ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Ракул Е.А.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

Учебное пособие

Брянская область 2020 г.

УДК 519.21; 51-74
ББК 39
Р 19

Ракул, Е.А. Случайные процессы в технической эксплуатации автомобильного транспорта в сельском хозяйстве: учебное пособие / Е.А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2020. – 92 с.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения направлений подготовки 35.03.06 Агроинженерия и 35.04.06 Агроинженерия.

Рецензенты:
Безик В.А., кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматики, физики и математики.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования, протокол №3 от 30.11.2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5

Глава 1. Случайные функции 7

1. Основные понятия. 7
2. Определение случайной функции 7
3. Корреляционная теория случайных функций 9
4. Математическое ожидание случайной функции. 11
5. Свойства математического ожидания случайной функции. 12
6. Дисперсия случайной функции. 13
7. Свойства дисперсии случайной функции. 14
8. Корреляционная функция случайной функции. 15
9. Свойства корреляционной функции. 17
10. Нормированная корреляционная функция. 18
11. Взаимная корреляционная функция. 19
12. Свойства взаимной корреляционной функции. 21
13. Нормированная взаимная корреляционная функция. 22
14. Характеристики суммы случайных функций. 23
15. Производная случайной функции и ее характеристики. 25
16. Интеграл от случайной функции и ее характеристики. 28
17. Комплексные случайные величины и их числовые характеристики. 30
18. Комплексные случайные функции и их характеристики. 32

Вопросы для самоконтроля 34

Глава 2. Стационарные случайные функции. 35

1. Определение и свойства стационарной случайной функции. 35
2. Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции. 37
3. Стационарно связанные случайные функции. 38
4. Корреляционная функция производной стационарной случайной функции. 39

5. Взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной. 40
6. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции. 41
7. Определение характеристик эргодических стационарных случайных функций из опыта. 41
Глава 3. Элементы спектральной теории стационарных случайных функций. 45
1. Представление стационарной случайной функции в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами. 45
2. Дискретный спектр стационарной случайной функции. 48
3. Непрерывный спектр стационарной случайной функции. Спектральная плотность. 50
4. Нормированная спектральная плотность. 54
5. Взаимная спектральная плотность стационарных и стационарно связанных случайных функций. 55
6. Дельта-функция. 57
7. Стационарный белый шум. 58
8. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой. 60
9. Примеры расчета случайных колебаний. 64
Вопросы для самоконтроля 70
Глава 4. Закономерности изменения технического состояния автомобилей 71
1. Основные закономерности изменения технического состояния при эксплуатации автомобиля. 71
2. Закономерности первого вида. 73
3. Случайные процессы изменения параметров технического состояния автомобиля. 74
4. Закономерности процессов восстановления автомобилей. 83
Вопросы для самоконтроля 89
Заключение 89
Литература 91

ВВЕДЕНИЕ

Автомобильный транспорт играет существенную роль в транспортном комплексе страны, регулярно обслуживая почти 3 млн. предприятий и организаций всех форм собственности, крестьянских и фермерских хозяйств и предпринимателей, а также население страны. В 2012 г. автомобильный парк России достиг 43 млн. ед., причем более 85 % легковых и грузовых автомобилей и автобусов принадлежат гражданам на условиях личной собственности. Согласно данным Министерства транспорта Российской Федерации, численность субъектов, осуществляющих автотранспортную деятельность, превысила 450 тыс., из них 61% - предприятия и 39% - физические лица. Согласно оценкам, вклад автомобильного транспорта в перевозки грузов составляет 75-77%, а пассажиров (без индивидуального легкового) - 53-55%. Регулярными автомобильными перевозками (основными в пассажирских перевозках) охвачено 2,3 тыс. городов и 78,9 тыс. сельских населенных пунктов. Общее число автобусных маршрутов протяженностью 2,9 млн. км превысило 50 тыс., из них 30% - городские, 49% - пригородные, 21% - междугородные и международные.

Особенности и преимущества автомобильного транспорта, предопределяющие достаточно высокие темпы развития, связаны с мобильностью и гибкостью доставки грузов и пассажиров «от двери до двери», «точно в срок» и соблюдением при необходимости расписания. Эти свойства автомобильного транспорта во многом определяются уровнем работоспособности и техническим состоянием автомобилей и парков, зависящими, во-первых, от надежности конструкции автомобилей, во-вторых, от мер по обеспечению их работоспособности в процессе эксплуатации и от условий последней.

При этом, если надежность конструкции автомобилей закладывается на этапах проектирования и производства, то наиболее полное использование потенциальных возможностей обеспечивается этапом технической эксплуатации, а, следовательно, работоспособность автомобилей и парков обеспечивается подсистемой технической эксплуатации автомобилей.

Основными задачами, стоящими перед исследователями в области использования машинно-тракторного парка, является обеспечение значительного повышения качества работы, увеличение производительности машинно-тракторных агрегатов, снижение затрат на единицу произведенной продукции. Для решения этих задач применяются уравнения и формулы теории вероятности.

Теория вероятностей – математическая дисциплина, объектом изучения которой являются случайные события, т.е. события, происходящие в ходе эксперимента со случайным окончанием. На теории вероятностей основывается математическая статистика, которую иногда считают даже частью теории вероятностей. Задачей математической статистики является определение по имеющемуся набору экспериментальных данных некотрых общих характеристик случайных событий или явлений. За несколько десятилетий из теории вероятностей выделился целый ряд самостоятельных направлений, важнейшими из которых являются: теория случайных процессов; теория массового обслуживания; теория информации; дельта-функция.

Техническая эксплуатация автомобилей и их диагностика – одна из сфер применения теории вероятности и математической статистики. Исследование и прогнозирование отказов узлов и агрегатов автомобилей трудно себе представить без использования методик статистического оценивания и проверки гиптез, регрессионного анализа и других методов, опирающихся на теорию вероятностей. С развитием автомобилестроения диагностика все более усложняется и, следовательно, для точного прогнозирования отказов должен усиливаться статистический характер законов.

Все это предопределяет необходимость овладения методами теории вероятностей и математической статистики как важнейшим инструментом анализа и прогнозирования возможных отказов различных элементов автомобилей.

Нет ничего более противного разуму и постоянству природы, чем случайность. Сам бог не может знать того, что произойдет случайно. Ибо если знает, то это определенно произойдет, а если определенно произойдет, то не случайно.

Марк Туллий Цицерон. О девинации.
Римский философ и политик, I в.д.н.э.

Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Основные задачи

Можно выделить два основных вида задач, решение которых требует использования теории случайных функций.

Прямая задача (*анализ*)*:* заданы параметры некоторого устройства и его вероятностные характеристики (математические ожидания, корреляционные функции, законы распределения) поступающей на его «вход» функции (сигнала, процесса); требуется определить характеристики на «выходе» устройства (по ним судят о «качестве» работы устройства).

Обратная задача (*синтез*)*:* заданы вероятностные характеристики «входной» и «выходной» функций; требуется спроектировать оптимальное устройство (найти его параметры), осуществляющее преобразование заданной входной функции в такую выходную функцию, которая имеет заданные характеристики. Решение этой задачи требует кроме аппарата случайных функций привлечения и других дисциплин и в настоящей книге не рассматривается.

§ 2. Определение случайной функции

Случайной функцией называют функцию неслучайного аргумента t, которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Случайные функции аргумента t обозначают прописными буквами $X(t)$, $Y(t)$ и т. д.

Например, если U – случайная величина, то функция $X(t)=t^2U$ – случайная. Действительно, при каждом фиксированном значении аргумента эта функция являете случайной величиной: при $t_1=2$ получим случайную величину $X_1=4U$, при $t_2=1{,}5$ – случайную величину $X_2=2{,}25U$ и т.д.

Для краткости дальнейшего изложения введем понятие сечения.

Сечением случайной функции называют случайную величину, соответствующую фиксированному значению аргумента случайной функции. Например, для случайной функции $X(t)=t^2U$, приведенной выше, при значениях аргумента $t_1=2$ и $t_2=1{,}5$ были получены соответственно случайные величины $X_1=4U$ и $X_2=2{,}25U$, которые являются сечениями заданной случайной функции.

Итак, случайную функцию можно рассматривать как совокупность случайных величин $\{X(t)\}$, зависящих от параметра *t*. Возможно и другое истолкование случайной функции, если ввести понятие ее реализации.

Реализацией (***траекторией***, ***выборочной функцией***) случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функции аргумента *t*, равной которой может оказаться случайная функция в результате испытания.

Таким образом, если в опыте наблюдают случайную функцию, то в действительности наблюдают одну из возможных ее реализации; очевидно, при повторении опыта будет наблюдаться другая реализация.

Реализации функции $X(t)$ обозначают строчными буквами $x_1(t)$, $x_2(t)$ и т. д., где индекс указывает номер испытания. Например, если $X(t)=U\sin t$, где U – непрерывная случайная величина, которая в первом испытании приняла возможное значение $u_1=3$, а во втором испытании $u_2=4{,}6$, то реализациями $X(t)$ являются соответственно неслучайные функции $x_1(t)=3\sin t$ и $x_2(t)=4{,}6\sin t$.

Итак, случайную функцию можно рассматривать как совокупность ее возможных реализаций.

Случайным (***стохастическим***) ***процессом*** называют случайную функцию аргумента *t*, который истолковывается как время. Например, если самолет должен лететь с заданной постоянной скоростью, то в действительности вследствие воздействия случайных факторов (колебание температуры, изменение силы ветра и др.), учесть влияние которых заранее нельзя, скорость изменяется. В этом примере скорость самолета – случайная функция от непрерывно изменяющегося аргумента (времени), т.е. скорость есть случайный процесс.

Заметим, что если аргумент случайной функции изменяется дискретно, то соответствующие ему значения случайной функции (случайные величины) образуют ***случайную последовательность***.

Очевидно, задать случайную функцию аналитически (формулой), вообще говоря, невозможно. В частных случаях, если вид случайной функции известен, а определяющие ее параметры – случайные величины, задать ее аналитически можно. Например, случайными являются функции:

$X(t)=\sin\Omega t$, где Ω – случайная величина;

$X(t)=U\sin t$, где U – случайная величина;

$X(t)=U\sin\Omega t$, где Ω и U – случайные величины.

§ 3. Корреляционная теория случайных функций

Как известно, при фиксированном значении аргумента случайная функция является случайной величиной. Для задания этой величины достаточно задать закон ее распределения, в частности одномерную плотность вероятности. Например, случайную величину $X_1 = X(t_1)$ можно задать плотностью вероятности $f(x_1)$; в теории случайных функций ее обозначают через $f_1(x_1;t_1)$; здесь индекс 1 при f указывает, что плотность вероятности одномерная, t_1 – фиксированное значение аргумента *t*, x_1 – возможное значение случайной величины $X_1 = X(t_1)$. Аналогично, через $f_1(x_2;t_2)$, $f_1(x_3;t_3)$ и т. д. обозначают одномерные плотности вероятности сечений $X_2 = X(t_2)$, $X_3 = X(t_3)$ и т.д. Одномерную плотность вероятности любого сечения обозначают через $f_1(x;t)$, подразумевая, что аргумент t принимает все допустимые значения. Например, если случайная функция $X(t)$ распределена нормально с параметрами $a = m_x(t) = 4,\ \sigma_x(t) = 3$, то

$$f_1(x;t) = \frac{1}{3|t|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4t)^2}{2(3|t|)^2}} \tag{1.1}$$

Хотя функция $f_1(x;t)$ полностью характеризует каждое отдельно взятое сечение, нельзя сказать, что она полностью описывает и саму случайную функцию. (Исключением является случай, когда любой набор сечений образует систему независимых случайных величин.) Например, зная лишь одномерную функцию распределения сечения, невозможно выполнять над случайной функцией операции, требующие совместного рассмотрения совокупности сечений.

В простейшем случае совместно рассматривают два сечения: $X_1 = X(t_1)$ и $X_2 = X(t_2)$, т.е. изучают систему двух случайных величин $(X_1; X_2)$. Известно, что эту систему можно задать двумерным законом распределения, в частности двумерной плотностью вероятности $f(x_1, x_2)$. В теории случайных функций ее обозначают через $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$; здесь индекс 2 при f указывает, что плотность вероятности двумерная; t_1 и t_2 – значения аргумента t; x_1, x_2 – возможные значения случайных величин, соответственно $X_1 = X(t_1)$ и $X_2 = X(t_2)$.

Хотя двумерный закон распределения описывает случайную функцию более полно, чем одномерный (по известному двумерному можно найти одномерный закон), он не характеризует случайную функцию исчерпывающим образом (исключением являются случаи, когда случайная функция распределена нормально или представляет собой марковский случайный процесс).

Аналогично обстоит дело и при переходе к трехмерным, четырехмерным распределениям и т. д. Поскольку такой способ изучения случайных функций является, вообще говоря, громоздким, часто идут по другому пути, не требующему знания многомерных законов распределения, а именно изучают моменты, причем ограничиваются моментами первых двух порядков.

Корреляционной теорией случайных функций называют теорию, основанную на изучении моментов первого и второго порядка. Эта теория оказывается достаточной для решения многих задач практики.

В отличие от случайных величин, для которых моменты являются числами и поэтому их называют *числовыми характеристиками*, моменты случайной функции являются неслучайными функциями (их называют ***характеристиками случайной функции***).

Ниже рассматриваются следующие характеристики случайной функции: математическое ожидание (начальный момент первого порядка), дисперсия (центральный момент второго порядка), корреляционная функция (корреляционный момент).

§ 4. Математическое ожидание случайной функции

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$. При фиксированном значении аргумента, например при $t = t_1$, получим сечение – случайную величину $X(t_1)$ с математическим ожиданием $M[X(t_1)]$. (Полагаем, что математическое ожидание любого сечения существует.) Таким образом, каждое фиксированное значение аргумента определяет сечение – случайную величину, а каждой случайной величине соответствует ее математическое ожидание. Отсюда следует, что каждому фиксированному значению аргумента t соответствует определенное математическое ожидание; это означает, что математическое ожидание случайной функции есть функция (неслучайная) от аргумента t; ее обозначают через $m_x(t)$. В частном случае функция $m_x(t)$ может сохранять постоянное значение при всех допустимых значениях аргумента. Дадим теперь определение математического ожидания.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно математическому ожиданию сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента, т.е.

$$m_x(t) = M[X(t)]. \tag{1.2}$$

Геометрически математическое ожидание случайной функции можно истолковать как «среднюю кривую», около которой расположены другие кривые – реализации; при фиксированном значении аргумента математическое ожидание есть среднее значение сечения («средняя ордината»), вокруг которого расположены его возможные значения (ординаты).

§ 5. Свойства математического ожидания случайной функции

Используя свойства математического ожидания случайной величины, легко получить свойства математического ожидания случайной функции.

***Свойство* 1**. Математическое ожидание неслучайной функции $\varphi(t)$ равно самой неслучайной функции:

$$M[\varphi(t)] = \varphi(t). \tag{1.3}$$

***Свойство* 2.** Неслучайный множитель $\varphi(t)$ можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)M[X(t)] = \varphi(t)m_x(t). \tag{1.4}$$

***Свойство* 3.** Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M[X(t) + Y(t)] = m_x(t) + m_y(t). \tag{1.5}$$

Следствие. Для того чтобы найти математическое ожидание суммы случайной и неслучайной функций, достаточно к математическому ожиданию случайной функции прибавить неслучайную функцию:

$$M[X(t) + \varphi(t)] = m_x(t) + \varphi(t). \tag{1.6}$$

Пример. Найти математическое ожидание случайной функции $X(t) = U\cos t$, где U – случайная величина, причем $M(U) = 2$.

Решение. Найдем математическое ожидание, учитывая, что неслучайный множитель $\cos t$ можно вынести за знак математического ожидания: $M[X(t)] = M[U\cos t] = \cos t \cdot M(U) = 2\cos t$. Итак, искомое математическое ожидание $m_x(t) = 2\cos t$.

§ 6. Дисперсия случайной функции

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$. При фиксированном значении аргумента, например при $t = t_1$, получим сечение – случайную величину $X(t_1)$ с дисперсией $D[X(t_1)]$ (предполагается, что дисперсия любого сечения существует). Таким образом, каждое фиксированное значение аргумента определяет сечение – случайную величину, а каждой случайной величине соответствует ее дисперсия. Отсюда следует, что каждому фиксированному значению аргумента t соответствует определенная дисперсия; это означает, что дисперсия случайной функции есть функция (неслучайная, причем неотрицательная) от аргумента t; ее обозначают через $D_x(t)$. В частном случае $D_x(t)$ может сохранять постоянное значение при всех допустимых значениях аргумента. Дадим теперь определение дисперсии.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную неотрицательную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента, т.е.

$$D_x(t) = D[X(t)]. \tag{1.7}$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния возможных реализации (кривых) вокруг математического ожидания случайной функции («средней кривой»). При фиксированном значении аргумента дисперсия характеризует степень рассеяния возможных значений (ординат) сечения вокруг математического ожидания сечения («средней ординаты»).

Часто вместо дисперсии рассматривают среднее квадратическое отклонение случайной функции, которое определяют по аналогии со средним квадратическим отклонением случайной величины.

Средним квадратическим отклонением случайной функции называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \tag{1.8}$$

§ 7. Свойства дисперсии случайной функции

Используя свойства дисперсии случайной величины, легко получить свойства дисперсии случайной функции.

***Свойство* 1**. Дисперсия неслучайной функции $\varphi(t)$ равна нулю:

$$D[\varphi(t)] = 0. \tag{1.9}$$

***Свойство* 2**. Дисперсия суммы случайной функции $X(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$ равна дисперсии случайной функции:

$$D[X(t) + \varphi(t)] = D_x(t). \tag{1.10}$$

***Свойство* 3.** Дисперсия произведения случайной функции $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию случайной функции:

$$D[X(t)\varphi(t)] = \varphi^2(t) D_x(t). \tag{1.11}$$

Пример. Найти дисперсию случайной функции $X(t) = U\sin t$, где U – случайная величина, причем $D(U) = 6$.

Решение. Найдем дисперсию, приняв во внимание, что неслучайный множитель $\sin t$ можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат: $D[X(t)] = D[U\sin t] = \sin^2 t \cdot D(U) = 6\sin^2 t$. Итак, искомая дисперсия $D_x(t) = 6\sin^2 t$.

§ 8. Корреляционная функция случайной функции

Математическое ожидание и дисперсия характеризуют случайную функцию далеко не полно. Можно привести примеры двух случайных функций, которые имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии, но поведение которых различно. Зная лишь эти две характеристики, в частности, ничего нельзя сказать о степени зависимости двух сечений. Для оценки этой зависимости вводят новую характеристику – корреляционную функцию. Далее покажем, что, зная корреляционную функцию, можно найти и дисперсию; поэтому знать закон распределения для отыскания дисперсии нет необходимости. Уже это обстоятельство указывает на целесообразность введения корреляционной функции.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, введем понятие центрированной случайной функции по аналогии с понятием центрированной случайной величины (центрированной случайной величиной называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием: $\dot{X} = X - m_x$.

Центрированной случайной функцией называют разность между случайной функцией и ее математическим ожиданием:

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t). \tag{1.12}$$

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$. При двух фиксированных значениях аргумента, например при $t = t_1$ и $t = t_2$, получим два сечения – систему двух случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ с корреляционным моментом $M\left[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)\right]$, где

$$\dot{X}(t_1) = X(t_1) - m_x(t_1),\ \dot{X}(t_2) = X(t_2) - m_x(t_2). \tag{1.13}$$

Таким образом, каждая пара чисел t_1 и t_2 определяет систему двух случайных величин, а каждой такой системе соответствует ее корреляционный момент. Отсюда следует, что каждой паре фиксированных значений t_1 и t_2 соответствует определенный корреляционный момент; это означает, что корреляционный момент случайной функции есть функция (неслучайная) двух независимых аргументов t_1 и t_2, ее обозначают через $K_x(t_1, t_2)$. В частном случае значения обоих аргументов могут быть равны между собой.

Приведем теперь определение корреляционной функции.

Корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $K_x(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)\right]. \tag{1.14}$$

Замечание. При равных между собой значениях аргументов $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция случайной функции равна дисперсии этой функции:

$$K_x(t, t) = D_x(t). \tag{1.15}$$

Таким образом, достаточно знать корреляционную функцию, чтобы найти дисперсию случайной функции.

Пример. Задана случайная функция $X(t) = Ut$, где U – случайная величина, причем $M(U) = 4,\ D(U) = 10$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию заданной случайной функции.

Решение. а) Найдем математическое ожидание:

$m_x(t) = M[X(t)] = M(Ut) = tM(U) = 4t$.

Найдем центрированную функцию:

$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t) = Ut - 4t = (U - 4)t$.

Отсюда $\dot{X}(t_1) = (U - 4)t_1,\ \ \dot{X}(t_2) = (U - 4)t_2$

Найдем корреляционную функцию:

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)\right] = M[(U-4)t_1(U-4)t_2] = t_1t_2 \cdot M\left[(U-4)^2\right] =$$
$$= t_1t_2D(U) = 10t_1t_2$$

Итак, искомая корреляционная функция $K_x(t_1, t_2) = 10t_1t_2$.

б) Найдем дисперсию, для чего положим $t_1 = t_2 = t$;

$D_x(t) = K_x(t, t) = 10t^2$.

§ 9. Свойства корреляционной функции

***Свойство* 1**. При перестановке аргументов корреляционная функция не изменяется (свойство симметрии):

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1). \tag{1.16}$$

***Замечание* 1**. Прибавление к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет ее центрированной функции, т.е. если

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t), \tag{1.17}$$

то

$$\dot{Y}(t) = \dot{X}(t). \tag{1.18}$$

***Свойство* 2**. Прибавление к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет ее корреляционной функции, т.е. если

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t), \tag{1.19}$$

то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2). \tag{1.20}$$

***Замечание* 2**. При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее центрированная функция умножается на этот же множитель, т.е. если

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t), \tag{1.21}$$

то

$$\dot{Y}(t) = \dot{X}(t)\varphi(t). \tag{1.22}$$

***Свойство* 3**. При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$, т.е. если

$$Y(t) = X(t)\varphi(t), \tag{1.23}$$

то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2). \tag{1.24}$$

***Свойство* 4**. Абсолютная величина корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений:

$$|K_x(t_1,t_2)| \le \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}. \qquad (1.25)$$

§ 10. Нормированная корреляционная функция

Известно, что для оценки степени линейной зависимости двух случайных величин пользуются коэффициентом корреляции

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \qquad (1.26)$$

В теории случайных функций аналогом этой характеристики служит нормированная корреляционная функция.

Очевидно, что каждой паре фиксированных значений t_1 и t_2 аргумента случайной функции $X(t)$ соответствует определенный коэффициент корреляции $\dfrac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$ соответствующих сечений – случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$; это означает, что коэффициент корреляции случайной функции есть функция (неслучайная) двух независимых аргументов t_1 и t_2; ее обозначают через $\rho_x(t_1,t_2)$.

Дадим теперь определение нормированной корреляционной функции.

Нормированной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых переменных t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно коэффициенту корреляции сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$\rho_x(t_1,t_2) = \frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}. \qquad (1.27)$$

Учитывая, что $\sigma_x(t_1) = \sqrt{D_x(t_1)} = \sqrt{K_x(t_1,t_2)}$ и $\sigma_x(t_2) = \sqrt{K_x(t_2,t_2)}$, получим

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)K_x(t_2,t_2)}}. \qquad (1.28)$$

Таким образом, зная корреляционную функцию, можно найти нормированную корреляционную функцию.

Пример. Найти нормированную корреляционную функцию случайной функции $X(t)$ по ее известной корреляционной функции $K_x(t_1,t_2)=5\cos(t_2-t_1)$.

Решение. Искомая нормированная корреляционная функция

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)K_x(t_2,t_2)}}=\frac{5\cos(t_2-t_1)}{\sqrt{5\cos(t_1-t_1)}\sqrt{5\cos(t_2-t_2)}}=\cos(t_2-t_1).$$

Нормированная корреляционная функция имеет те же свойства, что и корреляционная функция (см. § 10), причем свойство 4 заменяется на следующее: абсолютная величина нормированной корреляционной функции не превышает единицы, т.е. $|\rho_x(t_1,t_2)|\le 1$.

Это свойство следует из того, что при фиксированных значениях аргументов значение нормированной корреляционной функции равно коэффициенту корреляции двух случайных величин – соответствующих сечений, а абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

Легко видеть, что при равных значениях аргументов нормированная корреляционная функция равна единице: $|\rho_x(t,t)|=1$.

Очевидно, нормированная корреляционная функция имеет тот же вероятностный смысл, что и коэффициент корреляции: чем ближе модуль этой функции к единице, тем линейная связь между сечениями сильнее; чем ближе модуль этой функции к нулю, тем эта связь слабее.

§ 11. Взаимная корреляционная функция

Для того чтобы оценить степень зависимости сечений двух случайных функций, вводят характеристику – взаимную корреляционную функцию.

Рассмотрим две случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$. При фиксированных значениях аргумента, например $t=t_1$ и $t=t_2$, получим два сечения – систему двух случайных величин $X(t_1)$ и $Y(t_2)$ с корреляционным моментом $M\left[\dot{X}(t_1)\dot{Y}(t_2)\right]$. Таким образом, каждая пара чисел t_1 и t_2 определяет систему двух случайных величин, а каждой такой системе соответствует ее корреляционный момент. Отсюда следует, что каждой паре фиксированных значений t_1 и t_2 соответствует определенный корреляционный момент; это означает, что взаимная корреляционная функция двух случайных функций есть функция (неслучайная) двух независимых аргументов t_1 и t_2, ее обозначают через $R_{xy}(t_1,t_2)$. Дадим теперь определение взаимной корреляционной функции.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию $R_{xy}(t_1,t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений обеих функций, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\left[\dot{X}(t_1)\dot{Y}(t_2)\right]. \qquad (1.29)$$

Коррелированными называют две случайные функции, если их взаимная корреляционная функция не равна тождественно нулю.

Некоррелированными называют две случайные функции, взаимная корреляционная функция которых тождественно равна нулю.

Пример. Найти взаимную корреляционную функцию двух случайных функций $X(t)=Ut$, $Y(t)=Ut^2$, где U – случайная величина, причем $D(U)=3$.

Решение. Найдем математические ожидания: $m_x(t)=M(Ut)=tm_U$, $m_y(t)=M\left(Ut^2\right)=t^2m_U$. Определим далее центрированные функции:

$$\dot{X}(t)=X(t)-m_x(t)=Ut-tm_U=t(U-m_U),$$

$$\dot{Y}(t)=Y(t)-m_x(t)=Ut^2-t^2m_U=t^2(U-m_U).$$

Найдем взаимную корреляционную функцию:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\left[\dot{X}(t_1)\dot{Y}(t_2)\right]=M\left\{\left[t_1(U-m_U)\right]\left[t_2^2(U-m_U)\right]\right\}=$$
$$=t_1t_2^2M\left[(U-m_U)^2\right]=t_1t_2^2D(U)=3t_1t_2^2$$

Итак**,** искомая взаимная корреляционная функция имеет вид $R_{xy}(t_1,t_2)=3t_1t_2^2$.

§ 12. Свойства взаимной корреляционной функции

Свойство **1**. При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=R_{yx}(t_2,t_1). \tag{1.30}$$

Свойство **2**. Прибавление к случайным функциям $X(t)$ и $Y(t)$ неслучайных слагаемых, соответственно $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, не изменяет их взаимной корреляционной функции, т.е. если

$$X_1(t)=X(t)+\varphi(t) \text{ и } Y_1(t)=Y(t)+\psi(t), \tag{1.31}$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2). \tag{1.32}$$

Свойство **3**. При умножении случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ на неслучайные множители, соответственно $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, взаимная корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\psi(t_2)$, т.е. если

$$X_1(t)=X(t)\varphi(t) \text{ и } Y_1(t)=Y(t)+\psi(t), \tag{1.33}$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2)\varphi(t_1)\psi(t_2). \tag{1.34}$$

Свойство **4**. Абсолютная величина взаимной корреляционной функции двух случайных функций не превышает среднего геометрического их дисперсий:

$$\left|R_{xy}(t_1,t_2)\right|\le\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}. \tag{1.35}$$

§ 13. Нормированная взаимная корреляционная функция

Наряду с взаимной корреляционной функцией для оценки степени зависимости сечений двух случайных функций пользуются характеристикой – нормированной взаимной корреляционной функцией.

Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых аргументов t_1 и t_2.

$$\rho_{xy}(t_1,t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)K_x(t_2,t_2)}}=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}}. \qquad (1.36)$$

Нормированная взаимная корреляционная функция имеет те же свойства, что и взаимная корреляционная функция, причем свойство 4 заменяется следующим свойством: *абсолютная величина нормированной взаимной корреляционной функции не превышает единицы:*

$$|\rho_x(t_1,t_2)|\le 1. \qquad (1.37)$$

Пример. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию двух случайных функций $X(t)=Ut,\ Y(t)=Ut^2$, где U – случайная величина, причем $D(U)=3$.

Решение. Ранее при решении примера, в котором заданы те же функции, что и в настоящем примере, были найдены функции:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=3t_1t_2^2,\ \dot{X}(t)=t(U-m_U),\ \dot{Y}(t)=t^2(U-m_U).$$

Пользуясь этим результатами, легко найдем корреляционные функции:

$$K_x(t_1,t_2)=3t_1t_2^2,\ K_y(t_1,t_2)=3t_1^2t_2^2.$$

И нормированную функцию:

$$\rho_{xy}(t_1,t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)K_x(t_2,t_2)}}=\frac{3t_1t_2^2}{\sqrt{3t_1t_1}\sqrt{3t_2^2t_2^2}}=1.$$

Итак, искомая нормированная взаимная корреляционная функция имеет вид

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = 1.$$

Заметим, что функция $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейной функциональной зависимостью $Y(t) = t^2 U = t(tU) = tX(t)$.

§ 14. Характеристики суммы случайных функций

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ – случайные функции. Найдем характеристики суммы этих функций по известным характеристикам слагаемых.

***Теорема* 1**. *Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых, т.е. если*

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \tag{1.38}$$

то

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t). \tag{1.39}$$

Эта теорема уже была приведена ранее (см. § 5, свойство 3); здесь она помещена для систематизации изложения. Методом математической индукции теорему можно обобщить на *n* слагаемых.

Следствие. *Математическое ожидание суммы случайной функции* $X(t)$ *и случайной величины Y равно сумме их математических ожиданий, т.е. если*

$$Z(t) = X(t) + Y, \tag{1.40}$$

то

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t). \tag{1.41}$$

***Замечание* 1**. Центрированная функция суммы случайных функций равна сумме центрированных слагаемых, т.е. если

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \tag{1.42}$$

то

$$\dot{Z}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t). \tag{1.43}$$

***Теорема* 2.** *Корреляционная функция суммы двух коррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых и взаимной* *корреляционной функции, которая прибавляется дважды (с разным порядком следования аргументов), т.е. если*

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \tag{1.44}$$

то

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + R_{xy}(t_1, t_2) + R_{xy}(t_2, t_1). \tag{1.45}$$

***Следствие* 1**. *Корреляционная функция суммы двух некоррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых, т.е. если*

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \tag{1.46}$$

то

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2). \tag{1.47}$$

***Замечание* 2**. В частности, при равных значениях аргументов $t_1 = t_2 = t$ получим $K_z(t,t) = K_x(t,t) + K_y(t,t)$, или $D_z(t) = D_x(t) + D_y(t)$.

Итак, дисперсия суммы двух некоррелированных случайных функций равна сумме дисперсий слагаемых.

***Следствие* 2**. *Корреляционная функция случайной функции* $X(t)$ *и некоррелированной с ней случайной величины* Y *равна сумме корреляционной функции случайной функции и дисперсии случайной величины, т.е. если*

$$Z(t) = X(t) + Y, \tag{1.48}$$

то

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + D_y. \tag{1.49}$$

Пример. Заданы случайные функции $X(t) = Ut$, $Y(t) = t^2 V$, где U и V – некоррелированные случайные величины, причем $M(U) = 3$, $M(V) = 6$, $D(U) = 0{,}2$, $D(V) = 5$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию суммы $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Решение. а) Найдем математическое ожидание суммы заданных функций. По теореме 1 имеем

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) = M(Ut) + M\left(t^2 V\right) = tM(U) + t^2 M(V) = 3t + 6t^2.$$

б) Найдем корреляционную функцию суммы $Z(t)$. Так как случайные величины U и V не коррелированны, то их корреляционный момент равен нулю:

$$M[(U-3)(U-6)]=0.$$

Следовательно, взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\left[\dot{X}(t_1)\dot{Y}(t_2)\right]=t_1t_2^2M[(U-3)(U-6)]=0,$$

а значит, функции $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированны. Поэтому искомая корреляционная функция в силу следствия 1 равна

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2),$$

Выполнив вычисления, окончательно получим

$$K_z(t_1,t_2)=0{,}2t_1t_2+5t_1^2t_2^2.$$

в) Найдем искомую дисперсию случайной функции $Z(t)$

$$D_z(t)=K_z(t,t)=0{,}2t^2+5t^4.$$

§ 15. Производная случайной функции и ее характеристики

При изучении случайных величин встречалось понятие сходимости по вероятности. Для изучения случайных функций необходимо ввести ***среднеквадратичную сходимость***.

Говорят, что последовательность случайных величин $X_1,X_2,...,X_n$ сходится в ***среднеквадратичном*** к случайной величине X, если математическое ожидание квадрата разности X_n-X стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е.

$$M\left[(X_n-X)^2\right]=0. \qquad (1.50)$$

Случайную величину X называют ***пределом в среднеквадратичном*** последовательности случайных величин $X_1,X_2,...,X_n$ и пишут

$$X=\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n. \qquad (1.51)$$

Заметим, что из среднеквадратичной сходимости следует сходимость по вероятности; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Случайную функцию $X(t)$ называют ***дифференцируемой***, если существует такая функция $X'(t)$ (ее называют ***производной***), что

$$\lim_{\Delta t \to 0} M\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right]^2=0. \qquad (1.52)$$

Итак, ***производной случайной функции*** $X(t)$ называют среднеквадратичный предел отношения приращения функции к приращению аргумента Δt при $\Delta t \to 0$:

$$X'(t)=\underset{\Delta t \to 0}{l.i.m}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}. \qquad (1.53)$$

Пусть известны характеристики случайной функции. Как найти характеристики ее производной? Ответ на этот вопрос дают теоремы, приведенные ниже, причем рассматриваются только среднеквадратично дифференцируемые случайные функции.

***Теорема* 1**. *Математическое ожидание производной* $X'(t)=\dot{x}$ *от случайной функции* $X(t)$ *равно производной от ее математического ожидания:*

$$m_{\dot{x}}(t)=m'_x(t). \qquad (1.54)$$

***Замечание* 1**. *Для среднеквадратически дифференцируемых случайных функций операции нахождения математического ожидания и дифференцирования можно менять местами.*

Пример 1. Зная математическое ожидание $m_x(t)=t^2+t$ случайной функции $X(t)$, найти математическое ожидание ее производной.

Решение. Искомое математическое ожидание будет равно

$$m_{\dot{x}}(t)=m'_x(t)=\left[t^2+t\right]'=2t+1.$$

Замечание* 2**. Если первая производная дифференцируема, то производную от первой производной называют ***второй производной и обозначают через $X''(t)$. Аналогично определяют производные более высоких порядков.

***Замечание* 3**. Теорему 1 можно обобщить следующим образом: математическое ожидание производной порядка n равно производной этого же порядка от математического ожидания случайной функции.

***Теорема* 2**. *Корреляционная функция производной от случайной функции*

$X(t)$ *равна второй смешанной производной от ее корреляционной функции:*

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \tag{1.55}$$

Пример 2. Зная корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)=2t_1t_2+t_1^2t_2^2$ случайной функции $X(t)$, найти корреляционную функцию ее производной.

Решение. Найдем частную производную от заданной корреляционной функции по t_1:

$$\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial\left(2t_1t_2+t_1^2t_2^2\right)}{\partial t_1}=2t_2+2t_1t_2^2.$$

Найдем частную производную от полученного результата по t_2:

$$\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_1}=\frac{\partial\left(2t_2+2t_1t_2^2\right)}{\partial t_1}=2+4t_1t_2.$$

Искомая корреляционная функция имеет вид $K_{\dot{x}}(t_1,t_2)=2+4t_1t_2$.

***Теорема* 3.** *Взаимная корреляционная функция случайной функции* $X(t)$ *и ее производной* $X'(t)=\dot{x}$ *равна частной производной от корреляционной функции по соответствующему аргументу* (*если индекс* $\dot{x}$ *при* R *записан на первом* (*втором*) *месте, то дифференцируют по первому* (*второму*) *аргументу*)*, т.е.*

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2} \text{ или } R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}. \tag{1.56}$$

Пример 3. Задана корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)=t_1t_2e^{t_1+t_2}$ случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}.$$

Выполнив дифференцирование заданной корреляционной функции по аргументу t_2, получим

$$\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2} = t_1 e^{t_1+t_2}(t_2+1).$$

Итак, искомая взаимная корреляционная функция имеет вид

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2) = t_1 e^{t_1+t_2}(t_2+1).$$

§ 16. Интеграл от случайной функции и его характеристики

Интегралом от случайной функции $X(t)$ по отрезку $[0;t]$ называют предел в среднеквадратическом интегральной суммы при стремлении к нулю частичного интервала Δs_i максимальной длины (переменная интегрирования обозначена через *s*, чтобы отличить ее от предела интегрирования *t*):

$$Y(t) = \underset{\Delta s_i \to 0}{l.i.m.} \sum X(s_i)\Delta s_i = \int_0^t X(s)ds. \tag{1.57}$$

Пусть известны характеристики случайной функции. Как найти характеристики интеграла от случайной функции? Ответ на этот вопрос дают теоремы, приведенные ниже.

***Теорема* 1.** *Математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания, т.е. если*

$$Y(t) = \int_0^t X(s)ds, \tag{1.58}$$

то

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(s)ds. \tag{1.59}$$

Замечание. О*перации нахождения математического ожидания и среднеквадратичного интегрирования можно менять местами*.

Пример 1. Зная математическое ожидание $m_x(t) = 2t+1$ случайной функции $X(t)$, найти математическое ожидание интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

Решение. Искомое математическое ожидание будет равно

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(s)ds=\int_0^t (2s+1)ds=t^2+t.$$

***Теорема* 2.** *Корреляционная функция интеграла от случайной функции* $X(t)$ *равна двойному интегралу от ее корреляционной функции, т.е. если*

$$Y(t)=\int_0^t X(s)ds, \qquad (1.60)$$

то

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(s_1,s_2)ds_1 ds_2. \qquad (1.61)$$

Пример 2. Зная корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)=4t_1t_2+9t_1^2t_2^2$ случайной функции $X(t)$, найти корреляционную функцию интеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Решение. Найдем $K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\left(4s_1s_2+9s_1^2s_2^2\right)ds_1ds_2$. Выполнив интегрирование, получим искомую корреляционную функцию: $K_y(t_1,t_2)=t_1^2t_2^2(1+t_1t_2)$.

***Теорема* 3.** *Взаимная корреляционная функция случайной функции* $X(t)$ *и интеграла* $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ *равна интегралу от корреляционной функции случайной функции* $X(t)$, т.е.

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2} K_x(t_1,s)ds \text{ или } R_{yx}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1} K_x(s,t_2)ds. \qquad (1.62)$$

Пример 3. Задана корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)=3t_1t_2X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t_1,t_2)$ случайной функции $X(t)$ и $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Решение. Используя формулу $R_{xy}(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_2} K_x(t_1,s)ds$, получим искомую корреляционную функцию $R_{xy}(t_1,t_2)=3t_1\int\limits_0^{t_2} sds=\frac{3}{2}t_1t_2^2$.

§ 17. Комплексные случайные величины и их числовые характеристики

В дальнейшем кроме действительных рассматриваются и комплексные случайные функции. Эти функции и их характеристики определяют по аналогии с комплексными случайными величинами, поэтому начнем изложение с комплексных величин.

Комплексной случайной величиной называют величину $Z = X + Yi$, где X, Y – действительные случайные величины.

Сопряженной случайной величине $Z = X + Yi$ называют случайную величину $\overline{Z} = X - Yi$.

Обобщим определения математического ожидания и дисперсии на комплексные случайные величины так, чтобы, в частности, при $Y = 0$ эти характеристики совпали с ранее введенными характеристиками действительных случайных величин, т. е. чтобы выполнялись требования:

$$m_z = m_x,\ D_z = D_x. \tag{1.63}$$

Математическим ожиданием комплексной случайной величины $Z = X + Yi$ называют комплексное число

$$m_z = m_x + m_y i. \tag{1.64}$$

В частности, при $Y = 0$ получим $m_z = m_x$.

Дисперсией комплексной случайной величины Z называют математическое ожидание квадрата модуля центрированной величины Z:

$$D_z = M\left[\left|\dot{Z}\right|^2\right]. \tag{1.65}$$

В частности, при $Y = 0$ получим $D_z = M\left[\left|\dot{X}\right|^2\right] = D_x$.

Учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, имеем

$$D_z = M\left[\left|\dot{Z}\right|^2\right] = M\left[\left(\dot{X}\right)^2 + \left(\dot{Y}\right)^2\right] = M\left[\left(\dot{X}\right)^2\right] + M\left[\left(\dot{Y}\right)^2\right] = D_x + D_y.$$

Итак, *дисперсия комплексной случайной величины равна сумме дисперсий ее действительной и мнимой частей:*

$$D_z = D_x + D_y. \tag{1.66}$$

Известно, что корреляционный момент двух равных случайных величин $X_1 = X_2 = X$ равен дисперсии D_x – положительному действительному числу. Обобщим определение корреляционного момента так, чтобы, в частности, корреляционный момент двух равных комплексных случайных величин $Z_1 = Z_2 = Z$ был равен дисперсии D_z – положительному действительному числу, т. е. чтобы выполнялось требование

$$\mu_{zz} = D_z. \tag{1.67}$$

Корреляционным моментом двух комплексных случайных величин называют математическое ожидание произведения отклонения одной из величин на сопряженное отклонение другой:

$$\mu_{z_1 z_2} = M\left[\left(Z_1 - m_{z_1}\right)\left(\overline{Z_2 - m_{z_2}}\right)\right] = M\left[\dot{Z}_1 \dot{Z}_2\right]. \tag{1.68}$$

В частности, при $Z_1 = Z_2 = Z$, учитывая, что произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату их модуля, получим

$$\mu_{zz} = M\left[\dot{Z}\overline{\dot{Z}}\right] = M\left[\left|\dot{Z}\right|^2\right] = D_z. \tag{1.69}$$

Корреляционный момент комплексных случайных величин $Z_1 = X_1 + Y_1 i$ и $Z_2 = X_2 + Y_2 i$ выражается через корреляционные моменты действительных и мнимых частей этих величин следующей формулой:

$$\mu_{z_1 z_2} = M\left[\dot{Z}_1 \overline{\dot{Z}_2}\right] = M\left[\left|\dot{Z}\right|^2\right] = D_z. \tag{1.70}$$

§ 18. Комплексные случайные функции и их характеристики

Комплексной случайной функцией называют функцию

$$Z(t) = X(t) + Y(t)i, \tag{1.71}$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ – действительные случайные функции действительного аргумента t.

Обобщим определения математического ожидания и дисперсии на комплексные случайные функции так, чтобы, в частности, при $Y = 0$ эти характеристики совпали с ранее введенными характеристиками для действительных случайных функций, т. е. чтобы выполнялись требования:

$$m_z(t) = m_x(t), \quad D_z(t) = D_x(t). \tag{1.72}$$

Математическим ожиданием комплексной случайной функции $Z(t) = X(t) + Y(t)i$ называют комплексную функцию (неслучайную)

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)i\,. \tag{1.73}$$

В частности, при $Y = 0$ получим $m_z(t) = m_x(t)$, т.е. выполняется первое требование.

Дисперсией комплексной случайной функции $Z(t)$ называют математическое ожидание квадрата модуля центрированной функции $Z(t)$:

$$D_z(t) = M\left[\left|\dot{Z}(t)\right|^2\right]. \tag{1.74}$$

В частности, при $Y = 0$ получим $D_z(t) = M\left[\left|\dot{X}(t)\right|^2\right] = D_x(t)$, т. е. выполняется второе требование.

Учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, имеем

$$D_z(t) = M\left[\left|\dot{Z}(t)\right|^2\right] = M\left\{\left[\dot{X}(t)\right]^2 + \left[\dot{Y}(t)\right]^2\right\} = M\left[\dot{X}(t)\right]^2 + M\left[\dot{Y}(t)\right]^2 =$$
$$= D_x(t) + D_y(t).$$

Итак, *дисперсия комплексной случайной функции равна сумме дисперсий ее действительной и мнимой частей:*

$$D_z(t) = D_x(t) + D_y(t). \tag{1.75}$$

Известно, что корреляционная функция действительной случайной функции $X(t)$ при разных значениях аргументов равна дисперсии $D_x(t)$. Обобщим определение корреляционной функции на комплексные случайные функции $Z(t)$ так, чтобы при равных значениях аргументов $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция $K_z(t,t)$ была равна дисперсии $D_z(t)$, т. е. чтобы выполнялось требование

$$K_z(t,t) = D_z(t). \tag{1.76}$$

Корреляционной функцией комплексной случайной функции $Z(t)$ называют корреляционный момент сечений $\dot{Z}(t_1)$ и $\dot{Z}(t_2)$:

$$K_z(t_1,t_2) = M\left[\dot{Z}(t_1)\overline{\dot{Z}(t_2)}\right]. \tag{1.77}$$

В частности, при равных значениях аргументов

$$K_z(t,t) = M\left[\dot{Z}(t)\overline{\dot{Z}(t)}\right] = M\left[\left|\dot{Z}\right|^2\right] = D_z(t), \tag{1.78}$$

т. е. указанное требование выполняется.

Если действительные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ коррелированны, то

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + [R_{xy}(t_2,t_1)] + [R_{xy}(t_1,t_1)]. \tag{1.79}$$

Если функции $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированны, то

$$K_z(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2). \tag{1.80}$$

Обобщим определение взаимной корреляционной функции на комплексные случайные функции $Z_1(t) = X_1(t) + Y_1(t)i$ и $Z_2(t) = X_2(t) + Y_2(t)i$ так, чтобы, в частности, при $Y_1 = Y_2 = 0$ выполнялось требование

$$R_{z_1 z_2}(t_1,t_2) = R_{x_1 x_2}(t_1,t_2). \tag{1.81}$$

Взаимной корреляционной функцией *двух* комплексных случайных функций называют функцию (неслучайную)

$$R_{z_1 z_2}(t_1,t_2) = M\left[\dot{Z}_1(t_1)\overline{\dot{Z}_2(t_2)}\right]. \tag{1.82}$$

В частности, при $Y_1 = Y_2 = 0$ получим

$$R_{z_1 z_2}(t_1,t_2) = M\left[\dot{X}_1(t_1)\overline{\dot{X}_2(t_2)}\right] = R_{x_1 x_2}(t_1,t_2), \tag{1.83}$$

т. е. требование выполняется.

Взаимная корреляционная функция двух комплексных случайных функций выражается через взаимные корреляционные функции их действительных и мнимых частей следующей формулой:

$$R_{z_1 z_2}(t_1,t_2) = R_{x_1 x_2}(t_1,t_2) + R_{y_1 y_2}(t_1,t_2) + i \cdot \left[R_{x_2 y_1}(t_2,t_1) - R_{x_1 y_2}(t_1,t_2)\right]. \quad (1.84)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется случайной функцией? Сечением и реализацией случайной функции? Случайным процессом? Приведите примеры.
2. Каковы основные характеристики случайных функций?
3. Математическое ожидание случайной функции и его свойства.
4. Дисперсия случайной функции и ее свойства.
5. Дайте определение корреляционной функции, сформулируйте ее свойства.
6. Что такое нормированная корреляционная функция?
7. Взаимная корреляционная функция и ее свойства.
8. Каковы характеристики суммы случайных функций?
9. Производная и интеграл от случайной функции.
10. Что называется комплексной случайной функцией и каковы ее характеристики?

Глава 2. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Определение и свойства стационарной случайной функции

Среди случайных функций целесообразно выделить класс функций, математические ожидания которых сохраняют одно и то же постоянное значение при всех значениях аргумента t и корреляционные функции которых зависят только от разности аргументов $t_2 - t_1$. Очевидно, что для таких функций начало отсчета аргумента может быть выбрано произвольно. Такие случайные функции называют «стационарными в широком смысле» в отличие от случайных функций, «стационарных в узком смысле» (все характеристики этих функций не зависят от самих значений аргументов, но зависят от их взаимного расположения на оси t).

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле; обратное утверждение неверно.

Поскольку мы ограничиваемся корреляционной теорией, которая использует только две характеристики (математическое ожидание и корреляционную функцию), далее рассмотрим случайные функции, стационарные в широком смысле, причем будем их называть просто стационарными.

Стационарной называют случайную функцию $X(t)$, математическое ожидание которой постоянно при всех значениях аргумента t и корреляционная функция которой зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1$.

Из этого определения следует, что:

1) корреляционная функция стационарной случайной функции есть функция одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$, т. е.

$$K_x(t_1, t_2) = k_x(t_2 - t_1) = k_x(\tau); \tag{2.1}$$

2) дисперсия стационарной случайной функции постоянна при всех значениях аргумента t и равна значению ее корреляционной функции в начале координат ($\tau = 0$), т.е.

$$D_x(t)=K_x(t,t)=k_x(t-t)=k_x(0). \qquad (2.2)$$

Пример. Задана случайная функция $X(t)=\cos(t+\varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0;2\pi)$. Доказать, что $X(t)$ – стационарная случайная функция.

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$m_x(t)=M[\cos(t+\varphi)]=M[\cos t\cos\varphi-\sin t\sin\varphi]=$$
$$=\cos t\cdot M(\cos\varphi)-\sin t\cdot M(\sin\varphi).$$

Учитывая, что $M(\cos\varphi)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=0$ и $M(\sin\varphi)=0$, следовательно, $m_x(t)=0$.

Найдем корреляционную функцию, учитывая, что центрированная функция имеет вид $\dot{X}(t)=X(t)-m_x(t)=X(t)=\cos(t+\varphi)$:

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)\right]=M[\cos(t_1+\varphi)\cos(t_2+\varphi)]=$$
$$=M\left[\frac{\cos(t_2-t_1)+\cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right]=\frac{\cos(t_2-t_1)}{2}.$$

Итак, математическое ожидание случайной функции $X(t)$ постоянно при всех значениях аргумента и ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Следовательно, $X(t)$ – стационарная случайная функция.

Заметим, что, положив $t_1=t_2=t$ в корреляционной функции, найдем дисперсию $D_x(t)=K_x(t,t)=\dfrac{1}{2}\cos(t-t)=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, дисперсия сохраняет постоянное значение при всех значениях аргумента, как и должно быть для стационарной случайной функции.

***Свойство* 1**. *Корреляционная функция стационарной случайной функции есть четная функция:*

$$k_x(\tau)=k_x(-\tau). \qquad (2.3)$$

***Свойство* 2**. *Абсолютная величина корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает ее значения в начале координат:*

$$|k_x(\tau)|\le k_x(0). \qquad (2.4)$$

§ 2. Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции

Кроме корреляционной функции для оценки степени зависимости сечений стационарной случайной функции используют еще одну характеристику – нормированную корреляционную функцию.

Нормированной корреляционной функцией стационарной случайной функции называют неслучайную функцию аргумента τ

$$\rho_x(t) = \frac{k_x(t)}{k_x(0)}. \tag{2.5}$$

Абсолютная величина нормированной корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает единицы. Справедливость этого свойства уже была доказана ранее для любой случайной функции.

$$|\rho_x(\tau) \le 1|. \tag{2.6}$$

Замечание. При $\tau = 0$ нормированная корреляционная функция равна единице. Действительно,

$$\rho_x(0) = \frac{k_x(0)}{k_x(0)} = 1. \tag{2.7}$$

Пример. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = \frac{1}{2}\cos\tau$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти нормированную корреляционную функцию.

Решение. Воспользуемся определением нормированной корреляционной функции:

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{k_x(0)} = \frac{(1/2)\cos\tau}{(1/2)\cos 0} = \cos\tau.$$

Итак**,** искомая нормированная корреляционная функция

$$\rho_x(\tau) = \cos\tau.$$

Заметим, что $\rho_x(0) = 1$, как и должно быть в соответствии с замечанием, приведенным в этом параграфе,

§ 3. Стационарно связанные случайные функции

Стационарно связанными называют две случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, если их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(\tau). \tag{2.8}$$

Взаимная корреляционная функция стационарно связанных случайных функций обладает следующим свойством:

$$r_{xy}(\tau) = r_{xy}(-\tau). \tag{2.9}$$

Это равенство следует из свойства 1 взаимной корреляционной функции (при одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется). Геометрически график кривой $r_{xy}(-\tau)$ симметричен графику кривой $r_{xy}(\tau)$ относительно оси ординат.

Заметим, что если каждая из двух случайных функций стационарна, то отсюда еще нельзя заключить, что их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов.

Стационарными и ***стационарно связанными*** называют две стационарные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, взаимная корреляционная функция которых зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

Пример. Заданы две стационарные случайные функции $X(t) = \cos(t + \varphi)$ и $Y(t) = \sin(t + \varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0; 2\pi)$. Доказать, что заданные стационарные функции стационарно связаны.

Решение. Ранее было найдено, что $m_x(t) = 0$ (см. § 1, пример); аналогично можно получить, что $m_y(t) = 0$. Запишем центрированные функции:

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t) = \cos(t + \varphi),$$

$$\dot{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = Y(t) = \sin(t + \varphi).$$

Найдем взаимную корреляционную функцию:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\left[\dot{X}(t_1)\dot{Y}(t_2)\right]=M\left[\cos(t_1+\varphi)\sin(t_2+\varphi)\right]=$$

$$=M\left[\frac{\sin(t_2-t_1)+\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right]=\frac{\sin(t_2-t_1)}{2}+M\left[\frac{\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right]$$

Легко убедиться, что математическое ожидание второго слагаемого равно нулю (см. § 1, пример), поэтому

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\sin(t_2-t_1).$$

Итак, взаимная корреляционная функция заданных стационарных случайных функций зависит только от разности аргументов, следовательно, эти функции стационарно связаны.

§ 4. Корреляционная функция производной стационарной случайной функции

Теорема. *Корреляционная функция производной $X'(t)=\dot{x}$ дифференцируемой стационарной случайной функции $X(t)$ равна второй производной от ее корреляционной функции, взятой со знаком минус:*

$$k_{\dot{x}}(\tau)=-k''_x(\tau). \qquad (2.10)$$

Пример. Задана, корреляционная функция $k_x(\tau)=2e^{-0,5\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию производной $X'(t)=\dot{x}$.

Решение.

а) Продифференцировав дважды заданную корреляционную функцию и изменив знак результата на противоположный, найдем искомую корреляционную функцию:

$$k_{\dot{x}}(\tau)=2e^{-0,5\tau^2}(1-\tau).$$

б) Положив $\tau=0$, получим искомую дисперсию $D_x=k_x(0)=2$.

§ 5. Взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной

Теорема. *Взаимная корреляционная функция дифференцируемой стационарной случайной функции* $X'(t)$ *и ее производной* $X'(t) = \dot{x}$ *равна первой производной от корреляционной функции* $k_x(\tau)$, *взятой со своим* (*противоположным*) *знаком, если индекс* $\dot{x}$ *стоит на втором* (*первом*) *по порядку месте:*

$$а)\ r_{x\dot{x}}(\tau) = k'_x(\tau); \quad б)\ r_{\dot{x}x}(\tau) = -k'_x(\tau). \tag{2.11}$$

Предполагается, что $\tau = t_2 - t_1$.

Заметим, что поскольку взаимная корреляционная функция $r_{x\dot{x}}(\tau)$ зависит только от τ, то стационарная случайная функция и ее производная стационарно связаны (см. § 3).

Пример. Задана корреляционная функция $k'_x(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $r_{x\dot{x}}(\tau)$ заданной случайной функции и ее производной.

Решение. Воспользуемся формулой $r_{x\dot{x}}(\tau) = k'_x(\tau)$.

а) Пусть $\tau \ge 0$, тогда $|\tau| = \tau$, и $k_x(\tau) = e^{-\tau}(1+\tau), k'_x(\tau) = e^{-\tau}\left[1 - (1+\tau)e^{-\tau}\right] = -\tau \cdot e^{-\tau}$.

Таким образом, при $\tau \ge 0$ получили, что

$$r_{x\dot{x}}(\tau) = -\tau \cdot e^{-\tau}.$$

б) Пусть $\tau < 0$, тогда $|\tau| = -\tau$, $k_x(\tau) = e^{\tau}(1-\tau), \quad k'_x(\tau) = -e^{\tau} + (1-\tau)e^{\tau} = -\tau \cdot e^{\tau}..$

Таким образом, при $\tau < 0$, получили

$$r_{x\dot{x}}(\tau) = -\tau \cdot e^{\tau}.$$

Итак, искомая взаимная корреляционная функция

$$r_{x\dot{x}}(\tau) = \begin{cases} -\tau \cdot e^{-\tau}, & \tau \ge 0; \\ -\tau \cdot e^{-\tau}, & \tau < 0. \end{cases}$$

§ 6. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции

Теорема. *Корреляционная функция интеграла* $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ *от стационарной случайной функции равна*

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^t (t_2-\tau)k_x(\tau)d\tau-\int_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)k_x(\tau)d\tau+\int_0^t (t_1-\tau)k_x(\tau)d\tau. \qquad (2.12)$$

Следствие. *Дисперсия интеграла* $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ *от стационарной случайной функции равна*

$$D_y(t)=2\int_0^t (t-\tau)k_x(\tau)d\tau. \qquad (2.13)$$

Пример. Задана корреляционная функция $k_x(t)=\dfrac{1}{1+\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию интеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Решение. Воспользуемся следствием из теоремы, имеем

$$D_y(t)=2\int_0^t (t-\tau)k_x(\tau)d\tau=2\int_0^t \frac{t-\tau}{1+\tau^2}d\tau-\int_0^t \frac{2\tau}{1+\tau^2}d\tau .$$

Вычисляя интегралы методом замены переменной, получим искомую дисперсию:

$$D_y(t)=2arctgt-\ln\left(1+t^2\right).$$

Заметим, что функция $Y(t)$ не стационарна, так как ее дисперсия не постоянна, а зависит от аргумента t.

§ 7. Определение характеристик эргодических стационарных случайных функций из опыта

Среди стационарных случайных функций можно выделить класс функций, оценка характеристик которых путем усреднения множества реализации равносильна усреднению по времени только одной реализации достаточно большой длительности.

Стационарную случайную функцию $X(t)$ называют ***эргодической***, если ее характеристики, найденные усреднением ***множества реализации***, совпадают с соответствующими характеристиками, полученными усреднением по времени ***одной реализации*** $x(t)$, которая наблюдалась на интервале $(0;T)$ достаточно большой длительности.

Достаточное условие эргодичности стационарной случайной функции $X(t)$ относительно математического ожидания состоит в том, что ее корреляционная функция $k_x(\tau)$ при $\tau \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{\tau \to \infty} k_x(\tau) = 0. \tag{2.14}$$

Достаточное условие эргодичности стационарной случайной функции $X(t)$ относительно корреляционной функции состоит в том, что корреляционная функция $k_y(\tau)$ при $\tau \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{\tau \to \infty} k_y(\tau) = 0, \tag{2.15}$$

где $Y(t,\tau) = M\left[\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)\right]$.

В качестве оценки математического ожидания эргодической стационарной случайной функции $X(t)$ по наблюдавшейся на интервале $(0;T)$ реализации $x(t)$ принимают ее среднее по времени значение:

$$m_x^* = \frac{1}{T}\int_0^t x(t)dt. \tag{*}$$

Известно, что корреляционная функция стационарной случайной функции

$$k_x(\tau) = M[\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)]. \tag{2.16}$$

Таким образом, оценить $k_x(\tau)$ означает оценить математическое ожидание функции $\dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau)$, поэтому можно воспользоваться соотношением (*), учитывая, что функция $\dot{X}(t+\tau)$, определена при $(t+\tau) \le T$ и, следовательно, $t \le T - \tau$.

Итак, в качестве оценки корреляционной функции эргодической стационарной случайной функции принимают

$$k_x^* = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \dot{x}(t)\dot{x}(t+\tau)dt, \qquad (**)$$

либо, что равносильно,

$$k_x^* = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt - \left[m_x^*\right]^2. \qquad (***)$$

Практически интегралы вычисляют приближенно, например, по формуле прямоугольников. С этой целью делят интервал $(0;T)$на n частичных интервалов длиной $\Delta t = T/n$, в каждом частичном i-м интервале выбирают одну точку, например его середину t_i. В итоге оценка (*) принимает вид

$$m_x^* = \frac{1}{T}[x(t_1)\Delta t + x(t_2)\Delta t + ... + x(t_n)\Delta t] = \frac{\Delta t}{T}\sum_{i=1}^{n} x(t_i). \qquad (2.17)$$

Учитывая, что $\Delta t = T/n$, окончательно получим

$$m_x^* = \left[\sum_{i=1}^{n} x(t_i)\right]/n \qquad (2.18)$$

Аналогично приближенно вычисляют интеграл (**), полагая, что τ принимает значения $\Delta t,\ 2\Delta t, ..., (n-1)\Delta t$, или, что то же, T/n, $2T/n, \ldots,$ $(n-1)T/n$.

В итоге оценки корреляционной функции (**) и (***) принимают соответственно вид:

$$k_x^*\left(l \cdot \frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n-l}\sum_{i=1}^{n-1} \dot{x}(t_i)\dot{x}(t_{i+l}), \qquad (2.19)$$

$$k_x^*\left(l \cdot \frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n-l}\sum_{i=1}^{n-1} x(t_i)x(t_{i+l}) - \left[m_x^*\right]^2, \qquad (2.20)$$

где $l = 1, 2, ..., n-1$.

Замечание. Можно показать, что оценка (*) – несмещенная, т.е. $M\left[m_x^*\right] = m_x$; оценка (**) – асимптотически несмещенная, т.е. $\lim\limits_{T\to\infty} M\left[k_x^*(\tau)\right] = k_x(\tau)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие стационарной случайной функции.
2. Что собой представляет нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции?
3. Какие случайные функции являются стационарно связанными? Приведите их характеристики.
4. Какая стационарная функция является эргодической?
5. Как на основе экспериментальных данных определить характеристики эргодической стационарной случайной функции?

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Представление стационарной случайной функции в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами

В этой главе вводится новая характеристика стационарной случайной функции – ***спектральная плотность***, которая упрощает теоретические и практические расчеты. В частности, используя ее**,** можно найти характеристики выходной функции стационарной линейной динамической системы по известным характеристикам входной функции.

1. Рассмотрим случайную функцию вида

$$Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t\,, \qquad (*)$$

где ω – постоянное действительное число; U и V – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и одинаковыми дисперсиями: $m_U = m_V = 0,\ D_U = D_V = D$.

Преобразуем правую часть соотношения (*):

$$Z(t) = V\left(\frac{U}{V}\cos\omega t + \sin\omega t\right). \qquad (3.1)$$

Положив $U/V = tg\varphi$ и выполнив элементарные преобразования, получим

$$Z(t) = \sqrt{U^2 + V^2}\sin(\omega t + \varphi), \qquad (3.2)$$

где $\varphi = arctg(U/V)$.Отсюда следует, что случайную функцию $Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$ можно истолковать как гармоническое колебание со случайной амплитудой $\sqrt{U^2 + V^2}$, случайной фазой $\omega t + arctg(U/V)$ и частотой ω.

Заметим, что, по допущению, $m_U = m_V = 0$, поэтому U и V – центрированные случайные величины: $\dot{U} = U$ и $\dot{V} = V$.

Легко убедиться, что $m_Z(t) = 0$, следовательно, $Z(t)$ – центрированная случайная функция:

$$\dot{Z}(t) = Z(t). \tag{3.3}$$

Покажем, что $Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$ – стационарная случайная функция. Действительно, математическое ожидание $m_Z(t) = 0$, т.е. постоянно при всех значениях аргумента. Найдем корреляционную функцию, приняв во внимание, что $\dot{Z}(t) = Z(t)$:

$$K_Z(t_1, t_2) = M\left[\dot{Z}(t_1)\dot{Z}(t_2)\right] = M\left[Z(t_1)Z(t_2)\right] =$$
$$= M\left[(U\cos\omega t_1 + V\sin\omega t_1)(U\cos\omega t_2 + V\sin\omega t_2)\right]$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$K_Z(t_1, t_2) = D\cos(t_2 - t_1). \tag{3.4}$$

Итак, корреляционная функция случайной функции $Z(t)$ зависит только от разности аргументов, а ее математическое ожидание постоянно. Следовательно, $Z(t)$ – стационарная случайная функция, что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим теперь случайную функцию $X(t)$, которая является суммой конечного числа слагаемых вида (*):

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n}[U_i\cos\omega t_i + V_i\sin\omega t_i] \tag{**}$$

где случайные величины U_i и V_i, не коррелированны, их математические ожидания равны нулю и дисперсии величин с одинаковыми индексами равны между собой: $D(U_i) = D(V_i) = D$.

Заметим, что $X(t)$ – центрированная функция, т.е. $\dot{X}(t) = X(t)$. Действительно, математическое ожидание каждого слагаемого суммы (**) равно нулю; следовательно, математическое ожидание $m_x(t)$ этой суммы также равно нулю и, значит,

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t). \tag{3.5}$$

Докажем, что функция $X(t)$ вида (**) – стационарная. Действительно, математическое ожидание $m_x(t) = 0$ при всех значениях аргумента, т.е. постоянно. Кроме того, слагаемые суммы (**) попарно не коррелированны, поэтому корреляционная функция этой суммы равна сумме корреляционных функций слагаемых. В п. 1 доказано, что корреляционная функция каждого слагаемого (**) зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1$. Следовательно, корреляционная функция суммы (**) также зависит только от разности аргументов

$$K_x(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} D_i \cos\omega_i (t_2 - t_1). \qquad (3.6)$$

При выкладках следует учесть, что, по условию, $M(\dot{U}^2) = M(\dot{V}^2) = D$, а так как $\dot{U} = U$, $\dot{V} = V$, то $M(\dot{U}^2) = M(\dot{V}^2) = D$. Случайные величины U и V не коррелированны, поэтому их корреляционный момент

$$\mu_{uv} = M(\dot{U}\dot{V}) = M(UV) = 0,$$

или

$$k_x(\tau) = \sum_{i=1}^{n} D_i \cos\omega_i \tau, \qquad \text{(***)}$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Таким образом, случайная функция $X(t)$ вида (**) есть стационарная функция (разумеется, должны выполняться условия, указанные в п. 2). Принимая во внимание, что (см. п. 1)

$$X_i(t) = \sqrt{U_i^{\,2} + V_i^{\,2}} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \qquad (3.7)$$

где $\varphi = arctg(U_i / V_i)$, заключаем, что сумму **(**)** можно записать в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{U_i^{\,2} + V_i^{\,2}} \sin(\omega_i t + \varphi_i). \qquad (3.8)$$

Итак, *если случайная функция $X(t)$ может быть представлена в виде суммы гармоник различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами, то $X(t)$ – стационарная функция.*

Спектральным разложением стационарной случайной функции называют представление этой функции в виде суммы гармонических колебаний различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами.

§ 2. Дискретный спектр стационарной случайной функции

А. Частоты – произвольные числа, количество их конечно

Пусть стационарная случайная функция $X(t)$ может быть представлена в виде спектрального разложения

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n} X_i(t)=\sum_{i=1}^{n}[U_i\cos\omega_i t+V_i\sin\omega_i t], \qquad (*)$$

причем сохраняются допущения, указанные вначале п. 2 (см. § 1). Найдем дисперсию одной гармоники $X_i(t)$, учитывая, что случайные величины U_i и V_i не коррелированны и дисперсии величин с одинаковыми индексами равны между собой, т.е. $D(U_i)=D(V_i)=D_i$. Имеем

$$D[X_i(t)]=D[U_i\cos\omega_i t+V_i\sin\omega_i t]=D[U_i\cos\omega_i t]+D[V_i\sin\omega_i t]=$$
$$=\cos^2\omega_i t\cdot D(U_i)+\sin^2\omega_i t\cdot D(V_i)=\left(\cos^2\omega_i t+\sin^2\omega_i t\right)D_i=D_i$$

Итак,

$$D[X_i(t)]=D_i \qquad (**)$$

Таким образом, дисперсия i-ой гармоники спектрального разложения (*) равна дисперсии случайной величины U_i или, что то же, дисперсии случайной величины V_i.

Найдем теперь дисперсию стационарной случайной функции $X(t)$, приняв во внимание, что слагаемые $X_i(t)$ не коррелированны и поэтому дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D[X(t)]=D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i(t)]. \qquad (3.9)$$

Используя (**), окончательно получим

$$D[X(t)]=\sum_{i=1}^{n} D_i\ . \qquad (3.10)$$

Итак, дисперсия стационарной случайной функции, которая может быть представлена в виде суммы конечного числа гармоник с произвольными частотами, равна сумме дисперсий составляющих ее гармоник.

Дискретным спектром стационарной случайной функции $X(t)$ вида (*) называют совокупность дисперсий всех составляющих ее гармоник.

Заметим, что поскольку каждой частоте ω_i можно поставить в соответствие дисперсию D_i, то спектр можно изобразить графически: на горизонтальной оси откладывают частоты ω_i, а в качестве соответствующих ординат (их называют *спектральными линиями*) строят дисперсии D_i. Этот дискретный спектр называют ***линейчатым***.

Б. Равноотстоящие частоты, множество их бесконечное (счетное).

В предыдущем пункте предполагалось, что число частот в спектральном разложении (*) конечно, а сами частоты – произвольные числа. Теперь рассмотрим спектральное разложение вида

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t \right], \tag{3.11}$$

в котором число частот бесконечно (счетно), они равноотстоящие, причем разность любых двух «соседних» частот

$$\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i = \pi/T, \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{3.12}$$

где T – действительное положительное число.

Таким образом,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T},\ \omega_2 = \frac{2\pi}{T}, \ldots,\ \omega_i = \frac{\pi i}{T}. \tag{3.13}$$

Запишем корреляционную функцию рассматриваемой стационарной случайной функции $X(t)$, положив $\omega_i = \dfrac{\pi i}{T}$, $n = \infty$:

$$k_x(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos \frac{\pi i}{T} \tau. \tag{*}$$

При $\tau = 0$, учитывая, что $k_x(0) = D_x$, получим

$$D_x = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \,. \tag{**}$$

Итак, дисперсия стационарной случайной функции, которая может быть представлена в виде суммы бесконечного (счетного) множества гармоник с равноотстоящими частотами, равна сумме дисперсий слагаемых гармоник (если сумма существует, т. е. ряд (**) сходится).

Заметим, что соотношение (*) можно рассматривать как разложение корреляционной функции в ряд Фурье по косинусам. Из (*) видно, что $k_x(\tau)$ – периодическая функция с периодом $2T$, поэтому коэффициенты Фурье имеют вид

$$D_i = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)\cos\frac{\pi i}{T}\tau\, d\tau\,, \tag{3.14}$$

или, учитывая, что $\omega_i = \dfrac{\pi i}{T}$ и подынтегральная функция – четная,

$$D_i = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} k_x(\tau)\cos\omega_i\tau\, d\tau\,. \tag{3.15}$$

Если каждой частоте $\omega_i = \dfrac{\pi i}{T}$ (i=1, 2, ...) ставить в соответствие дисперсию D_i, то получим, как и в случае конечного числа произвольных частот, дискретный линейчатый спектр, причем число спектральных линий (ординат D_i) бесконечно (счетно) и они равноотстоящие (соседние спектральные линии находятся одна от другой на одном и том же расстоянии $\Delta\omega = \dfrac{\pi}{T}$).

§ 3. Непрерывный спектр стационарной случайной функции. Спектральная плотность

Среди стационарных случайных функций есть такие функции, корреляционные функции которых нельзя представить в виде

$$k_x(\tau) = \sum D_i \cos\omega_i\tau,\ D_i > 0\,, \tag{3.16}$$

где число слагаемых конечно или счетно. Спектр этих функций не дискретный, а непрерывный. Для рассмотрения стационарных случайных функций с непрерывным спектром необходимо ввести понятие спектральной плотности.

Выше, когда частоты гармоник спектрального разложения стационарной случайной функции были дискретными и равноотстоящими, был получен дискретный линейчатый спектр, причем соседние частоты отличались на величину $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$. Пусть $T \to \infty$, тогда $\Delta\omega \to 0$. Ясно, что при этом частота изменяется непрерывно (поэтому обозначим ее через ω без индекса), соседние ординаты спектра сближаются, и в пределе вместо дискретного спектра мы получим непрерывный спектр, т. е. каждой частоте $\omega(\omega > 0)$соответствует ордината, которую обозначим через $s_x^*(\omega)$.

Хотя отрицательные частоты физического смысла не имеют, для упрощения вычислений целесообразно считать, что частоты изменяются в интервале $(-\infty; +\infty)$, и вместо функции $s_x^*(\omega)$ рассматривать функцию, которая имеет вдвое меньшие ординаты:

$$s_x(\omega) = s_x^*(\omega). \tag{3.17}$$

Спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называют функцию $s_x(\omega)$, которая связана с корреляционной функцией $k_x(\tau)$ взаимно обратными преобразованиями Фурье:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau\,, \tag{*}$$

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega\,. \tag{**}$$

Эти формулы называют формулами ***Винера–Хинчина***. В действительной форме они представляют собой взаимно обратные косинус -преобразования Фурье:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} k_x(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau \tag{***}$$

$$k_x(\tau) = 2\int_0^{+\infty} s_x(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega. \qquad (****)$$

Важное значение спектральной плотности состоит в том, что, зная ее, можно найти корреляционную функцию, и обратно (в этом смысле спектральная плотность и корреляционная функция эквивалентны); кроме того, как уже было указано, использование спектральной плотности в ряде случаев значительно упрощает теоретические и практические расчеты.

Подчеркнем, что, как следует из формулы (***), спектральная плотность – четная функция:

$$s_x(-\omega) = s_x(\omega). \qquad (3.18)$$

Выясним вероятностный смысл функции $s_x(\omega)$. Положив $\tau = 0$ в соотношении (****) и учитывая, что $k_x(\omega) = D_x$, $s_x(\omega)$ – четная функция, получим

$$D_x(\tau) = 2\int_0^{+\infty} s_x(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} s_x(\omega)d\omega. \qquad (3.19)$$

Видим, что дисперсия стационарной случайной функции $X(t)$ представляет собой «сумму» элементарных дисперсий $s_x(\omega)d\omega = s_x(\omega)\Delta\omega$; каждая элементарная дисперсия соответствует частичному интервалу частот $\Delta\omega$. В частности, частичному интервалу $\Delta\omega = \omega_b - \omega_a$ соответствует дисперсия

$$D_x = \int_{\omega_a}^{\omega_b} s_x(\omega)d\omega. \qquad (3.20)$$

По теореме о среднем,

$$D_x = (\omega_b - \omega_a)s_x(\omega_c) = \Delta\omega\, s_x(\omega_c), \qquad (3.21)$$

где $\omega_a < \omega_c < \omega_b$.

Отсюда

$$s_x(\omega_c) = \frac{D_x}{\Delta\omega}. \qquad (3.22)$$

Из этой формулы заключаем:

а) величину $s_x(\omega_c)$ можно истолковать как среднюю плотность дисперсии на частичном интервале $\Delta\omega$, содержащем частоту ω_c;

б) при $\Delta\omega \to 0$ естественно считать, что $s_x(\omega_c)$ – плотность дисперсии в точке ω_c. Поскольку никаких ограничений на частоту ω_c наложено не было, полученный результат справедлив для любой частоты.

Итак, *спектральная плотность описывает распределение дисперсий стационарной случайной функции по непрерывно изменяющейся частоте.*

Из вероятностного смысла спектральной функции следует, что спектральная плотность – неотрицательная функция $s_x \geq 0$.

Пример 1. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию

$$k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}|\tau|, \ |\tau| \leq 2; \\ 0, \ |\tau| > 0. \end{cases}$$

Решение. Используя формулу $s_x(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$, и учитывая, что $|\tau| = \tau$ в интервале (0; 2), имеем

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}\tau\right)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

Интегрируя по частям, окончательно получим искомую спектральную плотность: $s_x(\omega_c) = \dfrac{\sin^2\omega}{\pi\omega^2}$.

Пример 2. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0$.

Решение. Используем формулу

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_x(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Учитывая, что $|\tau| = -\tau$ при $\tau < 0$, $|\tau| = \tau$ при $\tau \geq 0$, получим: $k_x(\tau) = De^{\alpha\tau}$ при $\tau < 0$, $k_x(\tau) = De^{-\alpha\tau}$ при $\tau \geq 0$.

Следовательно,

$$s_x(\omega)=\frac{D}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha\tau}e^{-i\omega\tau}\,d\tau+\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right]=\frac{D}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha-i\omega)\tau}\,d\tau+\int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\,d\tau\right]$$

Выполнив интегрирование, найдем искомую спектральную плотность

$$s_x(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Пример 3. Найти корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$, зная ее спектральную плотность

$$s_x(\omega)=\begin{cases} s_0, & \textit{в интервале} \quad -\omega_0\le\omega\le\omega_0, \\ 0, & \textit{вне этого интервала.} \end{cases}$$

Решение. Используя формулу

$$k_x(\tau)=2\int_0^{+\infty} s_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\tau$$

и учитывая, что $s_x(\omega)=\omega_0$ в интервале $(0;\omega_0)$, имеем

$$k_x(\tau)=2s_0\int_0^{\omega_0}\cos\omega\tau\,d\tau.$$

Выполнив интегрирование, получим искомую корреляционную функцию:

$$k_x(\tau)=\frac{2s_0\sin\omega_0\tau}{\tau}.$$

§ 4. Нормированная спектральная плотность

Наряду со спектральной плотностью часто используют нормированную спектральную плотность.

Нормированной спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называют отношение спектральной плотности к дисперсии случайной функции:

$$s_{x\,норм}(\omega)=\frac{s_x(\omega)}{D_x}=\frac{s_x(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} s_x(\omega)\,d\omega}. \qquad (3.23)$$

Пример. Задана спектральная плотность $s_x(\omega)=\dfrac{5}{\pi(1+\omega^2)}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти нормированную спектральную плотность.

Решение. Найдем дисперсию:

$$D_x(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}s_x(\omega)d\omega=\frac{5}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}=\frac{5}{\pi}\cdot\pi=5.$$

Найдем искомую нормированную спектральную плотность, для чего разделим заданную спектральную плотность на дисперсию $D_x=5$; в итоге получим

$$s_{x\,норм}(\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}.$$

Нормированная спектральная плотность представима в виде косинус–преобразования Фурье нормированной корреляционной функции:

$$s_{x\,норм}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\rho_x(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau.$$

В свою очередь, нормированная корреляционная функция выражается через нормированную спектральную плотность при помощи обратного преобразования Фурье:

$$\rho_x(\tau)=2\int\limits_{0}^{+\infty}s_{x\,норм}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega.$$

В частности, положив $\tau=0$ и учитывая, что $\rho_x(0)=1$, получим

$$2\int\limits_{0}^{+\infty}s_{x\,норм}(\omega)d\omega=1,\ \text{или}\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}s_{x\,норм}(\omega)d\omega=1.$$

Геометрически этот результат означает, что площадь, ограниченная снизу осью $O\omega$ и сверху кривой $s_{x_{норм}}(\omega)$, равна единице.

§ 5. Взаимная спектральная плотность стационарных и стационарно связанных случайных функций

Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ – стационарные и стационарно связанные случайные функции со взаимной корреляционной функцией $r_{xy}(\tau)$.

Взаимной спектральной плотностью двух стационарных и стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют функцию $s_{xy}(\omega)$, определяемую преобразованием Фурье:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \,. \tag{3.24}$$

В свою очередь, взаимная корреляционная функция выражается через взаимную спектральную плотность с помощью обратного преобразования Фурье:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \,. \tag{3.25}$$

Пример. Задана корреляционная функция $k_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) взаимную корреляционную функцию; б) взаимную спектральную плотность случайных функций $X(t)$ и $Y(t) = X(t - t_0)$.

Решение. а) Легко убедиться, что $Y(t)$ – стационарная функция. Найдем взаимную корреляционную функцию:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = M\left[\dot{X}(t_1)\dot{Y}_1(t_2)\right] = M\left[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2 + t_0)\right] = k_x\left[(t_2 + t_0) - t_1\right] = k_x(\tau + t_0) \,.$$

Отсюда видно, что стационарные функции $X(t)$ и $Y(t)$ стационарно связаны (их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов τ).

б) Найдем взаимную спектральную плотность:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau + t_0) e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$= -e^{-i\omega\tau} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau + t_0) e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega(\tau + t_0)} d(\tau + t_0) = e^{i\omega\tau_0} s_x(\omega)$$

Итак, искомая взаимная спектральная плотность

$$s_{xy}(\omega) = e^{i\omega\tau_0} s_x(\omega) \,.$$

§ 6. Дельта-функция

Дельта-функция $\delta(t)$ является примером обобщенной функции (*обобщенная функция – предел* последовательности однопараметрического семейства непрерывных функций). Дельта–функцию определяют тем условием, что она ставит в соответствие всякой непрерывной функции $f(t)$ ее значение при $t=0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0). \qquad (3.26)$$

Правую часть равенства можно представить в виде предела:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(t) f(t) dt \quad (\varepsilon > 0), \qquad (3.27)$$

где

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 & при \quad |t| \geq \varepsilon, \\ \dfrac{1}{2e} & при \quad |t| < \varepsilon. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Таким образом, дельта–функцию можно рассматривать как предел последовательности функций $\delta_{\varepsilon}(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая, что $\delta_{\varepsilon}(t) \to 0$ при $t \neq 0$, $\delta_{\varepsilon} \to \infty$ при $t \to 0$ и $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\pi} dt = 1$, условно пишут

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & при \quad t \neq 0, \\ \infty & при \quad t = 0. \end{cases} \qquad (3.29)$$

Физически дельта–функцию можно истолковать как плотность единичной массы, сосредоточенной в нуле.

Можно показать, что дельта-функция представима интегралом Фурье вида:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega. \qquad (3.30)$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t). \qquad (3.31)$$

Замечание. В приложениях часто используют соотношение,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0), \qquad (3.32)$$

которое вытекает из сказанного выше.

§ 7. Стационарный белый шум

Стационарным белым шумом называют стационарную случайную функцию $X(t)$, спектральная плотность которой постоянна:

$$s_x(\omega) = s = const. \qquad (3.33)$$

Найдем корреляционную функцию белого шума. Используя формулу (**) (см. § 3)

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \qquad (3.34)$$

получим

$$k_x(\tau) = s\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega. \qquad (3.35)$$

Приняв во внимание, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$, окончательно имеем

$$k_x(\tau) = 2\pi s\delta(\tau). \qquad (3.36)$$

Таким образом, корреляционная функция стационарного белого шума пропорциональна дельта-функции; коэффициент пропорциональности $2\pi s$ называют ***интенсивностью стационарного белого шума***.

Дельта-функция равна нулю при всех значениях $\tau \neq 0$, поэтому и корреляционная функция $k_x(\tau)$ также равна нулю при этих же значениях τ. Равенство же нулю корреляционной функции стационарного белого шума означает некоррелированность любых двух его сечений – случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)\,(t_1 \neq t_2)$. Благодаря этой особенности белый шум находит широкое применение в теории случайных функций и ее приложениях. Однако эта же особенность указывает на то, что осуществить белый шум невозможно, так как в действительности при очень близких значениях t_1 и t_2 соответствующие случайные величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$в известной степени коррелированны.

Таким образом, стационарный белый шум – математическая абстракция, полезная для теории случайных функций и ее приложений. В частности, белый шум используют для моделирования случайных процессов, которые имеют постоянную спектральную плотность в определенном диапазоне частот, причем поведение спектральной плотности вне его исследователя не интересует.

Пример. Спектральная плотность стационарной случайной функции $X(t)$ постоянна в диапазоне частот $(-\omega_0; \omega_0)$, а вне его равна нулю**:**

$$s_x(\omega)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad \omega<-\omega_0, \\ s & \textit{при} \quad -\omega_0<\omega<\omega_0, \\ 0 & \textit{при} \quad \omega>\omega_0. \end{cases}$$

Найти**:** а) корреляционную функцию; б) дисперсию случайной функции $X(t)$.

Решение:

а) Найдем искомую корреляционную функцию:

$$k_x(\tau)=\int_{-\omega_0}^{\omega} s\cos\omega\tau\, d\omega = 2s\int_0^{\omega_0}\cos\omega\tau\, d\omega = \frac{2s\sin\omega_0\tau}{\tau}.$$

Итак**,**

$$k_x(\tau)=\frac{2s\sin\omega_0\tau}{\tau}.$$

б) Найдем искомую дисперсию:

$$D_x=\lim_{\tau\to 0} k_x(\tau)=\lim_{\tau\to 0}\frac{2s\sin\omega_0\tau}{\tau}=2s\omega_0\frac{\sin\omega_0\tau}{\tau}=2s\omega_0.$$

Итак,

$$D_x = 2s\omega_0 .$$

§ 8. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой

Стационарной линейной динамической системой называется устройство, которое описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$a_0 Y^{(n)}(t) + a_1 Y^{(n-1)}(t) + ... + a_n Y(t) = b_0 X^{(m)}(t) + b_1 X^{(m-1)}(t) + ... + b_m X(t), \quad (3.37)$$

где $X(t)$– входная стационарная случайная функция (воздействие, возмущение), $Y(t)$ – выходная случайная функция (реакция, отклик).

Если динамическая система устойчива, то при достаточно больших значениях t, т. е. по окончании переходного процесса, функцию $Y(t)$ можно считать стационарной. Подчеркнем, что при дальнейшем изложении предполагается, что $X(t)$ и $Y(t)$ – стационарные случайные функции.

Поставим перед собой задачу найти характеристики выходной функции по известным характеристикам входной функции.

Найдем математическое ожидание m_y, зная m_x, для чего приравняем математические ожидания левой и правой частей дифференциального уравнения. Учитывая, что $X(t)$ и $Y(t)$ – стационарные случайные функции, а значит, математические ожидания производных этих функций равны нулю, получим

$$a_n m_y = b_m m_x . \quad (3.38)$$

Отсюда искомое математическое ожидание

$$m_y = \frac{b_m}{a_n} m_x . \quad (*)$$

Пример 1. На вход линейной динамической системы, описываемой уравнением $Y'(t) + 2Y(t) = 5X'(t) + 6X(t)$, подается стационарная случайная функция

$X(t)$ с математическим ожиданием $m_x = 10$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме (после затухания переходного процесса).

Решение. Используя формулу (*), получим

$$m_y = \frac{b_m}{a_n} m_x = \frac{6}{2} \cdot 10 = 30.$$

Введем понятия передаточной функции и частотной характеристики, которые понадобятся далее. Предварительно запишем дифференциальное уравнение в операторной форме, обозначив оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ через p, $\frac{d_2}{dt^2}$ – через p^2 и т. д. В итоге дифференциальное уравнение примет вид

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) Y(t) = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m\right) X(t). \quad (**)$$

«Решим» это уравнение относительно $Y(t)$:

$$Y(t) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} X(t) \qquad (***)$$

Передаточной функцией линейной динамической системы называют отношение многочлена относительно p при $X(t)$ к многочлену при $Y(t)$ в операторном уравнении (**):

$$\Phi(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}. \qquad (3.39)$$

Из соотношения (***) следует, что выходная и входная функции связаны равенством

$$Y(t) = \Phi(p) X(t). \qquad (3.40)$$

Частотной характеристикой линейной динамической системы называют функцию, которая получается заменой аргумента p в передаточной функции на аргумент $i\omega$ (ω – действительное число):

$$\Phi(i\omega)=\frac{b_0(i\omega)^m+b_1(i\omega)^{m-1}+...+b_m}{a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+...+a_n}. \qquad (3.41)$$

Доказано, что спектральные плотности выходной и входной функций связаны равенством

$$s_y(\omega)=s_x(\omega)\cdot|\Phi(i\omega)|^2. \qquad (3.42)$$

Отсюда заключаем: *для того чтобы найти спектральную плотность выходной функции, надо умножить спектральную плотность входной функции на квадрат модуля частотной характеристики.*

Зная же спектральную плотность выходной функции, можно найти ее корреляционную функцию:

$$k_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_y(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \qquad (3.43)$$

а следовательно, и дисперсию:

$$D_y=k_y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s_y(\omega)d\omega. \qquad (3.44)$$

Пример 2. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $3Y'(t)+Y(t)=4X'(t)+X(t)$, подается стационарная случайная функция $X(t)$ с корреляционной функцией $k_x(\tau)=6e^{-\tau}$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Решение.

1. Найдем спектральную плотность выходной функции. Используя решение примера 2 (см. § 4) при $D=6$ и $\alpha=2$, получим

$$s_x(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}=\frac{6\cdot 2}{\pi(4+\omega^2)}=\frac{12}{\pi(4+\omega^2)}.$$

2. Найдем передаточную функцию, для чего напишем заданное уравнение в операторной форме: $(3p+1)Y(t)=(4p+1)X(t)$. Отсюда

$$Y(t)=\frac{4p+1}{3p+1}X(t).$$

Следовательно, передаточная функция

$$\Phi(p)=\frac{4p+1}{3p+1}.$$

3. Найдем частотную характеристику, для чего заменим в передаточной функции аргумент p на $i\omega$:

$$\Phi(i\omega)=\frac{4(i\omega)+1}{3(i\omega)+1}.$$

4. Найдем спектральную плотность выходной функции, для чего умножим спектральную плотность входной функции на квадрат модуля частотной характеристики:

$$s_y(\omega)=s_x(\omega)\,|\,\Phi(i\omega)\,|=\frac{12}{\pi(\omega^2+4)}\cdot\frac{|4(i\omega)+1|^2}{|3(i\omega)+1|^2}=\frac{12}{\pi(\omega^2+4)}\cdot\frac{16\omega^2+1}{9\omega^2+1}.$$

5. Найдем искомую дисперсию:

$$D_y=\int_{-\infty}^{+\infty}s_y(\omega)d\omega=\frac{12}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(16\omega^2+1)d\omega}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)}=\frac{24}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(16\omega^2+1)d\omega}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей**:**

$$D_y=\frac{24}{\pi}\cdot\frac{81}{5}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+4}.$$

Выполнив интегрирование, получим искомую дисперсию $D_y=96{,}4$.

§ 9. Примеры расчета случайных колебаний

1. Расчет виброзащитной системы

Рассмотрим виброизоляционную систему с одной степенью свободы при случайном возмущении (рис. 9.1).

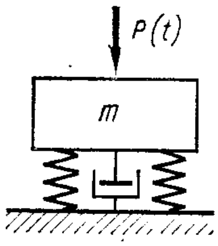

Рис. 9.1. Виброизоляционная система с одной степенью свободы

Объект массой m закреплен с помощью пружины жесткостью C и связан с демпфером вязкого трения (коэффициент вязкого трения α). Предположив, что случайная нагрузка $P(t)$ соответствует ограниченному белому шуму в диапазоне частот $0 \le \omega \le \omega_0$, определим спектральные функции и дисперсии перемещения x и скорости $\dot{x} = v$ объекта, а также дисперсию D_R динамического воздействия R на основание. Определим также наивыгоднейшее значение демпфирования, при котором среднеквадратическое воздействие на основание минимально. Итак, спектральная функция случайного воздействия задана следующими выражениями:

$$0 \le \omega \le \omega_0, \; S_P(\omega) = S_0,$$

$$\omega > \omega_0, \; S_P(\omega) = 0. \qquad (3.45)$$

Составим уравнение движения объекта:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + cx = P(t), \qquad (3.46)$$

где $P(t)-$ случайная вынуждающая сила.

Далее воспользуемся преобразованием Фурье. Введем комплексные величины:

$$\overline{P} = P_0 e^{i\omega t}, \qquad (3.47)$$

$$\overline{x} = x_o e^{i\omega t}. \qquad (3.48)$$

Тогда

$$\dot{x} = i\omega e^{i\omega t}, \quad \ddot{x} = i^2\omega^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}. \tag{3.49}$$

Подставляя выражения (3.47) и (3.49) в уравнение (3.46), получим

$$-m\omega^2 x_0 e^{i\omega t} + \gamma\, i\omega x_0 e^{i\omega t} + c x_0 e^{i\omega t} = P_0 e^{i\omega t},$$

$$\left(-m\omega^2 + \gamma\, i\omega + c\right) x_0 e^{i\omega t} = P_0 e^{i\omega t},$$

$$\left(-m\omega^2 + \gamma\, i\omega + c\right)\bar{x} = \bar{P}. \tag{3.50}$$

Из последнего выражения находим частотную характеристику перемещения

$$F_x(i\omega) = \frac{\bar{x}}{\bar{P}} = \frac{1}{c - m\omega^2 + \gamma\, i\omega}. \tag{3.51}$$

Обозначив $p = \sqrt{\dfrac{c}{m}}, \quad 2n = \dfrac{\gamma}{m}$, приведем выражение (3.51) к виду

$$F_x(i\omega) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{m}{c}\omega^2 + \dfrac{\gamma}{c} i\omega} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{p^2} + i \cdot \dfrac{2n}{p}\left(\dfrac{\omega}{p}\right)}. \tag{3.52}$$

Далее определим спектральную плотность перемещения по формуле

$$S_x(\omega) = \left|F_x(i\omega)\right|^2 \cdot S(\omega), \tag{3.53}$$

где $S(\omega)$– спектральная плотность вынуждающей силы $P(t)$.

Чтобы вычислить $\left|F_x(i\omega)\right|^2$, определим действительную и мнимую части комплексной величины $F_x(i\omega)$, выполнив некоторые преобразования.

$$F_x(i\omega) = \frac{1}{c} \cdot \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{p^2} - i \cdot \dfrac{2n}{p}\left(\dfrac{\omega}{p}\right)}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p^2} + i \cdot \dfrac{2n}{p}\left(\dfrac{\omega}{p}\right)\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p^2} - i \cdot \dfrac{2n}{p}\left(\dfrac{\omega}{p}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{p^2} - i \cdot \dfrac{2n}{p}\left(\dfrac{\omega}{p}\right)}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2} =$$

$$=\frac{1}{c}\cdot\left(\frac{1-\dfrac{\omega^2}{p^2}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}-i\frac{\dfrac{2n}{p}\left(\dfrac{\omega}{p}\right)}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}\right),$$

$$\left|F_x(i\omega)\right|^2=\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{1-\dfrac{\omega^2}{p^2}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{\dfrac{2n}{p}\left(\dfrac{\omega}{p}\right)}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}{\left(\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2\right)^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}$$

Таким образом, для спектральной плотности перемещения получим следующее выражение: при $0\le\omega\le\omega_0$

$$S_x(\omega)=\frac{S_0}{c^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2+\left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}, \tag{3.54}$$

при $\omega>\omega_0$ $S_x(\omega)=0$.

Так как скорость перемещения $v=\dfrac{dx}{dt}$, то комплексная переменная скорости имеет вид: $\bar v=\dfrac{d\bar x}{dt}=i\omega x_0e^{i\omega t}=i\omega\,\bar x$. Поэтому частотная характеристика скорости перемещения режущего бруса определяется по формуле

$$F_v(i\omega)=\frac{\bar v}{\bar P}=\frac{i\omega\,\bar x}{\bar P}=i\omega F_x(i\omega). \tag{3.55}$$

Для спектральной плотности скорости получим

$$S_v(\omega)=\left|i\omega F_x(i\omega)\right|^2S(\omega)=\omega^2S_x(\omega). \tag{3.56}$$

Аналогично, для спектральной плотности ускорения $j = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ можно получить

$$S_j(\omega) = \omega^4 S_x(\omega), \tag{3.57}$$

Так как передаваемая основанию сила $R = cx + \alpha\dot{x}$, то, переходя к комплексным величинам, получим

$$\overline{R} = (c + i\alpha\omega)\,\overline{x}\,, \quad F_R(i\omega) = (c + i\alpha\omega)F_x(i\omega). \tag{3.58}$$

Следовательно,

$$S_R(\omega) = |F_R(i\omega)|^2\, S(\omega) = c^2 S_x(\omega) + \alpha^2 S_v(\omega). \tag{3.59}$$

Определение дисперсии x, v, R сводится к вычислению интегралов типа

$$D_x = \int_0^\infty S_x(\omega)d\omega = \int_0^\infty |F_x(i\omega)|^2 S_P(\omega)d\omega = \frac{S_0}{c^2}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2n}{p}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2} =$$

$$= \frac{S_0 p}{c^2}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\left(1 - z^2\right)^2 + \left(\dfrac{2n}{p}\right)^2 z^2}$$

Интеграл можно вычислить, разложив подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{1}{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\mu^2 z^2} = \frac{1}{4\sqrt{1-\mu^2}}\left[\frac{z + 2\sqrt{1-\mu^2}}{z^2 + 2z\sqrt{1-\mu^2} + 1} - \frac{z - 2\sqrt{1-\mu^2}}{z^2 - 2z\sqrt{1-\mu^2} + 1}\right],\ (\mu = n/p).$$

Далее, вычисляя табличные интегралы, окончательно получим

$$D_x = \frac{S_0 p}{c^2}\left(\frac{1}{8\sqrt{1-\mu^2}}\ln\frac{z_1^2 + 2z_1\sqrt{1-\mu^2} + 1}{z_1^2 - 2z_1\sqrt{1-\mu^2} + 1} + \frac{1}{4\mu}\left[arctg\frac{z_1 + \sqrt{1-\mu^2}}{\mu} + arctg\frac{z_1 - \sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right]\right)$$

$z_1 = \omega_0 / p$.

При $\omega_0 \to \infty$ $\quad D_x \to \dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{S_0 p}{c^2\mu} = \dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{S_0 p^2}{c^2 n}$. Отсюда следует, что дисперсия оказывается тем меньше, чем больше жесткость пружины c, демпфирование n и масса объекта, от которой зависит частота p.

Для дисперсии скорости после вычисления соответствующих интегралов находим

$$D_x = \frac{S_0 p^3}{c^2}\left(\frac{1}{4\mu}\left[arctg\frac{z_1+\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}+arctg\frac{z_1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right]-\frac{1}{8\sqrt{1-\mu^2}}\ln\frac{z_1^2+2z_1\sqrt{1-\mu^2}+1}{z_1^2-2z_1\sqrt{1-\mu^2}+1}\right)$$

При $\omega_0 \to \infty$ дисперсия скорости остается ограниченной и стремится к величине $D_v \xrightarrow[z_1\to\infty]{} \frac{\pi}{4}\cdot\frac{S_0}{c^2}\cdot\frac{p^4}{n}$.

Определим дисперсию силы R воздействия на основание. Имеем

$$D_R = c^2 D_x + \alpha^2 D_v. \tag{3.60}$$

Подставив сюда значения D_x и D_v при $\omega_0 \to \infty$, получим

$$D_R = \frac{\pi}{4} S_0 p\left(\frac{p}{n}+\frac{4n}{p}\right). \tag{3.61}$$

Из полученного выражения видно, что дисперсия D_R возрастает неограниченно как при $n \to 0$ (при этом возрастает амплитуда колебаний вблизи резонансной частоты), так и при $n \to \infty$ (т.е. при непосредственной передаче возмущающей силы на основание). Минимум дисперсии D_R имеет место при $n = p/2$, причем $D_{R\min} = \pi S_0 p$.

Таким образом, при случайном возбуждении типа белого шума наиболее выгодным является весьма большое демпфирование системы.

2. Колебания автомобиля

Рассмотрим пример колебания передней части легкового автомобиля при движении по асфальтобетонной дороге. Подвеска характеризуется следующими данными: $M = 800$ кг; $m = 100$ кг; $c = 51\cdot10^3$ Н/м; $c_ш = 336\cdot10^3$ Н/м; $\alpha = 3{,}26\cdot10^3$ Н·с/м.

Примем, что корреляционная функция дороги выражается формулой

$$k(z) = D_f e^{-\gamma|z|}, \tag{3.62}$$

где $D_f = 2{,}0$ см^2; $\gamma = 0{,}133$ 1/м.

Этой функции соответствует пространственная спектральная функция

$$S_0(\Omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{D_f \gamma}{\gamma^2 + \Omega^2}. \qquad (3.63)$$

Соответственно при движении со скоростью v временная спектральная функция составит

$$S_f(\omega) = \frac{1}{v} S_0\left(\frac{\omega}{v}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{D_f \gamma_1}{\gamma_1^2 + \omega^2}, \qquad (3.64)$$

где $\gamma_1 = v\gamma$.

Проведем расчет при скорости $v = 15$ м/с (54 км/ч). В этом случае $\gamma_1 = v\gamma = 2$ с$^{-1}$.

Находим спектральную функцию ускорения кузова:

$$S_j(\omega) = S_f(\omega) \cdot \left|F_j(i\omega)\right|^2 = \omega^4 S_f(\omega) \cdot \left|F_j(i\omega)\right|^2. \qquad (3.65)$$

Подстановка значений приводит к формуле:

$$S_j(\omega) = \frac{2}{\pi} D_f \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 + \omega^2} \cdot \frac{c_ш^2}{M^2 m^2} \cdot \frac{\left(c^2 + \alpha^2 \omega^2\right)\omega^4}{\left|\Phi(\omega)\right|^2}, \qquad (3.66)$$

где

$$\Phi(\omega) = \omega^4 - \omega^2\left(\frac{c_ш}{m} + 3.46\frac{c}{m} + \frac{c}{M}\right) + \frac{c_ш c}{mM} + i \cdot \frac{\alpha}{M}\left(\omega^3\left(1 + \frac{M}{m}\right) - \omega\frac{c_ш}{m}\right). \quad (3.67)$$

Дисперсия ускорения D_j определяется интегралом

$$D_j = \int_0^\infty S_j(\omega) d\omega. \qquad (3.68)$$

Интеграл такого типа можно вычислить либо аналитически, либо применив численное интегрирование. Проводя вычисления, получим дисперсию ускорения $D_j = 1{,}05$ (м/с^2)^2. Следовательно, среднеквадратическое ускорение составляет $\sigma_j = \sqrt{D_j} \approx 1{,}02$ м/с^2. Для оценки этой величины отметим, что максимальное ускорение туловища человека при нормальной ходьбе составляет $\pm 2{,}5$ м/с^2.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют спектральным разложением стационарной случайной функции?
2. Каков дискретный спектр стационарной случайной функции?
3. Спектральная плотность стационарной случайной функции, ее связь с корреляционной функцией.
4. Что характеризует спектральная плотность стационарной случайной функции?
5. Нормированная спектральная плотность стационарной случайной функции и ее характеристики.
6. Какая функция является взаимой спектральной плотностью двух стационарных и стационарно связанных случайных функций? Как она определяется?
7. Что называется дельта-функцией?
8. Что такое «стационарный белый шум»? Какие его характеристики вы можете привести?
9. Как определить передаточную функцию линейной динамической системы?
10. Приведите примеры случайных колебаний в технике.

Глава 4. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ АВТОМОБИЛЕЙ

§1. Основные закономерности изменения технического состояния при эксплуатации автомобиля

Решение задач, связанных с технической эксплуатацией автомобиля, связано с понятием качества автомобиля, агрегата, узла, системы и т.д. ***Качество*** – это совокупность свойств, определяющих степень пригодности агрегата, узла к выполнению заданных функций.

Показатели большинства свойств, определяющих качество, например, производительность, экономичность, динамичность, безопасность, комфортабельность, изменяются в процессе эксплуатации. Эти свойства можно поддерживать и восстанавливать, т.е. управлять ими при условии знания закономерности их изменения. Рассмотрим основные закономерности изменения технического состояния при эксплуатации автомобиля.

Все процессы, происходящие вокруг нас, можно разделить на две группы: процессы, описываемые функциональными зависимостями, и случайные вероятностные процессы.

У большинства деталей и части узлов автомобиля изменение технического состояния в зависимости от пробега носит плавный, монотонный характер (например, суммарный узловой люфт передач, свободный ход педали тормоза или сцепления, зазор между накладками и тормозными дисками и др.), приводящий к возникновению постепенных отказов. При этом характер зависимости может быть какой угодно (рис. 1).

Опыт технической эксплуатации показывает, что изменение параметра технического состояния конкретной детали или среднего значения для группы изделий достаточно хорошо может быть описан двумя видами функций:

- ***степенной функцией***

$$y = a_0 + a_1 l^b, \qquad (4.1)$$

где a_0 – начальное значение параметра; l – наработка; a_1, b – коэффициенты, определяющие характер и интенсивность изменения параметра;

- ***целой рациональной функцией n-го порядка***

$$y = a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + ... + a_n l^n, \tag{4.2}$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – коэффициенты, определяющие характер и степень зависимости y от l.

В практических вычислениях по зависимости (2) достаточно использовать члены до четвертого порядка. Таким образом, зная функцию $y = \varphi(l)$ и предельное значение y_n параметра, можно определить ресурс изделия из зависимости $l = f(y)$.

Довольно часто закономерности изменения большинства параметров, в пределах допустимой погрешности, для практического применения можно описать простыми линейными уравнениями вида:

$$y = a_0 + a_1 l, \tag{4.3}$$

где a_1 – интенсивность изменения параметра в зависимости от условий эксплуатации.

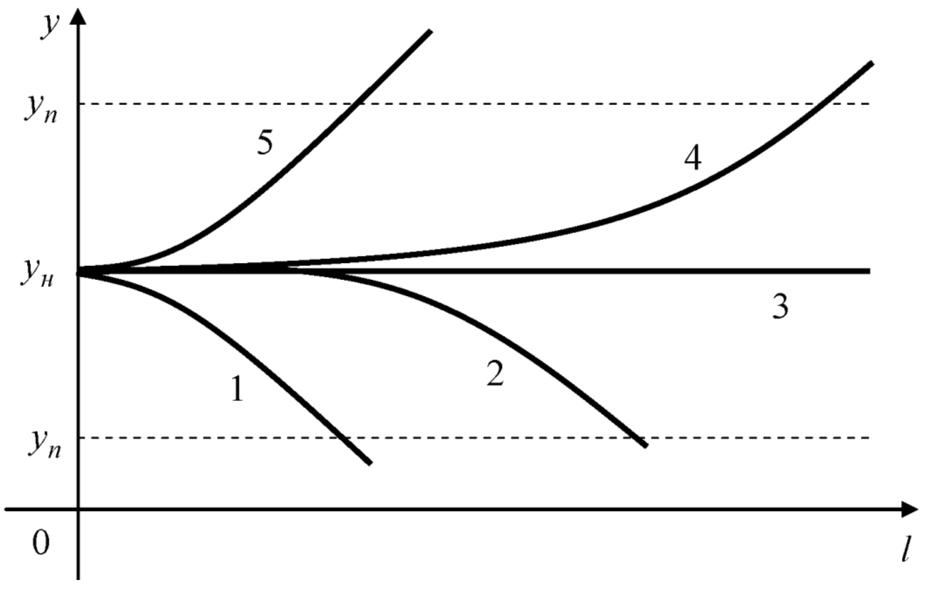

Рис. 1. Возможные формы изменения параметра y от пробега:
1,2 – уменьшение параметра; 3 – неизменность параметра; 4,5 – увеличение параметра

§2. Закономерности первого вида

Закономерности первого вида характеризуют изменения параметров в процессе эксплуатации и позволяют рассчитать средние наработки детали или механизма до предельного или заданного состояния, а также определить остаточный ресурс. В таблице 1 приведены характерные значения интенсивности изменения параметров ТС механизмов грузовых автомобилей.

Таблица 1 – Интенсивность изменения параметров ТС

№ п/п	Наименование параметра технического состояния механизма	Значение параметра	Допустимое значение
1	Свободный ход педали сцепления, мм/1000 км	(4-6) 10^{-1}	35-45
2	Свободный ход педали тормоза, мм/1000 км	(6-9) 10^{-1}	8-14
3	Зазор между тормозными прокладками передних колес, мм/1000 км	(4-6) 10^{-2}	1,5
4	Зазор между тормозными прокладками задних колес, мм/1000 км	(6-9) 10^{-2}	2,4
5	Схождение передних колес, мм/1000 км	(1-3) 10^{-1}	1,5-3,0
6	Прогиб ремня ременной передачи, мм/1000 км	(3-6) 10^{-1}	5-8
7	Прогиб ремня насоса гидроусилителя, мм/1000 км	(3-6) 10^{-1}	8-14
8	Суммарный угловой люфт карданной передачи, град/1000 км	(1-3) 10^{-2}	3-4
9	Суммарный угловой люфт главной передачи заднего моста, град/1000 км	(2-3) 10^{-1}	2,5-3
10	Зазор между клапанами и коромыслами, мм	(2-3) 10^{-2}	0,25-0,3
11	Расход картерных газов на холостом ходу, м^3/мин	(22-26) 10^{-3}	0,11-0,12

§3. Случайные процессы изменения параметров технического состояния автомобиля

При эксплуатации n-го количества автомобилей одной и той же модели интенсивность и характер изменения параметров технического состояния будут различными, т.е. будут иметь рассеивание. На рисунках 2 и 3 хорошо видны изменения ресурса l_p на уровне y_∂ и технического состояния y_i в момент контроля или технического обслуживания l_0.

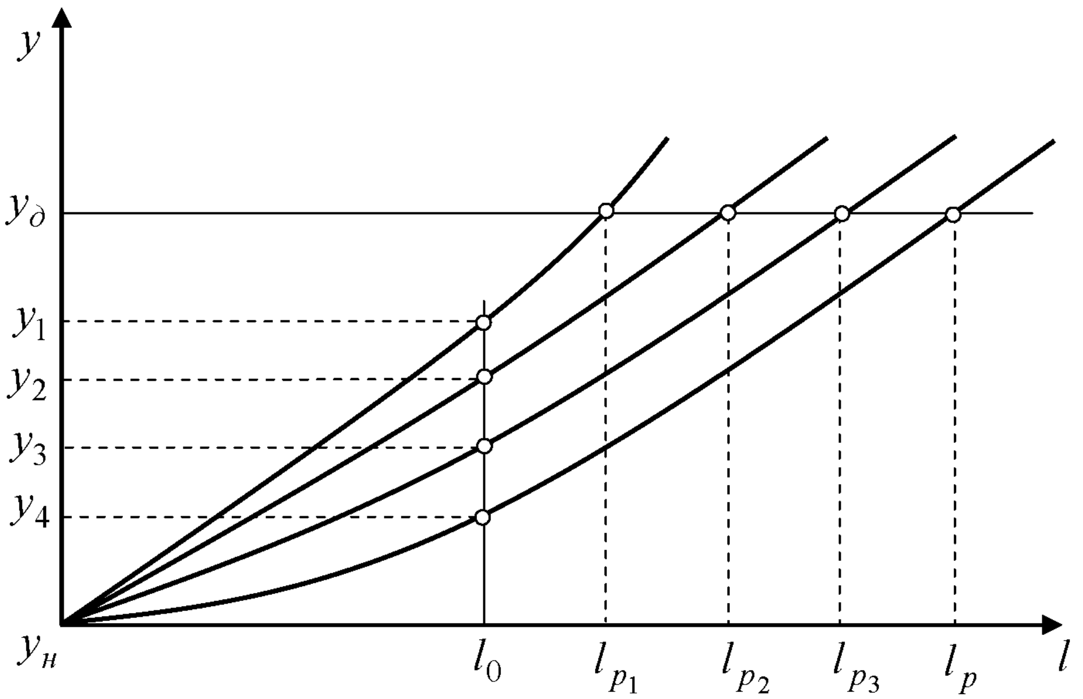

Рис. 2. Изменение ресурса

Решение этой задачи во многом зависит от вариации случайных величин x и их характеристик при n реализациях:

- средних значений

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \qquad (4.4)$$

- средних квадратических отклонений

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}\,; \tag{4.5}$$

- дисперсий

$$D = \sigma^2\,; \tag{4.6}$$

- коэффициентов вариации

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}}\,. \tag{4.7}$$

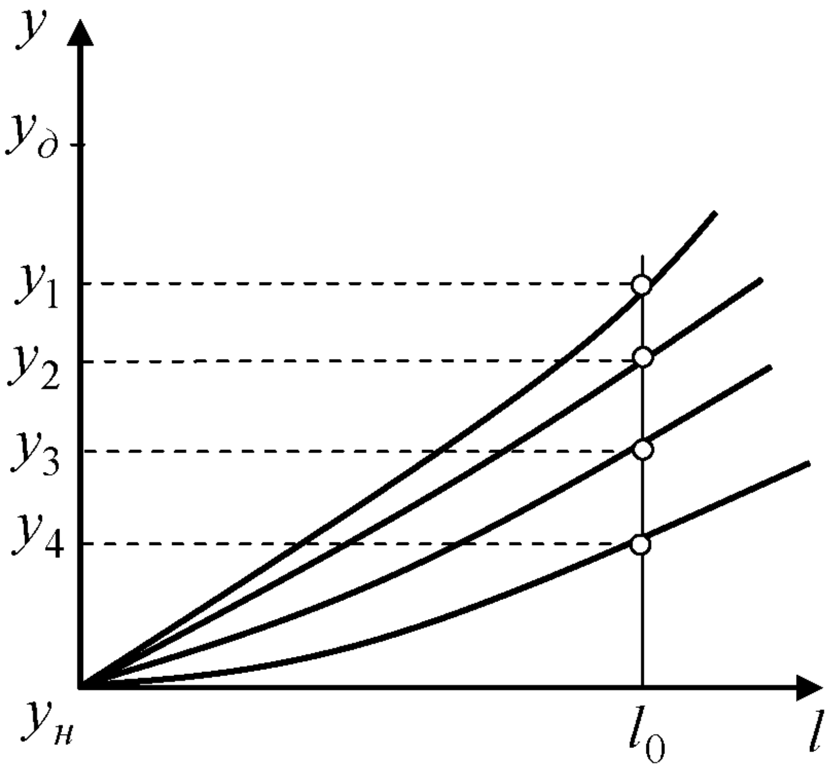

Рис. 3. Изменение технического состояния

При технической эксплуатации автомобилей случайные величины выделяют с малой ($v < 0{,}1$), средней ($0{,}1 \le v \le 0{,}33$) и большой вариацией ($v > 0{,}33$). Обычно коэффициент вариации необходим для ***предварительного*** определения ***закона распределения*** случайной величины.

Важнейшей характеристикой случайной величины служит ***вероятность безотказной работы*** $R(x)$:

$$R(x)=\frac{n-m(x)}{n}=1-\frac{m(x)}{n}, \tag{4.8}$$

где $m(x)$ – число отказавших изделий к моменту наработки X. ***Вероятность отказа*** $F(x)$ является событием, противоположным вероятности безотказной работы (Рис. 4), поэтому

$$F(x)=1-R(x)=\frac{m(x)}{n}. \tag{4.9}$$

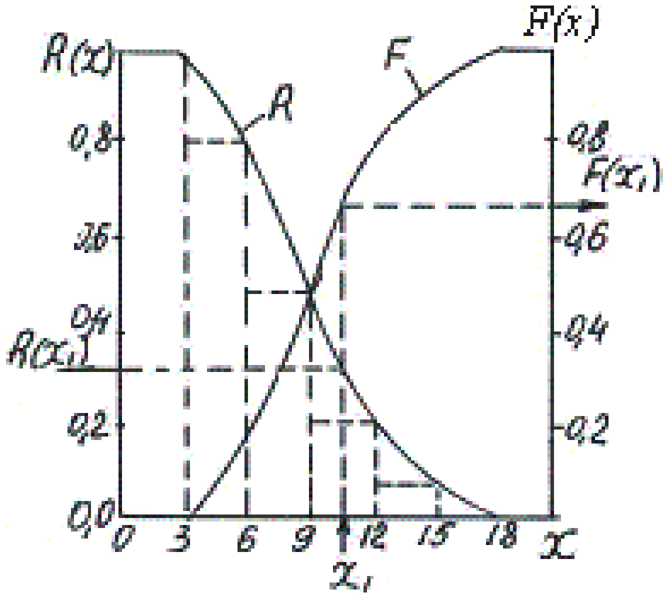

Рис. 4. Вероятность безотказной работы *R* и отказа *F*

Этот график справедлив для невосстанавливаемых изделий, т.е. подлежащих замене после первого отказа, и для восстанавливаемых между отказами. Зная значения $R(x)$ или $F(x)$, можно решать следующие практические задачи.

Если X_γ – заданная наработка узла, а X_i – наработка на отказ, то вероятность события $P(X_i > X_\gamma)=R(x)=\gamma$ означает, что при вероятности $P=\gamma$ изделие проработает без отказа больше наработки X_γ. Эта наработка называется ***гамма-процентным ресурсом***. Обычно принимают $\gamma=0{,}8\,(80\%)\,0{,}85\,(85\%)\,0{,}9\,(90\%)\,0{,}95\,(95\%)$. Выражение $P(X_i \le X_\gamma)$ означает, что с вероятностью $F(x)$ узел откажет при наработке, меньшей или равной X_γ.

Если случайной величиной является продолжительность выполнения какой-либо операции *ТО* или ремонта, которая является случайной величиной, то величина $P(X_i \le X_\gamma) = F(x) = 1 - \gamma$ означает, что в $(1-\gamma)$ случаев операция будет выполнена за время, меньшее X_γ.

Плотность вероятности отказа $f(x)$ – вероятность отказа за малую единицу времени при работе узла, агрегата, детали без замены. Если вероятность отказа за наработку X равна

$$F(x) = \frac{m(x)}{n}, \tag{4.10}$$

то при $n = const$, дифференцируя, получим плотность вероятности отказа:

$$f(x) = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{1}{n}, \tag{4.11}$$

где $\frac{dm}{dx}$ – элементарная вероятность, с которой в любой момент времени происходят отказы при работе детали, агрегата без замены.

Так как $f(x) = F'(x)$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{4.12}$$

На рисунке 5 показана дифференциальная функции распределения $f(x)$.

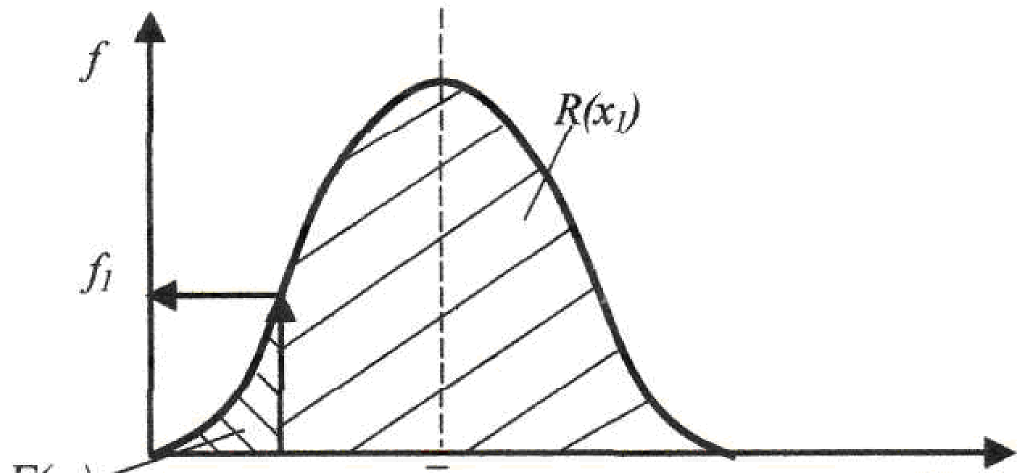

Рис. 5. Дифференциальная функция распределения

Так как $R(x) = 1 - F(x)$, то

$$R(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)dt. \qquad (4.13)$$

Имея значения $F(x)$ или $f(x)$, можно оценить:

- узел, агрегат или автомобиль;
- определить вероятность отказа или безотказной работы;
- среднюю наработку до отказа:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \qquad (4.14)$$

Зная плотность вероятности отказа $f(x)$, можно оценить возможное число отказов $m(x)$, которое может возникнуть за небольшой период наработки $\Delta x = x_1 - x_2$:

$$m(x) = f(x_1)(x_1 - x_2) \cdot n \qquad (4.15)$$

Пример. Пусть имеется 25 агрегатов или изделий, для которых известны плотность вероятности отказов $f(x) = 0{,}005$ тыс.км$^{-1}$ и период наработки $\Delta x = 8$ тыс.км. Требуется определить вероятность отказа за данный период.

Решение. Оценим возможное число отказов $m(x) \approx 0{,}005 \cdot 8 \cdot 25 = 1$, тогда вероятность отказа в данном интервале составит

$$P(x_1 \le X \le x_2) \approx f(x_1)\Delta x = 0{,}005 \cdot 8 = 0{,}04.$$

Графически эта величина определяется площадью под кривой функции распределения с основанием $\Delta x = x_1 - x_2$ (рис. 5, б).

Дифференциальная функция распределения $f(x)$ обычно называется ***законом распределения*** случайной величины. Знание законов распределения позволяет:

- более точно планировать периодичность и трудоемкость работ *ТО* и ремонта;
- рассчитывать необходимое количество запасных частей и решать технологические и организационные вопросы.

Для технической эксплуатации наиболее характерными являются нормальный, Вейбулла–Гнеденко и экспоненциальный законы распределения случайных величин.

Нормальный закон распределения формируется тогда, когда на протекание исследуемого процесса и его результат влияет сравнительно большое число независимых элементарных факторов, каждый из которых в отдельности оказывает лишь незначительное действие по сравнению со всеми остальными. Поэтому периодичность *ТО* подчиняется двухпараметрическому $(\bar{x}, \sigma)$ нормальному закону, для которого плотность вероятности отказа имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.16}$$

При этом вероятность безотказности равна

$$R(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dt, \tag{4.17}$$

а вероятность отказа

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{4.18}$$

При расчетах по нормальному закону часто используют нормированную функцию $\Phi(z)$ (функция Лапласа), для которой принимается нормированное отклонение $z = \dfrac{x-\bar{x}}{\sigma}$. Тогда

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}} dt. \tag{4.19}$$

Нормированная функция $\Phi(z)$ является нечетной, т.е. $\Phi(-z) = -\Phi(z)$; ее значения приводятся в специальных таблицах в приложениях ко всем учебникам по теории вероятности. Для нормального закона коэффициент вариации $v \le 0{,}33$.

Закон распределения Вейбулла - Гнеденко применяется для систем, состоящих из группы независимых элементов, отказ каждого из которых приводит к отказу всей системы. В данной системе рассматривается распределение пробега (или времени), как распределение соответствующих минимальных значений x_i отдельных элементов $x_i = \min\limits_{1 \le i \le n}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Основные формулы закона распределения Вейбулла-Гнеденко приведены в таблице 2, где a, b – параметры распределения.

Примером использования этого закона является распределение ресурса подшипника качения (шарик или ролик, конкретный участок сепарации и т.д.), предельное состояние тепловых зазоров клапанов, прокладки, шланги, трубопроводы, приводные ремни и т.д. Ресурс изделия определяется наиболее слабым его участком. Для этого закона коэффициент вариации составляет $v = 0{,}4...0{,}6$.

Таблица 2 – Закон распределения Вейбулла-Гнеденко

Параметр	Значение параметра
Плотность вероятности $f(x)$	$\frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \cdot e^{\left(-\frac{x}{a}\right)^{b}}$
Среднее значение $\bar{x}$	$a\left(1 + \frac{1}{b}\right)$
Гамма-процентный ресурс X_γ	$a\left(-\ln\frac{\gamma}{100}\right)^{\frac{\gamma}{b}}$
Вероятность безотказной работы $R(x)$	$e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^{b}}$
Вероятность отказа или восстановления в заданное время $F(x)$	$1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^{b}}$
Интенсивность отказа $\lambda(x)$	$\frac{b}{a^b} x^{b-1}$

Экспоненциальный закон распределения. Пусть в начальный момент при $x=0$ элементы численностью N_0 были исправны. Во время работы происходят отказы этих элементов таким образом, что независимо от проработанного времени x число отказов ΔN в небольшом интервале времени Δx пропорционально оставшимся исправным элементам N_x. Непосредственно перед отказом элемент находится в исправном состоянии, т.е. $\frac{\Delta N}{\Delta x}=-\lambda N_x$, где λ – положительная постоянная, а знак минус свидетельствует о сокращении N_x при работе. При $\Delta x \to 0$ имеем $\frac{dN}{dx}=-\lambda N_x$, $\frac{dN}{N_x}=-\lambda dx$. После интегрирования получим $\ln N_x=-\lambda x-\ln C$, откуда $N_x=C\cdot e^{-\lambda x}$.

При $x=0$ $C=N_0$, откуда $N_x=N_0 e^{-\lambda x}$. Но $\frac{N_x}{N_0}=R(x)$, и тогда вероятность безотказной работы будет равна

$$R(x)=e^{-\lambda x}. \tag{4.20}$$

Параметр потока отказов равен обратной величине средней наработке на отказ, т.е. $\lambda=\frac{1}{\bar{x}}$. Плотность распределения для экспоненциального закона описывается зависимостью

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}. \tag{4.21}$$

При этом законе распределения коэффициент вариации $v=1$.

Важным показателем надежности является ***интенсивность отказов*** $\lambda(x)$ – условная плотность вероятности возникновения отказа невосстанавливаемого изделия, определяемая для данного момента времени при условии, что отказа до этого момента не было.

Аналитически для получения $\lambda(x)$ необходимо элементарную вероятность $\frac{dm}{dx}$ отнести к числу элементов, не отказавших к моменту x, т.е. $\lambda(x)=\frac{\frac{dm}{dx}}{n-m(x)}$. Так как вероятность безотказной работы $R(x)=\frac{n-m(x)}{n}$, то получим $\lambda(x)=\frac{dm}{dx}\cdot\frac{1}{R'(x)n}$. Учитывая, что $f(x)=\frac{1}{n}\cdot\frac{dm}{dx}$, можем получить следующее выражение для интенсивности отказов

$$\lambda(x)=\frac{f(x)}{R(x)}. \tag{4.22}$$

Таким образом, *интенсивность отказов равна плотности вероятности отказа, деленной на вероятность безотказной работы для данного момента времени или пробега.*

Зная интенсивность отказов, можно для любого момента времени или пробега определить вероятность безотказной работы. На рисунке 6 приведены $\lambda(x)$ для двух характерных случаев при внезапных и постепенных отказах. Последние описывают безотказность так называемых «стареющих элементов».

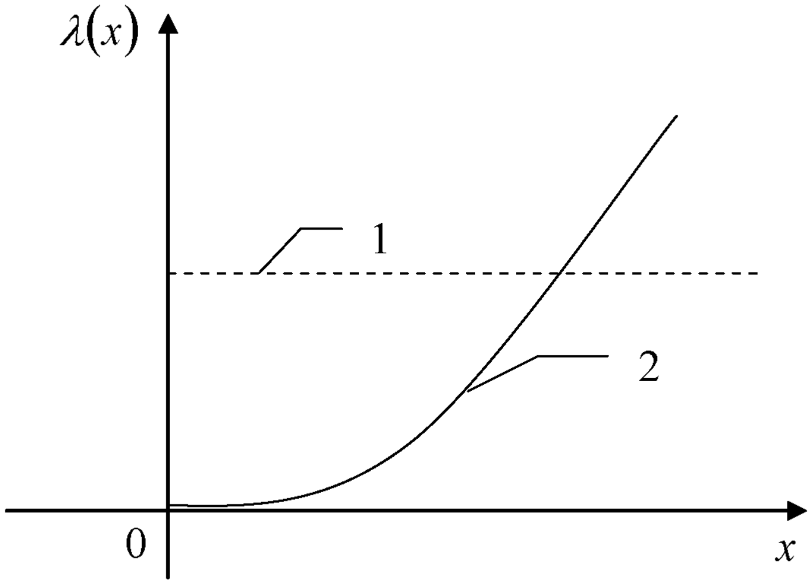

Рис. 6. Изменение интенсивности отказов для внезапных (1) и постепенных (2) отказов

Пример 1. Требуется определить вероятность первой замены детали при наработке автомобиля с начала эксплуатации x_1 и вероятность отказа в интервале пробега $x_1 - x_2$, если распределение наработки подчиняется нормальному закону. Известно, что $x_1 = 50$ тыс. км, $\bar{x} = 90$ тыс. км, $x_2 = 120$ тыс. км, $\sigma = 30$ тыс. км.

Решение. Если пользоваться понятием нормированной функции, то можно определить нормированное отклонение

$$z_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{50 - 90}{30} = -1{,}33.$$

Значение нормированной функции $\Phi(z)$ будет равно $\Phi(z_1) = \Phi(-1{,}33) = 0{,}095$. Значит, примерно 10% автомобилей потребует замены детали на пробеге $x_1 = 50$ тыс. км.

Определим нормирование отклонения на пробеге $x_2 = 120$ тыс. км:

$$z_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{120 - 90}{30} = 1{,}0.$$

По таблице значений функции $\Phi(z)$ находим: $\Phi(z_2) = \Phi(1{,}0) = 0{,}84$.

Вероятность отказа в интервале пробега $x_1 - x_2$ определяется из разницы

$$P(x_2) - P(x_1) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = 0{,}84 - 0{,}095 = 0{,}74.$$

Таким образом, вероятность отказа детали в интервале пробега от 50 до 120 тыс. км будет 0,74, т.е. у 74% автомобилей произойдет отказ.

§4. Закономерности процессов восстановления автомобилей

Закономерности, рассмотренные выше, позволяют довольно точно оценить среднюю наработку на отказ, вероятность отказа автомобиля при определенном пробеге, ресурс его агрегатов и элементов и т.д., т.е. довольно точно характеризуют как его надежность в целом, так и отдельных его узлов.

Однако, для рациональной организации производства необходимо знать, какое количество автомобилей с отказами конкретного типа будет попадать в ремонт в течение смены (недели, месяца, года), будет ли это поступление постоянным и от каких причин оно будет зависеть, т.е. необходимо рассматривать надежность не только конкретного автомобиля, но и группы автомобилей данной модели. При отсутствии этих данных трудно оптимально организовать производственный процесс, определить число рабочих, рассчитать необходимые производственные площади, расход запасных частей и материалов.

Связь между показателями надежности и суммарным потоком отказов для группы автомобилей определяют с помощью закономерностей третьего вида, которые характеризуют процесс возникновения и устранения неисправностей от пробега. Предположим, что фиксируются однородные отказы у группы из N автомобилей, тогда возможны три варианта наработки на отказ:

- отказы, случайные для каждого элемента автомобиля и описываемые функциями вероятности отказа $F(x)$ и плотности вероятности отказа $f(x)$;
- независимые отказы у каждого автомобиля;
- при устранении отказов совершенно безразлично, какой по счету поступает отказ и от какого автомобиля.

Важнейшими характеристиками таких закономерностей являются:

1. ***Средняя наработка до k-го отказа***

$$\bar{x}_k = \bar{x}_1 + \bar{x}_{12} + \bar{x}_{23} + \ldots + \bar{x}_{(k-1)k} = \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^{k} \bar{x}_{(i-1)i}\ , \tag{4.23}$$

где $\bar{x}_1$ – средняя наработка до первого отказа;

$\bar{x}_{12}$ – средняя наработка между первым и вторым отказами;

$\bar{x}_{(k-1)k}$ – средняя наработка между $(k-1)$ и k отказами.

2. ***Средняя наработка между отказами для n автомобилей***.

Между первым и вторым отказами

$$\bar{x}_{12} = \frac{1}{n}\sum x_{12}\ , \tag{4.24}$$

между $(k-1)$ и k-м отказами

$$\bar{x}_{k-1,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_{i-1,i} \tag{4.25}$$

3. ***Коэффициент полноты восстановления ресурса***

Характеризует возможность полноты восстановления ресурса после ремонта (качество проведения ремонта $0 \le \eta \le 1$).

После первого ремонта (между первым и вторым отказами)

$$\eta_1 = \frac{\bar{x}_{12}}{\bar{x}_1}, \tag{4.26}$$

после k -го отказа

$$\eta_k = \frac{\bar{x}_{k,k+1}}{\bar{x}_1}. \tag{4.27}$$

Сокращение ресурса после каждого очередного ремонта необходимо учитывать при планировании и организации работ по обеспечению работоспособности автомобиля. Уменьшение ресурса обусловливается:

- частичной заменой отказавших деталей в узле или агрегате, при значительном сокращении надежности других, особенно соприкасаемых;
- использованием запасных частей и материалов иного качества, чем при изготовлении автомобилей;
- уровнем организации и технологии.

4. ***Ведущая функция потока отказов (функция восстановления)*** $\Omega(x)$

Определяет количество первых и последующих отказов изделия к моменту наработки X.

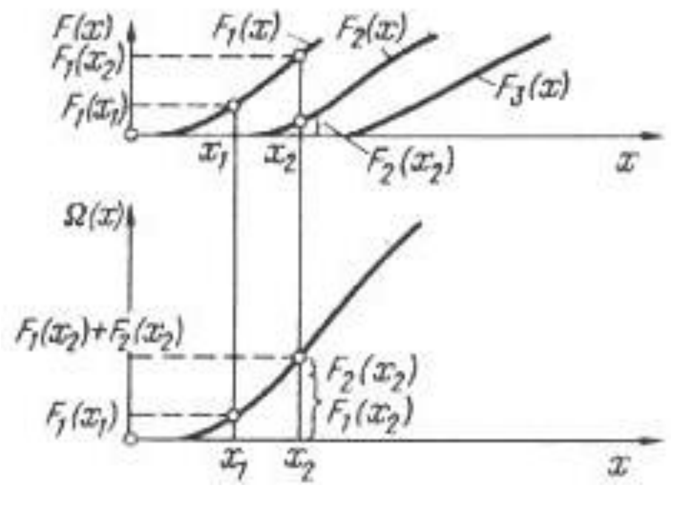

Рис. 7. Ведущая функция потока отказов

Как следует из рисунка 7, из-за вариации наработок на отказы происходит их смещение, а функции вероятностей первых и последующих отказов $F_1, F_2, ..., F_k$ частично накладываются друг на друга. Поэтому если вероятностное количество отказов к пробегу x_1 (рис. 7) определяется $\Omega(x_1) = F_1(x_1)$, то для

x_2 общее количество отказов определяется суммированием вероятности первого $F_1(x_2)$ и второго $F_2(x_2)$ отказов $\Omega(x_2) = F_1(x_2) + F_2(x_2)$, а в общем виде:

$$\Omega(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x). \tag{4.28}$$

Параметр потока отказов $\omega(x)$ – плотность вероятности возникновения отказа восстанавливаемого изделия, которая определяется для данного момента времени или пробега

$$\omega(x) = \Omega'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \tag{4.29}$$

где $f(x)$– плотность вероятности возникновения отказа;

$\omega(x)$ – относительное число отказов в единицу времени или пробега одного изделия, при этом если характеризуется надежность изделия, то число отказов к пробегу, а если характеризуется поток отказов, поступающих для устранения, то ко времени работы подразделений.

Ведущая функция и параметр потока отказов определяется аналитически лишь для некоторых видов законов распределения.

Для экспоненциального закона имеем

$$\Omega(x) = x \cdot \omega = \frac{x}{2\bar{x}_1}, \tag{4.30}$$

откуда $\omega = \dfrac{1}{2\bar{x}_1} = const$, при $\eta = 1$, $\omega = \dfrac{1}{\bar{x}} = const$.

Для нормального закона

$$\Omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - k\eta\,\bar{x}_1}{\sigma\sqrt{k}}\right), \tag{4.31}$$

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi k}}\, e^{\frac{-(x - k\eta\,\bar{x}_1)^2}{2\sigma^2 k}}, \tag{4.32}$$

где $\Phi(z)$– нормированная функция для $z = \dfrac{x - k\eta\,\bar{x}_1}{\sigma\sqrt{k}}$;

k – число отказов или замен.

Для практического использования определяются приближенные оценки ведущей функции параметра потока отказов:

$$F(x) \le \Omega(x) \le \frac{F(x)}{1 - F(x)}. \qquad (4.33)$$

Формулу (4.33) для начального участка, где преобладают первые отказы, т.е. $F(x) << 1$, можно записать в виде:

$$\Omega(x) \approx F(x). \qquad (4.34)$$

Ведущая функция параметра потока отказа стареющих элементов для любого пробега (времени) удовлетворяет неравенству:

$$\frac{x}{\eta\,\bar{x}_1} - 1 \le \Omega(x) \le \frac{x}{\eta\,\bar{x}_1}. \qquad (4.35)$$

Для любого закона распределения наработка на отказ, которая имеет конечную дисперсию $D = \sigma^2$ и является ведущей функцией параметра потока отказов при достаточно большом значении X , определяется по формуле

$$\Omega(x) \approx \frac{x}{\eta\,\bar{x}_1} + \frac{\sigma^2}{2(\eta\,\bar{x}_1)^2} - \frac{1}{2}. \qquad (4.36)$$

При расчете гарантированных запасов необходима интервальная оценка функции параметра потока отказов (для достаточно больших значений X)

$$\frac{x}{\eta\,\bar{x}_1} - z_\alpha \frac{\sigma\sqrt{x}}{(\eta\,\bar{x}_1)^{\frac{3}{2}}} < \Omega(x) < \frac{x}{\eta\,\bar{x}_1} + z_\alpha \frac{\sigma\sqrt{x}}{(\eta\,\bar{x}_1)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (4.37)$$

где z_α – нормированное отклонение для нормального закона распределения при условии, что число отказов (замен) с вероятностью $(1-\alpha)$ будет заключено в данных пределах.

Используя значения параметра потока отказов, можно определить конкретный расход деталей за любой заданный период и планировать работу системы снабжения. Параметр потока отказов может быть определен по экспериментальным данным (отчетные материалы, специальные наблюдения) следующим образом:

$$\omega(x)=\frac{m(x_1)}{m(x_2-x_1)}=\frac{\Omega(x_2)-\Omega(x_1)}{x_2-x_1}, \qquad (4.38)$$

где $m(x_1)$– суммарное число отказов n автомобилей в интервале пробега от x_1 до x_2 (или времени работы от t_1 до t_2);

$\Omega(x_1), \Omega(x_2)$ – ведущие функции потока отказов к пробегу x_1 и x_2.

Пример 2. Рассмотрим пример расчета возможного количества замен детали, оценки ведущей функции параметра потока отказов и определения верхней границы потребностей в деталях за определенную наработку.

Возьмем наработку до первой замены $\bar{x}_1 = 80$ тыс. км, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 8$ тыс. км, коэффициент восстановления ресурса $\eta = 0{,}7$, достоверность $(1-\alpha) = 0{,}9$ и пробег $x = 160$ тыс. км.

Для расчета возможного количества замен детали используем формулу (4.31), последовательно находя F_1, F_2 и т.д.:

$$F_k(x) = \Phi\left(\frac{x - k\eta\,\bar{x}_1}{\sigma\sqrt{k}}\right).$$

В результате получим

$$F_1(x) = \Phi\left(\frac{160 - 1\cdot 1\cdot 80}{8\cdot 1}\right) = \Phi(10) = 1{,}0;$$

$$F_2(x) = \Phi\left(\frac{160 - 2\cdot 0{,}7\cdot 80}{8\cdot\sqrt{2}}\right) = \Phi(4{,}25) = 1{,}0;$$

$$F_3(x) = \Phi\left(\frac{160 - 3\cdot 0{,}7\cdot 80}{8\cdot\sqrt{3}}\right) = \Phi(-0{,}58) = 0{,}29;$$

$$F_4(x) = \Phi\left(\frac{160 - 4\cdot 0{,}7\cdot 80}{8\cdot\sqrt{4}}\right) = \Phi(-4{,}0) = 0.$$

Ввиду того, что F_4 уже равно нулю, то последующие расчеты для F и других параметров можно не производить. Таким образом, к пробегу в 160 тыс. км возможное число замен детали будет равно

$$\Omega(160)=\sum_{i=1}^{4}\Phi(z)=1+1+0{,}29+0=2{,}29.$$

Произведем оценку ведущей функции параметра потока отказов по выражению (26):

$$\frac{160}{0{,}7\cdot 80}-1\le\Omega(x)\le\frac{160}{0{,}7\cdot 80},\quad 1{,}86\le\Omega(x)\le 2{,}86.$$

Значит, к пробегу в 160 тыс. км возможно от 1,86 до 2,86 отказов детали.

Так как по условию примера требуется обеспечение деталями с вероятностью $(1-\alpha)=0{,}9$ или 90%, то необходимо определить верхнюю границу потребности в деталях на данный пробег. Справа определим нормализованное отклонение при $(1-\alpha)=0{,}9=\Phi(z)$. По таблице значений функции $\Phi(z)$ найдем $z_\alpha\approx 1{,}25$. Тогда верхняя граница потребности в деталях составит $\Omega(160)=2{,}86+1{,}25=4{,}11$.

Следовательно, можно с вероятностью 90% полагать, что на 160 тыс. км пробега потребуется 4 запасных детали. Средний расход деталей составит около 2,9.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите виды закономерностей изменения технического состояния автомобилей.

2. Охарактеризуйте закономерности изменения технического состояния автомобилей по его наработке.

3. Охарактеризуйте закономерности случайных процессов изменения технического состояния автомобилей.

4. Опишите основные положительные аспекты оценки случайной величины при реальной эксплуатации автомобилей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При технической эксплуатации транспорта в основном приходится иметь дело со случайными процессами и величинами. В прикладной теории вероятностей случайные величины характеризуются числовыми зарактеристиками: математическим ожиданием, дисперсией и моментами высших порядков. В теории случайных процессов для характеристики случайных функций пользуются статистическими характеристиками, которые являются не числами, а функциями, причем функциями неслучайными. Для стационарных случайных процессов такими характеристиками являются корреляционная функция и спектральная плотность (энергетический спектр). Корреляционная функция является основной статистической характеристикой во временной области стационарного случайного процесса, а спектральная плотность – в частотной области.

Изменение параметров технического состояния автомобилей по времени или пробегу и статистические вариации параметров технического состояния (закономирности первого и второго вида) достаточно точно характеризуют надежность автомобилей, т.е. позволяют оценить среднююю наработку на отказ, вероятность отказа автомобиля при определенном пробеге, ресурс его агрегатов и т.д. Взаимосвязи между показателями надежности автомобилей и суммарным потоком отказов для группы автомобилей изучают с помощью закономерностей третьего вида, которые характеризуют процесс восстановления – возникновения и устранения неисправности изделий во времени.

Изучение закономерностей изменения параметров технического состояния автомобиля под влиянием различных факторов в процессе его эксплуатации необходимо для решения основных задач ТЭА. Знание этих закономерностей имеет существенное значение для разработки и эффективного применения научно обоснованных методов и нормативов поддержания автомобилей в технически исправном состоянии, т.е. управлении их работоспособностью. Эти методы, как было показано, базируются на фундаментальных понятиях математической статистики и теории вероятности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аринин, И.Н. Техническая эксплуатация автомобилей / И.Н. Аринин, С.И. Коновалов, Ю.В. Баженов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2007. – 314 с.
2. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов / В.Л. Бидерман. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
3. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш.шк., 2003.- 479 с.
4. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.
5. Кузнецов, Е.С. Техническая эксплуатация автомобилей: Учебник для вузов / Е.С. Кузнецов, А.П. Болдин, В.М. Власов. – М.: Наука, 2001. – 535 с.
6. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
7. Светлицкий, В.А. Статистическая механика и теория надежности. / В.А. Светлицкий. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 504 с.
8. Тутубалин, В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов: Учеб. пособие / В.Н. Тутубалин. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
9. Хасанов, Р.Х. Основы технической эксплуатации автомобилей: Учебное пособие / Р.Х. Хасанов. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003. – 192 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ
АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор **Осипова Е.Н.**

Подписано к печати 24.12.2020 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 5,34. Тираж 25 экз. Изд. № 6830.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ