

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, физики и информатики

Панкова Е.А.

СПЕЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ***ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ***

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ
направления подготовки

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Брянская область 2017

УДК 51 (07)
ББК 22.1
П 16

Панкова, Е.А. **Специальная математика. Элементы операционного исчисления:** учебное пособие для бакалавров направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» / Е.А. Панкова. – Брянск: Издательство Брянский ГАУ, 2017. – 64 с.

Рецензенты:

Рыжик В.Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры математики, физики и информатики
Широбокова О.Е., к.т.н., доцент кафедры электроэнергетики и автоматизации

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования, протокол № 1 от 05.09.2017 г.

© Брянский ГАУ, 2017
© Панкова Е.А., 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Комплексные числа	8
1.1 Понятие комплексного числа	8
1.2 Тригонометрическая и показательная форма записи комплексных чисел	9
1.3 Арифметические действия с комплексными числами	11
2 Преобразование Лапласа	19
2.1 Оригинал и изображение	19
2.2 Единичная функция	22
2.3 Основные свойства преобразования Лапласа	25
2.4 Обращение преобразования Лапласа. Метод неопределённых коэффициентов	37
3 Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений и их систем	42
3.1 Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	42
3.2 Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	45
3.3 Применение формулы Дюамеля при решении дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями	48
3.4 Применение преобразования Лапласа в теории электрических цепей	51
4 Преобразование Фурье	52
4.1 Понятие преобразования Фурье	52
4.2 Связь между преобразованиями Лапласа и Фурье. Свойства преобразования Фурье	55
4.3 Синус и косинус преобразования	57
4.4 Примеры нахождения спектральных характеристик непериодических сигналов	58
Литература	63

ВВЕДЕНИЕ

Операционное (символическое) исчисление применяется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и интегральных уравнений типа свёртки, к которым приводятся задачи по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники.

О значении операционного исчисления английский математик Э.Т. Уиттекер писал: «...мы должны считать операционное исчисление наряду с открытием Пуанкаре автоморфных функций и открытием Риччи тензорного исчисления тремя наиболее важными успехами математики за последнюю четверть девятнадцатого века».

Начало развития операционного исчисления было уже в работах Лейбница (1646-1716), Л. Эйлера (1707-1783), Лагранжа (1736-1813), Лапласа (1749-1827), Фурье (1768-1830), Коши (1789-1857).

Английский инженер-электрик Оливер Хевисайд, применяя операционное исчисление к решению дифференциальных уравнений, получил ряд важных результатов по сложным проблемам теории электромагнитных колебаний в проводках. О. Хевисайд положил начало систематическому приложению символического исчисления к решению физико-технических задач, поэтому создание символического исчисления обычно и связывают с его именем.



Оливер Хевисайд (1850 – 1925)

Однако первоначальная разработка символического метода была выполнена задолго до появления работ О. Хевисайда в трудах эльзасского математика Ф. Арбогаста, французских математиков М. Франсэ и Лобатто, английских ма-

тематиков Д.Ф. Грегори, П. Буля, Р. Кармайкла и других. Начинателем разработки символического исчисления в России является профессор Киевского университета Михаил Егорович Ващенко-Захарченко (1825-1912), который в книге «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» дает подробное изложение о символах и их свойствах, рассматривает приложение символического исчисления к решению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Широко применяемое в трудах О. Хевисайда операционное исчисление не получило математического обоснования и встретило отрицательное отношение со стороны математиков. Почти никто из них не относился серьезно к этому методу решения линейных дифференциальных уравнений. Строгое обоснование и развитие операционное исчисление получило на основе интегральных преобразований в работах Дж. Карсона, Бромвича, Леви и других.



Леонард Эйлер (1707-1783)



Пьер Симон Лаплас (1749–1827)

Преобразование Лапласа $F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ преобразовывает определенный класс **функций-оригиналов** $f(t)$ действительного переменного t в **функции-изображения** $F(p)$ комплексного переменного p . Преобразование

$F(p) = \int_a^b e^{-pt} f(t) dt$ впервые (1737) было введено Л. Эйлером. Лапласом были

выяснены (1782) свойства этого преобразования, а также введены бесконечные пределы интегрирования, что сделало возможным применение преобразования Эйлера – Лапласа в приложениях.

Американский инженер Дж. Карсон показал (1926) связь между операционным исчислением и интегральным преобразованием Лапласа, установил соотношение между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ в виде интегрального уравнения $F(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ относительно неизвестной функции $f(t)$.

Обратную зависимость между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ получил английский математик Томас Джон Бромвич (1875 – 1930) в виде контурного интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp \quad (*)$$

в комплексной области $p = s + i\sigma$, где интегрирование ведется по любой прямой, параллельной мнимой оси плоскости и расположенной вправо от всех особых точек функции $\frac{F(p)}{p}$. Следует отметить, что Дж. Бромвич – один из не-

многих математиков того времени, который заинтересовался операционным исчислением и обнаружил, что методы Хевисайда могут быть строго обоснованы с помощью теории функций комплексной переменной. Он написал Хевисайду о том, что решение уравнений методом операционного исчисления сводится к вычислению контурных интегралов в комплексной плоскости и между ними завязалась оживленная переписка. По существу, Бромвич обосновал операционное исчисление с помощью преобразования Лапласа, он разработал метод, который был строгим с математической точки зрения и давал те же результаты, что и операционное исчисление в том виде, в каком оно было разработано Хевисайдом. Но, получив обоснование операционных методов Хевисайда, Бромвич за последующие несколько лет пришел к заключению, что на практике

более удобно прямо использовать именно методы Хевисайда в их первоначальном виде, а не метод контурных интегралов.



Интеграл (*) был получен (1859) задолго до Бромвича немецким математиком Б.Риманом в работе «О числе простых чисел, не превышающих данной величины», как следствие одного преобразования, и строго доказан (1902) финским математиком Робертом Меллином, поэтому обычно называется интегралом Римана – Меллина.

Французский математик П.Леви показал, что решение интегрального уравнения Карсона представляется контурным интегралом Бромвича и наоборот.

Георг Фридрих Бернхард Риман
(1826 – 1866)

1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1 Понятие комплексного числа

Комплексные числа возникли при решении алгебраических уравнений. Математики не могли согласиться с тем, что уравнение $z^2 - 1 = 0$ имеет решение, а уравнение $z^2 + 1 = 0$ – нет. Поскольку среди действительных чисел нет ни одного, квадрат которого бы равнялся -1 , то договорились, что таким свойством будет обладать символ j , т.е. $j^2 = -1$. Поэтому уравнение $z^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $z = j$ и $z = -j$, как и обычное квадратное уравнение. Так появились сначала в математической среде, а потом и в технических науках комплексные числа. В настоящее время раздел комплексного анализа – современная ветвь математики, широко развитая, которая находит применение во многих инженерных дисциплинах.

Определение. *Комплексным числом называется число вида*

$$z = a + jb, \quad (1.1)$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа z ; $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа z ; $a, b \in \mathbb{R}$; j – мнимая единица.

Множество всех комплексных чисел обозначается \mathbb{C} . Формула (1.1) называется также **алгебраической формой** записи комплексного числа. Примеры комплексных чисел: $2 + 3j$, $-5j$, $-1 - j$.

Если $b = 0$, комплексное число превращается в действительное: $z = a$. Поэтому множество действительных чисел является подмножеством комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Комплексное число, у которого $b \neq 0$, $a = 0$, называется **чисто мнимым**. Комплексный нуль – это $0 + 0j$, но пишут и просто 0 .

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + jb_1$ и $z_2 = a_2 + jb_2$ считаются **равными**, если равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Неравенства для комплексных чисел смысла не имеют.

Если действительные части двух комплексных чисел одинаковы, а мнимые части отличаются только знаком, то такие числа называются **комплексно-сопряженными**. Обозначают число, комплексно-сопряженное к числу (1.1), следующим образом: $\bar{z} = a - jb$.

1.2 Тригонометрическая и показательная форма записи комплексных чисел

Так как комплексное число имеет две компоненты, действительную и мнимую части, его можно трактовать и как точку координатной плоскости и как двумерный вектор. Обе возможности используются в математике. Комплексной плоскостью называют декартову плоскость, на которой изображают комплексные числа. На оси Ox откладывают действительную часть числа и потому эту ось называют также **действительной**, а на оси Oy откладывают мнимую часть комплексного числа, поэтому ось Oy – **мнимая**. Чтобы отличать комплексную плоскость от обычной декартовой, ее обозначают символом

\textcircled{z} : Рисунок 1.1 демонстрирует изображение комплексного числа на комплексной плоскости, как в виде точки, так и в виде радиус-вектора этой точки.

Если на комплексной плоскости ввести полярную систему координат, то комплексное число можно связать также с полярным радиусом ρ и полярным углом φ . Из рисунка 1.1 видно, что действительная часть комплексного числа равна $\rho \cos \varphi$, а его мнимая часть совпадает с $\rho \sin \varphi$. Поэтому вообще комплексное число можно также записать в виде

$$z = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi). \quad (1.2)$$

Формула (1.2) называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа. Величина $\rho = |z|$ называется его **модулем**, а $\varphi = \text{Arg } z$ – его **аргументом**.

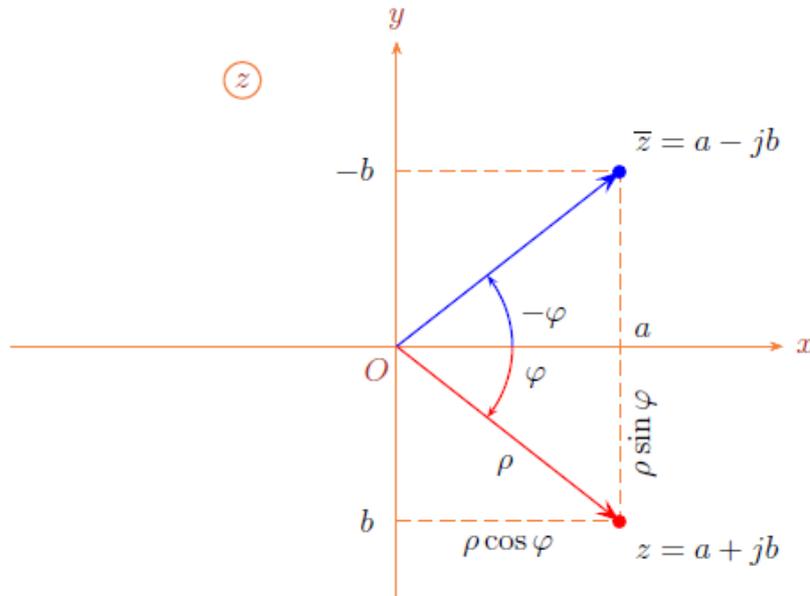


Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Очевидно, аргумент определен лишь с точностью до постоянного слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому равенство двух комплексных чисел в тригонометрической форме можно сформулировать так: два комплексных числа равны, если они имеют одинаковые модули, а их аргументы отличаются на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Одно из значений $\text{Arg } z$, которое принадлежит интервалу длины 2π , называют **главным значением** и обозначают $\arg z$. Отметим, что аргумент числа 0 не определен. Мы будем брать главное значение из интервала $(-\pi; \pi]$, поэтому

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Таким образом, перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа к алгебраической форме можно с помощью формул

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi.$$

Обратный переход может быть осуществлен по формулам:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \text{не определен; } a = 0, b = 0; \\ \frac{\pi}{2}; a = 0, b > 0; \\ -\frac{\pi}{2}; a = 0, b < 0; \\ \arctg \frac{b}{a}; a > 0; \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}; a < 0, b \geq 0; \\ \pi - \arctg \frac{b}{a}; a < 0, b < 0. \end{cases}$$

Если обозначить $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$, то получим показательную форму записи комплексного числа z в виде

$$z = \rho e^{j\varphi}.$$

Пример 1.1

Число $z = -1 + j$ задано в алгебраической форме. Найти его тригонометрическую и показательную формы.

Решение.

Найдем модуль заданного комплексного числа $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ и главное значение аргумента $\arg z = \varphi = \pi + \arctg \frac{1}{-1} = \pi - \arctg 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} \right), \text{ а показательная форма записи } - z = \sqrt{2} e^{j\frac{3\pi}{4}}.$$

1.3 Арифметические действия с комплексными числами

Для двух комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$$

рассмотрим четыре арифметических действия.

1. Сложение

Чтобы найти сумму двух комплексных чисел, надо отдельно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

Заметим, что сумма комплексно-сопряженных чисел является действительным числом:

$$z + \bar{z} = (a + jb) + (a - jb) = 2a.$$

Пример 1.2

Найти сумму двух комплексных чисел $z_1 = 3 - 5j$ и $z_2 = -2 + 7j$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = (3 - 5j) + (-2 + 7j) = (3 - 2) + j(-5 + 7) = 1 + 2j.$$

2. Вычитание

Вычитание комплексных чисел определяют как действие, обратное сложению. Поэтому действительная и мнимая части разности $z_1 - z_2$ равны, соответственно, разности действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2 .

Сложение и вычитание комплексных чисел можно выполнять и в геометрической форме, учитывая их представление в виде векторов. Начала векторов совмещают с началом координат. Сумму находят по правилу параллелограмма (рис. 1.2) как одну из его диагоналей, выходящую из начала координат, а разность – как другую диагональ, перенесенную параллельным переносом к началу координат.

Аналитически вычитание двух комплексных чисел проводят следующим образом:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2).$$

Пример 1.3.

Найти разность двух комплексных чисел $z_1 = 3 - 5j$ и $z_2 = -2 + 7j$.

Решение.

$$z_1 - z_2 = (3 - 5j) - (-2 + 7j) = (3 - (-2)) + j(-5 - 7) = 5 - 12j.$$

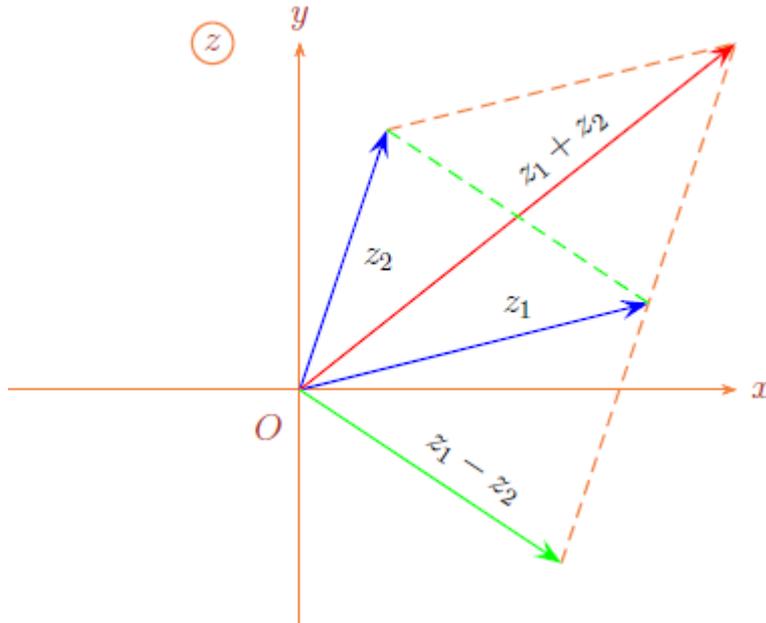


Рис. 1.2. Сложение и вычитание векторов

3. Умножение

Комплексные числа умножают по правилу умножения многочленов, принимая во внимание, что $j^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2b_1b_2 = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пример 1.4

Найти произведение двух комплексных чисел $z_1 = 3 - 5j$ и $z_2 = -2 + 7j$.

Решение.

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5j)(-2 + 7j) = -6 + 21j + 10j - 35j^2 = 29 + 31j.$$

Важное значение имеет результат умножения комплексно-сопряженных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 - abj + abj - j^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Очевидно, он оказывается действительным числом, которое равно квадрату модуля этих чисел. Это свойство комплексно-сопряженных чисел используется в операции деления комплексных чисел (см. далее).

Формулу (1.3) можно представить в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= [\rho_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)] \cdot [\rho_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)] = \\
&= \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + j \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + j \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + j^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\
&= \rho_1 \rho_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\
&= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Следовательно, в этом случае правило умножения звучит так: *чтобы перемножить два комплексных числа в тригонометрической форме, надо умножить их модули, а аргументы сложить.*

Пример 1.5

Найти произведение двух комплексных чисел $z_1 = 1 + j$ и $z_2 = \sqrt{3} - j$.

Решение.

Запишем комплексные числа в тригонометрической форме:

$$1) \quad \rho_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{тогда}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$2) \quad \rho_2 = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}, \quad \text{тогда}$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Таким образом,

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + j \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

Поскольку $j = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}$, то умножение любого комплексного числа

$z = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ на мнимую единицу приводит к повороту вектора z на

угол $\frac{\pi}{2}$ на комплексной плоскости:

$$z \cdot j = \rho \left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Этот факт используется при расчете векторных диаграмм тока и напряжения в электрических цепях.

4. Деление

Чтобы разделить комплексное число z_1 на число $z_2 \neq 0$ в алгебраической форме, надо числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ умножить на число \bar{z}_2 , комплексно сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Пример 1.6

Найти частное от деления двух комплексных чисел $z_1 = 2 - 3j$ и $z_2 = 3 + 5j$.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3j}{3 + 5j} = \frac{(2 - 3j)(3 - 5j)}{(3 + 5j)(3 - 5j)} = \frac{6 - 10j - 9j + 15j^2}{9 - 25j^2} = \frac{-9 - 19j}{34} = -\frac{9}{34} - \frac{19}{34}j.$$

Деление в тригонометрической форме выполняется так: модули комплексных чисел делятся, а их аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

5. Возведение в натуральную степень

Из правила умножения комплексных чисел в тригонометрической форме следует так называемая **формула Муавра**, предназначенная для возведения комплексного числа в натуральную степень:

$$z^n = [\rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi).$$

Эту формулу удобно использовать, когда n достаточно велико.

Пример 1.7

Найти комплексное число $z = (1 - j)^{20}$.

Решение.

Запишем число $1 - j$ в тригонометрической форме:

$$\rho = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{тогда}$$

$$1 - j = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right). \text{ Применим формулу Муавра:}$$

$$\begin{aligned} z = (1 - j)^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \left(\cos \left(-\frac{20\pi}{4} \right) + j \sin \left(-\frac{20\pi}{4} \right) \right) = 1024 (\cos(-5\pi) + j \sin(-5\pi)) = \\ &= 1024 (\cos(4\pi + \pi) - j \sin(4\pi + \pi)) = 1024 (\cos \pi - j \sin \pi) = -1024. \end{aligned}$$

6. Извлечение корня

Определение. Корнем n -ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w , которое удовлетворяет уравнению $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$.

Если $z = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$, $w = r(\cos \psi + j \sin \psi)$, то такое уравнение можно переписать в виде

$$r^n (\cos n\psi + j \sin n\psi) = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Отсюда

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

или

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Различные корни получаются лишь при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Таким образом, если $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n значений, которые могут быть найдены по формуле:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Геометрически числа w_k изображаются вершинами правильного n -угольника, вписанного в круг радиуса ρ с центром в начале координат (рис. 1.3).

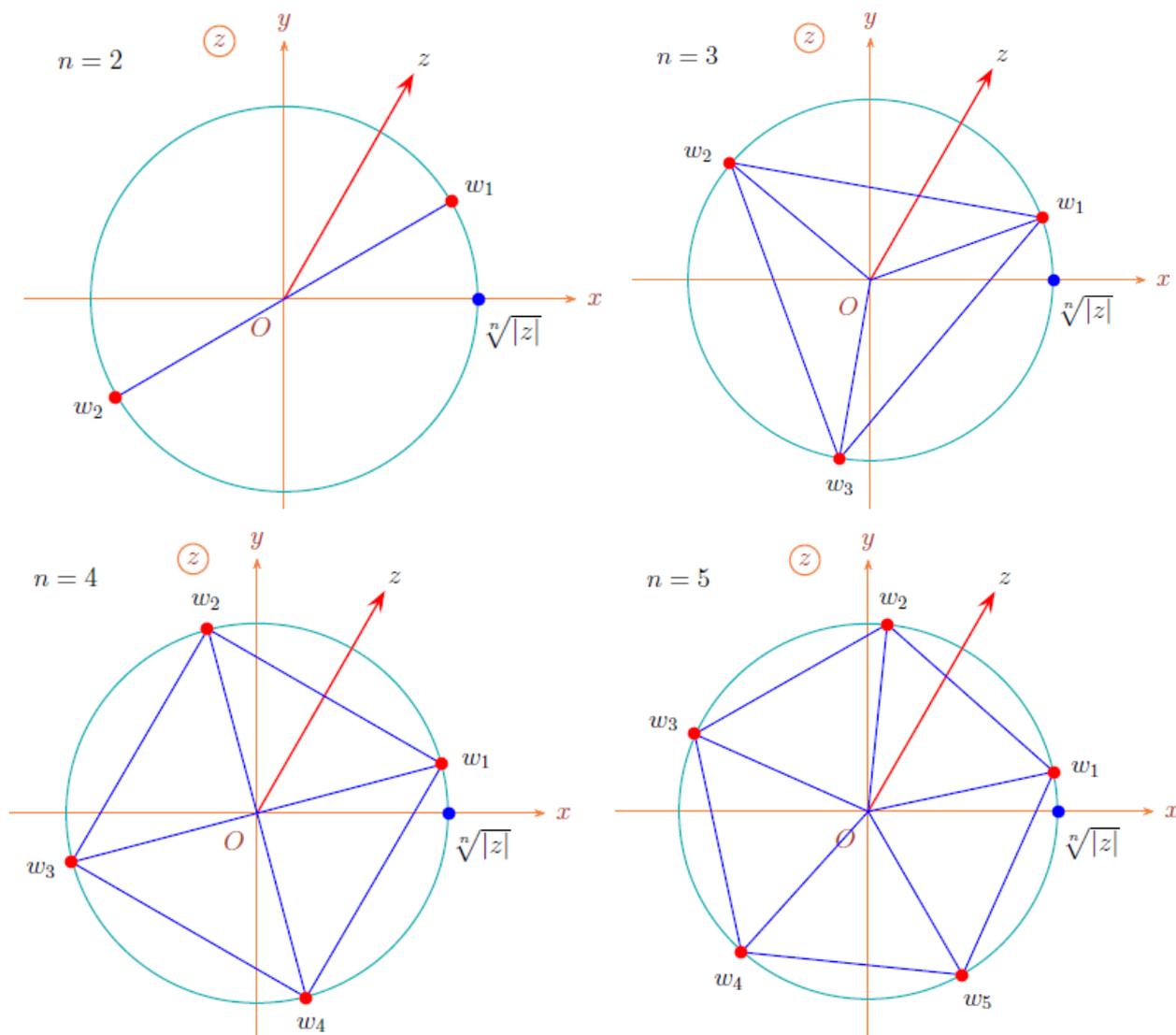


Рис. 1.3. Геометрическая интерпретация корней n -ой степени из комплексного числа

Пример 1.8

Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$.

Решение.

Используем представление числа $z = -1$ в тригонометрической форме:

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \varphi = \arg z = \arctg \frac{0}{-1} = \pi, \quad \text{значит, } -1 = \cos \pi + j \sin \pi. \quad \text{Имеем}$$

$$w_k = \sqrt[n]{\cos \pi + j \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + j \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \text{ следовательно,}$$

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad w_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + j \sin \frac{7\pi}{4} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На рисунке 1.4 изображен четырехугольник, вершинами которого являются числа w_1, w_2, w_3, w_4 .

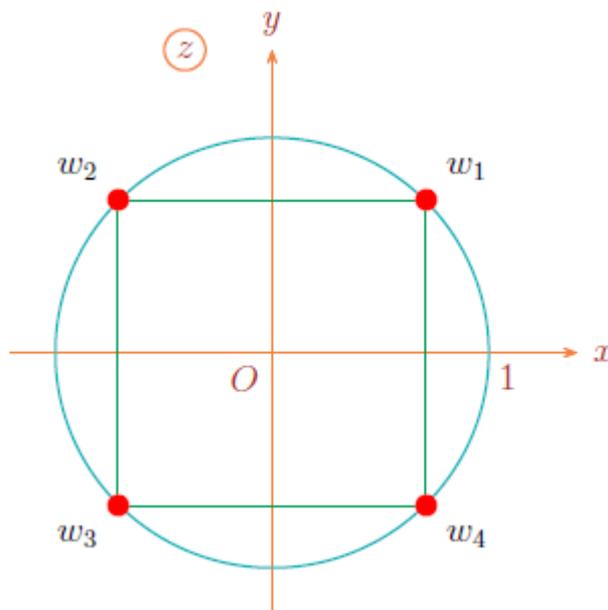


Рис. 1.4. Корни $\sqrt[4]{-1}$

2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

2.1 Оригинал и изображение

Основными первоначальными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

Пусть $f(t)$ – действительная функция действительного переменного t (под t понимают время или координату).

Определение. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

б) $f(t)$ – однозначная непрерывная или кусочно-непрерывная при $t \geq 0$, то есть она непрерывна или имеет точки разрыва первого рода, причём на каждом конечном промежутке оси t таких точек лишь конечное число;

в) существуют такие числа $M > 0$ и $\alpha > 0$, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| < Me^{\alpha t} \quad (2.1)$$

Число $\alpha_0 \geq 0$, для которого неравенство (1) выполняется при любом $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и не выполняется при $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$ (α_0 – точная нижняя граница чисел α), называется **показателем роста** функции $f(t)$.

Функции-оригиналы $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ являются или ограниченными, или стремящимися к бесконечности, но не быстрее, чем показательная функция $e^{\alpha_0 t}$. Такие функции называются функциями порядка показательной функции.

Функция $f(t)$ может быть и комплексной функцией действительного переменного, то есть иметь вид $f(t) = f_1(t) + jf_2(t)$. В этом случае $f(t)$ считается оригиналом, если действительные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами.

Совокупность всех оригиналов называется **пространством оригиналов**.

Условия а) – в) определения выполняются для большинства функций, описывающих физические процессы.

Пример 2.1

Проверить являются ли следующие функции оригиналами:

$$f_1(t) = \begin{cases} 2e^{5t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 3^{4t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $f_1(t)$ является оригиналом, так как все три условия выполняются: $M = 2, \alpha = 5, |2e^{5t}| < Me^{\alpha t}$.

Функция $f_2(t)$ не является оригиналом, так как в точке $t = 2$ имеет разрыв второго рода (не выполняется условие б).

Функция $f_3(t)$ не является оригиналом, так как растёт быстрее показательной функции (не выполняется условие в), поскольку $3^{4t} > Me^{\alpha t}$ для любых M, α и $t > 0$).

Определение. *Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \alpha + j\beta, \alpha = \operatorname{Re} p, \beta = \operatorname{Im} p$, определяемая интегралом Лапласа*

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \quad \left(\int_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \right) \quad (2.2)$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют **преобразованием Лапласа**. Область существования функции $F(p)$ определяется областью сходимости **интеграла Лапласа**, стоящего в правой части равенства.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(t) \rightarrow F(p)$ или $F(p) \rightarrow f(t)$ (принято оригиналы обозначать малыми буквами, а их изображения – соответствующими большими буквами). Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывают и другими

СИМВОЛАМИ:

$$F(p) = L[f(t)], \quad f(t) = L^{-1}[F(p)],$$

$$F(p) \mid \subset f(t),$$

$$F(p) \rightarrow f(t),$$

$$F(p) \circ - \bullet f(t).$$

Совокупность всех изображений $F(p)$ называется **пространством изображений**.

Оригинал по изображению находится с помощью **обратного преобразования Лапласа** по формуле обращения

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (2.3)$$

где путь интегрирования – любая прямая $\alpha = \operatorname{Re} p$, параллельная мнимой оси и лежащая правее прямой $\alpha_0 = \operatorname{Re} p$.

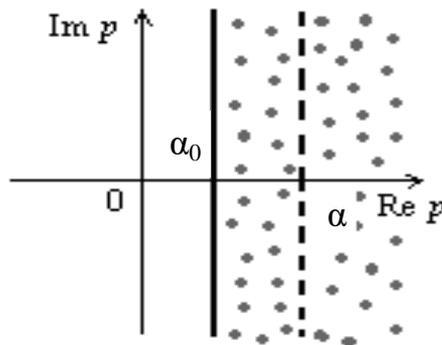


Рис. 2.1. Путь интегрирования

Теорема 2.1 (существование изображения)

Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ существует (определённо) в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \alpha > \alpha_0$, где α_0 – показатель роста функции $f(t)$, причём функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости ($\alpha > \alpha_0$).

Теорема 2.2 (необходимый признак существования изображения)

Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ с показателем

роста α_0 , то $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Теорема 2.3 (о единственности оригинала)

Если функция $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны.

2.2 Единичная функция

Для компактной записи оригиналов используется единичная ступенчатая функция $\eta(t - \tau)$:

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau, \end{cases}$$

где τ - точка приложения. Так как во многих практических задачах аргумент t имеет смысл текущего времени, то τ также называется моментом приложения единичной ступенчатой функции. В системах автоматического регулирования и управления функция $\eta(t - \tau)$ рассматривается как типовой входной сигнал.

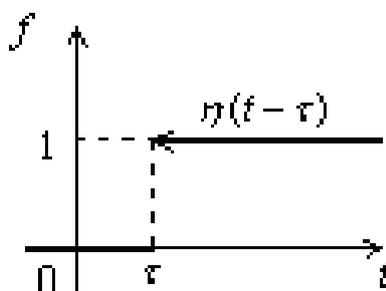


Рис.2.2 . График единичной функции $\eta(t - \tau)$

При $\tau = 0$ функция $\eta(t)$ называется **функцией Хэвисайда**:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям б) и в) в определении оригинала, но не удовлетворяет условию а), то функция $f(t) \cdot \eta(t)$ будет оригиналом, так как

$$f(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Далее под заданной с помощью аналитической формулы функцией $f(t)$ будем понимать произведение этой функции на функцию Хэвисайда, а множитель $\eta(t)$ опускать.

Пример 2.2

Найти изображение единичной функции Хэвисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

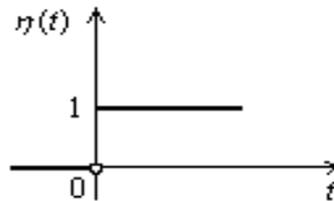


Рис. 2.3. График функции Хэвисайда

По формуле (2) при $\alpha = \operatorname{Re} p > 0$ ($\alpha_0 = 0$) находим:

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{p}.$$

или в символической записи,

$$\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p} \tag{2.4}$$

Таблица оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	13	$t^{n-1}e^{\alpha t}$	$\frac{(n-1)!}{(p-\alpha)^n}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	14	$\cos^2 \beta t$	$\frac{p^2 + 2\beta^2}{p(p^2 + 4\beta^2)}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	15	$\sin^2 \beta t$	$\frac{2\beta^2}{p(p^2 + 4\beta^2)}$
4	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	16	$\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$	$\frac{1}{p(p-\alpha)}$
5	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	17	$1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}$	$\frac{1}{p(1+\alpha p)}$
6	$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$	18	\sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$
7	$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$	19	$\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p-\alpha}}$
8	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$	20	$-\ln t - C$	$\frac{\ln p}{p}$
9	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$	21	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{p}}(\ln 4p + C)$
10	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$	22	$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t}$	$\ln \left \frac{p-\alpha}{p-\beta} \right $
11	$e^{\alpha t} ch \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 - \beta^2}$	23	$\frac{\sin \alpha t}{t}$	$arctg \frac{\alpha}{p}$
12	$e^{\alpha t} sh \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 - \beta^2}$	24	$\frac{sh \alpha t}{t}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{p+\alpha}{p-\alpha} \right $

Пример 2.3

Найти изображение функции $f(t) = e^{at}$, где a - любое число.

Решение. Данная функция является оригиналом. По формуле (2) имеем

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)b}}{p-a} \right) = \frac{1}{p-a},
 \end{aligned}$$

если $\operatorname{Re}(p - a) > 0$. Таким образом,

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{p - a}, (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a). \quad (2.5)$$

2.3 Основные свойства преобразования Лапласа

Находить изображения «простых» функций можно по определению, вычисляя несобственный интеграл от произведения заданной функции-оригинала на экспоненту e^{-pt} . Чаще всего такой интеграл берут по частям или используют метод замены переменных. Изображения более сложных функций удобнее находить при помощи свойств преобразования Лапласа, которые существенно облегчают эту задачу.

1. Свойство однородности

Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и a — комплексное число, то $af(t) \rightarrow aF(p)$.

Доказательство.

По определению изображения и свойству интеграла имеем

$$af(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} af(t) dt = a \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = aF(p).$$

Итак,

$$af(t) \rightarrow aF(p) \quad (2.6)$$

2. Свойство сложения

Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, то $f(t) + \varphi(t) \rightarrow F(p) + \Phi(p)$.

Доказательство.

Имеем

$$f(t) + \varphi(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} [f(t) + \varphi(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt = F(p) + \Phi(p).$$

Следовательно,

$$f(t) + \varphi(t) \rightarrow F(p) + \Phi(p). \quad (2.7)$$

3. Свойство линейности

Если $f_1(t) \rightarrow F_1(p), f_2(t) \rightarrow F_2(p), \dots, f_n(t) \rightarrow F_n(p)$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — комплексные числа, то

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n \rightarrow \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_n F_n.$$

Или,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \quad (2.8)$$

Доказательство линейности следует из первых двух свойств.

Пример 2.4

Найти изображение функции $\sin t$.

Решение. Пользуясь свойством линейности, формулой (5), находим

$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \rightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j} - \frac{1}{p+j} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{p+j - p-j}{(p-j)(p+j)} = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j}{p^2 - (j)^2} = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

То есть,

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (2.9)$$

Пример 2.5

Найти изображение функции $\cos t$.

Решение. Аналогично, находим

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j} + \frac{1}{p+j} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+j + p-j}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1},$$

таким образом

$$\cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1}. \quad (2.10)$$

4. Теорема подобия

Теорема 2.4. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и b - комплексное число, то

$$f(bt) \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right) \quad (2.11)$$

Пример 2.6

Пользуясь теоремой подобия найти изображение функций $\sin bt$ и $\cos bt$.

Решение. По теореме 4 и из формул (2.9) и (2.10) имеем:

$$\sin bt \rightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1}{b \cdot \frac{p^2 + b^2}{b^2}} = \frac{b}{p^2 + b^2}, \quad (2.12)$$

$$\cos bt \rightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{\frac{p}{b}}{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1 \cdot p}{b^2 \cdot \frac{p^2 + b^2}{b^2}} = \frac{p}{p^2 + b^2}. \quad (2.13)$$

5. Теорема запаздывания

Теорема 2.5. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p). \quad (2.14)$$

То есть, запаздывание оригинала на положительную величину t_0 приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на e^{-pt_0} .

Графики функций $f(t)$ и $f(t - t_0)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t - t_0)$ сдвинут на t_0 единиц вправо. Следовательно, функции $f(t)$ и $f(t - t_0)$ описывают один и тот же процесс, но процесс, описываемый функцией $f(t - t_0)$, начинается с опозданием на время t_0 .

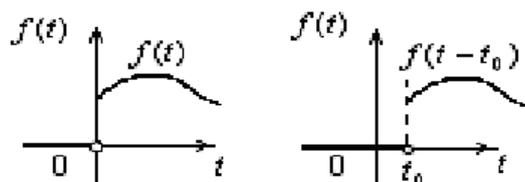


Рис 2.4. Графики функций $f(t)$ и $f(t - t_0)$

Теорема запаздывания является удобным способом для нахождения изображений кусочно-непрерывных функций.

Применяя теоремы подобия и запаздывания, можно найти изображение для оригинала вида $f(bt - t_0)$, где $t_0 > 0$ и b - комплексное число. Пусть

$f(t) \rightarrow F(p)$, тогда по теореме подобия $f(bt) \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right)$. По теореме запазды-

вания находим:

$$f(bt - t_0) = f\left[b\left(t - \frac{t_0}{b}\right)\right] \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right) e^{-\frac{t_0}{b} p}.$$

Следовательно,

$$f(bt - t_0) \rightarrow \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right) e^{-\frac{t_0}{b} p}. \quad (2.15)$$

Функция

$$\eta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

называется **обобщённой единичной функцией**, из (2.4) и (2.14) находим её изображение

$$\eta(t - t_0) \rightarrow \frac{e^{-pt_0}}{p}. \quad (2.16)$$

Пример 2.7

Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$$

Решение. Данная функция описывает единичный импульс, который можно рассматривать как разность двух оригиналов: единичной функции $\eta(t)$ и обобщённой единичной функции $\eta(t - 3)$ (рис. 2.5).

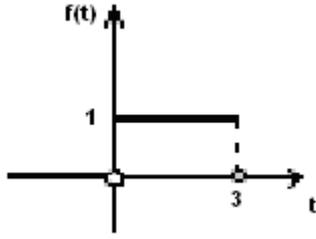


Рис. 2.5. График функции $f(t)$

Поэтому, используя свойство линейности, формулы (2.4) и (2.16) получим

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t - 3) \rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot e^{-3p} = \frac{1 - e^{-3p}}{p} = F(p).$$

6. Теорема опережения

Теорема 2.6. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t + t_0) \rightarrow e^{t_0 p} \left[F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right]. \quad (2.17)$$

Теорема опережения применяется при решении разностных уравнений, в которые входят значения $f(t), f(t + t_0), f(t + 2t_0), \dots, f(t + nt_0)$.

7. Изображение периодического оригинала

Теорема 2.7. Если оригинал $f(t)$ – периодическая функция с периодом, равным T , то его изображение будет

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt. \quad (2.18)$$

Пример 2.8

Пользуясь теоремой 2.7, найти изображение функции

$$f(t) = f(t + 2) = \begin{cases} 1, & 2n < t < 2n + 1, \\ 0, & 2n + 1 < t < 2n + 2, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

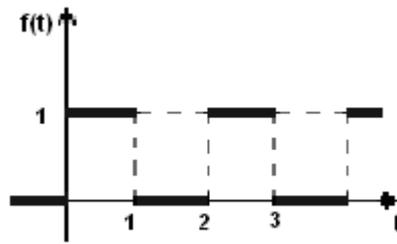


Рис. 2.6. График функции $f(t)$

Решение. Период функции $T = 2$, поэтому

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-2p}} \int_0^2 e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \int_0^1 e^{-pt} dt = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \cdot \left(\frac{e^{-pt}}{-p} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left(\frac{e^{-p}}{-p} + \frac{1}{p} \right) = \frac{(1 - e^{-p})}{p \cdot (1 - e^{-2p})} = \frac{1}{p(1 + e^{-p})},
 \end{aligned}$$

или

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{p(1 + e^{-p})}.$$

8. Теорема смещения

Теорема 2.8. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, a – комплексное число, то

$$e^{at} \cdot f(t) \rightarrow F(p - a). \quad (2.19)$$

То есть, умножение оригинала на функцию e^{at} влечёт за собой смещение переменной p .

Доказательство.

В силу формулы (2.2) имеем

$$e^{at} \cdot f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{at} \cdot f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a), \text{ при } \operatorname{Re}(p - a) > \alpha_0.$$

Пользуясь этим свойством можно выписать соответствия между оригиналами и их изображениями из примера 5:

$$e^{at} \cdot \cos bt \rightarrow \frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}, \quad (2.20)$$

$$e^{at} \cdot \sin bt \rightarrow \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}. \quad (2.21)$$

Теорема смещения применяется при рассмотрении физических явлений, связанных с затухающими колебаниями.

Пример 2.9.

Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+11}$.

Решение. Преобразуем данную дробь: выделим в знаменателе дроби полный квадрат и по свойству линейности и из формул (2.20) и (2.21), получим

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2p-5}{p^2-6p+11} = \frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+2} = \frac{2(p-3)}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} \rightarrow 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \sin \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(t) = 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \sin \sqrt{2}t.$$

9. Дифференцирование оригинала

Теорема 2.9. Если $f(t) \rightarrow F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\rightarrow pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\rightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(t) &\rightarrow p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Иначе, дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на p .

Свойство дифференцирования оригинала вместе со свойством линейности широко используется при решении линейных дифференциальных уравнений.

Пример 2.10.

Найти изображение выражения $x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2$, если $x(0) = 3, x'(0) = 0, x''(0) = -2$.

Решение. Пусть $x(t) \rightarrow X(p) = X$, тогда, согласно теореме 2.9, имеем

$$\begin{aligned}
x'(t) &\rightarrow p \cdot X - 3, \\
x''(t) &\rightarrow p^2 \cdot X - p \cdot 3 - 0, \\
x'''(t) &\rightarrow p^3 \cdot X - p^2 \cdot 3 - p \cdot 0 + 2, \\
2 &= 2 \cdot 1 \rightarrow \frac{2}{p}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2 \rightarrow \\
&\rightarrow p^3 \cdot X - 3p^2 + 2 - 2(p^2 \cdot X - 3p) - 3(p \cdot X - 3) + 2X + \frac{2}{p} = \\
&= p^3 X - 2p^2 X - 3pX + 2X + 6p + \frac{2}{p} - 3p^2 + 11 = \\
&= (p^3 - 2p^2 - 3p + 2)X + 6p + \frac{2}{p} - 3p^2 + 11.
\end{aligned}$$

10. Дифференцирование изображения

Теорема 2.10. Если $F(p) \rightarrow f(t), \text{Re } p > \alpha_0$, то

$$\begin{aligned}
F'(p) &\rightarrow -t f(t); \\
F''(p) &\rightarrow (-1)^2 t^2 f(t); \\
&\dots\dots\dots \\
F^{(n)}(p) &\rightarrow (-1)^n t^n f(t), \text{Re } p > s_1 > s_0.
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

Дифференцированию изображения $F(p)$ соответствует в пространстве оригиналов действие умножения на $-t$ функции $f(t)$.

Пример 2.11

Найти изображение функции $f(t) = t \cos 3t$.

Решение. Из формулы (2.13), имеем $f(t) = \cos 3t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 9} = F(p)$.

Из того, что $F'(p) \rightarrow -t f(t)$

$$-t \cos 3t \rightarrow \left(\frac{p}{p^2 + 9} \right)' = \frac{p^2 + 9 - 2p^2}{(p^2 + 9)^2} = \frac{-p^2 + 9}{(p^2 + 9)^2} = -\frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}.$$

Следовательно,

$$t \cos 3t \rightarrow \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}.$$

11. Интегрирование оригинала

Теорема 2.11. Если $f(t) \rightarrow F(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > \alpha_0. \quad (2.24)$$

То есть интегрированию оригинала от 0 до t соответствует деление его изображения на p .

Пример 2.12

Найти изображение интеграла $\int_0^t \cos \tau d\tau = \sin t$.

Решение. По формуле (2.10) $f(t) = \cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} = F(p)$. Тогда по тео-

реме 11 имеем $\sin t \rightarrow \frac{p}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2 + 1}$.

12. Интегрирование изображения

Теорема 2.12. Если $f(t) \rightarrow F(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0$ и интеграл $\int_p^\infty F(p) dp$ схо-

дится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha_1 > \alpha_0$, то

$$\int_p^{\infty} F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}, \quad \operatorname{Re} p > \alpha_1 > \alpha_0. \quad (2.25)$$

То есть интегрированию изображения от p до ∞ соответствует деление его оригинала на t .

Пример 2.13

Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Функция $\frac{\sin t}{t}$ является оригиналом, так как $\left| \frac{\sin t}{t} \right| < 1$ (условие

в) и точка $t=0$ является точкой разрыва первого рода (условие б). Так как

$f(t) = \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1} = F(p)$, то по теореме интегрирования изображения, имеем

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^{\infty} \frac{1}{p^2 + 1} dp = \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} p \Big|_p^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

13. Свёртка функций

Определение. *Свёрткой* $\varphi(t) * f(t)$ непрерывных функций $\varphi(t)$ и $f(t)$ действительного переменного $0 \leq t < \infty$ называется интеграл

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (2.26)$$

Свёртка есть действие, которое паре функций из некоторого множества ставит в соответствие определённую функцию из этого множества. Действие получения свёртки называется свёртыванием функций.

Свойства свёртки функций:

1. коммутативность $\varphi * f = f * \varphi$;
2. ассоциативность $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$;
3. дистрибутивность относительно сложения $\varphi * (f + \psi) = \varphi * f + \varphi * \psi$;

4. абсолютная величина свёртки $|\varphi * f| \leq |\varphi| * |f|$;
5. если $\varphi(t)$ и $f(t)$ непрерывные функции в области $0 \leq t < \infty$, то и их свёртка $\varphi * f$ является тоже непрерывной функцией в этой области;
6. если $\varphi(t)$ и $f(t)$ непрерывные при $t \geq 0$ и их свёртка $\varphi * f = 0$ для всех $t \geq 0$, то, по крайней мере, одна из этих функций в области $0 \leq t < \infty$ всюду равна нулю (теорема Титчмарша).

Пример 2.14

Найти свёртку функций $\varphi(t) = t$ и $f(t) = e^t$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi * f = t * e^t &= \int_0^t (t - \tau) \cdot e^\tau d\tau = \int_0^t (te^\tau - \tau e^\tau) d\tau = \int_0^t te^\tau d\tau - \int_0^t \tau e^\tau d\tau = \\ &= t \int_0^t e^\tau d\tau - \int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau = te^t - t - (te^t - e^t - 1) = te^t - t - te^t + e^t + 1 = e^t - t - 1. \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau$ считаем по частям

$$\int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau = \left| \begin{array}{l} u = \tau \quad dv = e^\tau d\tau \\ du = d\tau \quad v = e^\tau \end{array} \right| = \tau \cdot e^\tau \Big|_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau = \tau \cdot e^\tau - e^\tau \Big|_0^t = te^t - e^t - 1$$

Итак,

$$\varphi * f = t * e^t = e^t - t - 1.$$

14. Теорема умножения изображений (теорема Э.Бореля)

Теорема 2.13. Если $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ и $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_1$, то

$$f * \varphi \rightarrow F(p) \cdot \Phi(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0, \alpha_0 > \alpha_1.$$

Иначе, свертыванию в пространстве оригиналов соответствует умножение функций в пространстве изображений.

Пример 2.15

Пользуясь теоремой Бореля, найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2}$$

Решение. Представим изображение в виде произведения:

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{1}{p^2 + 4} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} = F_1(p) \cdot F_2(p)$$

Из формул (2.12) и (2.13) получаем

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2 + 4} \quad \rightarrow \quad \sin 2t = f_1(t)$$

$$F_2(p) = \frac{p}{p^2 + 4} \quad \rightarrow \quad \cos 2t = f_2(t)$$

Тогда по теореме 2.13 получаем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{1}{p^2 + 4} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} \rightarrow f_1 * f_2 = \int_0^t \sin 2\tau \cos 2(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(4\tau - 2t) + \sin 2t) d\tau = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(4\tau - 2t)}{4} + \tau \cdot \sin 2t \right) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2t}{4} + t \sin 2t + \frac{\cos(-2t)}{4} \right) = \frac{t}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

Таким образом, заданная функция имеет оригинал

$$\frac{p}{(p^2 + 4)^2} \rightarrow \frac{t}{2} \sin 2t.$$

15. Интеграл Дюамеля

Теорема 2.14. Если $f * \varphi = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \rightarrow F(p) \Phi(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau + f(t) \varphi(0) \rightarrow pF(p) \Phi(p), \text{ или}$$

$$\int_0^t \varphi(\tau) f'_t(t - \tau) d\tau \rightarrow pF(p) \Phi(p) \quad (2.27)$$

Пример 2.16

Пользуясь интегралом Дюамеля, найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

Решение. Представим изображение в виде произведения:

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = p \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p),$$

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \quad \text{при } a = 1 \quad f_1(t) = \cos t$$

$$F_2(p) = \frac{p}{p^2 + 4} \quad \text{при } a = 2 \quad f_2(t) = \cos 2t$$

Тогда по теореме 2.14 получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau) d\tau = \cos 0 \cdot \cos 2t + \int_0^t \cos' \tau \cdot \cos 2(t-\tau) d\tau = \\ &= \cos 2t - \int_0^t \sin \tau \cdot \cos 2(t-\tau) d\tau = \cos 2t - \frac{1}{2} \int_0^t [\sin(3\tau - 2t) + \sin(2t - \tau)] d\tau = \\ &= \cos 2t + \frac{1}{6} \cos(3\tau - 2t) \Big|_0^t - \frac{1}{2} \cos(2t - \tau) \Big|_0^t = \frac{4}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t. \end{aligned}$$

Итак,

$$f(t) = \frac{4}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t.$$

2.4 Обращение преобразования Лапласа. Метод неопределённых коэффициентов

Рассмотрим задачу, обратную той, которую решает преобразование Лапласа. Изучим способы, с помощью которых можно по известному изображению $F(p)$, $p = \alpha + j\beta$, найти его оригинал $f(t)$. В общем виде задачу решает **формула Меллина**, которая имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad \alpha > \alpha_0.$$

Однако, применение этой формулы совсем не просто и поэтому прибегают к ней по большей части в крайних случаях. В то же время имеются методы обращения преобразования Лапласа большей практической применимости.

Если оригинал представляет собой правильную рациональную дробь, то следует разложить её на простейшие дроби и для каждой из полученных дробей найти оригинал, пользуясь свойствами преобразования Лапласа и таблицей изображений.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены с комплексными коэффициентами, причём $Q(x)$ - ненулевой многочлен. Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Теорема 2.15. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь, $P(x)$ и

$Q(x)$ - многочлены с действительными коэффициентами. Если

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1x + g_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + g_s)^{\beta_s}, \quad (2.28)$$

где a_i - попарно различные действительные корни многочлена $Q(x)$ кратности $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, r,$

$$x^2 + p_jx + g_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j),$$

z_j, \bar{z}_j - попарно различные при разных j существенно комплексные корни многочлена $Q(x)$ кратности $\beta_j, j = 1, 2, \dots, s,$ то существуют действительные

числа $A_i^{(\alpha)}, i = 1, 2, \dots, r, \alpha = 1, 2, \dots, \alpha_i, M_j^{(\beta)}$ и $N_j, j = 1, 2, \dots, s, \beta = 1, 2, \dots, \beta_j$

такие, что

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots \\
&+ \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r} + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + g_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2 + p_1x + g_1)^{\beta_1-1}} + \dots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x + N_1^{(\beta_1)}}{x^2 + p_1x + g_1} + \dots \\
&+ \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2 + p_sx + g_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2 + p_sx + g_s)^{\beta_s-1}} + \dots + \frac{M_s^{(\beta_s)}x + N_s^{(\beta_s)}}{x^2 + p_sx + g_s}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Таким образом, данная теорема утверждает, что всякая ненулевая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму элементарных рациональных дробей.

При выполнении разложения вида (2.29) для конкретно заданной дроби обычно оказывается удобным **метод неопределенных коэффициентов**.

Найдем оригиналы для всех типов простейших дробей.

1. Первый тип.

$$\frac{A}{p-a} \rightarrow Ae^{at}.$$

2. Второй тип.

$$\frac{A}{(p-a)^k} \rightarrow A \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{at}.$$

3. Третий тип. Требуется найти оригинал для простейшей дроби вида

$$\frac{Ap + B}{p^2 + ap + q}, \quad a^2 - 4q < 0.$$

Для этого преобразуем дробь:

$$\begin{aligned}
\frac{Ap + B}{p^2 + ap + q} &= \frac{Ap + B}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + q - \frac{a^2}{4}} = \frac{Ap + B}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \\
&= \frac{A\left(p + \frac{a}{2}\right) + \left(B - \frac{Aa}{2}\right)}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = A \cdot \frac{p + \frac{a}{2}}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{B - \frac{Aa}{2}}{b} \cdot \frac{b}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{Ap + B}{p^2 + ap + q} \rightarrow Ae^{-\frac{at}{2}} \cos bt + \frac{2B - Aa}{2b} e^{-\frac{at}{2}} \sin bt = \left(A \cos bt + \frac{2B - Aa}{2b} \right) e^{-\frac{at}{2}}.$$

4. Четвертый тип.

$$\frac{Ap + B}{(p^2 + ap + q)^k}, \quad a^2 - 4q < 0$$

Пример 2.17

Разложить дробь $\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)}$ на элементарные дроби.

Решение. Согласно (2.29), искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = \frac{A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1)}{(x^2 - 1)(x - 2)}$$

и, отбросив его, получим

$$x = A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1).$$

Здесь имеет место случай, когда все корни знаменателя действительны. Подставив последовательно в обе части получившегося равенства корни $x = 1, x = -1, x = 2$, находим.

$$\begin{cases} 1 = -2A, \\ -1 = 6B, \\ 2 = 3C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = -\frac{1}{6}, \\ C = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)} = -\frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{6(x + 1)} + \frac{2}{3(x - 2)}.$$

Пример 2.18

Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)}$.

Решение. Представим $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 13} = \frac{Ap^2 + 4Ap + 13A + Bp^2 + Cp}{p(p^2 + 4p + 13)},$$

где A, B, C - неопределённые коэффициенты. Отсюда следует равенство

$$3p^2 + 3p - 13 = Ap^2 + 4Ap + 13A + Bp^2 + Cp = (A + B)p^2 + (4A + C)p + 13A.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p , получаем систему уравнений для нахождения неопределённых коэффициентов:

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ 4A + C = 3, \\ 13A = -13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 3 - A, \\ C = 3 - 4A. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 4, \\ C = 7. \end{cases}$$

Таким образом, $F(p)$ имеет вид

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 13} = -\frac{1}{p} + \frac{4p + 7}{p^2 + 4p + 13} = \\ &= -\frac{1}{p} + \frac{4(p+2) - 1}{(p+2)^2 + 9} = -\frac{1}{p} + \frac{4(p+2)}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{1}{(p+2)^2 + 3^2} = -\frac{1}{p} + \\ &+ 4 \cdot \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2} = -F_1(p) + 4F_2(p) - \frac{1}{3}F_3(p) \end{aligned}$$

Находим оригиналы

$$F_1(p) = \frac{1}{p}, \quad \rightarrow \quad f_1(t) = 1,$$

$$F_2(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2}, \quad \rightarrow \quad f_2(t) = e^{-2t} \cdot \cos 3t,$$

$$F_3(p) = \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2}, \quad \rightarrow \quad f_3(t) = e^{-2t} \cdot \sin 3t.$$

Следовательно,

$$f(t) = -f_1(t) + 4f_2(t) - \frac{1}{3}f_3(t) = -1 + 4e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t.$$

3 ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

3.1 Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n -ого порядка с постоянными коэффициентами

$$L[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (3.1)$$

где $x = x(t)$, $t \geq 0$. Найдём решение задачи Коши с начальными условиями

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (3.2)$$

Пусть $x(t) \rightarrow X(p)$, $f(t) \rightarrow F(p)$, применим к обеим частям уравнения (3.1) преобразование Лапласа, используя теорему дифференцирования оригинала.

$$\begin{aligned} a_n x(t) &\rightarrow a_n X(p) \\ a_{n-1} x'(t) &\rightarrow a_{n-1} (pX - x_0) \\ &\dots\dots\dots \\ x^{(n)}(t) &\rightarrow p^n X - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x'_0 - \dots - x_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Подставляя изображения производных в (3.1), получим

$$L[x] = (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot X(p) + Q(p), \quad (3.3)$$

где $Q(p)$ - многочлен, зависящий от $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$. Обозначим *характеристический многочлен*

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Из (3.1) и (3.3) получаем *операторное уравнение* или *изображающее уравнение*

$$L(p) \cdot X(p) + Q(p) = F(p).$$

Решая операторное уравнение относительно $X(p)$, получаем

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}.$$

Восстанавливая оригинал для $X(p)$, получим искомое решение $x(t)$.

Для решения дифференциальных уравнений удобно пользоваться следующим алгоритмом решения задачи Коши (3.1) - (3.2):

I. Применить преобразование Лапласа: от известных и неизвестных функций перейти к их изображениям, записать уравнение в изображениях, соответствующее решаемой задаче Коши.

II. Решить полученное уравнение: найти изображение искомого решения.

III. Применить обратное преобразование Лапласа: найти оригинал для полученного изображения.

Пример 3.1

Решить задачу Коши $x' + x = \eta(t)$, $x(0) = \frac{1}{2}$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом.

I. Перейдём от оригиналов к изображениям:

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - \frac{1}{2},$$

$$\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$pX(p) - \frac{1}{2} + X(p) = \frac{1}{p}.$$

II. Решим уравнение для изображений

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2},$$

$$X(p)(p + 1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2},$$

$$X(p) = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{2}}{p + 1} = \frac{1}{p(p + 1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + 1} = X_1(p) + \frac{1}{2} X_2(p).$$

III. Найдём оригинал для функции $X(p)$.

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \rightarrow 1 - e^{-t} = x_1(t)$$

$$X_2(p) = \frac{1}{p+1} \rightarrow e^{-t} = x_2(t)$$

Следовательно, решением задачи Коши является функция:

$$x(t) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) = 1 - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Пример 3.2

Решить задачу Коши $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.

Решение.

I. Перейдём от оригиналов к изображениям

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \rightarrow p^2X(p) - p - x'(0) = p^2X(p) - p - 3,$$

$$e^{3t} \rightarrow \frac{1}{p-3}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$p^2X(p) - p - 3 - 3pX(p) + 3 + 2X(p) = \frac{2}{p-3}.$$

II. Решим уравнение для изображений

$$p^2X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3} + p.$$

$$X(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p-3} + p$$

$$X(p) = \frac{2}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} + \frac{p}{p^2 - 3p + 2} = \frac{2 + p^2 - 3p}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)} = \frac{1}{p-3}$$

III. Найдём оригинал для функции $X(p)$:

$$X(p) = \frac{1}{p-3} \rightarrow e^{3t} = x(t).$$

Таким образом, применение операционного метода позволяет вместо дифференциальных уравнений решать алгебраические уравнения. При этом начальные условия при записи уравнений в изображениях учитываются автоматически, и нет необходимости решать систему для нахождения произвольных постоянных, как это делается при применении классического метода.

Следует заметить, что операционное исчисление позволяет найти не только частное, но и *общее решение* уравнения

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = f(t).$$

Для этого достаточно положить $x^{(k)}(0) = C_k, k = 0, \dots, n - 1$.

3.2 Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Схема решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами аналогична:

I. Применить преобразование Лапласа: от известных и неизвестных функций перейти к их изображениям, записать систему в изображениях.

II. Решить полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно $X(p)$ и $Y(p)$.

III. Применить обратное преобразование Лапласа: найти оригиналы $x(t)$ и $y(t)$ для полученных изображений.

Пример 3.3

Найти частное решение системы
$$\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}. \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = y'(0) = 0, x'(0) = 1$.

Решение.

I. Имеем

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(p), & y(t) &\rightarrow Y(p), \\ x'(t) &\rightarrow pX - x(0) = pX, & y'(t) &\rightarrow pY - y(0) = pY, \\ x''(t) &\rightarrow p^2X - x'(0) = p^2X - 1, & y''(t) &\rightarrow p^2Y - y'(0) = p^2Y, \\ e^t &\rightarrow \frac{1}{p-1}, & e^{-t} &\rightarrow \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

II. Запишем систему операторных уравнений

$$\begin{cases} p^2X - 1 + pX + p^2Y - Y = \frac{1}{p-1}, \\ pX + 2X - pY + Y = \frac{1}{p+1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p^2 + p)X + (p^2 - 1)Y = \frac{p}{p-1}, \\ (p+2)X + (1-p)Y = \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений относительно X и Y . Решим систему по формулам Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} p^2 + p & p^2 - 1 \\ p + 2 & 1 - p \end{vmatrix} = p(p+1)(1-p) - (p+2)(p^2-1) = \\ &= p(1+p)(1-p) + (p+2)(1-p)(1+p) = (1+p)(1-p)(p+p+2) = \\ &= 2(1+p)(1-p)(p+1) = 2(1+p)^2(1-p), \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{p}{p-1} & p^2 - 1 \\ \frac{1}{p+1} & 1 - p \end{vmatrix} = 1 - 2p, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} p^2 + p & \frac{p}{p-1} \\ p + 2 & \frac{1}{p+1} \end{vmatrix} = \frac{3p}{1-p}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1-2p}{2(p+1)^2(1-p)} = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8p-4}{2(p-1)(p+1)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(6p-6) + 2p+1+1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(p^2 + 2p + 1) + 6(p-1) - p^2 + 1}{2(p-1)(p+1)^2} = \\ &= \frac{(p+1)^2 + 6(p-1) - (p^2 - 1)}{8(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p+1}, \end{aligned}$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3p}{2(p+1)^2(1-p)^2} = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

III. Перейдём от изображений к оригиналам.

Из равенств $e^t \rightarrow \frac{1}{p+1}$ и $sh t \rightarrow \frac{1}{p^2-1}$ по теореме дифференцирования изображения находим

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)' = -\frac{1}{(p+1)^2} \rightarrow -te^{-t}$$

и

$$\left(\frac{1}{p^2-1}\right)' = -\frac{2p}{(p^2-1)^2} \rightarrow -t sh t,$$

или

$$\frac{1}{(p+1)^2} \rightarrow te^{-t} \text{ и } \frac{2p}{(p^2-1)^2} \rightarrow t sh t.$$

Следовательно, решение системы будет

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} sh t + \frac{3}{4} te^{-t} \\ y(t) = \frac{3}{4} t sh t \end{cases}.$$

Для того, чтобы найти *общее решение* системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax(t) + f(t),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор неизвестных, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица ко-

эффициентов, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ – заданная вектор-функция, необходимо принять $x_i(0) = C_i, i = 1, \dots, n$.

3.3 Применение формулы Дюамеля при решении дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями

Формула Дюамеля применяется в случае, когда возникает трудность при нахождении изображения правой части уравнения или при необходимости многократного решения задачи для различных правых частей исходного уравнения.

Рассмотрим задачу Коши

$$L[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (3.4)$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (3.5)$$

где $x = x(t)$, $t \geq 0$.

Пусть $x(t) \rightarrow X(p)$, $f(t) \rightarrow F(p)$, тогда

$$x^{(n)}(t) \rightarrow p^n X - p^{n-1} x(0) - p^{n-2} x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0) = p^n X. \quad (3.6)$$

Переходя в уравнении (3.4) к изображению, получаем, с учетом (3.5), *операторное уравнение*

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot X(p) = F(p),$$

или

$$L(p) \cdot X(p) = F(p). \quad (3.7)$$

Наряду с задачей Коши (3.4)-(3.5) рассмотрим вспомогательную задачу

$$L[x_1] = x_1^{(n)} + a_1 x_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x_1' + a_n x_1 = 1, \quad (3.8)$$

Для уравнения (3.8) операторное уравнение будет вида

$$L(p) \cdot X_1(p) = \frac{1}{p}, \quad (3.9)$$

где $x_1(t) \rightarrow X_1(p)$. Выразим из (3.9) характеристический многочлен $L(p)$ и подставим полученное выражение в уравнение (3.8):

$$\frac{1}{pX_1(p)} \cdot X(p) = F(p),$$

или

$$pF(p)X_1(p) = X(p). \quad (3.10)$$

Используя теорему 2.11 находим оригинал $x(t)$:

$$x(t) = f(0) \cdot x_1(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot x_1(t - \tau) d\tau, \quad (3.11)$$

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau, \quad (3.12)$$

$$x(t) = f(0) \cdot x_1(t) + \int_0^t f'(t - \tau) \cdot x_1(\tau) d\tau, \quad (3.13)$$

$$x(t) = \int_0^t x_1'(t - \tau) \cdot f(\tau) d\tau. \quad (3.14)$$

Решение исходного уравнения (3.1) - (3.2) можно получить по любой из формул (3.11)-(3.14).

Пример 3.4. Решить задачу Коши $x''(t) - x(t) = \frac{1}{1 + e^t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение. 1) Решим вспомогательную задачу: $x_1''(t) - x_1(t) = 1$, $x_1(0) = x_1'(0) = 0$.

Операторное уравнение

$$p^2 X_1(p) - X_1(p) = \frac{1}{p},$$

из которого получаем изображение вспомогательной функции

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)}.$$

Так как $\frac{1}{p^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p + 1} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = \text{sh } t$, то по теореме 2.8 об интегрировании оригинала, находим оригинал вспомогательной функции

$$X_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 - 1} \rightarrow \int_0^t \text{sh } \tau d\tau = \text{ch } \tau \Big|_0^t = \text{ch } t - 1 = x_1(t).$$

2) Для нахождения оригинала искомой функции воспользуемся формулой (3.12), имеем

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} sh(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{t-\tau} - e^{-t+\tau}}{2(1+e^\tau)} d\tau = \\
 &= \frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau} d\tau - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t \frac{e^\tau}{1+e^\tau} d\tau = \left. \begin{array}{l} U=1+e^\tau, \quad e^\tau=U-1, \\ dU=e^\tau d\tau, \quad e^{-\tau}=\frac{1}{U-1}, \\ d\tau=\frac{dU}{e^\tau}=\frac{dU}{U-1} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{e^t}{2} \int_2^{1+e^t} \frac{dU}{(U-1)^2 U} - \frac{e^{-t}}{2} \int_2^{1+e^t} \frac{dU}{U} = \\
 &= \left. \frac{1}{(U-1)^2 U} = \frac{A}{U-1} + \frac{B}{(U-1)^2} + \frac{C}{U} = -\frac{1}{U-1} + \frac{1}{(U-1)^2} + \frac{1}{U} \right| = \\
 &= \frac{e^t}{2} \int_2^{1+e^t} \left(-\frac{1}{U-1} + \frac{1}{(U-1)^2} + \frac{1}{U} \right) dU - \frac{e^{-t}}{2} \int_2^{1+e^t} \frac{dU}{U} = \\
 &= \frac{e^t}{2} \left(-\ln|U-1| - \frac{1}{U-1} + \ln|U| \right) \Big|_2^{1+e^t} - \frac{e^{-t}}{2} \ln|U| \Big|_2^{1+e^t} = \\
 &= \frac{e^t}{2} \left(-\ln e^t + \ln(1+e^t) - \frac{1}{e^t} + \ln 1 - \ln 2 + 1 \right) - \frac{e^{-t}}{2} (\ln(1+e^t) - \ln 2) = \\
 &= \ln(1+e^t) \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} - \ln 2 \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2} (-t - e^{-t} + 1)
 \end{aligned}$$

Таким образом, решением задачи Коши является функция

$$x(t) = sh t \cdot \ln \frac{1+e^t}{2} + \frac{e^t - te^t - 1}{2}.$$

3.4 Применение преобразования Лапласа в теории электрических цепей

Изложим необходимые сведения из теории электрических цепей.

Падение напряжения E_R на сопротивлении пропорционально проходящему току: $E_R = R \cdot I$ (закон Ома). При этом постоянная R называется **сопротивлением** резистора и измеряется в омах.

Падение напряжения E_L на катушке индуктивности пропорционально скорости изменения проходящего тока: $E_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$. При этом постоянная L называется **индуктивностью** катушки и измеряется в генри.

Падение напряжения E_C на конденсаторе пропорционально текущему заряду конденсатора: $E_C = \frac{1}{C} \cdot Q$. При этом постоянная C называется **емкостью** конденсатора и измеряется в фарадах. Поскольку $I(t) = \frac{dQ}{dt}$, то последний

закон может быть переписан в виде $E_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(u) du$.

Второй закон Кирхгофа гласит: алгебраическая сумма всех текущих падений напряжения при обходе вокруг произвольной замкнутой цепи равна нулю.

Приведенные законы позволяют составлять уравнения простейших цепей:

1. RC -контур

$$RI + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(u) du = E(t).$$

2. RL -контур

$$RI + L \frac{dI}{dt} = E(t).$$

3. LC -контур

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(u) du = E(t).$$

4. RLC -контур

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(u) du = E(t).$$

Глава 4 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

4.1 Понятие преобразования Фурье

Пусть $f(x)$ - непериодическая функция, определенная на R и удовлетворяющая условиям Дирихле на любом конечном промежутке¹. Кроме того, будем предполагать, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится. На промежутке $[-l; l]$ ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x), \quad (4.1)$$

где $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n t dt$, $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \omega_n t dt$.

Подставляя выражения для a_n и b_n в ряд Фурье, получим

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) (\cos \omega_n t \cos \omega_n x + \sin \omega_n t \sin \omega_n x) dt.$$

Обозначим разность частот $\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}$ через $\Delta\omega$. Тогда ряд Фурье запишется в виде

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-l}^l f(t) (\cos \omega_n t \cos \omega_n x + \sin \omega_n t \sin \omega_n x) dt. \quad (4.2)$$

Устремим $l \rightarrow \infty$ и обозначим предел выражения (4.2) через $J(x)$, в результате получим

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos \omega t \cos \omega x + \sin \omega t \sin \omega x] dt,$$

¹ Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке $[a; b]$, если она: 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$ или имеет конечное число точек разрыва 1 рода; 2) в каждом интервале непрерывности $f(x)$ монотонна, либо имеет на этом интервале конечное число точек экстремума.

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x \right] d\omega \text{ или}$$

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega. \quad (4.3)$$

Интеграл (4.3) называется **интегралом Фурье**. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном промежутке;
- 2) определена и абсолютно интегрируема на всей числовой оси.

Тогда функция $f(x)$ представима своим интегралом Фурье, т.е. ее интеграл Фурье $J(x)$ сходится в каждой точке x и справедливо равенство

$$J(x) = \begin{cases} f(x), & x - \text{точка непрерывности } f(x); \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x - \text{точка разрыва функции } f(x). \end{cases}$$

Чаще всего используется комплексная форма интеграла (4.3). По формулам Эйлера имеем

$$\begin{aligned} A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x &= A(\omega) \frac{e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}}{2} + B(\omega) \frac{e^{j\omega x} - e^{-j\omega x}}{2j} = \\ &= \frac{A(\omega) - jB(\omega)}{2} e^{j\omega x} + \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{2} e^{-j\omega x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (C(\omega) e^{j\omega x} + C(-\omega) e^{-j\omega x}) \end{aligned}$$

Затем запишем получившийся интеграл в виде суммы двух интегралов и во втором сделаем замену $t = -\omega$. Получим

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} C(t) e^{jtx} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 C(t) e^{jtx} dt \end{aligned}$$

Переходя к промежутку интегрирования $(-\infty; +\infty)$ интеграл Фурье $J(x)$ запишется в виде

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega, \quad (4.4)$$

где

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx. \quad (4.5)$$

Определение. Функция (4.4) называется **преобразованием Фурье** (Фурье-образом) функции $f(x)$. При этом используется обозначение $F[f(x)] = C(\omega)$, где F - оператор Фурье.

Формула (4.5) позволяет делать обратный переход:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega, \text{ т.е. по спектральной функции } C(\omega) \text{ можно восста-}$$

новить исходную функцию $f(x)$.

Величина $|C(\omega)|$ называется **амплитудным спектром**, а величина $\arg C(\omega)$ - **фазовым спектром**.

Формулы (4.4) и (4.5) являются формулами симметричной формы преобразования Фурье и называются **формулами Хинчина-Винера**. Симметричность возникает за счет формирования коэффициентов $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в обеих формулах

(4.4) и (4.5). Если в формуле (4.3) коэффициент $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ не выносить перед интегралом, а оставить его внутри $A(\omega)$ и $B(\omega)$, для преобразования Фурье получим

вид $C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$, а для обратного преобразования

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega$. С другой стороны, в формуле (4.3) можно вынести за

знак интеграла коэффициент $\frac{1}{\pi}$. Тогда обратное и прямое преобразования

Фурье будут иметь вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega x} d\omega, \quad (4.4^*)$$

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx. \quad (4.5^*)$$

Замечание. Периодическая функция, определенная на интервале $(-l; l)$ и периодически продолженная, имеет дискретный спектр (ряд Фурье); непериодическая функция, определенная на всей числовой прямой, имеет непрерывный спектр. Физически это означает, что исследуемый процесс нельзя построить из гармонических колебаний только с определенными изолированными частотами $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, для описания процесса нужны гармонические колебания всех частот.

4.2 Связь между преобразованием Лапласа и Фурье. Свойства преобразования Фурье

Рассмотрим функцию $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f(t), & t \geq 0. \end{cases}$ Тогда, согласно формуле (4.5*),

имеем $C(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$. Если в интеграле Лапласа $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$

положить $p = j\omega$, т.е. считать комплексную переменную p чисто мнимой, то правые части выражений в точности будут совпадать. Кроме того, совпадают первые два условия существования изображений по Лапласу и по Фурье:

- 1) $f(t)$ и $f'(t)$ или всюду непрерывны, или имеют на любом конечном промежутке лишь конечное число точек разрыва первого рода;
- 2) $f(t) = 0$ для всех точек $t < 0$;
- 3) третье условие для преобразования Лапласа $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$, а для преобразования Фурье – абсолютная интегрируемость функции $f(t)$ на всей числовой оси.

Очевидно, что третье условие для преобразования Фурье сильнее. По этой причине ряд функций, имеющих изображения по Лапласу, не имеют образов Фурье.

Для обратного перехода преобразования Лапласа имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad \text{Положив } s=0, p=j\omega, dp=jd\omega, \quad \text{получим}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \text{что совпадает с формулой (4.4*)}. \quad \text{Различие в подын-}$$

тегральной функции $F(i\omega)$ (вместо $F(\omega)$) объясняется тем, что для точного соответствия обозначений преобразование Фурье следовало бы писать в виде $F(i\omega)$, считая в интеграле Лапласа p чисто мнимой величиной. Часто так и делают.

Таким образом, если оригинал $f(t)$ при преобразовании Лапласа дополнительно удовлетворяет условию существования преобразования Фурье (теорема 4.1) – абсолютной интегрируемости функции $f(t)$, то для него существует и преобразование Фурье, и все свойства преобразования Фурье получаются из свойств преобразования Лапласа.

Свойства преобразования Фурье

Если $f(t) \xrightarrow{F} F(\omega)$, $g(t) \xrightarrow{F} G(\omega)$, то справедливы следующие свойства:

$$1. af(t) + bg(t) \xrightarrow{F} aF(\omega) + bG(\omega), \quad a, b \in R$$

$$2. f(\alpha t) \xrightarrow{F} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha \neq 0$$

$$3. f(t+c) \xrightarrow{F} e^{-ic\omega} F(\omega)$$

$$4. e^{ict} f(t) \xrightarrow{F} F(\omega+c)$$

$$5. (it)^n f(t) \xrightarrow{F} F^{(n)}(\omega)$$

$$6. f^{(n)}(t) \xrightarrow{F} (-i\omega)^n F(\omega)$$

$$7. f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \xrightarrow{F} F(\omega)G(\omega)$$

$$8. f(t) \cdot g(t) \xrightarrow{F} F(\omega) * G(\omega)$$

4.3 Синус и косинус преобразования

Поскольку интеграл (4.4) получен как предельный переход суммы Фурье, то для преобразований Фурье будут справедливы свойства ряда Фурье для четных и нечетных функций. Это удобно, когда изучаемый процесс ограничен полупрямой $(0; +\infty)$. Тогда рассматривают пару следующих преобразований:

– косинус преобразование

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (4.6)$$

и обратно:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (4.7)$$

– синус преобразование

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad (4.8)$$

и обратно:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (4.9)$$

Пример 4.1.

$$\text{Дана функция } f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Запишем преобразование Лапласа для данной функции: $L[f(t)] = \frac{1}{p + \alpha}$. Заме-

няя $p = i\omega$, получим соответствующее преобразование Фурье:

$$F[f(t)] = \frac{1}{j\omega + \alpha}. \text{ То же самое можно получить по определению преобразова-$$

ния Фурье:
$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-\alpha t} dt = \frac{e^{-(j\omega + \alpha)t}}{-(j\omega + \alpha)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega + \alpha}.$$
 При этом ампли-

тудный спектр равен $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}},$ фазовый спектр

$$\psi(\omega) = -\arg F(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\alpha}.$$

Пример 4.2.

Задан импульс, длящийся время τ :
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Записывая функцию $f(t)$ в виде разности единичных функций, найдем ее преобразование по Лапласу:

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t - \tau), \quad L[f(t)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}).$$

Преобразование Фурье данной функции будет иметь вид:

$$F[f(t)] = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = \frac{2e^{-j\omega\tau/2}}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} = \frac{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Такая форма записи позволяет легко записать амплитудный и фазовый спектры:

$$|F(\omega)| = 2 \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \right| \quad \text{и} \quad \psi(\omega) = \frac{\omega\tau}{2}.$$

4.4 Примеры нахождения спектральных характеристик непериодических сигналов

Рассмотрим важные для практики примеры нахождения спектральной плотности и спектральных характеристик непериодических сигналов.

Пример 4.3 Единичная функция $\eta(t)$ изображается графиком, как показано на рисунке 4.1.

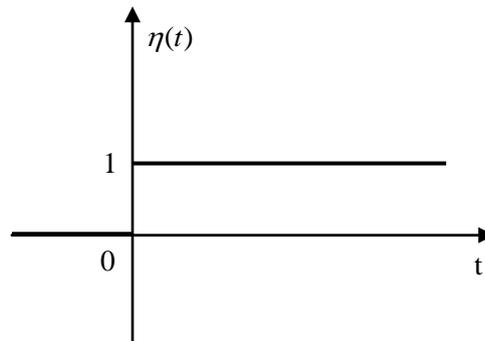


Рис. 4.1. Единичная функция

Единичная функция $\eta(t)$ определяется следующим образом:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Если попытаться вычислить спектральную плотность единичной функции $\eta(t)$ «напрямую», возникает затруднение, связанное с тем, что эта функция не является абсолютно интегрируемой.

В этом случае умножают заданную функцию на затухающую экспоненту $e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Вычислив спектральную плотность функции $\eta(t)e^{-\alpha t}$, искомую спектральную плотность находят предельным переходом при $\alpha \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-\alpha \tau} \cdot e^{-j\omega \tau} d\tau = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)\tau} d\tau = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-1}{(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{j\omega}. \end{aligned}$$

Пример 4.4 Прямоугольный импульс

Сигнал, определяемый выражением:
$$S(t) = \begin{cases} h, & |t| \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2}, \end{cases}$$

находит широкое распространение как в технике, так и в теории сигналов и цепей. Прямоугольный импульс высотой h , длительностью τ изображен на рисунке 4.2.

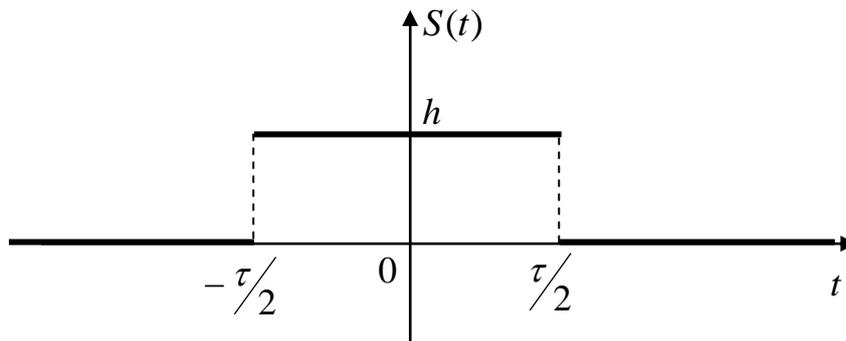
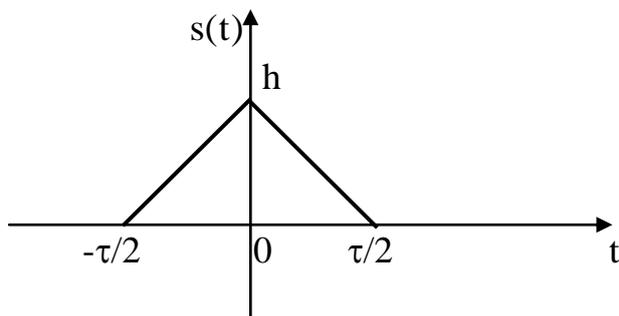


Рис. 4.2. Прямоугольный импульс высотой h

Применяя формулу (4.5), находим спектральную плотность этого импульса.

$$F(\omega) = h \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{h}{j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right) = \frac{2h}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = h\tau \left[\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right].$$

Пример 4.5. Треугольный импульс



$$S(t) = \begin{cases} h \left(1 + \frac{t}{\tau/2} \right), & -\tau/2 \leq t \leq 0, \\ h \left(1 - \frac{t}{\tau/2} \right), & 0 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & t > \tau/2, t < -\tau/2. \end{cases}$$

Рис. 4.3. Треугольный импульс $S(t)$

График функции представлен на рисунке 4.3.

Решение. Вычисляем спектральную плотность $F(\omega)$.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^0 h \left(1 + \frac{t}{\tau/2} \right) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\tau/2} h \left(1 - \frac{t}{\tau/2} \right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= h \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\tau/2}^0 + \frac{2h}{\tau} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2} (-j\omega t - 1) \Big|_{-\tau/2}^0 + h \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_0^{\tau/2} - \\ &\quad - \frac{2h}{\tau} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2} (-j\omega t - 1) \Big|_0^{\tau/2} = \dots = \frac{h\tau}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \right)^2. \end{aligned}$$

График спектральной плотности изображен на рисунке 4.4.

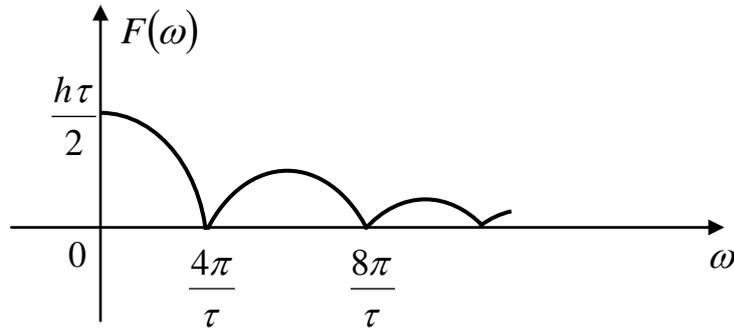


Рис. 4.4. График спектральной плотности $F(\omega)$

Пример 4.6. Колоколообразный импульс

Колоколообразный импульс задается функцией $S(t) = A \cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$, $-\infty < t < \infty$. Этот импульс совпадает по форме с графиком нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей и называется также **гауссовским импульсом**. Колоколообразный импульс и его спектральная плотность изображены на рисунке 4.5.

Будем находить спектральную плотность данного импульса. По формуле (4.5) имеем

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

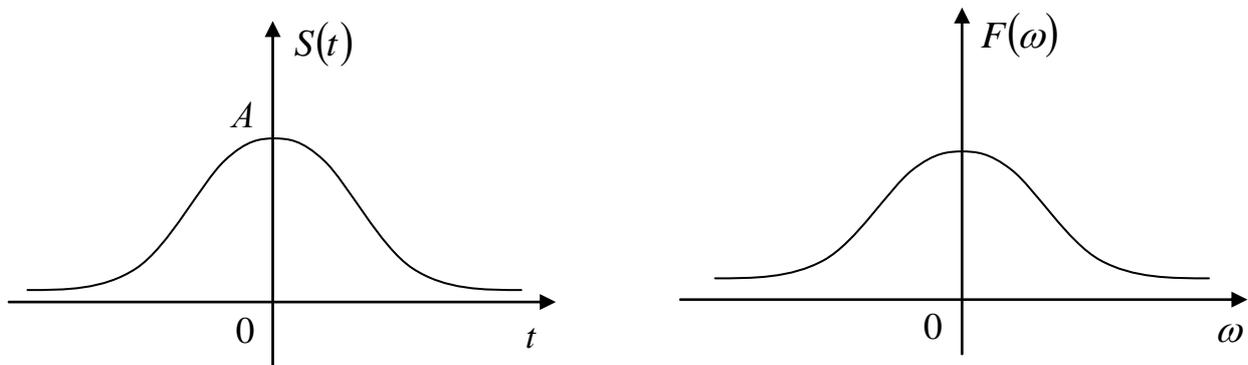


Рис. 4.5. Колоколообразный импульс и его спектральная плотность

Для вычисления интеграла удобно в подынтегральной функции дополнить показатель степени до квадрата суммы

$$-\left(\frac{t^2}{2a^2} + j\omega t\right) = -\left[\left(\frac{t^2}{2a^2} + j\omega t + d^2\right) - d^2\right] = -\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}a} + d\right)^2 - d^2\right],$$

где величина d определяется из условия

$$j\omega t = 2 \frac{t}{\sqrt{2}a} \cdot d, \text{ то есть } d = \frac{j\omega a}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, выражение для $F(\omega)$ приводится к виду

$$F(\omega) = A e^{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2a}} + d\right)^2} dt.$$

Перейдем к новой переменной $x = \frac{t}{\sqrt{2a}} + d$, получим

$$F(\omega) = A e^{d^2} \sqrt{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, то окончательно

$$F(\omega) = A \sqrt{2\pi} a e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}} = B e^{-\frac{\omega^2}{2b^2}}, \text{ где } b = \frac{1}{a}, \quad B = \sqrt{2\pi} a A.$$

Полученный результат имеет важное значение для теории сигналов. Оказывается, что гауссовский импульс и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: для получения одной из них по заданной другой достаточно совершить замену t на ω и наоборот.

Пример 4.7. Волновой цуг

Так называют функцию, определяемую равенством:

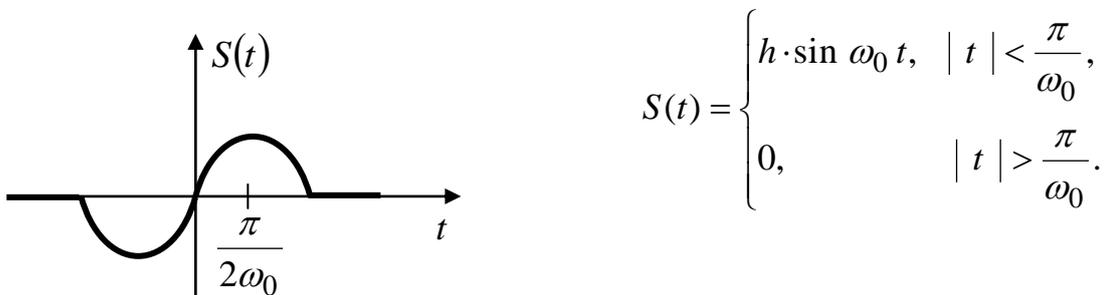


Рис. 4.6. Волновой цуг

График функции представлен на рисунке 4.6. Рассматриваемый сигнал играет в теории связи большую роль. Определим его спектральную плотность.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= h \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = h \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2 + \omega_0^2} \left[-j\omega \cdot \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t \right] \Big|_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} = \\ &= \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2} \left\{ e^{-\frac{j\omega\pi}{\omega_0}} \cdot \omega_0 - e^{\frac{j\omega\pi}{\omega_0}} \cdot \omega_0 \right\} = \frac{-2h\omega_0 j}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0} = \frac{2h\omega_0 j}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудкевич, Е.А. Функции комплексного переменного и операционное исчисление (методы решения задач): Учебное пособие / Е.А. Рудкевич. – Тула: Издательство Тульского гос.университета, 2004.

Режим доступа: <http://window.edu.ru/resource/380/53380>

2. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. – М.: Высшая школа, 2001. – 128 с.

3. Чудесенко, В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики / В.Ф. Чудесенко. - М.: Высшая школа, 1999

4. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для вузов. / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – СПб: Лань, 2005. – 736 с.

5. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: АСТ, 2001. – 656 с.

6. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 504 с.

7. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ: Учеб. Для техникумов.- М.: Высш. Школа, 1990.- 416 с.:ил.

8. Шипачёв В.С. Высшая математика. учеб. Для вузов.- 4-е изд.-М.: Высш. Школа, 1998.- 497 с.

9. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике: Учеб. Пособие.- М.: Высш. школа, 1994.-192 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Панкова

СПЕЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ
направления подготовки

13.03.03 Электроэнергетика и электротехника

15.03.05 Автоматизация технологических процессов и производств

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 25.10.2017 г. Формат 60x84 ¹/₁₆.

Бумага офсетная. Усл. п. л. 3,72. Тираж 50 экз. Изд. № 5406.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ