \dfrac{t}{2}-4n, & 8n<t<(4n+1)\cdot 2, \\ -\dfrac{t}{2}+4n+2, & (4n+1)\cdot 2<t<(4n+2)\cdot 2, \\ 0, & (4n+2)\cdot 2<t<(4n+4)\cdot 2, \ t<0, \end{cases}$$
$n=0,1,2,\ldots$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.13</td><td>$$f(t)=f(t+4)=\begin{cases} \dfrac{t}{2}-2n, & 4n<t<(2n+1)\cdot 2, \\ 0, & (2n+1)\cdot 2<t<(2n+2)\cdot 2, \ t<0. \end{cases}$$
$n=0,1,2,\ldots$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.14</td><td>$$f(t)=f(t+2)=\begin{cases} \dfrac{t}{2}-n, & 2n<t<(n+1)\cdot 2, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$
$n=0,1,2,\ldots$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.15</td><td>$$f(t)=f(t+6)=\begin{cases} 1, & 6n<t<(2n+1)\cdot 3, \\ -1, & (2n+1)\cdot 3<t<(2n+2)\cdot 3, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$
$n=0,1,2,\ldots$</td><td>
</td></tr>
</table>

4.16	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases}0,\ 4n<t<(2n+1)\cdot 2,\ t<0,\\ 1,\ (2n+1)\cdot 2<t<(2n+2)\cdot 2,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$ 
4.17	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases}\frac{t}{2}-2n,\ 4n<t<(2n+1)\cdot 2,\\ -\frac{t}{2}+2(n+1),\ (2n+1)\cdot 2<t<(2n+2)\cdot 2,\\ 0,\ t<0.\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$ 
4.18	$f(t)=f(t+6)=\begin{cases}\frac{2t}{3}-(4n+1),\ 6n<t<(2n+1)\cdot 3,\\ -\frac{2t}{3}+4n+3,\ (2n+1)\cdot 3<t<(2n+2)\cdot 3,\\ 0,\ t<0,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$ 
4.19	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases}t-(2n+1),\ 2n<t<(n+1)\cdot 2,\\ 0,\ t<0,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$ 
4.20	$f(t)=f(t+8)=\begin{cases}0,\ 4n<t<(2n+1)\cdot 2,\ t<0,\\ 1,\ (4n+1)\cdot 2<t<(4n+2)\cdot 2,\\ -1,\ (4n+3)\cdot 2<t<(4n+4)\cdot 2,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$ 
4.21	$f(t)=f(t+1)=\begin{cases}t-n,\ n<t<n+1,\\ 0,\ t<0\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$ 

4.22	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases}1, & 2n<t<2n+1,\\ 0, & 2n+1<t<2n+2,\ t<0\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
4.23	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 4n<t<4n+2,\\ -1, & 4n+2<t<4n+4,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
4.24	$f(t)=f(t+2)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2, & 2n<t<2n+1,\\ -2, & 2n+1<t<2n+2,\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	
4.25	$f(t)=f(t+4)=\begin{cases}\dfrac{t}{2}-2n, & 4n<t<(2n+1)\cdot 2,\\ 0, & (2n+1)\cdot 2<t<(2n+2)\cdot 2,\ t<0.\end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$	

Задача 5. Решить дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях.

5.1	$x'' + 3x' = e^{t}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$
5.2	$x'' - 2x' = e^{2t}$	$x(0) = x'(0) = 0$
5.3	$x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$
5.4	$x''' + x' = 1$	$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
5.5	$x'' + 2x' + x = \sin t$	$x(0) = 0,\ x'(0) = -1$
5.6	$x'' - 2x' + x = e^{t}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$
5.7	$x''' - x'' = \sin t$	$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$
5.8	$x''' + x' = t$	$x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 0$
5.9	$x'' + x' = \cos t$	$x(0) = 2,\ x'(0) = 0$
5.10	$x'' + 2x' + x = t^{2}$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 0$
5.11	$x''' + x'' = \sin t$	$x(0) = x'(0) = 1,\ x''(0) = 0$
5.12	$x'' + x = \cos t$	$x(0) = -1,\ x'(0) = 1$
5.13	$x''' + x'' = t$	$x(0) = -3,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0$
5.14	$x'' + 2x' + 5x = 3$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 0$
5.15	$x'' + 2x' + 2x = 1$	$x(0) = x'(0) = 0$
5.16	$x'' + x = 1$	$x(0) = -1,\ x'(0) = 0$
5.17	$x''' + x'' = \cos t$	$x(0) = -2,\ x'(0) = x''(0) = 0$
5.18	$x''' + x' = e^{t}$	$x(0) = x''(0) = 0,\ x'(0) = 2$
5.19	$x'' + x' = \cos t$	$x(0) = 2,\ x'(0) = 0$
5.20	$x'' - x' = te^{t}$	$x(0) = x'(0) = 0$
5.21	$x'' - x = \sin t$	$x(0) = -1,\ x'(0) = 0$
5.22	$x'' + x = 2\sin t$	$x(0) = 1,\ x'(0) = -1$
5.23	$x''' - 2x'' + x' = 4$	$x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -2$
5.24	$x'' - 3x' + 2x = e^{t}$	$x(0) = x'(0) = 0$
5.25	$x'' - x' = t^{2}$	$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

Задача 6. Найти оригинал для функции, используя метод неопределённых коэффициентов.

6.1	**a)** $F(p)=\dfrac{2p-13}{(2p-8)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{7-p}{p(p^2+6p-31)}$
6.2	**a)** $F(p)=\dfrac{4p-7}{p(p-1)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{7-6p}{p(p^2+8p-31)}$
6.3	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2-12p+11}{(p-3)(p+7)(p-1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{17-p}{p(p^2-8p-31)}$
6.4	**a)** $F(p)=\dfrac{12p+11}{(p+9)(p-1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{4p-15}{(p^2+p+2)(p-1)}$
6.5	**a)** $F(p)=\dfrac{p+16}{(p-1)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-15}{(p^2+p+2)(p+1)}$
6.6	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2+9}{(p-2)(p+12)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{2p-5}{(p^2-2p+7)(p-7)}$
6.7	**a)** $F(p)=\dfrac{p+1}{(5p-10)(p+11)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p+7}{p(p^2+6p+10)(p-1)}$
6.8	**a)** $F(p)=\dfrac{4p-13}{(p-1)(p+3)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-7}{(p^2+6p+10)(p-1)}$
6.9	**a)** $F(p)=\dfrac{2p+19}{(p-2)(p+15)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p^2-2p+7)(p+7)}$
6.10	**a)** $F(p)=\dfrac{2p+19}{(p-12)(p+1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{9+2p}{(p^2+3p-4)(p-1)}$
6.11	**a)** $F(p)=\dfrac{p+36}{(p-12)(p+9)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p+8}{(p+3)(p^2+p+2)}$
6.12	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2+11}{(p-3)(p+5)(p-1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2-7}{(p^2+p-2)(p+5)}$
6.13	**a)** $F(p)=\dfrac{4p+3}{(p-1)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{5p-13}{(p^2-p+2)(p+3)}$
6.14	**a)** $F(p)=\dfrac{p+3}{(p-5)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2+16}{(p-1)(p^2-3p+5)}$
6.15	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2-12p+11}{(p-3)(p+8)(p-1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2+6}{(p-1)(p^2-3p+4)}$
6.16	**a)** $F(p)=\dfrac{7p-3}{(p+6)(p-11)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-13}{(p^2-p+2)(p+13)}$

6.17	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2+2}{(p-1)(p+2)(p-3)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2-4}{(p^2+p-2)(p-5)}$
6.18	**a)** $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p-7)(p+6)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p+8}{(p+3)(p^2+p-2)}$
6.19	**a)** $F(p)=\dfrac{8p-9}{(p-5)(p+1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p^2+5p}{(p^2-4p+3)(p+2)}$
6.20	**a)** $F(p)=\dfrac{20p+11}{(p-7)(p+11)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{9+p}{(p^2+3p-4)(p+1)}$
6.21	**a)** $F(p)=\dfrac{p-19}{p(p-13)(p+3)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-4}{(p^2+3p-4)(p-1)}$
6.22	**a)** $F(p)=\dfrac{2p+17}{p(p-12)(p+1)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{p-11}{p(p^2-3p+4)(p+7)}$
6.23	**a)** $F(p)=\dfrac{p^2+4}{(p-6)(p+2)(p+7)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{2(p-1)}{(p^2+p+2)(p+1)}$
6.24	**a)** $F(p)=\dfrac{7p+3}{(p-8)(p+9)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{7-p}{p^2+6p-16}$
6.25	**a)** $F(p)=\dfrac{12p+5}{(p-6)(p+3)}$	**b)** $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p-11)(p^2-2p+7)}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Пользуясь свойством линейности найти изображение функции $f(t)$: 1) $f(t)=sht$; 2) $f(t)=3\sin t+5\cos t$; 3) $f(t)=11-2\cos t$.

Решение.

1) Имеем $f(t)=sht=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$, по таблице приложения 1 имеем $e^t\to\dfrac{1}{p-1}$, $e^{-t}\to\dfrac{1}{p+1}$.

Пользуясь свойством однородности и линейности, получим

$$sht=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)\to\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p+1-p+1}{(p-1)(p+1)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{p^2-1^2}\right)=\frac{1}{p^2-1}$$

Следовательно,

$$sht\to\frac{1}{p^2-1}$$

2) По формулам (11) и (12) из таблицы приложения 1 имеем, $\cos t\to\dfrac{p}{p^2+1}, \sin t\to\dfrac{1}{p^2+1}$, следовательно,

$$3\sin t+5\cos t\to 3\cdot\frac{1}{p^2+1}+5\cdot\frac{p}{p^2+1}=\frac{3}{p^2+1}+\frac{5p}{p^2+1}=\frac{3+5p}{p^2+1}.$$

3) Так как $11\to 11\cdot\dfrac{1}{p}$ и $\cos t\to\dfrac{p}{p^2+1}$, применяя свойство линейности, получим

$$11-2\cos t\to\frac{11}{p}-2\frac{p}{p^2+1}=\frac{11(p^2+1)-2p^2}{p(p^2+1)}=\frac{9p^2+11}{p^3+p}.$$

Задача 2.

Пользуясь теоремой подобия, найти изображение функции $f(t)$: 1) $f(t)=\sin 6t$; 2) $f(t)=j^2sh^2at$.

Решение.

1) Воспользуемся тем, что $\sin t\to\dfrac{1}{p^2+1}$, тогда по теореме подобия

$$\sin 6t \to \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{6}\right)^2+1}=\frac{1}{6\cdot\left(\frac{p^2+6^2}{6^2}\right)}=\frac{6}{p^2+36},$$

следовательно, $\sin 6t \to \dfrac{6}{p^2+36}$.

2) Так как $j^2 sh^2 at = \sin^2 jat$ и $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\cos 2t$, получаем

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos 2t \to \frac{1}{2p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}=\frac{1}{2p}-\frac{p}{2(p^2+4)}=\frac{p^2+4-p^2}{2p(p^2+4)}=\frac{2}{p(p^2+4)}.$$

Мы воспользовались формулой $\left(\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2p}\right)$ и формулой $\left(\cos t \to \dfrac{p}{p^2+1}\right)$ из таблицы приложения 1, теоремой подобия $\left(\cos 2t \to \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\dfrac{p}{p^2+4}\right)$ и свойством линейности.

Получим, что $\sin^2 t \to \dfrac{2}{p(p^2+4)}$, тогда вновь применяя теорему подобия, находим

$$\sin^2 jat \to \frac{1}{ja}\cdot\frac{2}{\frac{p}{ja}\left(\left(\frac{p}{ja}\right)^2+4\right)}=\frac{2}{p\left(\frac{p^2}{(ja)^2}+4\right)}=\frac{2}{p\left(\frac{p^2+4(ja)^2}{(ja)^2}\right)}=\frac{2(ja)^2}{p(p^2+4(ja)^2)}=$$

$$\frac{-2a^2}{p(p^2-4a^2)}=-\frac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}.$$

В итоге получаем, $j^2 sh^2 at \to -\dfrac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}$.

Задача 3.

Найти изображение функции $f(t)$, заданной графически (см. рис. 1).

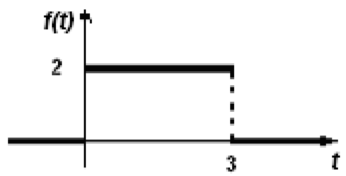


Рис. 1. График функции $f(t)$

Решение.

Зададим функцию аналитически $f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<3,\\ 0, & t<0, t>3\end{cases}.$

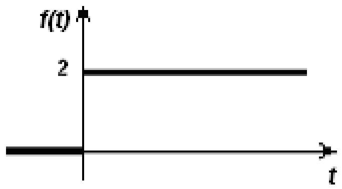


Рис. 2. График функции $2\eta(t)$

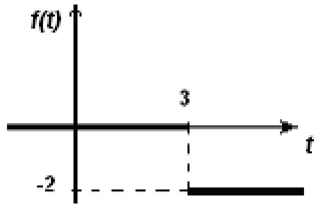


Рис 3. График функции $-2\eta(t-3)$

Функцию $f(t)$ можно представить как сумму единичных функций $2\eta(t)$ и $-2\eta(t-3)$ (см. рис. 2, 3), то есть $f(t)=2\eta(t)-2\eta(t-3)=2\cdot[\eta(t)-\eta(t-3)]$.

Найдём изображение оригинала $f(t)$. По формуле 1 из таблицы приложения 1, и теореме запаздывания имеем,

$$f(t)=2\cdot[\eta(t)-\eta(t-3)]\rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{p}-e^{-3p}\cdot\frac{1}{p}\right)=\frac{2}{p}(1-e^{-3p}).$$

Задача 4.

Найти изображение функции $f(t)$, заданной графически (рис. 4).

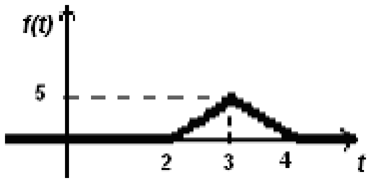


Рис. 4. График функции $f(t)$

Решение.

Найдём уравнение прямой на отрезке $t\in[2,3]$, проходящей через две точки с координатами (2,0) и (3,5):

$$\frac{t-2}{3-2}=\frac{y-0}{5-0} \quad \Rightarrow \quad t-2=\frac{y}{5} \quad \Rightarrow \quad y=5t-10.$$

Найдём уравнение прямой на отрезке $t\in[3,4]$, проходящей через точки с координатами (3,5) и (4,0):

$$\frac{t-3}{4-3}=\frac{y-5}{0-5} \Rightarrow t-3=\frac{y-5}{-5} \Rightarrow -5\cdot(t-3)=y-5 \Rightarrow -5t+15=y-5 \Rightarrow y=20-5t.$$

В результате имеем,

$$f(t)=\begin{cases}5t-10, & 2\le t<3,\\ 20-5t, & 3\le t<4,\\ 0, & t\ge 4, t<2.\end{cases}$$

Запишем функцию $f(t)$ через сумму обобщённых единичных функций. График функции $(5t-10)\cdot\eta(t-2)$ имеет вид (рис. 5),

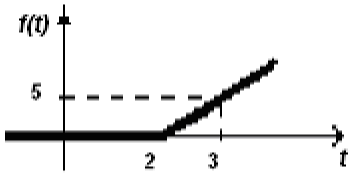


Рис. 5. График функции $(5t-10)\cdot\eta(t-2)$

а график функции $-(5t-10)\cdot\eta(t-3)$ имеет вид (рис. 6).

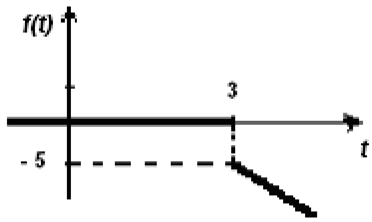


Рис. 6. График функции $-(5t-10)\cdot\eta(t-3)$

Складывая эти графики, получаем график функции $(5t-10)\cdot\eta(t-2)-(5t-10)\cdot\eta(t-3)$ (рис. 7).

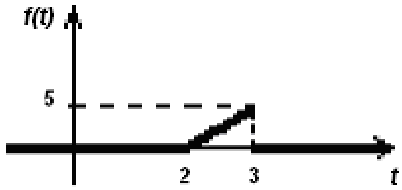


Рис. 7. График функции $(5t-10)\cdot\eta(t-2)-(5t-10)\cdot\eta(t-3)$

Рассуждая аналогично, получаем, что график функции $(20-5t)\cdot\eta(t-3)-(20-5t)\cdot\eta(t-4)$ имеет вид (рис. 8).

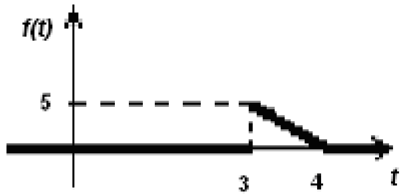


Рис. 8. График функции $(20-5t)\cdot\eta(t-3)-(20-5t)\cdot\eta(t-4)$

Таким образом

$$f(t)=(5t-10)\cdot\eta(t-2)-(5t-10)\cdot\eta(t-3)+(20-5t)\cdot\eta(t-3)-(20-5t)\cdot\eta(t-4).$$

Сгруппируем слагаемые, вынесем общий множитель за скобки

$$f(t)=5\cdot(t-2)\cdot\eta(t-2)+(-5t+10+20-5t)\cdot\eta(t-3)+5\cdot(t-4)\cdot\eta(t-4)=$$

$$=5\cdot(t-2)\cdot\eta(t-2)+(-10t+30)\cdot\eta(t-3)+5\cdot(t-4)\cdot\eta(t-4)=$$

$$=5\cdot(t-2)\cdot\eta(t-2)-10(t-3)\cdot\eta(t-3)+5\cdot(t-4)\cdot\eta(t-4)$$

Функция $f(t)$ представлена в виде суммы функций вида $(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0)$, изображение которых равно $(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0)\to\dfrac{e^{-pt_0}}{p^2}$.

В результате получаем

$$F(p)=5\cdot\frac{e^{-2p}}{p^2}-10\cdot\frac{e^{-3p}}{p^2}+5\cdot\frac{e^{-4p}}{p^2}=5\cdot\frac{e^{-2p}-2e^{-3p}+e^{-4p}}{p^2}.$$

Задача 5.

Найти изображение периодической функции (см. рис.9).

$$f(t)=f(t+4)=\begin{cases}t-4n, & 4n<t<4n+1,\\ -t+4n+2, & 4n+1<t<4n+2,\\ 0, & 4n+2<t<4n+4,\quad t<0,\end{cases}$$

$$n=0,1,2,...$$

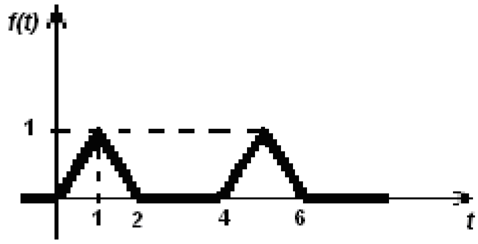


Рисунок 9 – График функции $f(t)$

Решение.

По теореме о периодическом оригинале, получаем

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-4p}}\int_0^4 e^{-pt}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[\int_0^1 e^{-pt}tdt+\int_1^2 e^{-pt}(2-t)dt\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=t & dv=e^{-pt}dt \\ du=dt & v=-e^{-pt}/p\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} u=2-t & dv=e^{-pt}dt \\ du=-dt & v=-e^{-pt}/p\end{matrix}\right|=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[-\frac{te^{-pt}}{p}\Bigg|_0^1+\frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt-\right.$$

$$\left.-\frac{(2-t)e^{-pt}}{p}\Bigg|_1^2-\frac{1}{p}\int_1^2 e^{-pt}dt\right]=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_0^1+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_1^2\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}\right]=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2(1-e^{-4p})}=\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}.$$

Задача 6.

Решить задачу Коши

$$x''-3x'+2x=2e^{3t},\quad x(0)=1,\quad x'(0)=3.$$

Решение.

I. Перейдём от оригиналов к изображениям

$$x(t)\to X(p),$$

$$x'(t)\to pX(p)-x(0)=pX(p)-1,$$

$$x''(t)\to p^2X(p)-p-x'(0)=p^2X(p)-p-3,$$

$$e^{3t}\to\frac{1}{p-3}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$p^2X(p)-p-3-3pX(p)+3+2X(p)=\frac{2}{p-3}.$$

II. Решим уравнение для изображений

$$p^2X(p)-3pX(p)+2X(p)=\frac{2}{p-3}+p.$$

$$X(p)(p^2-3p+2)=\frac{2}{p-3}+p$$

$$X(p)=\frac{2}{(p-3)(p^2-3p+2)}+\frac{p}{p^2-3p+2}=\frac{2+p^2-3p}{(p-3)(p^2-3p+2)}=\frac{1}{p-3}$$

III. Найдём оригинал для функции $X(p)$:

$$X(p)=\frac{1}{p-3}\to e^{3t}=x(t).$$

Эта функция является решением исходной задачи Коши.

Задача 7.

Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{3p^2+3p-13}{p(p^2+4p+13)}$.

Решение.

Представим $F(p)$ в виде

$$F(p)=\frac{3p^2+3p-13}{p(p^2+4p+13)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+13}=\frac{Ap^2+4Ap+13A+Bp^2+Cp}{p(p^2+4p+13)},$$

где A,B,C - неопределённые коэффициенты. Отсюда следует равенство

$$3p^2+3p-13=Ap^2+4Ap+13A+Bp^2+Cp=(A+B)p^2+(4A+C)p+13A$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем систему уравнений для нахождения неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases}A+B=3,\\4A+C=3,\\13A=-13.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1,\\B=3-A,\\C=3-4A.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1,\\B=4,\\C=7.\end{cases}$$

Таким образом, $F(p)$ имеет вид

$$F(p)=\frac{3p^2+3p-13}{p(p^2+4p+13)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+13}=-\frac{1}{p}+\frac{4p+7}{p^2+4p+13}=$$

$$=-\frac{1}{p}+\frac{4(p+2)-1}{(p+2)^2+9}=-\frac{1}{p}+\frac{4(p+2)}{(p+2)^2+3^2}-\frac{1}{(p+2)^2+3^2}=-\frac{1}{p}+$$

$$+4\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(p+2)^2+3^2}=-F_1(p)+4F_2(p)-\frac{1}{3}F_3(p)$$

Находим оригиналы

$$F_1(p)=\frac{1}{p},\qquad\to\qquad f_1(t)=1,$$

$$F_2(p)=\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2},\qquad\to\qquad f_2(t)=e^{-2t}\cdot\cos 3t,$$

$$F_3(p)=\frac{3}{(p+2)^2+3^2},\qquad\to\qquad f_3(t)=e^{-2t}\cdot\sin 3t.$$

Следовательно,

$$f(t)=-f_1(t)+4f_2(t)-\frac{1}{3}f_3(t)=-1+4e^{-2t}\cos 3t-\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

Приложение 1

Таблица оригиналов и изображений

Для нахождения изображения или оригинала требуется применить свойства преобразования Лапласа так, чтобы к функции или её составляющим можно было применить результаты, содержащиеся в таблице 3.

Таблица 3. Таблица оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-t_0)$	$\frac{e^{-pt_o}}{p}$
3	$(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0)$	$\frac{e^{-pt_o}}{p^2}$
4	C	$\frac{C}{p}$
5	t	$\frac{1}{p^2}$
6	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
7	$\delta(t)$	1
8	e^t	$\frac{1}{p-1}$
9	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
11	$\cos t$	$\frac{p}{p^2+1}$
12	$\sin t$	$\frac{1}{p^2+1}$
13	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
14	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$

Продолжение таблицы 3

№	$f(t)$	$F(p)$
15	$\cos^2 at$	$\dfrac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
16	$\sin^2 at$	$\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
17	$t\cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
18	$t\sin at$	$\dfrac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
19	$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
20	$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$
21	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\dfrac{1}{p(p^2+a^2)}$
22	$t-\dfrac{1}{a}\sin at$	$\dfrac{a^2}{p^2(p^2+a^2)}$
23	$ch\ at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
24	$sh\ at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
25	$sh^2\ at$	$\dfrac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
26	$ch^2\ at$	$\dfrac{p^2-2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
27	$e^{-at} sh\,bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$
28	$e^{-at} ch\,bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
29	$\dfrac{1}{a} sh\ at-1$	$\dfrac{a^2}{p^2(p^2-a^2)}$
30	$\dfrac{t\sin at}{2a}$	$\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$

Продолжение таблицы 3

№	$f(t)$	$F(p)$
31	$\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{1+ap}$
32	$\frac{1}{a}(e^{at}-1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$
33	$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
34	$(t+\frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$
35	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
36	$(1+2at+\frac{1}{2}a^2t^2)e^{at}$	$\frac{p^2}{(p-a)^3}$
37	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
38	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
39	$1-ch\ at+\frac{at}{2}sh\ at$	$\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$
40	$\frac{b\,sh\ at-a\,sh\ bt}{a^2-b^2}$	$\frac{ab}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
41	$\frac{ch\,at-ch\,bt}{a^2-b^2}$	$\frac{p}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
42	$\frac{a\,sh\ at-b\,sh\ bt}{a^2-b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
43	$\sin\frac{a}{\sqrt{2}}t\,sh\frac{a}{\sqrt{2}}t$	$\frac{a^2p}{p^4+a^4}$
44	$\cos\frac{a}{\sqrt{2}}t\,ch\frac{a}{\sqrt{2}}t$	$\frac{p^3}{p^4+a^4}$
45	$\frac{1}{2}(sh\ at-\sin at)$	$\frac{a^3}{p^4-a^4}$

Продолжение таблицы 3

№	$f(t)$	$F(p)$
46	$\frac{1}{2}(ch\ at-\cos at)$	$\frac{a^2 p}{p^4-a^4}$
47	$\frac{1}{2}(sh\ at+\sin at)$	$\frac{ap^2}{p^4-a^4}$
48	$\frac{1}{2}(ch\ at+\cos at)$	$\frac{p^3}{p^4-a^4}$
49	$\frac{\cos bt-\cos at}{a^2-b^2}$	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
50	$\frac{a\sin at-b\sin bt}{a^2-b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
51	$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
52	$\frac{a\sin bt-b\sin at}{a^2-b^2}$	$\frac{ab}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$

Приложение 2

Таблица основных свойств преобразования Лапласа

При нахождении изображений и оригиналов удобно пользоваться свойствами преобразования Лапласа, которые представлены в таблице 4. Обозначения: $f(t) \to F(p)$; $a, a_1, a_2, ..., a_n$, p_0 - комплексные числа, $t_0 > 0$, T - период.

Таблица 4. Таблица основных свойств преобразования Лапласа

1	Определение изображения ($p = s + i\sigma$, $s = \operatorname{Re} p, \sigma = \operatorname{Im} p$)	$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \quad \left(\int\limits_0^\infty = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_0^T \right)$
2	Единичная функция	$\eta(t) = \begin{cases} 0, t > 0, \\ 1, t < 0 \end{cases}$
3	Свойство однородности	$af(t) \to aF(p)$
4	Свойство сложения	$f(t) + \varphi(t) \to F(p) + \Phi(p)$
5	Свойство линейности	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + .. + a_n f_n(t) \to$ $\to a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p) + .. + a_n F_n(p)$
6	Теорема подобия	$f(bt) \to \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right)$
7	Теорема запаздывания	$f(t - t_0) \to e^{-pt_0} F(p)$
8	Теорема опережения	$f(t + t_0) \to e^{t_0 p} \left(F(p) - \int\limits_0^{t_0} e^{-pt} f(t)dt \right)$
9	Изображение периодического оригинала с периодом Т	$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt$

Продолжение таблицы 4

10	Теорема смещения	$e^{-p_0 t} f(t) \to F(p+p_0)$
11	Дифференцирование оригинала	$f'(t) \to pF(p) - f(0);$ $f''(t) \to p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$ …………………………………… $f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$ где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to 0+0} f^{(k)}(t), k = 0,1,2,\ldots,n-1$
12	Дифференцирование изображения	$F'(p) \to -tf(t);$ $F''(p) \to (-1)^2 t^2 f(t);$ …………………………… $F^{(n)}(p) \to (-1)^n t^n f(t), \operatorname{Re} p > s_1 > s_0$
13	Интегрирование оригинала	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \to \dfrac{F(p)}{p}, \ \operatorname{Re} p > s_0$
14	Интегрирование изображения	$\int\limits_p^\infty F(p)dp \to \dfrac{f(t)}{t}$
15	Свёртка функций	$\varphi * f = \int\limits_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau)d\tau$
16	Интеграл Дюамеля	Если $f * \varphi = \int\limits_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \to F(p)\Phi(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)\varphi_t'(t-\tau)d\tau + f(t)\varphi(0) \to pF(p)\Phi(p),$ или $\int\limits_0^t \varphi(\tau) f_t'(t-\tau)d\tau + \varphi(t)f(0) \to pF(p)\Phi(p)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович И.С., Лунц Г.Л., Эсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1969. 413 с.

2. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. для вузов. М.: Высш. образование, 2001. 445 с.

3. Рудкевич Е.А.. Функции комплексного переменного и операционное исчисление (методы решения задач): учеб. пособие. Тула: Изд-во Тульского госуниверситета, 2004. Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/380/53380

4. Панкова Е.А. Специальная математика. Элементы операционного исчисления: учебное пособие для бакалавров направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2017. 68 с.

5. Чудесенко В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики. - М.: Высшая школа, 1999.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СПЕЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Методические указания для бакалавров заочной формы обучения направлений подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 26.04.2018 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 1,80. Тираж 25 экз. Изд. № 5884.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ