

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ГРУНТОВИЧ Надежда Владимировна  
ГРУНТОВИЧ Николай Васильевич

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

**Часть I**

Брянск 2015 г.

УДК 681.5(07)

ББК 32.965

Г 90

Грунтович, Н.В. **Теория автоматических систем управления:** учебное пособие для бакалавров направлений подготовки 13.04.02 – Электроэнергетика и электротехника, 15.03.02 – Автоматизация технологических процессов и производств. / Над. Вл. Грунтович, Ник. Вас. Грунтович. – Брянск: Издательство Брянский ГАУ, 2015. - 190 с.

Рассмотрены принципы построения САР, их математические модели. Даются понятия типовых звеньев, исследуются критерии устойчивости и коррекция САР. Анализируются особенности нелинейных САР и методы оценки их устойчивости.

ISBN 978-5-88517-231-8

Рецензенты:

заведующий кафедрой СЭ, профессор Маркарянц Л.М.

доктор технических наук, доцент кафедры механики ФГБОУ ВПО БГИТА Кисель Ю.Е.

*Рекомендовано решением учебно-методической комиссией факультета энергетики и природопользования от 2 марта 2015 года протокол № 2.*

ISBN 978-5-88517-231-8

© Брянский ГАУ, 2015

© Грунтович Надежда Владимировна, 2015

© Грунтович Николай Васильевич, 2015

## Содержание

Введение	5
<i>Глава 1. Основные понятия и определения в теории автоматического регулирования и управления</i>	7
1.1. Основные понятия и определения	7
1.2. Принципы регулирования	12
1.2.1. Разомкнутое регулирование	12
1.2.2. Регулирование по отклонению. Принцип обратной связи	13
1.2.3. Регулирование по возмущению. Принцип компенсации	16
1.2.4. Комбинированные САР	19
1.3. Состав системы автоматического регулирования. Функции элементов системы	22
1.4. Классификация систем автоматического регулирования	24
1.4.1. Системы автоматической стабилизации	24
1.4.2. Следящие системы	26
1.4.3. Системы программного регулирования	30
1.4.4. Классификация САР по числу регулируемых параметров	30
1.4.5. Классификация САР по характеру зависимости между входной и выходной величинами	30
1.4.6. Классификация САР по характеру зависимости регулируемых параметров от внешних воздействий	31
1.5. Математическое описание процессов регулирования	33
1.5.1. Понятие о математическом описании процессов регулирования	33
1.5.2. Нормализованная форма записи дифференциальных уравнений	36
1.5.3. Примеры уравнений элементов	39
1.5.4. Линейные уравнения элементов в относительных переменных	57
1.5.5. Операторная форма записи дифференциальных уравнений	59
1.5.6. Линеаризация дифференциальных уравнений	66
1.5.7. Понятие о передаточной Функции	77
<i>Глава 2. Основные характеристики звеньев САР</i>	80
2.1. Понятие типового звена	80
2.2. Уравнения типовых звеньев. Классификация звеньев	81
2.3. Передаточные функции типовых звеньев	83
2.4. Характеристики типовых звеньев	84
2.4.1. Временные и частотные характеристики. Общие положения	84
2.4.2. Пропорциональное (безынерционное) звено	91
2.4.3. Аperiodическое звено первого порядка	93
2.4.4. Аperiodическое звено второго порядка	97
2.4.5. Интегрирующее звено	105
2.4.6. Дифференцирующее звено	109

2.4.7. Логарифмические частотные характеристики. Общие положения	112
2.4.8. Логарифмические частотные характеристики типовых звеньев	116
<i>Глава 3. Основные характеристики систем автоматического управления</i>	<i>131</i>
3.1. Понятие о структурной схеме	131
3.2. Представление уравнений элементов элементарными структурами типовых звеньев	132
3.3. Составление структурной схемы САР	137
3.4. Передаточные функции простейших соединений звеньев	140
3.5. Передаточные функции одноконтурной замкнутой САР	144
3.6. Передаточная функция многоконтурной САР с непересекающимися связями	147
3.7. Передаточная функция многоконтурной САР с пересекающимися связями	149
3.8. Передаточная функция разомкнутой системы	153
3.9. Передаточные функции ошибок. Статические ошибки системы	156
3.10. Составление дифференциальных уравнений САР по их передаточным функциям	164
3.11. Частотные характеристики САР	170
3.12. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой цепи последовательно соединенных звеньев	172
3.13. Логарифмические частотные характеристики замкнутых цепей звеньев	176
3.13.1. ЛЧХ замкнутой цепи звеньев с единичной обратной связью	176
3.13.2. Номограмма замыкания	178
3.13.3. ЛЧХ замкнутых цепей звеньев с неединичными обратными связями	181
3.13.4. ЛЧХ параллельных цепей звеньев	185
Литература	188

## ВВЕДЕНИЕ

Автоматическое управление разнообразными техническими объектами и технологическими процессами, то есть управление ими при помощи специальных автоматических устройств без непосредственного участия человека, все более широко внедряется во все области промышленности. Без преувеличения можно сказать, что автоматизация - одно из самых прогрессивных направлений в общем развитии науки и техники нашего времени.

Повышающиеся требования к качеству процессов делают ручное управление ими недостаточными в отношении точности, быстродействия, эффективности и надежности, так как оно связано с ограниченной скоростью реакций человека, его утомляемостью и субъективными ошибками. Кроме того, существуют такие быстропротекающие процессы, ручное управление которыми не представляется возможным, например: управление ядерными реакторами, выведение на нужную орбиту космических ракет, управление технологическими процессами на химических, нефтеперерабатывающих, газоперерабатывающих предприятиях. Автоматическое управление является более точным, быстродействующим и эффективным по сравнению с ручным управлением, поэтому тенденция его повсеместного внедрения, глубоко оправдана. Автоматизация в промышленности означает дальнейший рост производительности труда.

Характерной особенностью современного этапа развития науки, промышленности, сельского хозяйства и военного дела является широкое применение автоматизированных систем управления, робототехнических систем.

Современная автоматизированная система состоит из большого количества вычислительных машин, соединенных в один могучий комплекс управления, в котором координирующее действие и контроль осуществляет человек.

Комплексная автоматизация означает объединение всех систем управления в единую систему, решающую задачи централизованного сбора и обработки информации о состоянии и готовности технических средств, выработки рекомендаций по оптимизации технологического процесса.

При всем разнообразии систем автоматического управления и регулирования построение их основано на некоторых общих принципах, а действия подчинены определенным общим законам. Изучение этих принципов и закономерностей является первым шагом в овладении техникой автоматических систем.

Теория автоматического управления и регулирования является в настоящее время самостоятельной учебной дисциплиной, изучаемой с разной степенью подробности во всех технических вузах. Эта теория стала в ряд важнейших технических наук общего применения. Она дает основную теоретическую базу для исследования, проектирования и эксплуатации любых автоматических систем во всех областях техники, военного дела и народного хозяйства.

Система автоматического управления может быть нелинейна в результате нелинейности дифференциальных уравнений, которыми описывается один или несколько элементов системы. В последнем случае нелинейности проявляются в динамических режимах работы, хотя для установившихся режимов связь между входными и выходными сигналами линейна. Один из путей исследования САУ заключается в линеаризации дифференциальных уравнений, которыми они описываются. Однако не всегда линеаризация осуществима, так как описываемые линейными уравнениями модели зачастую не сохраняют основных свойств нелинейных оригиналов. Вследствие этого результаты теоретического исследования САУ, полученные с использованием методов линейной теории автоматического управления, приводят к существенным расхождениям с результатами, полученными на практике. Рассматриваемые в учебном пособии элементы теории нелинейных систем исключают вышеуказанные недостатки, присущие линейной теории. Большой вклад в разработку нелинейной теории автоматического управления внесли видные советские ученые А.А. Андронов, Б.В. Булгаков, Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, Е.П. Попов и др.

# Глава I

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ В ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

### *1.1. Основные понятия и определения*

Любой процесс, протекающий в каком-либо устройстве, характеризуется одним или несколькими показателями, представляющими собой различные физические, химические и другие величины, такие как напряжение, давление, температура, скорость поступательного движения или вращения, частота, уровень жидкости, мощность и т.п.

В процессе регулирования эти величины должны либо изменяться по какому-либо наперед заданному закону, либо поддерживаться неизменными, независимо от изменения внешних условий.

**Объектом регулирования** называется устройство, в котором протекает процесс, подлежащий регулированию.

Имея в виду те или иные технологические процессы, под объектом регулирования следует понимать различные технические устройства, например, двигатели, генераторы, паровые или газовые турбины, вспомогательные механизмы, атомные реакторы, парогенераторы, а в отдельных случаях - и всю энергетическую установку или ее составляющие.

**Регулируемой величиной** (параметром) - называется выходная величина объекта регулирования, поддержание которой в заданных пределах является целью регулирования.

**Регулирующий орган** - устройство, предназначенное для непосредственного воздействия на объект регулирования обычно путем изменения либо количества, либо качества подводимой к объекту регулируемой среды.

Рассмотрим в качестве объекта регулирования паровую турбину (рис. 1.1).

Здесь регулируемым параметром будет угловая скорость вращения ротора турбины  $\Omega$ ; регулирующим органом - клапан подачи пара в турбину.

**Процессом регулирования** будем называть совокупность мероприятий, направленных на поддержание равенства регулируемых величин (параметров) их заданным значениям.

**Регулятором** будем называть устройство, предназначенное для регулирования параметров объекта.

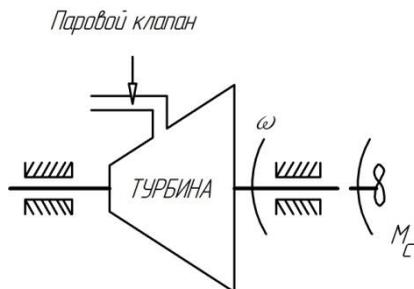


Рис. 1.1

Величины, вызывающие отклонение регулируемого параметра от заданного значения и нарушающие состояние равновесия объекта, мы назвали **воздействиями**.

**Регулирующее воздействие** - это воздействие, приложенное к объекту регулирования в целях компенсации отклонения регулируемого параметра от заданного значения.

Выработка и реализация регулирующих воздействий осуществляется регулятором.

Если выработка и реализация регулирующего воздействия осуществляется при непосредственном участии человека, то в это называется **ручным** регулированием.

Если выработка и реализация регулирующего воздействия осуществляется без непосредственного участия человека, а с помощью специальных технических средств, то такое регулирование называется **автоматическим**.

Каждый объект регулирования характеризуется физическими величинами, одни из которых можно рассматривать как входные, а другие - как выходные.

В отличие от прочих элементов автоматики объект регулирования имеет обычно не одну, а две входные величины, одна из которых является изменением притока вещества, или энергии к объекту  $q(t)$ , а другая - соответствующим изменением их расхода  $f(t)$ .

Выходной величиной объекта ( $x$ ) является регулируемый параметр. С учетом сказанного объект регулирования может быть условно представлен схемой рис. 1.2.

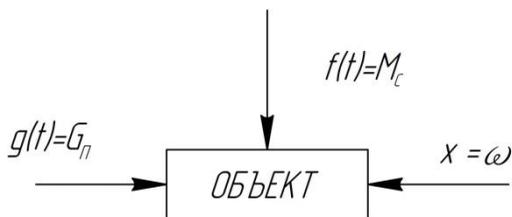


Рис. 1.2

При равенстве обеих входных величин устанавливается состояние равновесия. При этом значение регулируемого параметра остается постоянным, то есть  $q(t) = f(t) \rightarrow x = const$ . Это исключительно важное положение, которое необходимо выделить особо.

Нарушение состояния равновесия объекта, сопровождающееся отклонением регулируемого параметра от заданного значения, происходит в результате нарушения равенства между входными величинами, то есть между притоком и расходом энергии, при условии, что отсутствуют дефекты в регуляторе и объекте.

Регулирующее воздействие прикладывается к объекту со стороны регулятора  $q(t)$ . Воздействие, прикладываемое к объекту регулирования извне и характеризующее расход энергии, называется внешним **возмущающим воздействием**  $f(t)$ .

Следует отметить, что для многих объектов, регулируемые параметрами которых являются скорость вращения или напряжение, основным возмущающим воздействием является изменение нагрузки.

Пример объекта регулирования - **резервуар с жидкостью**, который является аналогом многих элементов тепловых электростанций: конденсаторов, сепараторов, тепловых ящиков и др. (рис. 1.3).

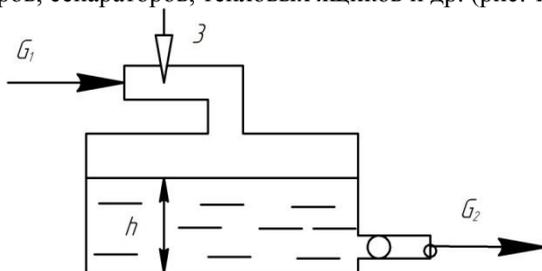


Рис. 1.3

Регулируемый параметр - уровень воды в резервуаре  $h$  - выходная величина.

Входные величины (воздействия):  $G_1 = q(t)$  - приток жидкости, определяемый положением заслонки 3;  $G_2 = f(t)$  - расход жидкости, определяемый производительностью насоса.

На схеме объект регулирования может быть показан как на рис. 1.4.

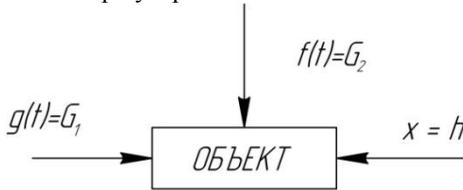


Рис. 1.4

Объект регулирования находится в состоянии равновесия при равенстве входных воздействий. При нарушении этого равенства равновесие прекращается и требуется регулирование.

Схема объекта регулирования - паровой турбины, показанной на рис. 1.1, будет иметь такой вид:

$G_{II}$  - расход пара на турбину;

$M_c$  - момент сопротивления на валу ротора турбины.

В этом случае для состояния равновесия  $q(t) = mf(t) \rightarrow x = const$ , где  $m$  - коэффициент пропорциональности, обеспечивающий соответствие размерностей при различных по физической величине входных воздействиях.

**Системой автоматического регулирования (САР)** называется совокупность автоматического регулятора и объекта регулирования в их взаимодействии.

На рис.1.5. показана схема системы автоматического регулирования с обозначением входных и выходных величин:

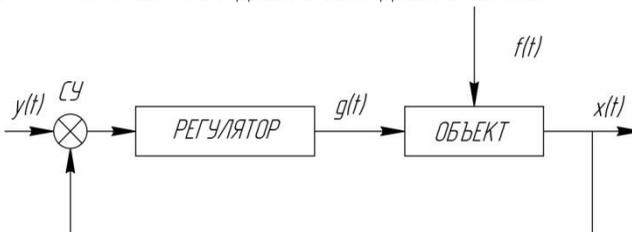


Рис. 1.5

$x(t)$  - выходная величина (регулируемый параметр);

$q(t)$  - входная величина (регулирующее воздействие);

$f(t)$  - входная величина (возмущающее воздействие), то есть

изменение внешних воздействий, приложенных к системе, вызывающее отклонение регулируемого параметра от заданного значения;

$y(t)$  - задающее воздействие, то есть воздействие, приложенное к САП и определявшее заданное значение регулируемого параметра.

Необходимо отметить, что регулирование является частным случаем управления.

**Управление** - более широкое (общее) понятие. Если задачей регулирования является поддержание постоянства или изменения по заданному закону регулируемой величины, то управление предполагает совокупность мер, направленных на обеспечение оптимального функционирования объекта в соответствии с целями управления.

При управлении заданное значение регулируемой величины изменяется в процессе работы.

Применительно к схеме, показанной на рис. 1.5.

**Управлять объектом** - это значит вырабатывать регулирующее воздействие  $q(t)$  таким образом, чтобы регулируемый параметр  $x(t)$  изменялся в установленных пределах или по требуемому закону, с определенной точностью, независимо от действия на объект возмущающего воздействия  $f(t)$ .

Изменение координат в нормальном требуемом ходе процесса определяется совокупностью правил-предписаний или математических зависимостей, называемой **алгоритмом функционирования системы**.

Алгоритм функционирования составляется на основании технологических требований без учета динамических характеристик. В теории автоматического регулирования алгоритм функционирования считают заданным.

Алгоритм управления будет зависеть как от алгоритма функционирования, так и от динамических свойств системы.

Так как в настоящее время в литературе отсутствуют конкретные содержания указанных алгоритмов, то условимся различать их по следующим признакам.

Алгоритм функционирования системы показывает порядок изменения регулируемой величины и задавшего воздействия, поступающего на вход регулятора.

Алгоритм управления характеризует алгоритм функционирования системы и закон изменения регулирующего воздействия, который вырабатывается в регуляторе в зависимости от принципа регулирования.

## 1.2. Принципы регулирования

Зная статические и динамические свойства системы регулирования, можно построить математическую модель системы и найти такой алгоритм управления, который обеспечивает заданный алгоритм функционирования при известных управляющих воздействиях. Так как возмущающие воздействия могут изменяться не известным заранее образом, то и при найденном алгоритме управления фактическое поведение системы будет отличаться от желаемого.

Чтобы приблизить поведение к требуемому, алгоритм функционирования управления нужно увязать с фактическим функционированием системы.

В основе построения систем автоматического регулирования лежат некоторые общие фундаментальные принципы, определяющие, каким образом изменяется регулирующее воздействие, вырабатываемое в автоматическом регуляторе. В настоящее время в технике известны и используются три фундаментальных принципа: разомкнутого регулирования, обратной связи и компенсации.

### 1.2.1. Разомкнутое регулирование

Сущность этого принципа состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется другими факторами: возмущениями или регулируемыми величинами.

Упрощенная схема регулирования по разомкнутому принципу представлена на рис. 1.6:

ЗУ - задающее устройство;

УУ - управляющее устройство.

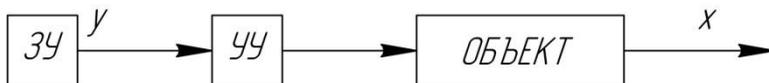


Рис. 1.6

Элементы, представляемые разомкнутой цепью, входят в состав любой системы, поэтому принцип представляется настолько простым, что его не всегда выделяют. К разомкнутым САР отнесется большинство систем контроля и автоматической защиты: автоматы включения и выключения освещения, пуска и остановки двигателей, аварийная защита реактора и т.п.

### 1.2.2. Регулирование по отклонению. Принцип обратной связи

Этот принцип получил распространение и положен в основу большинства существующих автоматизированных систем. Организуется он на основе информации об отклонении регулируемой величины от ее заданного значения. В зависимости от величины и знака отклонения вырабатывается регулирующее воздействие.

Существенным преимуществом систем автоматического регулирования, работающих по принципу отклонения, является отсутствие избирательности по отношению к возмущению. В этом случае система проста по конструкции, так как в ней достаточно иметь лишь один измерительный элемент, однако имеет неизбежную ошибку регулирования в переходном процессе.

Примером САР, построенной по этому принципу, является система регулирования скорости вращения двигателя, показанная на рис. 1.7:

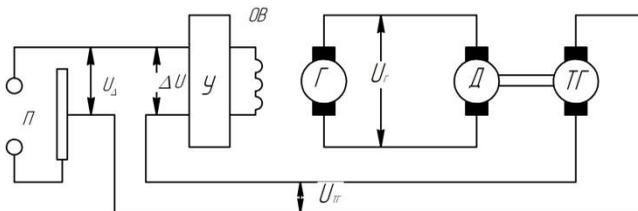


Рис. 1.7

П - потенциометр, используемый в качестве устройства, вырабатывающего задающее воздействие;

У - усилитель;

Г - генератор;

ОВ - обмотка возбуждения генератора;

Д - электродвигатель;

ТГ - тахогенератор.

Принцип регулирования в данном случае заключается в следующем. Скорость вращения электродвигателя задается путем установки потенциометра в определенное фиксированное положение, которому соответствует напряжение  $U_0$ . Напряжение  $U_{ТГ}$ , вырабатываемое тахогенератором, соединенным с валом электродвигателя, соответствует фактической скорости вращения последнего. В случае отклонения фактической скорости вращения электродвигателя от заданной изменяется величина напряжения  $U_{ТГ}$ , вырабатываемого тахогенератором, что приводит к рассогласованию по напряжению  $\Delta U = U_0 - U_{ТГ}$ .

В результате изменяется магнитный поток в обмотке возбуждения генератора, напряжение  $U_{Г}$ , а следовательно и скорость вращения электродвигателя.

Процесс регулирования будет продолжаться до тех пор, пока фактическая скорость вращения электродвигателя не станет равной заданной. В этом случае сигнал рассогласования между фактической и заданной скоростями отсутствует, то есть  $\Delta U = U_0 - U_{ТГ} = 0$ .

Следовательно, для осуществления регулирования по отклонению необходимы:

- информация о заданном и фактическом значениях регулируемой величины;
- сравнение заданного и фактического значений регулируемой величины и выработка на основании величины и знака рассогласования решения на регулирование;
- реализация выработанного решения;
- определение результатов регулирования.

Таким образом, система автоматического регулирования представляет собой совокупность объекта регулирования и присоединенных к нему приборов и устройств, образующих регулятор и осуществляющих регулирование процесса и положения объекта.

Упрощенная схема регулирования представлена на рис. 1.5. СУ - сравнивающее устройство, в котором осуществляется сравнение заданного и фактических значений регулируемой величины (обычно сравнивающее устройство входит в состав элементов регулятора).

Связь выхода со входом, осуществляемая с помощью сравнивающего устройства, называется **главной обратной связью**.

Принцип обратной связи состоит в том, что фактическое значение выходной величины подается на вход системы для сравнения с заданным значением и формирования регулирующего воздействия. Это важнейший принцип кибернетики - науки об управлении в природе и технике.

Для математической записи закона регулирования изобразим на рис. 1.8 введенные ранее обозначения.

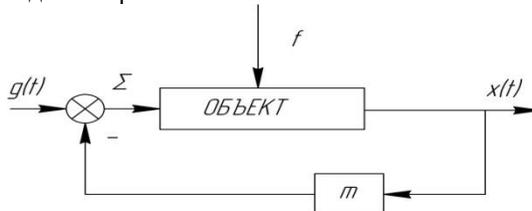


Рис. 1.8

Закон регулирования по отклонению  $\Sigma = q(t) - mx(t)$ .

В заключение рассмотрим основные особенности принципа регулирования по отклонению.

Первой особенностью САР, использующих принцип регулирования по отклонению, является их замкнутость, которая обеспечивается главной обратной связью.

Вторая особенность - детекторное свойство элементов, входящих в систему, то есть сигналы передаются только в одном направлении, от предыдущего элемента к последующему.

Третьей особенностью является то, что принцип регулирования по отклонению позволяет ограничиться измерением отклонения регулируемой величины от заданного значения, независимо от разнообразных возмущений, действием которых это отклонение вызвано.

Можно привести ряд примеров применения автоматических систем регулирования по отклонению расхода пара. На рис. 1.9 приведена схема автоматического регулятора расхода питательной воды.

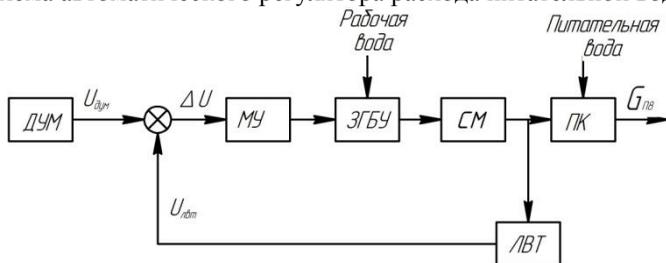


Рис. 1.9

Задающее устройство - датчик уровня мощности (ДУМ), измерительное устройство - линейный вращающийся трансформатор (ЛВТ), сравнивающее устройство, выполненное на магнитном усилителе, электрогидравлический блок усиления (ЭГБУ), сервомотор (СМ), регулирующий орган - питательный клапан (ПК).

Шток сервомотора соединен с валом ЛВТ.

Регулятор работает следующим образом. Сигнал датчика уровня мощности сравнивается с сигналом обратной связи в магнитном усилителе:  $\Delta U = U_{ДУМ} - U_{ЛВТ}$ .

В зависимости от полярности сигнала рассогласования струйное реле ЭГБУ будет отклоняться вправо или влево. При этом рабочая вода всегда будет подаваться в верхнюю или нижнюю полость СМ.

Если рабочая вода подается в нижнюю полость сервомотора,

то последний будет открывать питательный клапан. Расход питательной воды через клапан будет увеличиваться. Поршень сервомотора будет перемещаться вверх до тех пор, пока сигнал  $\Delta U$  не станет равным нулю.

Принцип обратной связи широко распространен не только в технике, но и в процессах управления, осуществляемых в живых организмах (системы регуляции различных функций - температуры, ритма кровообращения и др.). В управлении общественными организациями этот принцип реализуется в виде проверки исполнения принятых решений и распоряжений, выполнявших роль управляющих воздействий.

### 1.2.3. Регулирование по возмущению. Принцип компенсации

Сущность данного, принципа состоит в том, что из нескольких возмущений, действующих на объект, выбирается одно - главное - и определяется, как оно влияет на регулируемую величину. Регулирующее воздействие, прикладываемое к объекту со стороны исполнительного органа, зависит от возмущения так, что изменения регулируемой величины не выходят за заданные пределы.

Достоинством систем, построенных по принципу возмущения, является их быстрая реакция на возмущение. Причина, вызывающая нарушение состояния равновесия системы, фиксируется с помощью безынерционных цепей мгновенно, тогда как в системах по отклонению эта фиксация идет, как правило, через инерционный объект и регулятор.

Примером САР, построенной по принципу регулирования по возмущению, может служить регулирование мощности атомного реактора по параметрам контура рабочего тела.

На рис. 1.10 показан один из возможных вариантов САР мощности реактора по расходу пара в корабельной паротурбинной установке (ПТУ):

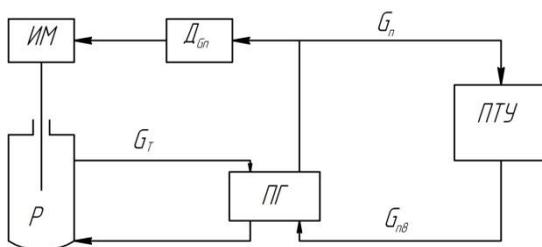


Рис. 1.10

$P$  - реактор;  
 $ПГ$  - парогенератор;  
 $G_T$  - расход теплоносителя;  
 $G_{II}$  - расход пара;  
 $G_{ПВ}$  - расход питательной воды;  
 $D_{G_{II}}$  - датчик расхода пара;  
 $ИМ$  - исполнительный механизм.

В данном случае расход пара на главную турбину выбран в качестве основного возмущения. При изменении скорости хода корабля и, следовательно, режима работы паротурбинной установки (ПТУ) меняется расход пара. Изменение расхода пара регистрируется датчиком расхода, сигнал от которого поступает в органы управления мощностью реактора. В результате изменения мощности реактора режим работы паропроизводящей установки (реактор - парогенератор) меняется таким образом, чтобы обеспечить требуемое количество пара для работы ПТУ, реализующей заданную скорость хода корабля.

Необходимо подчеркнуть, что системы регулирования по возмущению являются разомкнутыми, так как отсутствует связь выхода системы с ее входом, то есть главная обратная связь. Это значит, что в системах, построенных по этому принципу, не производится сравнение фактического значения регулируемой величины с заданным.

В соответствии со схемой, представленной на рис. 1.11, можно записать закон регулирования по возмущению

$$\Sigma = q(t) + lf(t),$$

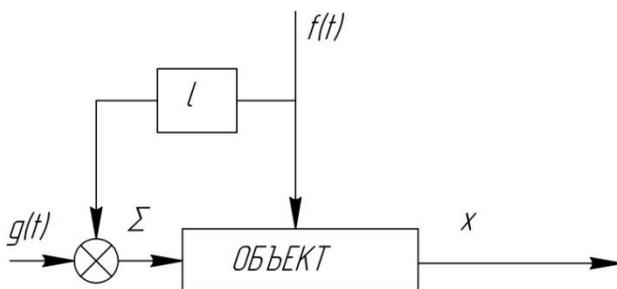


Рис. 1.11

где  $l$  - коэффициент пропорциональности.

Еще одним примером систем компенсации может служить схема компаундирования генератора постоянного тока, обеспечивающая неизменность напряжения при колебаниях тока нагрузки, являющегося возмущением (рис. 1.12).

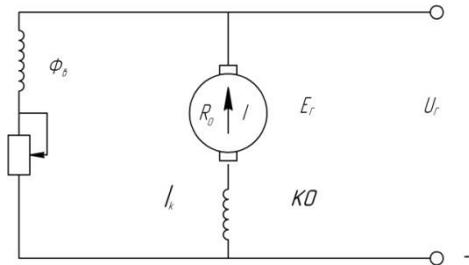


Рис. 1.12

Если ЭДС генератора  $E_g = k\Phi_b$  где  $k$  - коэффициент пропорциональности, линейно зависит от его потока возбуждения  $\Phi_b$ , а уменьшение напряжения вызвано только активным сопротивлением якоря, то есть пропорционально току нагрузки, то для поддержания постоянства заданного напряжения  $U_g$  надо изменить ЭДС генератора в функции тока нагрузки по закону  $E_g = IR_a + U_g$ . Такое изменение осуществляется с помощью дополнительной компаундной обмотки (КО), по которой проходит ток  $I_k$ , равный или пропорциональный току якоря  $I$ .

Следует подчеркнуть, что компенсация достигается только по измеряемым возмущениям. Так, в приведенном примере не компенсируются возможные колебания температуры, скорости приводного двигателя и ряд других факторов, вследствие чего ошибку нельзя свести к нулю даже при предельном компаундировании.

Системы, построенные по принципу регулирования по возмущению, сравнительно просты, устойчивы в работе, но не способны реагировать на другие возмущения, вызывающие изменения регулируемой величины. При построениях подобных систем регулирования для нескольких сразу возмущающих воздействий (что характерно для реальных условий эксплуатации) САР получается громоздкой. Так, например, для того, чтобы САР, построенная по принципу возмущения, смогла реагировать на действие нескольких равнозначных возмущений, необходимо увеличить количество измерительных элементов,

то есть существенно усложнить систему. Однако появление непредвиденного возмущения, даже незначительной величины, может обесценить сложную конструкцию, поскольку система не выполнит своих задач. Последнее обстоятельство заставляет использовать принцип комбинированного регулирования. При этом принципе наряду с контурами или связями по возмущению в системе обязательно выделяется контур по отклонению и система полностью учитывает появление непредвиденного возмущения и помех.

#### **1.2.4. Комбинированные САР**

**Комбинированные системы** - это системы, в которых одновременно используются принцип управления по отклонению и по возмущению, иначе говоря, осуществляется управление по замкнутому и разомкнутому циклам. Комбинированные регуляторы объединяют достоинства обоих принципов: быстроту реакции на изменение возмущений и точное регулирование, независимо от того, какая причина вызвала отклонение.

На рис. 1.13 приведена схема регулирования напряжения синхронного генератора. Возмущением для синхронного генератора является ток нагрузки  $I_H$ .

Регулируемая величина данной системы - напряжение на зажимах синхронного генератора  $U_r$ .  $U_0$  - напряжение начального возбуждения, которое подается от другого источника, например от аккумуляторной батареи. При достижении номинального  $U_r$  отключается  $U_0$ .

Система имеет три канала регулирования.

Один канал по возмущению (по току нагрузки): токовая обмотка трансформатора компаундирования  $TФК_I$ ; вторичная обмотка трансформатора  $TФК_{II}$ .

Два канала по отклонению (по напряжению). Первый канал: дроссель линейный  $D_{II}$ , обмотка напряжения трансформатора  $TФК_U$ . Второй канал: блок коррекции напряжения БКН, усилитель МУ, дроссель отбора  $D_0$ .

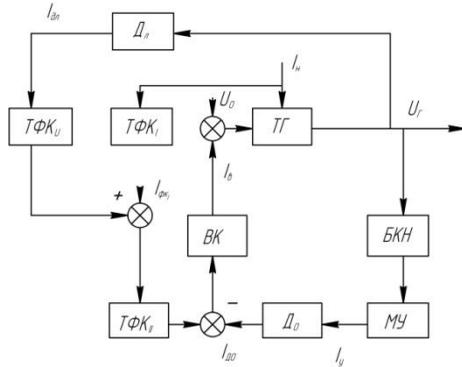


Рис. 1.13

Выпрямитель кремниевый (ВК) является общим для всех трех каналов.

Система работает следующим образом. Когда обороты турбогенератора достигнут номинального значения, включается  $U_0$  и напряжение на зажимах синхронного генератора  $U_r$  увеличивается до номинального. После этого  $U_0$  отключается и генератор работает на самовозбуждении.

Каналы по напряжению (по отклонению) настраиваются таким образом, чтобы ток возбуждения  $I_b$  в режиме холостого хода создавал номинальное напряжение  $U_r$ . При увеличении нагрузки  $I_n$  увеличивается значение тока  $I_{ТФК_I}$ , а следовательно, увеличится ток возбуждения  $I_b$ . Если увеличение нагрузки уменьшает величину напряжения  $U_r$ , тогда изменяется сигнал в каналах по отклонению. Уменьшается  $I_{Д_д}$  по сравнению с  $I_n$  он имеет значительно меньшую величину. С уменьшением  $U_r$  уменьшаются  $I_y$  и рабочий ток  $I_{Д_г}$ . Это приводит к дополнительному увеличению тока возбуждения, и напряжение генератора  $U_r$  принимает прежнее значение.

Интересное решение комбинированного принципа осуществлено в системе регулирования теплообмена в энергетической установке, показанной на рис. 1.14. Выходными параметрами системы являются давление пара  $P_{II}$  и температура пара  $T_{II}$ .

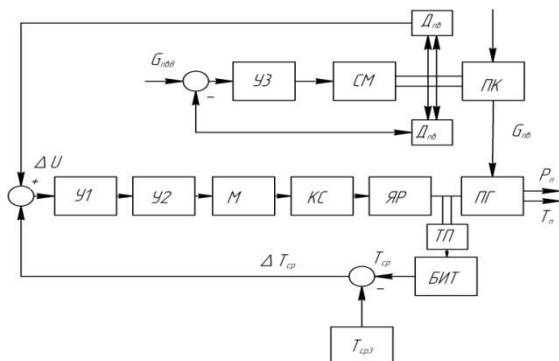


Рис. 1.14

Канал по отклонению выполнен для регулирования температуры теплоносителя, которая измеряется термомпарой ТП. Внешним возмущающим воздействием для системы будет расход питательной воды  $G_{п.в}$ , который определяется положением питательного клапана ПК при помощи датчика  $D_{п.в}$ . Следует отметить, что реактор как источник тепла и объект регулирования обладает внутренней отрицательной обратной связью за счет отрицательного температурного эффекта реактивности, рисунке эта внутренняя обратная связь не показана.

Значение расхода питательной воды задается сигналом  $G_{п.в3}$ .

Согласно этому сигналу сервомотор перемещает шток питательного клапана и от датчика положения клапана  $D_{п.в}$  поступает на вход усилителя У1 регулятора средней температуры теплоносителя и по обратной связи на вход У3 регулятора расхода питательной воды. Такую совместную работу регуляторов называют связным регулированием.

При изменении расхода питательной воды  $G_{п.в}$  изменяется средняя температура теплоносителя. Если средняя температура уменьшается, то за счет отрицательного температурного эффекта мощность реактора увеличивается. При значительной ошибке  $\Delta T_{сп}$  в регуляторе вырабатывается сигнал на перемещение компенсирующих стержней (КС) до возвращения средней температуры теплоносителя к заданному значению. Таким образом, внутренняя обратная связь в реакторе (температурный эффект), канал по отклонению (регулирование  $T_{сп}$ ), канал по возмущению (сигнал расхода  $G_{п.в}$ ) обеспечивают поддержание параметров пара в заданных пределах.

В некоторых случаях для исключения больших колебаний регулируемого параметра, устранения скоростной ошибки системы применяют схему соединения регуляторов, которая приведена на рис. 1.15. Сигнал  $G_{п.в3}$  поступает одновременно на регулятор расхода питательной воды и регулятор средней температуры теплоносителя или нейтронной мощности реактора.

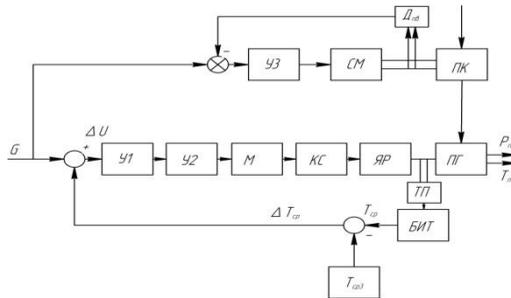


Рис. 1.15

Применительно к рассмотренным примерам в общем случае закон регулирования можно записать следующим образом:

$$\Sigma = q(t) + lf(t) - mx(t).$$

Необходимо указать, что рассмотренные принципы регулирования обычно усложняются в системах за счет введения производных или интегралов от отклонения регулируемых величин или же от возмущения. Системы при этом становятся более сложными, но вместе с тем более чувствительными к возмущениям и точными при работе в различных режимах.

### 1.3. Состав системы автоматического регулирования.

#### Функции элементов системы

Ранее было установлено, что САР представляет собой совокупность объекта регулирования и присоединенных к нему приборов и устройств, образующих регулятор и осуществляющих регулирование процесса и положения объекта.

Регулятор состоит из следующих функциональных элементов:

- задающего устройства (ЗУ);
- измерительного устройства (ИЗУ);

- сравнивающего устройства (СУ);
- усилителя (У);
- исполнительного механизма (ИМ);
- регулирующего органа (РО).

Кроме того, в случае необходимости могут быть предусмотрены различные стабилизирующие и корректирующие устройства.

Перечисленные функциональные элементы на схемах обычно изображаются условно с указанием входных и выходных величин.

Изображение САР, представленное функциональными элементами и связями между ними, называется *функциональной схемой*.

Рассмотрим состав САР и функции основных ее элементов на примере наиболее распространенной функциональной схемы САР, реализующей принцип регулирования по отклонению (рис. 1.16).

Задающее устройство предназначено для введения информации о заданном значении регулируемой величины, которая может быть сформирована в виде электрических или механических сигналов. В качестве задающих устройств могут применяться потенциометры, реостаты, сельсины.

Измерительное устройство предназначено для измерения текущего значения регулируемой величины. Часто его функции выполняет датчик - устройство, предназначенное, для измерения и преобразования регулируемой величины в величину другой физической природы, более удобную для использования в системе. В качестве измерительных элементов могут использоваться дифференциальные манометры, сельсины, термометры сопротивления, тахометры, ионизационные устройства и т.п.

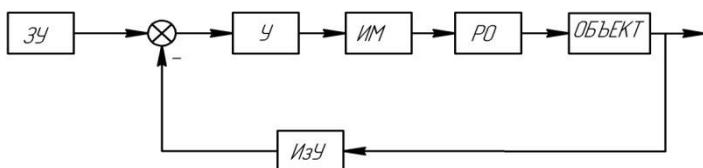


Рис. 1.16

Сравнивающее устройство предназначено для сравнения заданного; и фактического значений регулируемой величины. Выходная величина СУ - это отклонение регулируемой величины от заданного, ее значения.

Сравнение реализуется путем специально соединенных сельсинов на магнитных усилителях при помощи множества обмоток управления и на делителях напряжения.

Усилительное устройство предназначено главным образом для изменения величины потока вспомогательной энергии, поступающей к последующему элементу, в соответствии с величиной сигнала, поданного на вход от задающего или сравнивающего устройства, в зависимости от принятого закона регулирования.

Исполнительный механизм предназначен для создания на выходе регулятора требуемых выходных сигналов (например, моментов, токов, напряжений, мощности и т.п.). Исполнительный механизм является силовым элементом и воздействует или непосредственно на объект, или на его регулирующий орган.

В качестве исполнительных механизмов используют сервомоторы, электродвигатели, аденоиды, шаговые двигатели и т.п.

Регулирующий орган предназначен для непосредственного воздействия на объект регулирования обычно путем изменения либо количества, либо качества подводимой к объекту регулируемой, среды. Во многих случаях регулирующий орган относят непосредственно к объекту регулирования. В качестве регулирующих органов могут применяться дроссельные заслонки, клапаны, реостаты с переменным сопротивлением и т.п.

Стабилизирующее и корректирующее устройства, которые могут применяться в САР, предназначены для создания устойчивого и обладающего требуемым качеством процесса регулирования.

#### ***1.4. Классификация систем автоматического регулирования***

Системы автоматического регулирования очень разнообразны. Они могут отличаться друг от друга по характеру решаемых задач, функциональным схемам, конструктивному исполнению и т.д. Несмотря на это, можно выделить определенные разновидности систем с характерными для них признаками, которые положены в основу классификации САР.

В первую очередь выделим системы, основанные на наиболее распространенном принципе регулирования - по отклонению.

В зависимости от характера выполняемых функций САР, устроенные по принципу регулирования по отклонению, подразделяются на:

- системы автоматической стабилизации;
- следящие системы;
- системы программного регулирования.

##### ***1.4.1. Системы автоматической стабилизации***

Системой автоматической стабилизации называется система, поддерживающая постоянное значение регулируемой величины заданной точностью.

В этом случае основным возмущением, вызывающим нарушение равновесного состояния системы, является возмущающее воздействие, приложенное к объекту регулирования.

В качестве примера системы автоматической стабилизации рассмотрим систему регулирования скорости вращения паровой турбины, показанную на рис. 1.17. Основной задачей данной системы является поддержание постоянного значения угловой скорости вращения вала турбины при изменении возмущающих воздействий.

В состав системы входят следующие функциональные элементы:  
- объект регулирования - паровая турбина (Т);

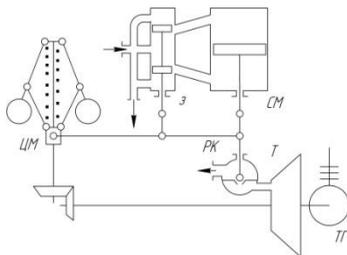


Рис. 1.17

- измерительное устройство - центробежный маятник (ЦМ), грузы и муфта которого реагируют на изменение угловой скорости ротора турбины;

- задающее устройство в виде пружины, стягивающей грузы к оси вращения маятника;

- усилительное устройство - гидравлический усилитель с управляющим золотником (З);

- исполнительный механизм - сервомотор (СМ);

- регулирующий орган - клапан, изменяющий расход пара на турбину (РК).

Сравнивающее устройство в данном случае заключается в центробежном маятнике, на муфте которого происходит сравнение центробежных сил инерции грузов, стремящихся поднять муфту, с усилием задающей пружины, стремящейся опустить муфту.

Равенство этих сил, приведенных к муфте, соответствует равенству заданной и фактической угловых скоростей. Возмущающим воздействием для данной системы будет изменение момента сил сопротивления, приложенных к валу турбины. Это воздействие обуславливается изменением нагрузки на гребной винт или генератор тока, соединенный с валом турбины. Любое отклонение угловой скорости от

заданной приводит к неравенству сил, приведенных к муфте, в результате чего муфта перемещается из положения равновесия, воздействуя через рычаг на управляющий золотник, сервомотор и регулирующий клапан. Изменяются расход пара на турбину и угловая скорость вращения. Процесс регулирования будет длиться до тех пор, пока скорость вращения паровой турбины не станет равной заданной.

Необходимо подчеркнуть, что управляющее воздействие формируется в зависимости от рассогласования фактического и заданного значений регулируемой величины, то есть за счет обратной связи в системе. Все рассмотренные ранее примеры САР относятся к системам стабилизации.

#### ***1.4.2. Следящие системы***

Следящей называется система, на выходе которой воспроизводится входная величина или ее функция, изменяющаяся по произвольному закону. В этом случае основным возмущением является задающее воздействие. Возмущающее воздействие отсутствует или им пренебрегают.

На рис. 1.18 приведена функциональная схема следящей системы, на выходе которой воспроизводится входная величина - угловое перемещение, то есть и входная, и выходная величины имеют одинаковую физическую природу и могут отличаться только по своему значению (количественно). Такая схема может быть положена в основу реализации систем регулирования углов поворота различных объектов (например, баллер руля, антенна радиолокационной станции, артиллерийская установка и т.д.).

На приведенной схеме - измеритель угла рассогласования двух осей (ИУР), состоящий из датчика СД и приемника СП, У - усилитель, ЭД - исполнительный электродвигатель, Р - редуктор,  $\alpha$  и  $\beta$  - углы поворота, задающей (входной) и исполнительной (выходной) осей, обычно удаленных друг от друга на значительное расстояние.

При рассогласовании углов поворота задающей и исполнительной осей ИУР вырабатывает входной сигнал

$$U_{\text{вых}} = U_m \sin(\alpha - \beta),$$

который усиливается по величине и мощности усилителем У и подается на вход исполнительного электродвигателя ЭД.

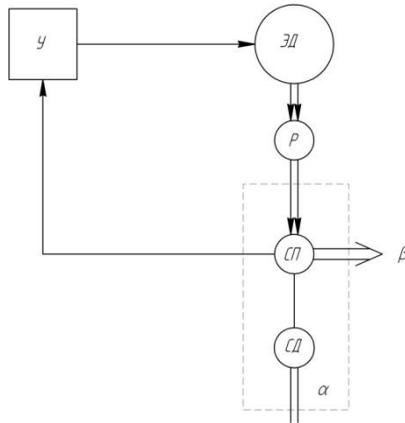


Рис. 1.18

Двигатель начинает вращаться и через редуктор поворачивает исполнительную ось до ее полного согласования с командной осью, то есть до установления равенства  $\alpha = \beta$ . В качестве датчиков и приемников используются СКВТ - синусно-косинусные вращающиеся трансформаторы, линейные вращающиеся трансформаторы и сельсины.

Следящая система для измерения температуры контролируемой среды, на выходе которой воспроизводится функция входной величины, приведена на рис. 1.19.

Схема состоит из равновесного моста, в который включены постоянные сопротивления (резисторы)  $R_1, R_2, R_3$ , термосопротивление и реохорд  $r_1$  и  $r_2$ . Термосопротивление  $R_0$  устанавливается в условиях контролируемой среды и включено в одно из плеч моста. К питающей диагонали моста подведено сетевое напряжение  $U$ , измерительная диагональ моста, имеющая один подвижный контакт на реохорде, включена на вход усилителя  $У$ .

В состав схемы входит также реверсивный конденсаторный двигатель  $РД$ , вал которого через редуктор  $Р$  связан с движком реохорда.

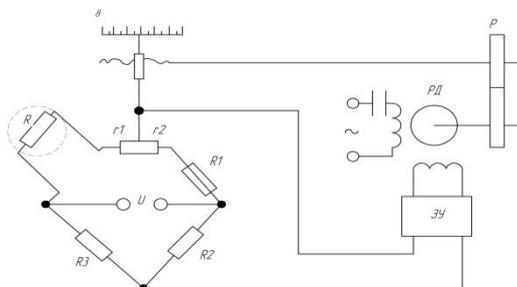


Рис. 1.19

Движок реохорда, в свою очередь, связан с указательной стрелкой, которая может перемещаться под шкалой, проградуированной в °С.

При некоторой температуре контролируемой среды  $\theta$  термосопротивление имеет определенное значение  $R_\theta$  и при данном положении движка реохорда выполняется условие равновесия моста: равенство произведений сопротивлений противоположных плеч, то есть

$$(R_\theta + r_1)R_2 = (R_1 + r_2)R_3.$$

В этом случае напряжение небаланса на измерительной диагонали равно нулю. Система находится в равновесии. Указательная стрелка показывает температуру  $\theta$ .

При изменении температуры термосопротивление изменяется, условие равновесия при прежнем положении движка не выполняется. Возникает напряжение небаланса  $\Delta U$ , которое усиливается и подается на обмотку управления двигателя, двигатель начинает вращаться и через редуктор  $P$  перемещает движок в сторону установления равновесия при новом значении  $R_\theta = R'_\theta$ . При этом

$$(R'_\theta + r'_1)R_2 = (R_1 + r'_2)R_3.$$

Одновременно с движком переместится стрелка над шкалой и при новом равновесии будет показывать измененное значение температуры  $\theta$ .

Необходимо обратить внимание на то, что следящие системы

в зависимости от режима их работы могут выполнять функции систем стабилизации. В частности, этим свойством обладают все системы регулирования судовых и корабельных автоматических систем.

На рис. 1.20 показана функциональная схема САР мощности атомного реактора:

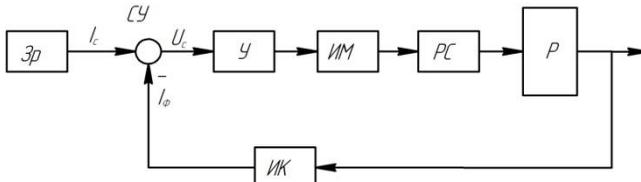


Рис. 1.20

У - усилитель;

ЗР - задатчик режимов;

ИМ - исполнительный механизм;

РС - регулирующие стержни;

Р - реактор;

ИК - ионизационная камера, выполняющая функции измерительного устройства.

При поддержании заданного постоянного уровня мощности САР работает в режиме стабилизации. В этом случае, если фактическая мощность реактора  $I_{\phi}$  (сигнал, пропорциональный фактической мощности, вырабатывается ионизационной камерой) соответствует заданной  $I_0$  (сигнал, пропорциональный заданной мощности, вырабатывается задатчиком режимов), - сигнал рассогласования между ними, вырабатываемый сравнивающим устройством, отсутствует:  $U_c = k(I_0 - I_{\phi}) = 0$ . Если фактическая мощность реактора по каким-либо обстоятельствам отклонится от заданной на СУ, появится сигнал рассогласования  $U_c$ , который после усиления приведет в действие исполнительный механизм, перемещающий регулирующие стержни в активной зоне реактора. Действие будет продолжаться до тех пор, пока фактическая мощность реактора станет равной заданной.

При необходимости перевести реактор на новый заданный уровень мощности оператор будет воздействовать на задатчик режимов. САР будет работать описанным выше порядком, пока не выведет реактор на новый уровень мощности, то есть  $I_{\phi} = I_0$ . Очевидно, что при этом САР будет работать в режиме следящей системы.

### ***1.4.3. Системы программного регулирования***

Системой программного регулирования называется система, обеспечивающая изменение регулируемой величины по заранее заданной программе. Система программного регулирования может быть получена из системы стабилизации, если в последней непрерывно вводить в регулятор задающее воздействие, изменяющееся по определенному закону.

Так, например, если в системе регулирования скорости паровой турбины, показанной на рис. 1.17, дополнительно ввести устройство, позволяющее изменять силу сжатия пружины по определенной программе, то регулируемая величина (угловая скорость вращения вала турбины) будет изменяться во времени также по определенной программе. В этом случае получим систему программного регулирования. То же можно оказать и о следящей системе, если ввести в ее состав соответствующий датчик программы.

Программное регулирование широко используется в станках с программным управлением и в ядерной энергетике (программный пуск, программный разогрев реактора и т.п.).

### ***1.4.4. Классификация САР по числу регулируемых параметров***

По числу регулируемых параметров САР подразделяются на одномерные и многомерные.

К одномерным САР относятся все системы, предназначенные для регулирования одного параметра, например, системы регулирования уровня воды в емкости, угловой скорости вращения различных двигателей, напряжения генератора и т.п.

К многомерным САР относятся системы, предназначенные для объектов с несколькими регулируемыми параметрами, например, подводной лодки, движущейся в пространстве, атомной энергетической установки, атомного реактора и т.п.

### ***1.4.5. Классификация САР по характеру зависимости между входной и выходной величинами***

В этом направлении САР подразделяются на непрерывные и дискретные.

К непрерывным относятся САР, у которых плавным изменениям входной величины соответствуют плавные изменения выходной. Такие системы состоят из элементов с непрерывными статическими характеристиками.

У дискретных САР при непрерывном измерении отклонения регулируемой величины от заданного значения регулирующее воздей-

стве вырабатывается регулятором периодически, через определенные промежутки времени, или при достижении установленного отклонения регулируемой величины от заданного значения.

Дискретные САР делятся на релейные и импульсные.

#### 1.4.6. Классификация САР по характеру зависимости регулируемых параметров от внешних воздействий

Система регулирования называется статической, если регулируемая величина (параметр) при различных установившихся значениях внешних воздействий каждый раз принимает новое установившееся значение.

Система регулирования называется астатической, если в установившемся режиме отсутствует отклонение регулируемых параметров от их заданных значений при любых возмущающих воздействиях.

На рис. 1.21 показано изменение выходной величины САР при переводе к новому установившемуся значению  $X_0$  :

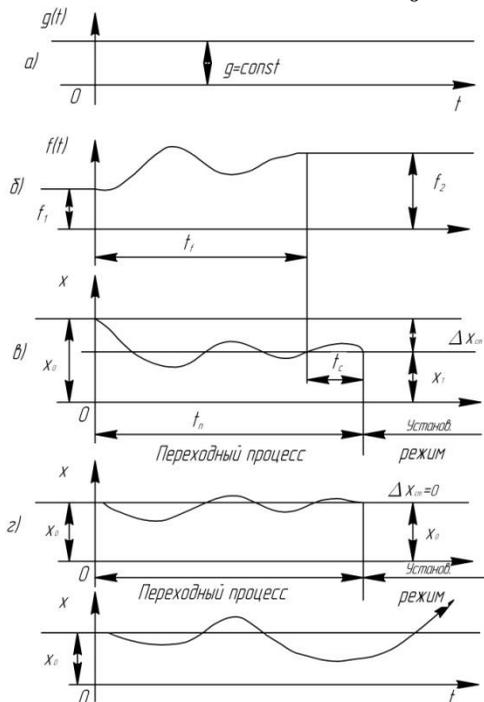


Рис. 1.21

в) - статическая САР; г) - астатическая САР

Адаптивные системы (от лат. *Adaptio* - приспособление) - термин заимствован из биологии, адаптацией называют приспособление организма к изменяющейся среде с целью сохранения жизнедеятельности.

По этой причине в литературе можно встречать термины "приспосабливающиеся" или "самоприспосабливающиеся" системы.

В теории управления понятие адаптации умышленно сужено: к ней относят виды приспособления, которые осуществляются путем изменения управляющим устройством алгоритмов, параметров или структуры системы по данным анализа ее работы.

Адаптивные системы с изменением значения параметров иногда называют самонастраивающимися, системы с изменением алгоритма управления - самообучающимися, а системы с изменением структуры управления - самоорганизующимися.

Обычно адаптивные системы содержат в качестве "ядра" схему, реализующую один из фундаментальных принципов регулирования, а контур адаптации пристраивают к ней как вторичный осуществляющий коррекцию параметров.

К адаптивным системам можно отнести также оптимальные и экстремальные системы.

Оптимальная система (от лат. *Optimus* - наилучший) - система, для которой выбранный определенным образом критерий (редко несколько критериев) принимает оптимальное значение. Такими критериями могут быть например, быстродействие, точность либо обобщенный критерий, представляющие собой функцию от нескольких величин.

Оптимальные системы управления появились в связи со стремлением повысить до возможных пределов быстродействие и точность САУ. С их помощью существенно повышают маневренность кораблей, самолетов, ракет, улучшают управление поточным производством, режимом работы различных печей и котельных установок.

Экстремальные системы - системы, осуществляющие автоматический поиск и поддержание наиболее выгодного значения регулируемой величины с целью достижения экстремума (минимума или максимума) какой-либо характеристики объекта.

Такой характеристикой может быть, например, КПД или расход горючего в энергетической установке на одну милю.

Массовое внедрение вычислительных машин и роботов в отрасли народного хозяйства, в системы управления, в процессы проектирования и конструирования новых технических систем выдвинули в 80-е годы на первый план исследования по новому типу систем - систем искусственного интеллекта. Под ним понимается реализация по-

следних достижений информатики и возможностей вычислительной техники, а также программного обеспечения по имитации мыслительных процессов человеческого мозга.

Показателем развития работ в области искусственного интеллекта служит рост затрат и ассигнований: в 1985 году эта сумма для США, Западной Европы и Японии составила 350 млн. долларов. XXI век – это эра нанотехнологий и робототехнических систем.

К 1990 г. она, по прогнозам, достигнет 19 млрд., из них 12 млрд. долларов будет приходиться на США, долларов - на Японию.

Необходимо еще раз подчеркнуть разнообразие САР и достаточную сложность их классификации. Нами очень кратко рассмотрены наиболее характерные признаки, по которым можно классифицировать САР. В дальнейшем отдельные из названных видов будут рассмотрены более подробно. Кроме того, по мере необходимости могут дополняться вводиться некоторые признаки по которым можно классифицировать САР. Так, например, в следующей главе использована классификация САР дифференциальных уравнений, которыми они описаны.

## ***1.5. Математическое описание процессов регулирования***

### ***1.5.1. Понятие о математическом описании процессов регулирования***

При разработке, исследовании или изучении САР в первую очередь стремятся получить ее математическое описание, то есть описание процессов, происходящих в системе, на языке математики.

Математическое описание может быть:

- аналитическим (дифференциальные, интегральные и алгебраические уравнения);
- графическим (графики, структурные и функциональные схемы, графы);
- табличным.

Наиболее удобно для исследований описывать процесс регулирования системой дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения движения элементов САР описывают физические процессы, протекающие в них, вызываемые входными воздействиями. Эти уравнения связывают выходные величины элементов и их производные с входными воздействиями и их производными по времени.

В дополнение к приведенной в первой главе классификации САР следует отметить, что по видам дифференциальных уравнений, описывающих движение САР, различают линейные и нелинейные САР, которые, в свою очередь, подразделяются на системы с постоянными и

переменными коэффициентами, а также системы с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями в частных производных.

Для получения математического описания системы обычно составляют математические описания ее элементов. В частности, для получения уравнения системы составляют уравнения для каждого входящего в нее элемента. Совокупность всех уравнений элементов и дает уравнения системы, ее математическую модель.

Такое название обусловлено тем, что при математическом описании физических процессов всегда делают какие-либо допущения и приближения. Математическая модель одной и той же системы, в зависимости от цели исследования, может быть различной. Более того, иногда полезно при решении одной и той же задачи на разных этапах принимать разные математические модели: начинать исследование с простейшей модели, а затем постепенно ее усложнять, с тем чтобы учесть дополнительные явления и связи, которые на начальном этапе были отброшены как несущественные.

Обычно звенья и системы САР описываются нелинейными дифференциальными уравнениями произвольного порядка.

Для примера рассмотрим функциональный элемент, который можно описать дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}) + f(t) = 0.$$

Уравнения, которые описывают процессы в элементах при произвольных входных воздействиях, называют уравнениями динамики.

При постоянных входных величинах  $y = y^\circ$  и  $f(t) = f^\circ(t)$  процесс в звене с течением времени устанавливается и выходная величина принимает постоянное значение  $x = x^\circ$ :

$$F(x^\circ, 0, 0, y^\circ) + f^\circ(t) = 0.$$

Тогда это уравнение описывает статический или установившийся режим и его называют уравнением статики.

В ТАР различают два режима работы: установившийся и переходный.

**Установившимся** называют такой режим, когда при установившемся значении внешних воздействий регулируемая величина также имеет установившиеся значения.

**Переходным** режимом называется изменение регулируемой

величины при переходе системы из одного состояния другое. Переходный режим заканчивается, когда регулируемая величина достигает установившегося значения, либо вообще не прекращается, то есть регулируемая величина не стремится к установившемуся значению.

Для того, чтобы определить значение регулируемой величины в установившемся и переходном режимах, необходимо решить дифференциальное уравнение движения САР.

В общем случае дифференциальное уравнение движения линейной САР для возмущения  $y(t)$  является неоднородным линейным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, где  $x(t)$  - искомая функция времени:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dy}{dt} + b_m y.$$

Решение этого неоднородного уравнения описывает переходный процесс в системе и имеет вид

$$x(t) = x_o(t) + x_b(t),$$

где  $x_o(t)$  - общее решение однородного уравнения, характеризует свободное движение системы, выведенной из состояния равновесия, и способность системы возвращаться в прежнее положение, то есть переходный процесс с момента прекращения возмущений;

$x_b(t)$  - частное решение данного неоднородного уравнения, характеризует вынужденное движение системы в период времени, пока внешние воздействия изменяются

Проиллюстрируем это графически (см. рис. 1.21). Будем считать, что задающее воздействие остается неизменным,  $q(t) = const$ , возмущающее  $f(t)$  изменяется в течение некоторого промежутка времени  $t_f$  от какого-либо постоянного значения  $f_1$  до другого постоянного значения  $f_2$ .

Пусть до начала изменения возмущающего воздействия регулируемая величина  $X$  имела значение  $x_0$ .

Изменение внешнего воздействия  $f(t)$  вызовет процесс регулирования так, что регулируемая величина будет изменяться не только

в промежутке времени  $t_f$ , пока действует "переменное" возмущение, но и после того, как внешнее воздействие достигнет установившегося значения  $f_2$ .

Начиная с этого момента времени, система будет продолжать движение в силу собственных динамических свойств. Это свободное движение системы с течением времени может быть сходящимся (затухающим), и тогда регулируемая величина будет стремиться к некоторому новому установившемуся значению  $X_1$  или к прежнему первоначальному значению  $x_0$ . Такая система называется *устойчивой*.

Движение системы может быть и расходящимся (незатухающим). В этом случае регулируемая величина не только не будет стремиться к какому-либо постоянному значению, а будет все более отклоняться от заданного значения. Такая система называется *неустойчивой*.

Характер указанных процессов как раз и определяется общим решением однородного дифференциального уравнения.

Понятно, что неустойчивая система не может использоваться для регулирования, так как, получив какое-либо начальное отклонение, регулируемая величина в такой системе не может вернуться к заданному или иному ограниченному значению. Поэтому устойчивость является первым и основным требованием, предъявляемым к САР.

Следует отметить, что для сравнительных" оценок САР представляет интерес и вид переходного процесса, который определяет качество регулирования.

#### ***Формы записи дифференциальных уравнений движения САР***

Как уже было указано, для математического описания САР необходимо иметь уравнения ее элементов. Уравнения элементов составляются на основании тех физических законов, которые определяют принцип действия элемента и процессы, протекающие в нем (законы механики, теплотехники, гидромеханики, электротехники и т.д.). Обычно в теории автоматического регулирования (ТАР) пользуются готовыми уравнениями элементов, приводя их к удобному для исследования виду.

В ТАР принята запись дифференциальных уравнений в нормализованной и операторной форме.

#### ***1.5.2. Нормализованная форма записи дифференциальных уравнений***

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка, записанное в обычной, принятой в математике форме:

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = b_0 \frac{dy}{dt} + b_1 y,$$

где  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  - постоянные коэффициенты;

$x$  - выходная переменная;

$y$  - входная переменная.

Приведем это уравнение к нормализованному виду, для чего разделим левую и правую части на коэффициент при выходной  $a_2$  (при отсутствии такого члена в уравнении - разделим и правую части на коэффициент при младшей производной и выходной величины):

$$\frac{a_0}{a_2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{a_1}{a_2} \frac{dx}{dt} + x = \frac{b_0}{a_2} \frac{dy}{dt} + \frac{b_1}{a_2} y.$$

Для дальнейших преобразований удобно также иметь равным единице коэффициент при входной переменной. Для этого в правой части уравнения вынесем за скобку коэффициент при  $y$

$$\frac{a_0}{a_2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{a_1}{a_2} \frac{dx}{dt} + x = \frac{b_1}{a_2} \left( \frac{b_0}{b_1} \frac{dy}{dt} + y \right).$$

$$\frac{a_0}{a_2} = T_0^2; \quad \frac{a_1}{a_2} = T_1; \quad \frac{b_1}{a_2} = k; \quad \frac{b_0}{b_1} = T,$$

с учетом принятых обозначений получим исходное уравнение в нормализованном виде

$$T_0^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_1 \frac{dx}{dt} + x = k \left( T \frac{dy}{dt} + y \right).$$

Определим смысл коэффициентов  $T$  и  $k$  введенных в результате преобразований.

Предположим, что выходная переменная имеет размерность  $R$ , то есть  $[x] = R$ . Очевидно, что в этом случае размерности производных выходной величины будут

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right] = \frac{R}{C} \text{ и } \left[ \frac{d^2x}{dt^2} \right] = \frac{R}{C^2}.$$

Очевидно, что все члены полученного нормализованного уравнения должны иметь одинаковую размерность, то есть

$$\left[ T_0^2 \frac{d^2x}{dt^2} \right] = R \text{ и } \left[ T_1 \frac{dx}{dt} \right] = R,$$

но тогда

$$\left[ T_0^2 \right] = C^2 \text{ и } \left[ T_1 \right] = C.$$

Следовательно, эти коэффициенты имеют "временной характер" и в ТАР их называют *постоянными времени*.

Если в правой части полученного уравнения входная величина имеет размерность, отличную от выходной, например  $[y] = Z$ , то и в этом случае по аналогии можно записать

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right] = \frac{Z}{C} \text{ и } \left[ T \right] = C.$$

В установившемся режиме входные и выходные величины сохраняют постоянное значение, а их производные  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = 0$ . В этом случае уравнение принимает вид

$$x_0 = ky_0,$$

где  $k = \frac{x_0}{y_0}$  - коэффициент пропорциональности между установившимися значениями входной и выходной величин при их одинаковых размерностях, этот коэффициент называют *коэффициентом усиления*.

При разных размерностях входных и выходных величин  $k$  называют *передаточным коэффициентом*. Выше было сказано, что в

При разных размерностях входных и выходных величин  $k$  называют *передаточным коэффициентом*. Выше было сказано, что в

ТАР обычно пользуются готовыми уравнениями, полученными при изучении конкретных элементов или систем.

Рассмотрим несколько примеров получения таких уравнений.

### **1.5.3. Примеры уравнений элементов**

#### **Уравнение машины-двигателя с вращающимся ротором**

Различные двигатели с вращающимся ротором - электрические, тепловые, гидравлические - в системах автоматического регулирования могут играть роль объектов регулирования или роль исполнительных двигателей.

Блок-схема двигателя, как элемента системы, показана на рис. 1.26.

Выходной величиной двигателя может служить, в зависимости от его функционального назначения, либо угол поворота ротора  $\alpha$ ,

либо угловая скорость  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ . Если двигатель играет роль исполни-

тельного элемента системы и используется перемещения регулирующего органа, то существенным будет я поворота ротора; если же двигатель является объектом регулирования, причем регулируется скорость его вращения, то существенной будет эта угловая скорость.

Входными величинами для двигателя являются:

- возмущение, представляющее собой изменение момента сил сопротивления  $M_c(t)$ , то есть изменение нагрузки;

- изменение  $Z$  положения или состояния устройства, управляющего потоком энергии, подводимой к двигателю, и определяющего величину момента движущих сил.

Величина  $Z$  может представлять собой, например, перемещение клапана, изменяющего количество рабочего вещества, подаваемого в тепловой двигатель, изменение напряжения, питающего электро-двигатель постоянного тока, и т.п.

Таким образом, уравнение машины-двигателя должно связать угловую скорость  $\omega$  (или угол поворота ротора  $\alpha$ ), изменение входной величины  $Z$  и возмущение  $M_c(t)$ , а также производные этих величин.

Уравнением машины-двигателя является дифференциальное уравнение вращательного движения

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c,$$

где  $J$  - момент инерции массы ротора относительно оси его вращения;

$M_d$  - момент движущих сил, приложенных к ротору;

$M_c$  - момент сил сопротивления, действующих на ротор.

Величина момента движущих сил и характер его изменения определяется физическими принципами, на которых основано действие машины, и зависит от положения или состояния  $Z$  устройства, управляющего потоками энергии, подаваемыми в машину, а также от угловой скорости  $M_d = M_d(Z, \omega)$ .

Эта зависимость должна определяться с учетом соответствующих физических законов и может быть задана в графической, табличной или аналитической форме. Как правило, эта функция нелинейна и чаще всего задается графически в виде механической характеристики двигателя (рис. 1.22).

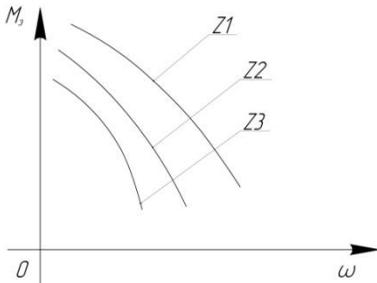


Рис. 1.22

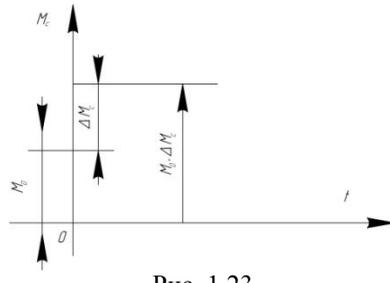


Рис. 1.23

Момент сил сопротивления  $M_c$  можно представить состоящим из составляющей  $M_c(\omega)$ , зависящей от угловой скорости (например, при вентиляторной нагрузке), и составляющей  $M_c(t)$ , зависящей от времени:

$$M_c = M_c(\omega) + M_c(t).$$

Изменение составляющей  $M_c(t)$  и представляет собственно возмущение. Эта составляющая может изменяться самым сложным образом, и чаще всего эти изменения носят случайный характер, то есть зависят от потребителей энергии двигателя. Очевидно, для целей анализа системы регулирования необходимо  $M_c(t)$  задавать так, чтобы эта функция наиболее точно отражала возможные реальные изме-

нения нагрузки во времени. Принято, например, считать, что во многих случаях наиболее тяжелые условия работы системы регулирования возникают при внезапном скачкообразном изменении нагрузки. Поэтому часто полагают

$$M_c(t) = \begin{cases} M_o = \text{const} & \text{при } t < 0; \\ M_o + \Delta M_c & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

где  $\Delta M_c$  и будет скачком нагрузки (рис. 1.23).

Скачкообразное возмущение является одним из нескольких типовых возмущений, принимаемых в теории автоматического регулирования.

Уравнение машины-двигателя после подстановки в него общих выражений для  $M_d$  и  $M_c$  запишется в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d(Z, \omega) - M_c(\omega) - M_c(t),$$

где  $M_d(Z, \omega)$  - заданная функция  $Z$  и  $\omega$ ;

$M_c(\omega)$  - заданная функция;

$M_c(t)$  - случайная функция времени или принятое типовое возмущение, например скачок момента;

$\omega$  - выходная величина двигателя;

$Z$  и  $M_c(t)$  - входные величины.

Если выходной величиной является угол поворота ротора, то уравнение двигателя примет вид

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M_d\left(Z \frac{d\alpha}{dt}\right) - M_c\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - M_c(t).$$

Поскольку функции  $M_d$  и  $M_c(\omega)$  могут быть нелинейными функциями  $Z$  и  $\omega$ , то и уравнение двигателя в общем случае может быть нелинейным.

### Уравнение паровой турбины

Составим дифференциальное уравнение движения паровой турбины, полагая, что момент сил сопротивления  $M_c$  не зависит от угловой скорости ротора, а момент движущих сил можно приближенно выразить в аналитической форме в виде

$$M_d = aZ - b\omega,$$

где  $Z$  - перемещение паровпускного клапана;  
 $a$  и  $b$  - постоянные числа.

Это равенство означает, что механическая характеристика турбины в системе координат  $M_d, \omega$  приближенно представляется семейством параллельных прямых с параметром  $Z$ , каждая из которых имеет угловой коэффициент  $b$  и начальную ординату  $aZ$ , пропорциональную  $Z$  (рис. 1.24).

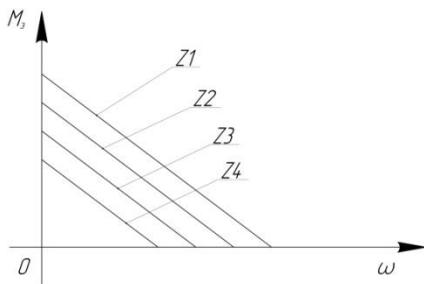


Рис. 1.24

При указанных допущениях уравнение движения турбины будет иметь вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = aZ - b\omega - M_c(t).$$

Записывая выходную величину  $\omega$  и ее производную в левой части уравнения, получим

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega = aZ - M_c(t),$$

или в нормализованной форме

$$\frac{J}{b} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{a}{b} Z - \frac{1}{b} M_c(t),$$

откуда постоянная времени турбины

$$T = \frac{J}{b}$$

а коэффициент усиления (передаточные коэффициенты):

- по открытию клапана

$$k_z = \frac{a}{b};$$

- по моменту нагрузки

$$k_m = \frac{1}{b}.$$

Пользуясь обозначением постоянной времени и коэффициентов усиления, окончательно получим

$$T \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_z Z - k_m M_c(t).$$

Таким образом, движение паровой турбины приближенно описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно угловой скорости. Входными величинами являются  $Z$  - перемещение паровпускного клапана и  $M_c(t)$  - изменение нагрузки.

Если для момента движущих сил принять нелинейную зависимость, например,

$$M_d = aZ^m - b\omega^k \quad (k \neq 1, m \neq 0),$$

то уравнение турбины будет нелинейным:

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega^k = aZ^m - M_c(t).$$

### Уравнение гидравлической емкости

Пусть элементом системы будет гидравлическая емкость - резервуар с жидкостью (рис.1.25, а), в котором должен поддерживаться постоянным уровень жидкости.

Регулируемая величина - выходная переменная элемента - высота уровня жидкости  $H$ , изменяющаяся благодаря изменению расходов  $G_1$  и  $G_2$ .

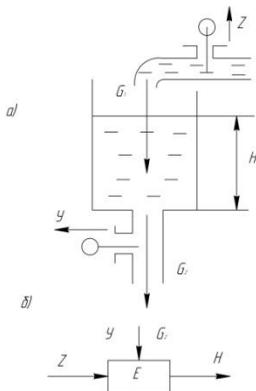


Рис. 1.25

Расходы жидкости  $G_1$  и  $G_2$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) зависят от перемещений  $Z$  и  $y$  соответствующих клапанов; кроме того, расход  $G_2$  зависит от напора. Таким образом,  $G_1 = G_1(Z)$  и  $G_2 = G_2(y, H)$ .

Перемещения клапанов  $Z$  и  $y$  являются входными величинами элемента.

Блок-схема емкости изображена на рис. 1.25, б).

В установившемся режиме  $G_1 = G_2$  и высота уровня жидкости остается неизменной ( $H = \text{const}$ ). При изменении какого-либо из расходов или одновременном изменении их высота уровня изменяется.

Составим уравнение материального баланса емкости.

За малый промежуток времени  $dt$  количество жидкости в резервуаре измениться на  $dG$   $\text{м}^3$ , так как в емкость поступит  $G_1 dt$   $\text{м}^3$  жидкости, а сольется  $G_2 dt$   $\text{м}^3$ , то есть

$$dG = (G_1 - G_2) dt.$$

Но изменение количества жидкости в резервуаре можно представить как произведение площади поперечного сечения резервуара и изменения высоты уровня

$$dG = SdH,$$

поэтому можно записать

$$SdH = (G_1 - G_2)dt,$$

или

$$S \frac{dH}{dt} = G_1 - G_2.$$

Подставив вместо  $G_1$  и  $G_2$  их выражения, получим уравнение емкости

$$S \frac{dH}{dt} = G_1(Z) - G_2(y, H).$$

Предположим, что клапан подачи жидкости имеет такой профиль, что расход  $G_1$  пропорционален  $Z$ :

$$G_1 = aZ.$$

Расход  $G_2$  через сливной клапан пропорционален корню квадратному из напора  $H$  и при соответствующем профиле клапана - перемещению  $y$ :

$$G_2 = by\sqrt{H}.$$

Тогда уравнение емкости запишется в виде

$$S \frac{dH}{dt} = aZ - by\sqrt{H}.$$

Полученное уравнение является нелинейным уравнением, следовательно, емкость представляет собой нелинейный элемент.

### Уравнение электродвигателя постоянного тока

Составим уравнение электродвигателя постоянного тока с независимым постоянным возбуждением, управляемого за счет изменения напряжения  $U$ , подаваемого на якорь (рис. 1.26, а).

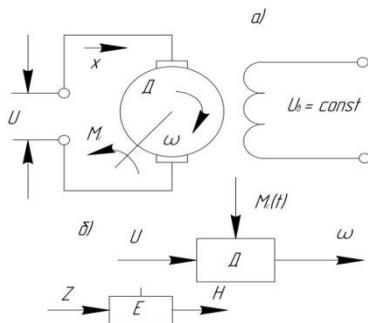


Рис. 1.26

Блок-схема двигателя с обозначением входных и выходных величин, которые должно связать уравнение, изображена на рис. 1.26, б.

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}$$

Момент движущих сил, создаваемый за счет взаимодействия тока в проводниках обмотки якоря с магнитным потоком возбуждения, пропорционален току  $I$  (при постоянном потоке возбуждения):

$$M_{\text{д}} = aI.$$

Так как входной переменной является напряжение  $U$ , приложенное к якору, то для исключения тока  $I$  запишем уравнение цепи якоря

$$U = R_0 I + L_a \frac{dI}{dt} + b\omega,$$

выражающее тот факт, что внешнее напряжение, приложенное к якору, уравновешивается падением напряжения  $R_a I$  на активном сопротивлении якоря, ЭДС самоиндукции  $L \frac{dI}{dt}$  и противоЭДС  $b\omega$ , наво-

димой в обмотке якоря за счет вращения его проводников в магнитном поле и пропорциональной угловой скорости.

Подставим в уравнение вращательного движения сто  $M_d$  его выражение через ток  $I$ :

$$J \frac{d\omega}{dt} = aI - M_c(t)$$

и найдем отсюда  $I$ :

$$I = \frac{J}{a} \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_c}{a}.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{J}{a} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{a} \frac{dM_c}{dt}.$$

Подставим найденные выражения для  $I$  и  $\frac{dI}{dt}$  в уравнение цепи якоря

$$U = \frac{R_a I}{a} \frac{d\omega}{dt} + \frac{R_a}{a} M_c + \frac{L_a J}{a} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{L}{a} \frac{dM_c}{dt} + b\omega.$$

Разделим обе части равенства на  $b$  и запишем все члены, содержащие выходную величину  $\omega$  и ее производные, в левой части уравнения, а члены, содержащие входные величины и их производные - в правой части:

$$\frac{L_a J}{ab} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{ab} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{b} U - \frac{L_a}{ab} \frac{dM_c}{dt} - \frac{R_a}{ab} M_c,$$

умножим и разделим на  $Ra$

$$\frac{R_a J}{ab} \frac{L_a}{R_a} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{ab} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{b} U - \frac{R_a}{ab} \left( \frac{L_a}{R_a} \frac{dM_c}{dt} + M_c \right).$$

Введем обозначения постоянных времени и коэффициентов усиления:

$$T_3 = \frac{L_a}{R_a}; T_m = \frac{R_a J}{ab}; k_U = \frac{1}{b}; k_m = \frac{R_a}{ab},$$

тогда уравнение примет вид

$$T_3 T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_U U - k_m \left( T_3 \frac{dM_c}{dt} + M_c \right).$$

Таким образом, двигатель постоянного тока описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение записано в нормализованной форме.

Постоянная времени  $T_3 = \frac{L_a}{R_a}$  называется электромагнитной постоянной времени, а постоянная  $T_m = \frac{R_a J}{ab}$  называется электромеханической постоянной времени двигателя.

В ряде случаев электромагнитная постоянная времени значительно меньше электромеханической ( $T_3 \ll T_m$ ), тогда ею можно пренебречь и уравнение двигателя брать в виде

$$T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_U U - k_m M_c,$$

то есть пользоваться уравнением первого порядка.

Если выходной величиной двигателя служит угол поворота ротора  $\alpha$ , то порядок уравнений повышается на единицу. Полное уравнение будет иметь вид

$$T_3 T_m \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + T_m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt} = k_U U - k_m \left( T_3 \frac{dM_c}{dt} + M_c \right),$$

а сокращенное

$$T_m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt} = k_U U - k_m M_c.$$

### Уравнение электрической цепи

Электрические цепи, содержащие емкость  $C$ , индуктивность  $L$  и омическое сопротивление  $R$  ( $RLC$ -цепи), находят широкое применение как элементы автоматики. Составим дифференциальное уравнение  $RLC$ -цепи (рис.1.27), приняв за выходную переменную напряжение  $U_2$  на емкости. Входной переменной является напряжение  $U_1$ , питающее цепь.

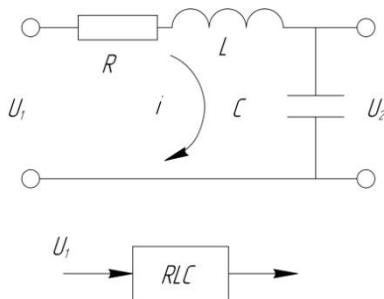


Рис. 1.27

Внешнее напряжение  $U_1$ , приложенное к цепи, уравновешивается падением напряжения  $R_L$  на омическом сопротивлении, электродвижущей силой самоиндукции  $L \frac{di}{dt}$ , возникающей в цепи при изменении тока  $i$ , и напряжением  $U_2$  на конденсаторе

$$U_1 = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + U_2.$$

Исключим из этого уравнения ток  $i$  и его производную. Ток  $i$  равен скорости изменения заряда конденсатора:

$$i = \frac{dq}{dt},$$

где  $q = CU_2$  - заряд конденсатора. Следовательно,

$$i = C \frac{dU_2}{dt}; \frac{di}{dt} = C \frac{d^2U_2}{dt^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение цепи, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающее процесс изменения выходного напряжения  $U_2$  при заданном входном сигнале  $U_1$ :

$$LC \frac{d^2U_2}{dt^2} + RC \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1.$$

Используя обозначения постоянных времени, запишем

$$T_0^2 \frac{d^2U_2}{dt^2} + T_1 \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1,$$

где  $T_0^2 = LC$ ;  $T_1 = RC$ .

При малой индуктивности цепи или полном отсутствии индуктивности ( $L = 0$ ) будем иметь уравнение  $RC$ -цепи уравнение первого порядка

$$T_1 \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1.$$

Наконец, для случая, когда омическое сопротивление значительно больше емкостного  $\frac{1}{c\omega}$ , где  $\omega$  - угловая частота переменного напряжения, величиной  $U_2$  можно пренебречь по сравнению с первым членом левой части, тогда уравнение примет вид

$$T_1 \frac{dU_2}{dt} = U_1.$$

Если в качестве выходной величины принять напряжение на омическом сопротивлении (рис. 1.28), то уравнение цепи будет иметь вид

$$U_1 = L \frac{at}{dt} + U_c + U_2,$$

где  $U_c = \frac{q}{c}$  - напряжение на емкости. Следовательно,

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dq}{dt} = \frac{i}{c}.$$

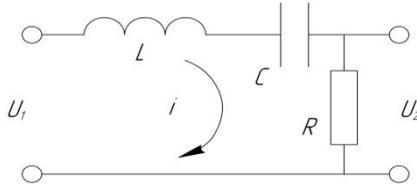


Рис. 1.28

Продифференцируем уравнение цепи по времени и исключим из него производную  $\frac{dU_c}{dt}$ , подставив ее значение  $\frac{i}{c}$ :

$$\frac{dU_1}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{c} + \frac{dU_2}{dt}.$$

Для исключения тока  $i$  и его производной воспользуемся соотношением

$$i = \frac{U_2}{R}; \quad \frac{d^2i}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{d^2U_2}{dt^2},$$

тогда получим

$$\frac{L}{R} \frac{d^2U_2}{dt^2} + \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{RC} U_2 = \frac{dU_1}{dt}.$$

Приведем уравнение к нормализованной форме, умножив обе части на  $RC$ :

$$LC \frac{d^2 U_2}{dt^2} + RC \frac{dU_2}{dt} + U_2 = RC \frac{dU_1}{dt}.$$

После введения постоянных времени  $T_0 = \sqrt{LC}$ ;  $T_1 = RC$  окончательно получим

$$T_0^2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} + T_1 \frac{dU_2}{dt} + U_2 = T_1 \frac{dU_1}{dt}.$$

В такой цепи выходное напряжение зависит не от самой величины входного напряжения, а от скорости ее изменения  $\frac{dU_1}{dt}$ .

При отсутствии индуктивности или малой ее величины можно пользоваться уравнением первого порядка

$$T_1 \frac{dU_2}{dt} + U_2 = T_1 \frac{dU_1}{dt}$$

и, наконец, в случае  $R \ll \frac{1}{c\omega}$  можно пренебречь в левой части первым членом по сравнению со вторым и пользоваться уравнением

$$U_2 = T_1 \frac{dU_1}{dt}.$$

### ***Уравнение гидравлического сервомотора***

Гидравлический двигатель - сервомотор с управляющим золотником или струйной трубкой широко применяется в системах автоматического регулирования, сочетая в себе усилительное и исполнительное устройства.

Схема сервомотора с управляющим золотником показана на рис. 1.29.

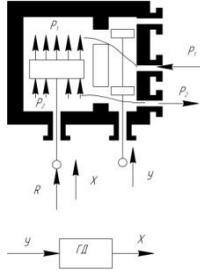


Рис. 1.29

За выходную величину сервомотора примем перемещение  $x$  рабочего поршня, входной величиной будет перемещение  $y$  управляющего золотника из среднего положения.

Пренебрегая гидравлическими потерями, будем считать, что давления  $P_1$  и  $P_2$  в полостях рабочего цилиндра равны соответственно давлениям в напорном и сливном трубопроводах.

Учитывая приложенные к поршню силы: давление жидкости  $P_1 S$  - с одной стороны поршня,  $P_2 S$  - с другой стороны и  $R$  - внешние силы сопротивления, преодолеваемые двигателем, запишем уравнение движения поршня

$$m\ddot{x} = (P_1 - P_2)S - R,$$

где  $m$  - масса поршня и поступательно движущихся с ним частей;

$S$  - рабочая площадь поршня.

Силы сопротивления  $R$  в общем случае могут быть функциями перемещения поршня и его скорости:  $R = R(x, \dot{x})$ .

Составим уравнение сплошности потока жидкости, обозначив через  $f$  величину площади сечения окон, открытых золотникам, сместившимся из среднего положения, когда окна были закрыты, на величину  $y$ , и через  $V$  - скорость жидкости в открытом сечении окна:

$$S\dot{x} = fV$$

Здесь  $S\dot{x}$  - объем полости цилиндра, освобождаемый порш-

нем в единицу времени;  $fV$ - объем жидкости, поступающей в цилиндр через сечение окон в единицу времени.

Скорость жидкости приблизительно пропорциональна корню квадратному из разности давлений:

$$V = a\sqrt{P_1 - P_2},$$

а сечение окон примем пропорциональным перемещению золотника:

$$f = by.$$

Подставив выражения для  $V$  и  $f$  в условие сплошности, получим

$$S\dot{x} = aby\sqrt{P_1 - P_2},$$

откуда

$$P_1 - P_2 = \frac{S^2 \dot{x}^2}{a^2 b^2 y^2}.$$

Исключим из уравнения движения поршня разность давлений:

$$m\ddot{x} = \frac{S^2}{a^2 b^2} \frac{\dot{x}^2}{y^2} - R(x, \dot{x}).$$

Это уравнение, связывающее перемещение поршня  $x$  и его производные с перемещением золотника  $y$ , представляет собой уравнение сервомотора. Уравнение нелинейное, если даже сопротивление  $R = const$  и не зависит от  $x$  и  $\dot{x}$ .

В большинстве случаев возможно пренебречь силой инерции поршня по сравнению с другими силами, приложенными к нему, и полагать

$$m\ddot{x} = 0,$$

тогда уравнение сервомотора упрощается и при  $R = const$  становится линейным.

Действительно, при этих условиях

$$A^2 \dot{x}^2 = y^2 R,$$

где через  $A^2$  обозначена постоянная величина

$$A^2 = \frac{S^3}{a^2 b^2}.$$

Извлекая из обеих частей уравнения корень квадратный, получим

$$A\dot{x} = \sqrt{R}y,$$

или

$$T \frac{dx}{dt} = y,$$

где постоянная времени сервомотора

$$T = \frac{A}{\sqrt{R}}.$$

### ***Уравнение гидравлического катаракта***

Гидравлический катаракт (рис. 1.30, а), применяемый в гидравлических системах автоматики, представляет собой несложное по схеме устройство, состоящее из цилиндра I, заполняемого жидкостью, и поршня 2 со штоком. Полости цилиндра сообщаются между собой через клапан 3. Цилиндр имеет упругую связь с основанием 4, осуществляемую пружиной 5.

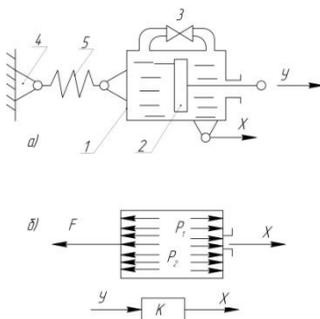


Рис. 1.30

Перемещение поршня  $U$  вызывает перемещение  $X$  цилиндра и соответствующее напряжение пружины с одновременным протеканием жидкости из одной полости цилиндра в другую. При прекращении перемещения поршня натянутая пружина возвращает цилиндр в исходное положение, при этом жидкость продолжает перетекать в прежнем направлении, пока натяжение пружины не исчезнет.

Движение цилиндра происходит под действием натяжения пружины  $F$  и разности давлений жидкости  $P_1$  и  $P_2$ , приложенных к днищам цилиндра (см. рис. 1.30, б).

Уравнение движения цилиндра будет иметь вид

$$m\ddot{x} = (P_1 - P_2)S - F,$$

где  $m$  - масса цилиндра с наполняющей его жидкостью и другими деталями, совершающими поступательное движение совместно с цилиндром;

$S$  - площадь поперечного сечения цилиндра;

$F$  - усилие пружины, пропорциональное перемещению цилиндра,  $F = cx$ ;

$c$  - коэффициент жесткости пружины, кг/см.

Для исключения из уравнения движения разности давлений составим условие сплошности потока жидкости, перетекающей из одной полости в другую, обозначив через  $f$  сечение перепускного клапана и через  $U$  - скорость жидкости в этом сечении. Это уравнение будет иметь вид

$$S(\dot{y} - \dot{x}) = fU,$$

где  $\dot{y} - \dot{x}$  - относительная скорость цилиндра (относительно поршня).

Скорость жидкости  $U$  пропорциональна корню квадратному из разности давлений:

$$U = a\sqrt{P_1 - P_2},$$

тогда

$$S(\dot{y} - \dot{x}) = af\sqrt{P_1 - P_2},$$

откуда

$$P_1 - P_2 = \frac{S^2}{a^2 f^2} (\dot{y} - \dot{x})^2.$$

Подставляя это выражение в уравнение движения цилиндра и заменяя  $F$  на  $c x$ , найдем искомое уравнение катаракта, связывающее величины  $x$  и  $y$  и их производные:

$$m\ddot{x} = \frac{S^3}{a^2 f^2} (\dot{y} - \dot{x})^2 - cx,$$

или

$$\frac{m}{c} \ddot{x} + x = A(\dot{y} - \dot{x})^2,$$

где

$$A = \frac{S^3}{a^2 f^2 c}.$$

Таким образом, движение катаракта описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка.

В большинстве случаев силой инерции цилиндра можно пренебречь, тогда уравнение получает вид

$$x = A(\dot{y} - \dot{x})^2,$$

или

$$\sqrt{A}\dot{x} + \sqrt{x} = \sqrt{A}\dot{y}.$$

Уравнение остается нелинейным, но порядок его понижен на единицу по сравнению с полным уравнением.

#### ***1.5.4. Линейные уравнения элементов в относительных переменных***

Кроме записи уравнений в "полных" координатах, например  $x$ ,  $y$ , или в их абсолютных приращениях,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  имеющих определенные размерности, удобно приводить уравнения к безразмерной форме.

Для этого или сами переменные, или их абсолютные приращения относят к некоторым так называемым базовым значениям  $X_0$ ,

$Y_6$ , имеющим размерности соответствующих переменных. Это означает, что значения переменных величин выражают в долях некоторой постоянной величины той же размерности, принятой за базовую.

Таким образом, для переменных  $\Delta x$  и  $\Delta y$  при базовых значениях  $X_6$  и  $Y_6$  относительными переменными будут

$$x = \frac{\Delta x}{X_6}; y = \frac{\Delta y}{Y_6}.$$

За базовые значения могут быть приняты, в принципе, любые постоянные величины соответствующей размерности, например, максимальные отклонения координат от их установившихся значений, номинальные значения полных координат и т.д.

Очевидно, относительные переменные  $x$  и  $y$  будут величинами безразмерными. Мы будем обозначать их теми же буквами, какими до сих пор обозначали "полные" координаты, так как в линейной теории регулирования приходится иметь дело не с полными координатами, а с их приращениями и, следовательно, можно обойтись без обозначений полных координат.

Иногда относительные переменные обозначают греческими буквами, чтобы отличать абсолютные (размерные) координаты от относительных. Однако особой надобности в этом нет, так как уравнения в относительных координатах инвариантны относительно коэффициентов уравнения, то есть коэффициенты сохраняют те же значения, что и абсолютных (размерных) координатах, а также их приращениях, за исключением значений коэффициентов усиления, которые в безразмерных уравнениях также становятся безразмерными величинами.

Для примера перейдем в уравнении, записанном в абсолютных отклонениях координат

$$T_0^2 \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta x}{dt} + \Delta x = k \left( T \frac{d \Delta y}{dt} + \Delta y \right).$$

к относительным переменным

$$x = \frac{\Delta x}{X_6}; y = \frac{\Delta y}{Y_6}.$$

Очевидно,

$$\Delta x = X_6 x; \quad \frac{d\Delta x}{dt} = X_6 \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = X_6 \frac{d^2 x}{dt^2};$$

$$\Delta y = Y_6 y; \quad \frac{d\Delta y}{dt} = Y_6 \frac{dy}{dt}.$$

Подставляя выражения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  и их производных в исходное уравнение, получим

$$T_0^2 X_6 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_1 X_6 \frac{dx}{dt} + X_6 x = k Y_6 \left( T \frac{dy}{dt} + y \right)$$

и, разделив обе части уравнения на  $X_6$ , найдем

$$T_0^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_1 \frac{dx}{dt} + x = k \frac{Y_6}{X_6} \left( T \frac{dy}{dt} + y \right).$$

В полученном безразмерном уравнении изменился лишь коэффициент усиления. Обозначим его через  $k_0$  и будем называть относительным коэффициентом усиления

$$k_0 = k \frac{Y_6}{X_6}.$$

Нетрудно убедиться, что  $k_0$  - величина безразмерная.

Таким образом, в относительных переменных уравнения элемента имеют ту же форму, что и уравнения в абсолютных координатах или их приращениях:

$$T_0^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_1 \frac{dx}{dt} + x = k_0 \left( T \frac{dy}{dt} + y \right).$$

### **1.5.5. Операторная форма записи дифференциальных уравнений**

Эта форма записи получила наиболее широкое применение в

теории автоматического регулирования. Она основана на преобразовании исходных функций времени  $x(t)$ , называемых оригиналами в функции  $x(s)$  комплексной переменной  $S = \alpha + j\beta$ , называемой изображением функции  $x(t)$ .

Изображение  $x(s)$  функции оригинала  $x(t)$  определяется интегралом Лапласа  $x(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ .

Определение оригиналов функций по их изображениям составляет обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\beta}^{\alpha+j\beta} x(s)e^{ts} ds.$$

Преобразование Лапласа позволяет перейти от дифференциального уравнения, где аргументом является реальное время  $t$ , к алгебраическому уравнению, где аргументом является оператор "S".

При исследовании САР преобразование Лапласа позволяет перейти от связи между регулируемой величиной и внешними воздействиями, выраженной дифференциальными уравнениями, к алгебраической связи между их операторными преобразованиями (изображениями). Таким образом, существенно упрощается решение задач, так как отпадает необходимость интегрирования сложных математических зависимостей.

После решения алгебраического уравнения и определения аналитического выражения для изображения искомой величины совершается обратный переход от изображений к реальным функциям времени - оригиналам.

Для удобства практического применения преобразования Лапласа существуют таблицы оригиналов функций и их изображений, при помощи которых можно, зная оригинал, найти его изображение и, наоборот, по изображению найти оригинал.

Прямое преобразование Лапласа мы будем обозначать знаком  $L$ , так что равенство

$$L[x(t)] = x(s)$$

означает, что  $x(s)$  есть изображение функций  $x(t)$  по Лапласу.

Найдем изображение  $x'(s)$  производной  $\frac{dx(t)}{dt}$  функции  $x(t)$ , если изображение  $x(s)$  самой функции  $x(t)$  известно. Иными словами, необходимо определить  $L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = x'(s)$ , если  $L[x(t)] = x(s)$ .

Согласно определению преобразования Лапласа

$$x'(s) = L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dx(t).$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$x'(s) = x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + S \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

Первое слагаемое после подстановки верхнего и нижнего пределов интегрирования дает

$$x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -x(0),$$

то есть значение функции  $x(t)$  при  $t = 0$ . Второе слагаемое есть изображение  $x(s)$  функции  $x(t)$ , умноженное на  $S$ . Следовательно,

$$x'(s) = sx(s) - x(0),$$

то есть изображение первой производной  $\dot{x}(t)$  функции  $x(t)$  равняется произведению изображения  $x(s)$  самой функции  $x(t)$  на переменную  $S$  минус значение  $x(t)$  при  $t = 0$ .

В частном случае, когда при  $t = 0$   $x = 0$ , то есть  $x(0) = 0$ ,

$$x'(s) = sx(s).$$

Производя прямое преобразование Лапласа над второй производной, получим

$$x''(s) = s^2 x(s) - [sx(0) + \dot{x}(0)],$$

а для изображения производной  $n$ -го порядка найдем

$$x^n(s) = s^n x(s) - [s^{n-1}x(0) + s^{n-2}\dot{x}(0) + \dots + x^{(n-1)}(0)],$$

где  $\dot{x}(0)$ ,  $\ddot{x}(0)$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n-1)}(0)$  - значение соответствующих производных функции  $x(t)$  при  $t = 0$ .

При нулевых значениях  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ ,  $\ddot{x}(0)$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n-1)}(0)$  при  $t = 0$  изображение производных упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} x'(s) &= sx(s); \\ x''(s) &= s^2 x(s); \\ &\dots\dots\dots \\ x^n(s) &= s^n x(s). \end{aligned}$$

Запишем теперь для примера дифференциальное уравнение второго порядка, используя преобразование Лапласа.

В обычной форме записи имеем уравнение

$$T_0^2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} + x = k(T\dot{y} + y).$$

Умножим обе части уравнения на  $e^{-st}$  и проинтегрируем его в пределах от 0 до  $\infty$  по времени  $t$ , то есть осуществим преобразование уравнения по Лапласу:

$$\int_0^{\infty} (T_0^2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} + x) e^{-st} dt = k \int_0^{\infty} (T\dot{y} + y) e^{-st} dt,$$

или

$$T_0^2 \int_0^{\infty} \ddot{x} e^{-st} dt + T_1 \int_0^{\infty} \dot{x} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} x e^{-st} dt = kT \int_0^{\infty} \dot{y} e^{-st} dt + k \int_0^{\infty} y e^{-st} dt.$$

Но каждый из интегралов в последнем выражении есть интеграл Лапласа, преобразующий соответствующие функции времени, стоящие под его знаком, в их изображения, поэтому можно записать

$$T_0^2 x''(s) + T_1 x'(s) + x(s) = kTy'(s) + ky(s).$$

Подставим в это уравнение выражения для изображений производных:

$$T_0^2 \{s^2 x(s) - [sx(0) + \dot{x}(0)]\} + T_1 [sx(s) - x(0) + x(s)] = kT[sy(s) - y(0)] + ky(s).$$

Раскроем скобки и все члены, содержащие начальное условие, перенесем в правую часть:

$$T_0^2 s^2 x(s) + T_1 sx(s) + x(s) = k[TSy(s) + y(s)] + [T_0^2 x(0)s + T_0^2 \dot{x}(0) + T_1 x(0) - kTy(0)].$$

Обозначим полином первой степени относительно  $S$ , стоящий в правой части и содержащий начальные условия, через  $R(S)$ :

$$R(S) = T_0^2 x(0)s + T_0^2 \dot{x}(0) + T_1 x(0) - kTy(0)$$

и, вынося за скобки изображения  $x(s)$  - в левой, а  $y(s)$  - в правой части, получим

$$(T_0^2 s^2 + T_1 s + 1)x(s) = k(Ts + 1)y(s) + R(s).$$

Полученное уравнение относительно изображений переменных  $x(s)$  и  $y(s)$  является алгебраическим и может быть решено обычными методами алгебры.

Обозначим собственный оператор элемента

$$d(s) = T_0^2 s^2 + T_1 s + 1,$$

оператор воздействий

$$q(s) = k(Ts + 1)$$

и запишем уравнение в сокращенном виде

$$d(s)x(s) = q(s)y(s) + R(s).$$

Отсюда изображение выходной величины

$$x(s) = \frac{q(s)}{d(s)}y(s) + \frac{R(s)}{d(s)}.$$

Теперь остается по полученному изображению найти оригинал  $x(t)$ . При нулевых начальных условиях, очевидно,  $R(s) = 0$  и уравнение в изображениях принимает вид

$$(T_0^2 s^2 + T_1 s + 1)x(s) = k(Ts + 1)y(s).$$

Существенным преимуществом преобразования Лапласа является то, что в алгебраическое относительно изображений уравнение автоматически вводятся начальные условия в виде члена  $R(s)$ , что исключает трудоемкое определение постоянных интегрирования, неизбежное при интегрировании уравнений классическим методом.

### ***Оригиналы и изображения некоторых функций***

Рассмотрим примеры вычисления при помощи прямого преобразования Лапласа изображений некоторых наиболее часто встречающихся функций.

I. Изображение единичной скачкообразной функции  $x(t) = 1(t)$ , которая удовлетворяет условию

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

$$L[1(t)] = 1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} d(-st) = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Итак,

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}.$$

Очевидно, если скачок не единичный, а равен, например,  $X$ , то

$$L[x_0 1(t)] = \frac{x_0}{s}.$$

2. Изображение экспоненциальной функции  $x(t) = e^{at}$ , где  $a$  - постоянное вещественное или комплексное число.

$$L[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} d[-(s-a)] = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}.$$

Итак,

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}.$$

Очевидно,

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}.$$

3. Изображение функции  $x(t) = \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

$$L[\cos \omega t] = \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-st} dt.$$

Пользуясь результатами предыдущего примера, запишем

$$\int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt = \frac{1}{s - j\omega}; \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-st} dt = \frac{1}{s + j\omega}.$$

Следовательно,

$$L[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s + j\omega} + \frac{1}{s - j\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Итак,

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Аналогичным образом для изображения  $\sin \omega t$  получим выражение

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Приведем таблицу оригиналов простейших наиболее часто встречающихся функций и их изображений (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Оригинал	Изображение
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

### 1.5.6. Линеаризация дифференциальных уравнений

Система автоматического регулирования, движение которой описывается дифференциальными уравнениями, среди которых имеется хотя бы одно нелинейное уравнение, называется нелинейной системой.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений, содержащей нелинейные уравнения, представляет сложную математическую задачу. Поэтому в ТАУ используются приближенные методы исследования реальных нелинейных систем, связанные с линеаризацией дифференциальных уравнений.

Основанием для перехода от нелинейных уравнений элементов и систем к приближенным линейным уравнениям служат теоремы известного отечественного механика А.М. Ляпунова. В этих теоремах доказано, что если движение линеаризованной системы, соответствующей данной нелинейной системе, устойчиво при малых отклонениях переменных, то и движение реальной нелинейной системы при тех же малых отклонениях тоже будет устойчивым. Это значит, что движение реальной нелинейной системы при малых отклонениях ее переменных можно исследовать при помощи линеаризованных уравнений этой системы.

Известны три практических способа линеаризации дифференциальных уравнений.

**1. Аналитическое дифференцирование нелинейности.** Этот способ является наиболее общим. Нелинейные функции разлагаются в ряды Тейлора в окрестности их значений, соответствующих установившемуся режиму. При этом ограничиваются первыми членами разложения, а остальными пренебрегают. Таким образом, если речь идет о статических характеристиках, то участки кривых в окрестности рабочих точек заменяются отрезками касательных в этих точках.

Обычно этот способ применяется, когда нелинейность задана аналитически и имеет сравнительно сложный вид.

**2. Графическое дифференцирование.** Этот способ применяется, когда нелинейная функция задана графически.

**3. Подстановка в исходное уравнение переменных в малых отклонениях от их установившихся значений  $x_i = x_{i0} + \Delta x_i$ .** Этот метод наиболее прост и удобен, однако он имеет ограниченное применение и используется в тех случаях, когда нелинейность задана аналитически и является несложной.

Рассмотрим более подробно способ аналитического дифференцирования нелинейности на примере нелинейного уравнения второго порядка общего вида

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}) = 0.$$

Пусть значения  $x$  и  $y$ , соответствующие некоторому установившемуся режиму, вблизи которого мы будем изучать движение элемента, будут  $x_0$  и  $y_0$ ; значения производных этих функций в той же точке обозначим  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \ddot{x}_0$ .

Для начальной точки имеем, следовательно,

$$F_0 = F_0(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) = 0.$$

Малые отклонения переменных и их производных от их начальных значений обозначим

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x_0, & \Delta y &= y - y_0, \\ \Delta \dot{x} &= \dot{x} - \dot{x}_0, & \Delta \dot{y} &= \dot{y} - \dot{y}_0, \\ \Delta \ddot{x} &= \ddot{x} - \ddot{x}_0, \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$F(x_0 + \Delta x, \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}, \ddot{x}_0 + \Delta \ddot{x}, y_0 + \Delta y, \dot{y}_0 + \Delta \dot{y}) = 0.$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора по степеням малых отклонений переменных, записав лишь члены разложения первого порядка. Это разложение будет иметь вид

$$F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)_0 \Delta \ddot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + R = 0,$$

где  $R$  - сумма членов ряда второго и высшего порядков.

Первый член  $F_0$  этого ряда равен нулю по условию задачи.

Члены высших порядков, подразумеваемых под знаком  $R$ , отбросим, полагая их малыми по сравнению с членами, содержащими первые степени отклонений. В итоге получим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)_0 \Delta \ddot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y = 0.$$

Покажем, что приращения производных, например  $\Delta \dot{x} = \Delta \frac{dx}{dt}$ , равняются производным приращений соответствующих переменных, то есть в нашем примере

$$\Delta \dot{x} = \dot{\Delta x},$$

или

$$\Delta \frac{dx}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt}.$$

Для этого обозначим  $\dot{x} = z$ , тогда  $\ddot{x} = \dot{z}$  и

$$\Delta \frac{dx}{dt} = \Delta \dot{x} = \Delta z \approx \frac{dz}{dt} \Delta t = \ddot{x} \Delta t, \quad (1.1)$$

с другой стороны,

$$\Delta x \approx \frac{dx}{dt} \Delta t = \dot{x} \Delta t$$

и

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \ddot{x} \Delta t. \quad (1.2)$$

Из уравнений (1.1) и (1.2) получаем

$$\Delta \frac{dx}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt},$$

что для краткости запишем в виде  $\Delta \dot{x} = \dot{\Delta x}$ .

Точно так же можно показать, что  $\Delta \ddot{x} = \ddot{\Delta x} = \frac{d^2 \Delta x}{dt^2}$ .

Таким образом, уравнение в малых отклонениях можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \right)_0 \ddot{\Delta x} + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_0 \dot{\Delta x} + \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \Delta x = - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_0 \dot{\Delta y} - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \Delta y;$$

или

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \right)_0 \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_0 \frac{d\Delta x}{dt} + \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \Delta x = - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_0 \frac{d\Delta y}{dt} - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \Delta y.$$

В полученное уравнение искомая функция  $\Delta x(t)$ , заданная

функция  $\Delta y(t)$  и их производные входят только в линейных комбинациях, поэтому уравнение является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Кроме того, коэффициенты уравнения, представленные частными производными функции  $F$ , взятыми в исходной точке, вблизи которой функция разложена в ряд, являются величинами постоянными.

Следовательно, найденное уравнение является уравнением с постоянными коэффициентами.

Обозначив коэффициенты уравнения

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)_0 = a_0; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 = a_1; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = a_2; \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 = b_0; \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = b_1,$$

получим

$$a_0 \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} + a_1 \frac{d \Delta x}{dt} + a_2 \Delta x = b_0 \frac{d \Delta y}{dt} + b_1 \Delta y.$$

В нормализованной форме это уравнение будет иметь вид

$$T_0^2 \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta x}{dt} + \Delta x = k \left( T \frac{d \Delta y}{dt} + \Delta y \right). \quad (1.3)$$

Из того, что коэффициенты ненормализованного уравнения определяются значениями частных производных в начальной точке следует, что линеаризация возможна только в случае существования конечных и единственных значений производных в этой точке. В противном случае уравнение линеаризовано быть не может.

Элементы, уравнения которых не могут быть линеаризованы, называются существенно-нелинейными.

Если в линеаризованное уравнение (1.3) вместо малых отклонений подставить их значения, выраженные координаты ( $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_0$  и т.д.), то, имея в виду, что производная любого порядка от отклонения равняется производной того же порядка от "полной" координаты, то есть

$$\frac{d^n \Delta x}{dt^n} = \frac{d^n x}{dt^n},$$

получим

$$T_0^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_1 \frac{dx}{dt} + x - x_0 = k \left( T \frac{dy}{dt} + y - y_0 \right).$$

Так как в установившемся режиме  $x_0 = ky_0$ , то

$$T_0^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_1 \frac{dx}{dt} + x = k \left( T \frac{dy}{dt} + y \right).$$

Отсюда следует, что линейное уравнение в "полных" координатах имеет тот же вид, что и уравнение в отклонениях переменных, и те же коэффициенты (постоянные времени), следовательно, линейные уравнения, записанные "в полных" координатах, можно рассматривать и как уравнения в отклонениях. Поэтому в дальнейшем в линеаризованных уравнениях мы будем опускать знаки отклонений  $\Delta$  перед переменными и будем записывать уравнения в обозначения "полных" переменных ( $x, \dot{x}, y$  и т.д. вместо  $\Delta x, \Delta \dot{x}, \Delta y$ ) помня при этом, что если уравнение получено путем линеаризации, то входящие в него переменные являются приращениями координат.

Рассмотрим примеры линеаризации нелинейных уравнений.

### **Уравнение машины-двигателя**

Нелинейность уравнения

$$J\omega^2 = M\partial(z, \omega) - M_c(\omega) - M_c(t)$$

обусловлена нелинейными в общем случае зависимостями  $M\partial$  от  $Z$  и  $M_c$  от  $\omega$ .

Для линеаризации перепишем уравнения следующим образом:

$$F[\omega, \dot{\omega}, z, M_c(t)] = J\dot{\omega} - M\partial(z, \omega) + M_c(\omega) + M_c(t) = 0.$$

Найдем, как этого требует разложение функции  $F$  в ряд Тейлора, частные производные  $F$  по всем координатам в точке линеаризации, где переменные имеют значения  $\dot{\omega}_0, \omega_0, z_0, M_{c_0}$ :

$$a_0 = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{\omega}} \right)_0 = J;$$

$$a_1 = \left( \frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_0 = \left( \frac{\partial F}{\partial M_\delta} \frac{\partial M_\delta}{\partial \omega} - \frac{\partial F}{\partial M_c} \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 = \left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 - \left( \frac{\partial M_\delta}{\partial \omega} \right)_0;$$

$$b_1 = \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial F}{\partial M_\delta} \frac{\partial M_\delta}{\partial z} \right)_0 = - \left( \frac{\partial M_\delta}{\partial z} \right)_0;$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial M_c(t)} \right)_0 = 1.$$

Подстановка этих значения в ряд Тейлора, содержащий лишь члены первого порядка, дает линейное дифференциальное уравнение в отклонениях переменных  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\dot{\omega}$ ,  $\Delta z$  и  $\Delta M_c(t)$ :

$$a_c \frac{d\Delta\omega}{dt} + a_1 \Delta\omega = b_1 \Delta z - \Delta M_c(t),$$

или в развернутом виде

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} + \left[ \left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 - \left( \frac{\partial M_\delta}{\partial \omega} \right)_0 \right] \Delta\omega = \left( \frac{\partial M_\delta}{\partial z} \right)_0 \Delta z - \Delta M_c(t).$$

В нормализованной форме оно будет следующим:

$$T_0 \frac{d\Delta\omega}{dt} + \Delta\omega = k_z \Delta z - k_m \Delta M_c(t),$$

где постоянная времени двигателя определяется выражением

$$T_0 \frac{a_0}{a_1} = \frac{J}{\left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 - \left( \frac{\partial M_\delta}{\partial \omega} \right)_0},$$

а коэффициенты усиления:  
по координате  $z$

$$k_z = \frac{\left(\frac{\partial M_\delta}{\partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_\delta}{\partial \omega}\right)_0};$$

по моменту сил сопротивления (по, нагрузке)

$$k_m = \frac{1}{\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_\delta}{\partial \omega}\right)_0}.$$

Для определения частных производных в точке выбранного установившегося режима должны быть заданы характеристики машины  $M_\delta(z, \omega)$  и характеристика нагрузки  $M_c(t)$ . Обычно они задаются в виде графиков (рис. 1.31).

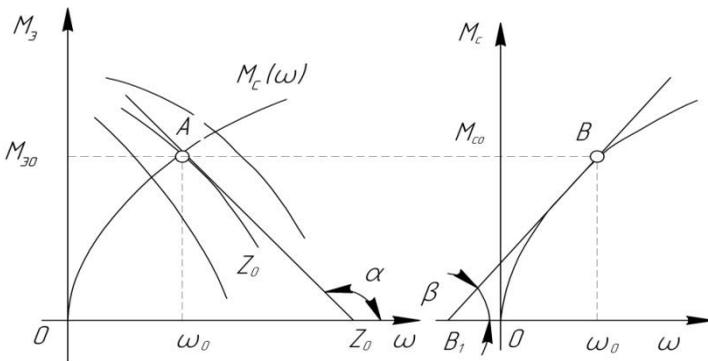


Рис. 1.31

Определив на этих графиках точки  $A$  и  $B$ , соответствующие установившемуся режиму, вблизи которого изучается движение машины при малых отклонениях переменных, необходимо построить касательные  $AA_1$  и  $BB_1$  к соответствующим кривым и вычислить

значения частных производных как отношения отрезков:

$$\left(\frac{\partial M_o}{\partial \omega}\right)_0 = \frac{A\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}A_1}; \quad \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 = \frac{B\bar{\omega}_0}{B_1\bar{\omega}_0},$$

выразив длины отрезков  $A\bar{\omega}_0$  и  $B\bar{\omega}_0$  в единицах момента в соответствии с масштабом оси ординат, а длины отрезков  $\bar{\omega}_0A_1$  и  $B_1\bar{\omega}_0$  - в единицах  $\omega$  в соответствии с масштабом оси абсцисс.

Для определения частной производной  $\left(\frac{\partial M_o}{\partial z}\right)_0$  необходимо перестроить характеристику  $M_o(z, \omega)$  в систему координат  $M_o, z$  (рис. 1.32), приняв за параметр семейства величину  $\omega$ .

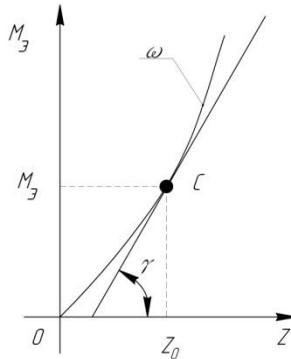


Рис. 1.32

Отметив точку  $C$ , соответствующую установившемуся режиму, необходимо построить касательную  $CC_1$  к кривой с параметром  $\omega_0$  и вычислить отношение

$$\left(\frac{\partial M_o}{\partial z}\right)_0 = \frac{C\bar{Z}_0}{C_1\bar{Z}_0},$$

выразив длину отрезка  $CZ_0$  в единицах момента, а  $C_1\bar{Z}_0$  в единицах  $Z$ .

Если характеристики машины заданы в аналитической форме, то частные производные определяются прямым дифференцированием функции  $F$ .

**Уравнение гидравлической емкости**

$$S\dot{H} = aZ - by\sqrt{H}$$

Образует функцию  $F$  и найдем ее частные производные:

$$F(\dot{H}, H, Z, y) = S\dot{H} - aZ + by\sqrt{H} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{H}}\right) = S; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_0 = \frac{1}{2}by_0H_0^{\frac{1}{2}};$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)_0 = -a; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = b\sqrt{H_0}.$$

Линеаризованное уравнение будет иметь вид

$$S \frac{d\Delta H}{dt} + \frac{by_0}{2\sqrt{H_0}} \Delta H = a\Delta Z - b\sqrt{H_0}\Delta y.$$

В нормализованной форме получим

$$T \frac{d\Delta H}{dt} + \Delta H = k_z\Delta Z - k_y\Delta y,$$

где постоянная времени емкости

$$T = \frac{2S\sqrt{H_0}}{by_0},$$

коэффициенты усиления

$$k_z = \frac{2a\sqrt{H_0}}{by_0}; \quad k_y = \frac{2H_0}{y_0}.$$

Применяя для обозначения отклонений обозначения полных координат, нормализованное уравнение емкости можно записать в виде

$$T \frac{dH}{dt} + H = k_z Z - k_y y,$$

понимая под  $H$ ,  $Z$  и  $y$  приращения переменных.

**Уравнение гидравлического катаракта**

$$\frac{m}{c} \ddot{x} + x = A(\dot{y} - \dot{x})^2;$$

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, \dot{y}) = \frac{m}{c} \ddot{x} + \dot{x} - A(\dot{y} - \dot{x})^2 = 0.$$

Частные производные - коэффициенты нормализованного уравнения:

$$a_0 = \left( \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \right)_0 = \frac{m}{c}; \quad a_1 = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_0 = 2A(\dot{y}_0 - \dot{x}_0);$$

$$a_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 = 1; \quad b_0 = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_0 = -2A(\dot{y}_0 - \dot{x}_0).$$

Линеаризованное уравнение катаракта сразу запишется в нормализованной форме, так как  $a_2 = 1$ :

$$\frac{m}{c} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2A(\dot{y}_0 - \dot{x}_0) \frac{dx}{dt} + x = 2A(\dot{y}_0 - \dot{x}_0) \frac{dy}{dt}.$$

Постоянные времени катаракта

$$T_0 = \sqrt{\frac{m}{c}}; \quad T_1 = 2A(\dot{y}_0 - \dot{x}_0).$$

Используя обозначения постоянных времени, запишем уравнение катаракта в виде

$$T_0^2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} + x = T_1 \dot{y}.$$

Если пренебречь в этом уравнении первым членом по сравнению с остальными двумя членами левой части, что возможно из-за малости сил инерции по сравнению с натяжением пружины и давлениями на днища цилиндра катаракта, то порядок уравнения будет первым:

$$T_1 \dot{x} + x = T_1 \dot{y}.$$

### 1.5.7. Понятие о передаточной функции

Операторная форма записи дифференциальных уравнений, то есть записи их в изображениях по Лапласу, приводящая уравнение к алгебраическому виду, позволяет ввести понятие передаточной функции элемента, а затем и системы регулирования в целом.

**Передаточной функцией**  $W(s)$  называется отношение изображения  $X(s)$  выходной величины к изображению  $Y(s)$  входной величины при нулевых начальных условиях, то есть

$$W(s) = \frac{x(s)}{y(s)}.$$

Конкретное выражение передаточной функции для каждого элемента можно получить из его дифференциального уравнения, записанного в изображениях.

Пусть уравнение элемента при одном входном воздействии, записанное в изображениях при нулевых начальных условиях имеет вид

$$(T_0^2 s^2 + T_1 s + 1)x(s) = k(Ts + 1)y(s),$$

или в ненормализованной форме

$$(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)x(s) = (b_0 s + b_1)y(s),$$

или в более общем виде

$$d(s)x(s) = q(s)y(s),$$

где  $d(s)$  - собственный оператор элемента;

$q(s)$  - оператор воздействий.

Для этих выражений получим следующие выражения передаточных функций:

$$W(s) = \frac{k(Ts + 1)}{T_0^2 s^2 + T_1 s + 1};$$

$$W(s) = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}$$

и в общей форме

$$W(s) = \frac{q(s)}{d(s)}.$$

Следовательно, передаточная функция равняется отношению оператора воздействий к собственному оператору элемента.

Передаточная функция представляет собой функцию комплексного переменного  $S$ .

Передаточная функция элемента, составленная по его дифференциальному уравнению, полностью характеризует динамические свойства элемента, как и само дифференциальное уравнение. Вместе с тем она доставляет большие удобства при исследовании динамики элементов и систем автоматического регулирования в целом.

В установившемся режиме все производные как входной, так и выходной величины обращаются в нуль. Полагая в выражении передаточной функции  $s = 0$ , найдем, что в установившемся режиме передаточная функция переходит в коэффициент усиления

$$W(0) = k.$$

Если элемент воспринимает несколько входных воздействий, изображения которых, например,  $y_1(s)$ ,  $y_2(s)$ ,  $y_3(s)$ , то дифференциальное уравнение элемента будет иметь общий вид

$$d(s)x(s) = q_1(s)y_1(s) + q_2(s)y_2(s) + q_3(s)y_3(s),$$

где  $q_1(s)$ ,  $q_2(s)$ ,  $q_3(s)$  - операторы воздействий.

Разделив уравнение на собственный оператор  $d(s)$ , получим

$$x(s) = \frac{q_1(s)}{d(s)} y_1(s) + \frac{q_2(s)}{d(s)} y_2(s) + \frac{q_3(s)}{d(s)} y_3(s).$$

Множители при изображениях воздействий как отношения соответствующих операторов воздействий к собственному оператору элемента представляют собой передаточные функции элемента по соответствующим воздействиям:

$$W_1(s) = \frac{q_1(s)}{d(s)}; \quad W_2(s) = \frac{q_2(s)}{d(s)}; \quad W_3(s) = \frac{q_3(s)}{d(s)}.$$

Таким образом, элемент имеет число передаточных функций, равное числу входных воздействий.

Если известны передаточные функции элемента  $W_1, W_2, W_3$  по приложенным к нему воздействиям  $Y_1, Y_2, Y_3$ , то изображение выходной величины определяется как сумма произведений передаточных функций на изображения соответствующих входных величин:

$$x(s) = W_1(s)y_1(s) + W_2(s)y_2(s) + W_3(s)y_3(s).$$

При одном входном воздействии

$$x(s) = W(s)y(s).$$

### ***Вопросы для самоконтроля***

1. Основные понятия и определения, применяемые в теории автоматического регулирования.
  2. Принципы регулирования. Общая характеристика, достоинства и недостатки. Примеры.
  3. Алгоритм функционирования САР. Законы регулирования.
  4. Состав САР, действующей по принципу "по отклонению".
- Функциональная схема САР и назначение отдельных ее элементов.
5. Особенности систем автоматической стабилизации.
  6. Особенности следящих систем.
  7. Классификация САР.
  8. Понятие о математическом описании процесса регулирования.
  9. Формы записи дифференциальных уравнений САР.
  10. Принципы составления уравнений динамики элементов.
  11. Способы линеаризации дифференциальных уравнений.
  12. Понятие о передаточной функции.

## Глава 2 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ САР

### 2.1. Понятие типового звена

Физические процессы, описываемые дифференциальными уравнениями элементов систем автоматического регулирования, могут быть самыми разнообразными: механическими, электрическими, электромагнитными, тепловыми, гидродинамическими и т.д. Несмотря на различие физической природы элементов, формы дифференциальных уравнений, описывающих их движение, часто совпадают, и если не указать физический смысл переменных, связанных уравнением, то по математической форме уравнения определить его невозможно.

Так, например, линеаризованные уравнения машины-двигателя гидравлической емкости и электрической  $RC$ -цепи при одном входном воздействии имеют один и тот же вид:

$$(Ts + 1)\omega(s) = k_Z Z(s);$$

$$(Ts + 1)H(s) = k_Z Z(s);$$

$$(Ts + 1)U_2(s) = k_U U_1(s).$$

Так что если выходную переменную обозначить через  $x(s)$ , а входную  $y(s)$ , то все три уравнения имеют одну форму:

$$(Ts + 1)x(s) = ky(s).$$

Уравнение  $RLC$ -цепи при выходном напряжении, снимаемом с омического сопротивления, и уравнение гидравлического катаракта также совпадают:

$$(T_0^2 s^2 + T_1 s + 1)U_2(s) = k_U s U_1(s);$$

$$(T_0^2 s^2 + T_1 s + 1)x(s) = k_y s y(s).$$

Однотипность дифференциальных уравнений свидетельствует о динамическом подобии различных физических явлений и подобии динамических свойств элементов, так как изменение различных по физической природе выходных величин во времени при заданном изменении входных величин и при одинаковых постоянных времени и коэффициентах усиления будет одним и тем же.

В этом единстве дифференциальных уравнений, описывающих различные физические процессы, находит отражение то поразительное единство законов природы, о котором говорил В.И. Ленин.

Однотипность дифференциальных уравнений для различных физических процессов лежит в основе математического моделирования одних процессов другими. Например, машина-двигатель или гидравлическая емкость могут моделироваться при помощи  $RC$ -цепи, имеющей те же постоянные времени, что и моделируемые устройства. Математическое моделирование является одним из эффективных средств экспериментального изучения различных физических процессов.

Однотипность дифференциальных уравнений элементов систем автоматического регулирования позволяет отвлечься от конкретных физических процессов в элементах и ввести понятие типового звена.

**Типовыми звеньями** мы будем называть математические модели элементов, их частей или групп элементов, описываемые дифференциальными уравнениями не выше второго порядка с одной входной переменной.

## 2.2. Уравнения типовых звеньев.

### Классификация звеньев

В самой общей форме уравнение звена в изображениях переменных  $X$  и  $Y$  может быть записана в виде:

$$d(s)x(s) = q(s)y(s),$$

где  $d(s)$  - собственный оператор звена - полином относительно  $s$  второй, первой или нулевой степени, а  $q(s)$  оператор воздействий - полином также не выше второй, а чаще первой или нулевой степени.

Возможные виды собственных операторов и часто встречающиеся виды операторов воздействий представлены в табл.2.1.

Таблица 2.1

Собственные операторы $d(s)$	Операторы воздействий $q(s)$
1	$k = const$
$T_1s, T_0^2s^2$	$kTs$
$T_1s \pm 1$	$k(Ts + 1)$
$T_0^2s^2 \pm 1, T_0^2s^2 \pm T_1s$	$k(T_2^2s^2 \pm Ts \pm 1)$
$T_0^2s^2 \pm T_1s \pm 1$	

За счет различных сочетаний собственных операторов, стоящих при изображении  $x(s)$  выходной величины в левой части уравнения, с операторами воздействий, стоящими при изображении  $y(s)$  входной величины в правой части уравнения, можно получить различные виды уравнений типовых звеньев.

В зависимости от порядка дифференциального уравнения звена, то есть степени собственного оператора, звенья подразделяются на звенья второго, первого и нулевого порядка. Вид собственного оператора звена имеет важнейшее значение для характеристики его динамических свойств, так как левая часть уравнения, содержащая собственный оператор, характеризует свободное движение звена, выведенного из равновесного состояния внешними воздействиями и предоставленного самому себе.

По виду операторов воздействий звенья подразделяются на следующие:

- с воздействием только по входной величине (оператор воздействий  $q(s) = k = const$ );

- с воздействием только по первой производной входной величины (оператор  $q(s) = kTs$ );

- с воздействиями как по входной величине, так и по первой ее производной (оператор  $q(s) = kTs + k$ );

- с воздействиями по входной величине, ее первой и второй производными (оператор  $q(s) = kT_2^2 s^2 + kTs + k$ ).

Особое значение имеют типовые звенья, собственные операторы которых при операторе воздействий  $q(s) = k = const$  имеют вид

$$1, Ts, Ts + 1, T_0^2 s^2 + T_1 s + 1,$$

а также звено с собственным оператором  $d(s) = 1$  при операторе воздействий  $q(s) = kTs$ .

В соответствии с важным значением этих типовых звеньев им присваиваются определенные наименования, отражающие их динамические свойства. Уравнения этих звеньев сведем в табл. 2.2, в которой укажем их наименования.

Звенья, собственные операторы которых равняются единице  $d(s) = 1$ , а операторы воздействий имеют вид  $Ts + 1$  или  $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1$ , называются форсирующими.

Таблица 83.83

Уравнение звена	Наименование звена
$x(s) = ky(s)$	- пропорциональное, безынерционное, усилительное, статическое
$Ts x(s) = ky(s)$	- идеальное интегрирующее, астатическое
$(Ts + 1)x(s) = ky(s)$	- аperiodическое 1-го порядка, инерционное, одноемкостное
$(T_0^2 s^2 + T_1 s + 1)x(s) = ky(s)$	- колебательное (при $T_1 < 2T_0$ ), аperiodическое 2-го порядка (при $T_1 > 2T_0$ )
$x(s) = kTs y(s)$	- идеальное дифференцирующее

Очевидно, форсирующие звенья будут иметь уравнения

$$x(s) = (Ts + 1)y(s);$$

$$x(s) = (T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)y(s).$$

### 2.3. Передаточные функции типовых звеньев

В соответствии с определением передаточной функции как отношения изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях

$$W(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$$

по дифференциальным уравнениям типовых звеньев легко определяются их передаточные функции как отношения двух операторов. В общей форме передаточная функция будет иметь вид

$$W(s) = \frac{q(s)}{d(s)}.$$

Запишем передаточные функции простейших типовых звеньев в табл. 2.3.

Мы отмечали уже ранее, что передаточная функция звена, как и его дифференциальное уравнение, полностью характеризует динамические свойства звена по данному входному воздействию.

Подобно тому, как элементы систем автоматического регули-

рования схематически изображаются в виде прямоугольников, звенья системы также удобно изображать схематически с обозначением входной и выходной величин. При этом внутри прямоугольника, условно изображающего звено, принято записывать, обозначение передаточной функции или ее развернутое выражение, как это показано на рис.2.1.

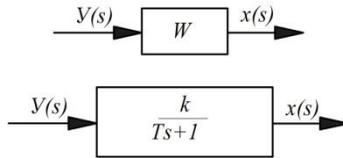


Рис. 2.1

Таблица 2.84

Наименование звена	Передаточная функция
Пропорциональное	$W(s) = k$
Интегрирующее	$W(s) = \frac{k}{Ts}$
Апериодическое	$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$
Колебательное	$W(s) = \frac{k}{T_0^2 s^2 + T_1 s + 1}$
Дифференцирующее	$W(s) = kTs$
Форсирующее	$\begin{cases} W(s) = Ts + 1 \\ W(s) = T_0^2 s^2 + T_1 s + 1 \end{cases}$

## 2.4. Характеристики типовых звеньев

### 2.4.1. Временные и частотные характеристики. Общие положения

Кроме дифференциальных уравнений и передаточных функций динамические свойства звеньев могут быть описаны при помощи временных и частотных характеристик.

Временная характеристика представляет собой зависимость  $x(t)$  выходной величины звена во времени при каком-либо опреде-

ленном, в частности типовом, воздействии на входе.

В качестве типового воздействия применяется обычно единичная функция, удовлетворяющая условиям

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

График ее показан на рис.2.2.

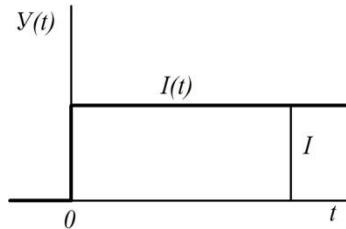


Рис.2.2

Временная характеристика звена, соответствующая единичному скачкообразному воздействию, представляющая собой реакцию звена на единичную функцию, называется *переходной характеристикой* или *переходной проводимостью* звена.

Для того чтобы получить переходную характеристику звена, необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение звена, положив, что ко входу звена приложено скачкообразное возмущение.

Другую группу характеристик, описывающих динамические свойства звеньев, составляют частотные характеристики.

*Частотными характеристиками* называются зависимости между амплитудами, фазами и частотой установившихся на входе и выходе звена гармонических колебаний.

Из теории колебаний известно, что если на вход какой-либо колебательной системы подать гармонические колебания некоторой частоты  $\Omega$  и амплитуды  $A$

$$y = A \sin \omega t,$$

то реакция системы на такое воздействие будет состоять в том, что с течением времени на ее выходе установятся гармонические колебания той же частоты  $\Omega$ , но другой амплитуды  $B$  и отличающиеся по фазе на некоторый фазовый угол  $\Phi$ :

$$x = B \sin(\omega t + \varphi).$$

При других частотах  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и неизменной амплитуде  $A$  входных колебаний амплитуда  $B$  и фаза выходных колебаний будут принимать значения  $B_1, B_2, \dots, B_n; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  так, что амплитуда и фаза выходных колебаний явятся функциями частоты:  $B = B(\omega), \varphi = \varphi(\omega)$  (рис.2.3.).

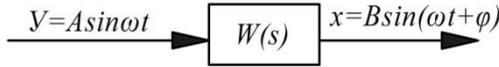


Рис.2.3

Вместо абсолютного значения амплитуды  $B$  удобно пользоваться отношением амплитуд  $r = \frac{B}{A}$ , тогда  $r = r(\omega)$ .

Гармонические колебания на выходе и входе эвена можно представить как мнимые части комплексных величин:

$$y = A e^{j\omega t} = A(\cos\omega t + j \sin\omega t);$$

$$x = B e^{j(\omega t + \varphi)} = B[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)],$$

Отношение этих двух комплексных величин будет представлять собой также комплексную величину  $Z$  - функцию частоты. В показательной форме

$$Z = \frac{x}{y} = \frac{B}{A} e^{j\varphi} = r(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

в тригонометрической форме

$$Z = r(\omega)[\cos\varphi(\omega) + j \sin\varphi(\omega)],$$

в алгебраической форме

$$Z = u(\omega) + j\vartheta(\omega),$$

где  $u(\omega) = r(\omega)\cos\varphi(\omega)$  - вещественная часть комплексной величины;

$\vartheta(\omega) = r(\omega)\sin\varphi(\omega)$  - мнимая часть комплексной величины.

Очевидно,  $r(\omega)$  представляет собой модуль комплексной величины  $Z$

$$r(\omega) = \text{mod}Z = |Z| = \sqrt{u^2(\omega) + \vartheta^2(\omega)},$$

а  $\varphi(\omega)$  - аргумент ее

$$\varphi(\omega) = \arg Z = \text{arctg} \frac{\vartheta(\omega)}{u(\omega)}.$$

Зависимости, вытекающие из написанных выражений, - функции частоты

$$r = r(\omega); \quad \varphi = \varphi(\omega); \quad r = r(\varphi); \quad u = u(\omega); \quad \vartheta = \vartheta(\omega)$$

и представляют собой уравнения частотных характеристик, а соответствующие им графики называются частотными характеристиками:

$r = r(\omega)$  - амплитудно-частотная или амплитудная характеристика (АХЧ);

$\varphi = \varphi(\omega)$  - фазово-частотная или фазовая характеристика (ФХ);

$r = r(\varphi)$  - амплитудно-фазовая характеристика (АФХ);

$u = u(\omega)$  - вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$\vartheta = \vartheta(\omega)$  - мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой кривую на комплексной плоскости  $Z$  (рис.2.4), описываемую концом вектора  $r(\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . Каждой точке этой кривой соответствует определенное значение частоты  $\omega$ . Положение изображающего вектора  $r$  относительно оси  $u$  определяется фазовым углом.

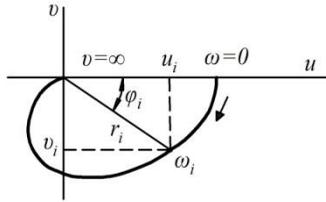


Рис.2.4

Вещественная  $u(\omega)$  и мнимая  $\mathfrak{Q}(\omega)$  частотные характеристики представляют собой проекции изображающего вектора  $r(\omega)$  на соответствующие оси координат.

Амплитудно-фазовую характеристику можно рассматривать как изображение зависимости  $r(\varphi)$  в полярной системе координат на комплексной плоскости или как изображение той же зависимости в прямоугольной системе координат  $u, \mathfrak{Q}$ , в которой ось  $\mathfrak{Q}$  является осью мнимых величин.

Амплитудно-фазовая характеристика имеет наиболее важное значение из всех частотных характеристик, так как она обобщает в себе все остальные характеристики.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики в комплексной форме  $Z = re^{\alpha\varphi}$  связано с передаточной функцией звена. А именно: передаточная функция

$$W(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$$

при чисто мнимых значениях ее аргумента  $s = j\omega$ , то есть функция

$$W(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{y(j\omega)}$$

представляет собой уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) \equiv Z.$$

Для доказательства этого тождества составим выражение передаточной функции для случая установившихся на входе и выходе звена гармонических колебаний как отношения изображения выход-

ной величины  $x(s) = L[B\sin(\omega t + \varphi)]$  к изображению входной величины  $y(s) = L[A\sin \omega t]$ :

$$W(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{L[B\sin(\omega t + \varphi)]}{L[A\sin \omega t]} = \frac{BL[\sin(\omega t + \varphi)]}{AL[\sin \omega t]} = r(\omega) \frac{L[\sin(\omega t + \varphi)]}{L[\sin \omega t]}.$$

Изображение  $\sin(\omega t + \varphi)$  получим, представив эту функцию в виде  $\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi$  и имея в виду, что  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  не являются функциями времени, поэтому

$$L[\sin(\omega t + \varphi)] = \cos \varphi L[\sin \omega t] + \sin \varphi L[\cos \omega t].$$

Следовательно,

$$W(s) = r(\omega) \left( \cos \varphi + \sin \varphi \frac{L[\cos \omega t]}{L[\sin \omega t]} \right).$$

Зная, что  $L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ , а  $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ , получим

$$W(s) = r(\omega) \left( \cos \varphi + \frac{s}{\omega} \sin \varphi \right).$$

Полагая теперь  $s = j\omega$ , найдем

$$W(j\omega) = r(\omega) (\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

а так как  $\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}$ , то  $W(j\omega) = r e^{j\varphi} = Z$ , что и требовалось доказать.

Таким образом уравнение амплитудно-фазовой характеристики можно получить из передаточной -функции звена, полагая в ней  $s = j\omega$ .

Передаточную функцию звена при чисто мнимом значении ее аргумента  $s = j\omega$  мы будем называть **частотной функцией звена**.

Следовательно, частотная функция звена представляет собой

уравнение амплитудно-фазовой характеристики, а годограф вектора частотной функции - *амплитудно-фазовую характеристику звена*.

Кроме рассмотренных нами частотных характеристик широкое применение в расчетной практике получили логарифмические частотные характеристики: логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАХ) и логарифмическая фазово-частотная характеристика (ЛФХ), представляющие собой амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики построенные в логарифмическом масштабе. Эти характеристики мы рассмотрим при изучении характеристик систем автоматического регулирования.

Понятия временных и частотных характеристик распространяются на группы звеньев и на систему автоматического регулирования в целом.

Как было указано, амплитудно-фазовые частотные характеристики звеньев (а в последующем и систем автоматического регулирования) можно построить теоретически по, их передаточным функциям. Для этого необходимо:

- в передаточной функции звена (или системы) заменить  $S$  на  $j\omega$ ;
- в полученном выражении выделить вещественную и мнимую части;
- задаваясь различными частотами, вычислить значения вещественной и мнимой части (эти вычисления удобно проводить в табличной форме);
- на комплексной плоскости в выбранном масштабе нанести точки, соответствующие вычисленным вещественным и мнимым частям;
- соединить эти точки и получить АФХ.

Если выражение передаточной функции звена (или системы) отсутствует или для его получения требуется провести сложные математические преобразования, но при этом имеется реальная физическая модель звена (или системы), частотные характеристики можно построить экспериментально.

Простейшая схема экспериментальной установки для получения частотных характеристик показана на рис.2.5.

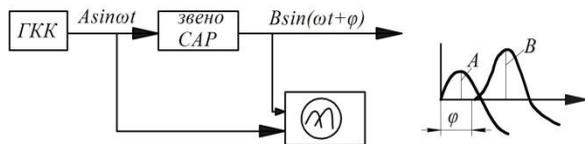


Рис.2.5

Генератор гармонических колебаний (ГГК) вырабатывает входные сигналы с различными частотами  $\Omega$  и постоянной амплитудой  $A=1$ . На экране осциллографа измеряют выходные амплитуды  $B$  и смещения по фазе  $\varphi$  и переносят их на комплексную плоскость, а затем соединяют дискретные точки плавной кривой.

Перейдем теперь к изучению временных и частотных характеристик основных типовых звеньев систем автоматического регулирования.

#### 2.4.2. Пропорциональное (безинерционное) звено

Уравнение звена - алгебраическое; его можно рассматривать как дифференциальное уравнение нулевого порядка

$$x(t) = ky(t).$$

В операторной форме - в изображениях по Лапласу имеем

$$x(s) = ky(s),$$

следовательно, передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = k.$$

Схематическое изображение звена показано на рис.2.6,а.

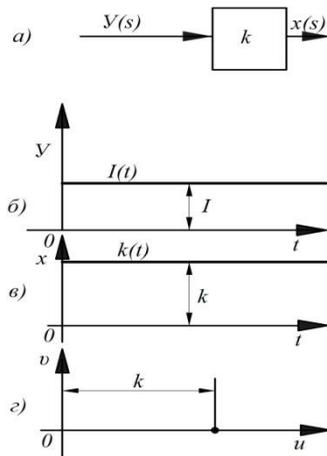


Рис. 2.6

Реакция звена на единичное скачкообразное воздействие  $y(t) = f(t)$  показана на рис.2.6,б, переходная характеристика звена

$x(t) = k1(t)$  показана на ис.2.6,в. При неединичном скачке входного воздействия  $y = y_c$  получим  $x = ky_c$ .

Это означает пропорциональность выходной величины входной величине, причем передача входного сигнала на выход осуществляется мгновенно (безынерционно), без искажения его формы, с усилением его в  $k$  раз. Поэтому звено называется безынерционным и усилительным.

Частотная функция звена -уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = k,$$

следовательно, вещественная частотная характеристика имеет уравнение  $U(\omega) = k$ , а мнимая характеристика  $\mathfrak{G}(\omega) = 0$ .

Модуль частотной функции - уравнение амплитудно-частотной характеристики

$$r = \sqrt{u^2 + \mathfrak{G}^2} = k$$

Аргумент частотной функции - уравнение фазово-частотной характеристики

$$\varphi = \arctg \frac{\mathfrak{G}}{u} = \arctg 0 = 0^0.$$

Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика звена - точка на вещественной оси, отстоящая от начала координат на расстоянии  $k$  (см. рис. 2.6, г) соответствующая всем частотам от  $0$  до  $\infty$ . Это значит, что пропорциональное звено передает с выхода на вход сигналы всех возможных частот без изменения фазы сигнала с постоянным усилением в  $k$  раз.

В виде безынерционных звеньев можно представить ряд распространенных элементов систем автоматики: потенциометры, индуктивные и емкостные датчики, выпрямители, ламповые и полупроводниковые усилители и другие элементы.

### 2.4.3. Аперриодическое звено первого порядка

Дифференциальное уравнение звена в операторной форме

$$(Ts + 1)x(s) = ky(s).$$

Передаточная функция

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Схема звена показана на рис.2.7,а.

Найдем уравнение переходной характеристики звена  $x(t)$  при  $y(t) = 1(t)$ . Так как изображение единичной функции есть  $\frac{1}{s}$ , то уравнение звена принимает вид

$$(Ts + 1)x(s) = \frac{k}{s}.$$

Отсюда изображение выходной величины

$$x(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}.$$

Для перехода к оригиналу разложим правую часть на простые дроби:

$$x(s) = k \left( \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts + 1} \right),$$

где  $A$  и  $B$  - неопределенные постоянные.

Постоянные  $A$  и  $B$  найдем из равенства

$$\frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts + 1} = \frac{A(Ts + 1) + Bs}{s(Ts + 1)},$$

или

$$A(Ts + 1) + Bs \equiv 1.$$

Полагая в этом тождестве  $s = 0$ , найдем  $A = 1$ , а при  $s = \frac{1}{T}$  получим  $B = -T$ , следовательно,

$$x(s) = k \left( \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} \right) = k \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right).$$

Зная, что оригинал, соответствующий изображению  $\frac{1}{s}$ , есть 1,

а оригинал, соответствующий  $\left(s + \frac{1}{T}\right)^{-1}$ , есть  $e^{-\frac{t}{T}}$ , запишем искомое

уравнение переходной характеристики  $x(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$ .

Вид переходной характеристики представлен на рис.2.7, б. Она показывает, что выходная величина при скачке входной величины устанавливается не мгновенно, а с течением времени. Это означает, что звено является инерционным. Нового установившегося значения  $x = k$  выходная величина достигает при  $t \rightarrow \infty$ . Течение переходного процесса аperiodическое, то есть выходная величина приближается к установившемуся значению, постепенно увеличиваясь. При меньшей-постоянной времени переходный процесс протекает быстрее.

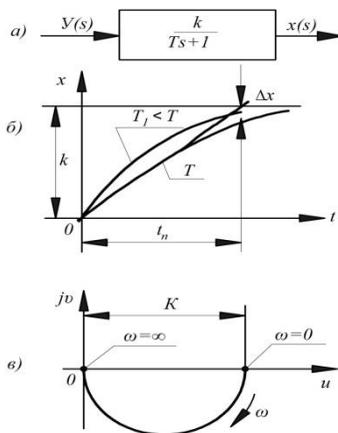


Рис.2.7

Практически можно условиться считать переходный процесс закончившимся, когда выходная величина достигнет значения, отличающегося от предельного установившегося значения ее на малую величину  $\Delta x$ , например,  $\Delta x = 0,02k$ . Тогда время переходного процесса  $t_{\Pi}$  будет конечным (см. рис. 2.7, б).

Найдем время переходного процесса  $t_{\Pi}$ , исходя из величины  $\Delta x = \delta k$ , где  $\delta$  - относительное отклонение выходной величины от ее установившегося значения при  $t = t_{\Pi}$ .

Очевидно,

$$\Delta x = k - x(t_{\Pi}) = k - k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right),$$

или

$$\delta = \frac{\Delta x}{k} = e^{-\frac{t_{\Pi}}{T}},$$

откуда

$$\frac{t_{\Pi}}{T} = -\ln \delta = -2,303 \lg \delta.$$

Если принять  $\delta = 0,02$ , то  $t_{\Pi} \approx 4T$ .

При  $\delta = 0,05$  получим  $t_{\Pi} \approx 3,5T$ . Время  $t_{\Pi}$  можно принять за условную продолжительность переходного процесса.

Найдем теперь частотные характеристики апериодического звена первого порядка.

Частотная функция звена - уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + Tj\omega} = \frac{k(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2},$$

следовательно, уравнения вещественной и мнимой характеристик будут следующими:

$$u(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \quad \vartheta(\omega) = \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Уравнения амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик

$$r(\omega) = \sqrt{u^2 + \mathfrak{G}^2} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\mathfrak{S}}{u} = \arctg(-T\omega) = -\arctg T\omega.$$

По полученным уравнениям можно построить все частотные характеристики.

Уравнение годографа частотной функции, то есть уравнение амплитудно-фазовой характеристики звена можно получить, исключая частоту  $\omega$  из выражений для модуля  $r$  и аргумента  $\varphi$  частотной функции, то есть из уравнений амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик.

Действительно,

$$tg\varphi = -\omega T,$$

поэтому

$$r(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi}} = k \cos \varphi.$$

Полученное уравнение есть уравнение окружности радиуса  $\frac{k}{2}$  в полярной системе координат  $r$ ,  $\varphi$  и представляет собой уравнение амплитудно-фазовой характеристики звена. Центр окружности лежит на вещественной оси на расстоянии  $\frac{k}{2}$  от начала координат, следовательно, окружность касается мнимой оси (рис.2.7, в). Верхняя полуокружность соответствует отрицательным значениям частот от  $-\infty$  до 0 и смысла не имеет, поэтому ее не изображают.

Переходя к декартовой системе координат  $u$ ,  $\mathfrak{S}$  получим

$$r^2 = ku,$$

так как  $u = r \cos \varphi$ , кроме того,  $r^2 = u^2 + \mathfrak{S}^2$ , поэтому

$$u^2 + \mathfrak{S}^2 = ku,$$

а это - уравнение окружности с центром на оси  $u$  :

$$u^2 - ku + \vartheta^2 = 0,$$
$$\left(u^2 - ku + \frac{k^2}{4}\right) + \vartheta^2 = \frac{k^2}{4},$$
$$\left(u - \frac{k}{2}\right)^2 + \vartheta^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

Апериодическое звено первого порядка, имеющее собственный оператор вида  $Ts + 1$ , является звеном устойчивым, то есть для него характерен сходящийся переходный процесс.

Заметим, что звено с собственным оператором  $(Ts - 1)$  будет звеном неустойчивым. Переходную и частотные характеристики такого звена предлагается получить самостоятельно.

Апериодическое звено первого порядка служит математической моделью многих элементов автоматики: тепловых и электрических двигателей, гидравлических, пневматических и тепловых емкостей, термопар и термосопротивлений, магнитных усилителей и ряда других элементов.

#### **2.4.4. Апериодическое звено второго порядка**

Дифференциальное уравнение звена в операторной форме

$$(T_0^2 s^2 + T_1 s + 1)x(s) = ky(s).$$

Передаточная функция звена

$$W(s) = \frac{k}{T_0^2 s^2 + T_1 s + 1}.$$

Схема звена показана на рис.2.8,а.

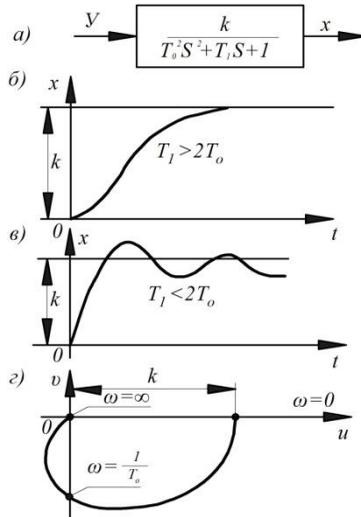


Рис. 2.8, а

Найдем реакцию звена на ступенчатое входное воздействие

$$y(t) = \frac{1}{t}.$$

Для этого подставим в исходное уравнение вместо  $y(t)$  изображение единичной функции  $s^{-1}$  и найдем изображение выходной величины

$$x(s) = \frac{k}{s(T_0^2 s^2 + T_1 s + 1)} = \frac{k}{T_0^2 s \left( s^2 + \frac{T_1}{T_0^2} s + \frac{1}{T_0^2} \right)}.$$

Обозначим корни трехчлена, стоящего в знаменателе, через  $S_1$  и  $S_2$ :

$$x(s) = \frac{k}{T_0^2 s (s - s_1)(s - s_2)},$$

но, так как в силу свойств корней квадратного трехчлена

$$s_1 s_2 = \frac{1}{T_0^2},$$

то

$$x(s) = \frac{k s_1 s_2}{s(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Для определения оригинала  $x(t)$  по его изображению  $x(s)$  ставим это изображение в виде суммы простых дробей, вынеся  $k$  за скобку:

$$x(s) = k \left( \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2} \right) = k \frac{s_1 s_2}{s(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  найдем из тождества

$$A(s-s_1)(s-s_2) + B(s-s_2)s + C(s-s_1)s \equiv s, s_2,$$

последовательно полагая в нем  $s=0$ ,  $s=s_1$  и  $s=s_2$ .

Получим

$$A=1; B = \frac{s_2}{s_1-s_2}; C = -\frac{s_1}{s_1-s_2}.$$

Следовательно,

$$x(s) = k \left( \frac{1}{s} + \frac{s_2}{s_1-s_2} \frac{1}{s-s_1} - \frac{s_1}{s_1-s_2} \frac{1}{s-s_2} \right).$$

Изображениям  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{1}{s-s_1}$  и  $\frac{1}{s-s_2}$  соответствуют оригиналы

$$1, e^{s_1 t}, e^{s_2 t},$$

поэтому переходная характеристика звена

$$x(t) = k \left( 1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \right).$$

Для дальнейшего анализа переходной характеристики звена учтем, что корни собственного оператора, равные

$$s_1 = \frac{-T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_0^2}}{2T_0^2}; \quad s_2 = \frac{-T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_0^2}}{2T_0^2},$$

могут быть вещественными различными ( $s_1 \neq s_2$ ) или равными ( $s_1 = s_2$ ), либо комплексными сопряженными ( $s_1 = \alpha + j\omega_0, s_2 = \alpha - j\omega_0$ ).

1. Случай вещественных различных корней имеет место при  $T_1 > 2T_0$ , а равные корни будут при условии  $T_1 = 2T_0$ .

Из свойств корней вытекает два равенства:

$$s_1 s_2 = \frac{1}{T_0^2}; \quad s_1 + s_2 = -\frac{T_1}{T_0^2}.$$

Из первого следует, что  $s_1$  и  $s_2$  могут быть только одного знака - либо положительные, либо оба отрицательные, так как их произведение положительно. Из второго равенства следует, что  $s_1$  и  $s_2$  при положительном  $T_1$  могут быть только отрицательными.

Обозначим отрицательные вещественные корни

$$s_1 = -\frac{1}{\tau_1}; \quad s_2 = -\frac{1}{\tau_2}; \quad (\tau_1 > 0; \quad \tau_2 > 0),$$

тогда уравнение переходной характеристики примет вид

$$x(t) = k \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right).$$

В начальный момент времени  $t=0$  и  $x(0)=0$ , с течением времени  $x(t)$  увеличивается, стремясь к значению  $k$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k.$$

Таким образом, звено второго порядка, собственный оператор которого имеет вещественные отрицательные корни, что имеет место при  $T_1 > 2T_0$ , является устойчивым. Вид уравнения переходной характеристики показывает, что переходный процесс носит аperiodический характер.

Вид переходной характеристики такого звена показан на рис.2.8, б. В частном случае, когда  $T_1 = 2T_0$  и корни равны  $s_1 = s_2 = s_0$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$ , получим

$$x(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} - \frac{t}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) = k \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau_0} \right) e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right].$$

И в этом случае звено будет устойчивым, так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k.$$

2. Случай комплексных сопряженных корней имеет место при  $T_1 < 2T_0$ , а корни  $s_1 = -\alpha + j\omega_0$ ,  $s_2 = -\alpha - j\omega_0$  имеют отрицательные вещественные части при  $T_1 > 0$ :

Запишем комплексные корни в показательной форме:

$$\alpha = \frac{T_1}{2T_0^2}; \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{4T_0^2 - T_1^2}}{2T_0^2}.$$

Запишем комплексные корни в показательной форме:

$$s_1 = \rho e^{j\varphi}; \quad s_2 = \rho e^{-j\varphi},$$

но

$$s_1 s_2 = \rho^2 = \frac{1}{T_0^2},$$

следовательно,

$$\rho = \frac{1}{T_0}; \quad s_1 = \frac{1}{T_0} e^{j\varphi}; \quad s_2 = \frac{1}{T_0} e^{-j\varphi}.$$

Разность корней  $s_1 - s_2 = 2j\omega_0$ .

Подставляя полученные для  $s_1, s_2$  и  $(s_1 - s_2)$  выражения в общее уравнение переходной характеристики, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= k \left[ 1 + \frac{e^{-j\varphi}}{2j\omega_0 T_0} e^{(-\alpha + j\omega_0)t} - \frac{e^{j\varphi}}{2j\omega_0 T_0} e^{(-\alpha - j\omega_0)t} \right] = \\ &= k \left[ 1 + \frac{1}{\omega_0 T_0} e^{-\alpha t} \frac{e^{j(\omega_0 t - \varphi)} - e^{-j(\omega_0 t - \varphi)}}{2j} \right], \end{aligned}$$

или окончательно

$$x(t) = k \left[ 1 + \frac{1}{\omega_0 T_0} e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \varphi) \right].$$

Полученное выражение показывает, что при  $T_1 < 2T_0$  звено является устойчивым, так как  $x(\infty) = k$ .

Переходный процесс является колебательным с затухающими колебаниями. Частота колебаний определяется только постоянными времени звена и является постоянной:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{4T_0^2 - T_1^2}}{2T_0}.$$

Амплитуда колебаний выходной величины

$$\frac{k}{\omega_0 T_0} e^{-\alpha t}$$

с течением времени уменьшается, стремясь к нулю.

Таким образом, звено второго порядка, постоянные времени которого связаны между собой неравенством  $T_1 < 2T_0$ , является устойчивым колебательным звеном.

Вид переходной характеристики колебательного звена показан на рис.2.8, в.

Найдем уравнения частотных характеристик устойчивых звеньев второго порядка.

Частотная функция

$$W(j\omega) = \frac{k}{T_0^2 (j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1} = \frac{k}{(1 - T_0^2 \omega^2) + jT_1 \omega}.$$

Освободившись от мнимости в знаменателе, найдем

$$W(j\omega) = \frac{k[(1 - T_0^2 \omega^2) - jT_1 \omega]}{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} = u(\omega) + j\vartheta(\omega),$$

отсюда уравнения вещественной и мнимой характеристик

$$u(\omega) = \frac{k(1 - T_0^2 \omega^2)}{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2};$$

$$\vartheta(\omega) = \frac{kT_1 \omega}{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Уравнение амплитудно-частотной характеристики

$$r(\omega) = \sqrt{u^2 + \mathfrak{G}^2} = \frac{k\sqrt{(1 - T_0^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}}{(1 - T_0^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2},$$

или

$$r(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_0^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}}.$$

Уравнение фазовой характеристики

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\mathfrak{G}}{u} = \operatorname{arctg} \left( -\frac{T_1\omega}{1 - T_0^2\omega^2} \right) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{T_1}{\omega}}{\frac{1}{\omega^2} - T_0^2}.$$

Полученные зависимости позволяют построить все частотные характеристики звена, задаваясь значениями  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

Характерные точки характеристик представлены в табл.2.4.

Таблица 2.4

$\omega$	$u(\omega)$	$\mathfrak{G}(\omega)$	$r(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	$k$	0	$k$	0
$\infty$	0	0	0	$-\pi$
$\frac{1}{T_0}$	0	$-\frac{kT_0}{T_1}$	$k\frac{T_0}{T_1}$	$-\frac{\pi}{2}$

Вид амплитудно-фазовой характеристики устойчивого звена второго порядка показан на рис.2.8, г.

В заключение заметим, что передаточную функцию апериодического звена второго порядка можно представить как произведение передаточных функций двух апериодических звеньев первого порядка.

Действительно,

$$W(s) = \frac{k}{T_0^2 s^2 + T_1 s + 1} = \frac{k}{T_0^2 (s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k}{T_0^2 s_1 s_2 \left(-\frac{1}{s_1} s + 1\right) \left(-\frac{1}{s_2} s + 1\right)},$$

но, так как

$$s_1 s_2 = \frac{1}{T_0^2}, \quad -\frac{1}{s_1} = \tau_1, \quad -\frac{1}{s_2} = \tau_2,$$

то

$$W(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = W_1(s)W_2(s),$$

где  $W_1(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1}$ ;  $W_2(s) = \frac{k}{\tau_2 s + 1}$  представляют собой переда-

точные функции звеньев первого порядка с постоянными времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  и коэффициентами усиления, равными  $k$  и 1.

Таким образом, апериодическое звено второго порядка можно рассматривать как сложное звено - сочетание двух звеньев первого порядка.

Устойчивые звенья второго порядка служат математическими моделями ряда элементов систем автоматики: RLC-цепи, электромашинных усилителей, центробежного маятника, электрических двигателей.

#### 2.4.5. Интегрирующее звено

Дифференциальное уравнение идеального интегрирующего звена

$$T_s x(s) = k y(s).$$

Передаточная функция

$$W(s) = \frac{k}{T_s}.$$

Схема звена показана на рис.2.9.

Наименование звена соответствует тому обстоятельству, что выходная величина пропорциональна интегралу от входной величины

$$x(t) = \frac{k}{T} \int_0^t y(t) dt.$$

Найдем реакцию звена на ступенчатое входное воздействие  $y(t) = 1(t)$ . При  $y(s) = \frac{1}{s}$  уравнение звена имеет вид

$$Tsx(s) = \frac{k}{s},$$

откуда

$$x(s) = \frac{k}{Ts^2}.$$

Так как изображению  $s^2$  соответствует оригинал, равный  $t$ , то искомое уравнение переходной характеристики

$$x(t) = \frac{k}{T} t.$$

С течением времени  $t$  выходная величина неограниченно возрастает. Это означает, что звено является неустойчивым, так как имеет расходящийся переходный процесс. Переходная характеристика - прямая с угловым коэффициентом  $\frac{k}{T}$ , проходящая через начало координат (см. рис. 2.9, б).

Звено также называется астатическим, так как выходная величина не имеет установившегося конечного значения.

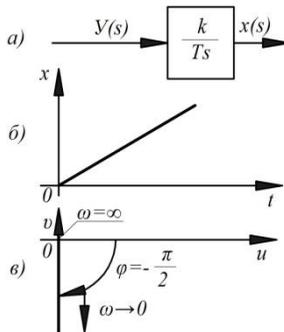


Рис. 2.9

Скорость изменения выходной величины остается постоянной:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{T} = \text{const.}$$

Частотная функция звена

$$W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega} = -j \frac{1}{T\omega},$$

следовательно, вещественная и мнимая частотные характеристики имеют уравнения

$$u(\omega) = 0; \quad \vartheta(\omega) = -\frac{1}{T\omega}.$$

Уравнение амплитудно-частотной характеристики

$$r(\omega) = \sqrt{u^2 + \vartheta^2} = \frac{1}{T\omega}.$$

Уравнение фазово-частотной характеристики

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{\vartheta}{u} = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Из уравнений частотных характеристик следует, что амплитудно-фазовая характеристика звена - прямая, совпадающая с отрицательной ветвью мнимой оси (см.рис.2.9, в). Причем частоте  $\omega = 0$  соответствует точка, лежащая в бесконечности, а частоте  $\omega = \infty$  отвечает точка, совпадающая с началом координат.

Реальные интегрирующие звенья обладают некоторой инерционностью. Дифференциальное уравнение реального интегрирующего звена имеет вид

$$(Ts + 1)sx(s) = ky(s),$$

а передаточная функция

$$W(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}.$$

Такое звено можно рассматривать как сложное звено - сочетание идеального интегрирующего звена и аperiodического звена первого порядка.

Уравнение переходной характеристики реального интегрирующего звена имеет вид

$$x(t) = k \left[ t - T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right].$$

Переходная характеристика показана на рис.2.10. Она имеет асимптоту, уравнение которой

$$x_a = k(t - T),$$

пересекающую ось времени на расстоянии  $T$  от начала координат, и угловой коэффициент, равный  $k$ .

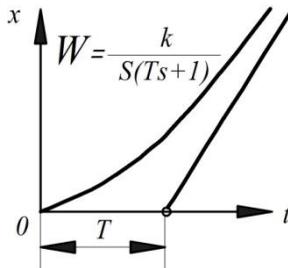


Рис. 2.10

Уравнение частотных характеристик реального интегрирующего звена, а также уравнение его переходной характеристики предлагается получить самостоятельно.

Интегрирующее звено является математической моделью ряда элементов автоматики: гидравлического двигателя, тепловых и электрических машин, если за выходную величину принимать угол поворота ротора, а в некоторых случаях и угловую скорость машины, электрической  $RC$ -цепи при большом, по сравнению с емкостным, омическом сопротивлении ( $R \gg \frac{1}{C\omega}$ ) и выходном напряжении, снимаемом с емкости.

### 2.4.6. Дифференцирующее звено

Уравнение идеального дифференцирующего звена

$$x(s) = kTs y(s),$$

или в обычной форме записи

$$x(t) = kT \frac{dx}{dt},$$

то есть выходная величина пропорциональна производственной входной величины.

В силу свойств производной она как бы "предвосхищает" будущее изменение самой входной величины, что с успехом используется для внесения в систему регулирования воздействия, улучшающих качество процесса регулирования.

При подаче на вход такого звена скачкообразного возмущения в момент  $t = 0$  производная входной величины  $\dot{y}$  обращается в бесконечность, а при  $t < 0$  и  $t > 0$  равна нулю. Следовательно, временная характеристика звена совпадает с положительной ветвью оси ординат (рис. 2.11), однако величина импульса выходной величины  $x\Delta t$  за малый отрезок времени остается конечной. Действительно, записав в конечных приращениях  $x\Delta t = kT\Delta y$  и переходя к пределам, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x\Delta t = k \lim_{\Delta y \rightarrow 1} x\Delta y = kT.$$

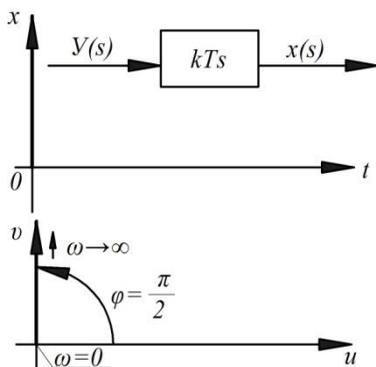


Рис. 2.11

Передаточная функция звена

$$W(s) = kTs.$$

Частотная функция

$$W(j\omega) = jkT\omega.$$

Уравнение вещественной и мнимой характеристик

$$u(\omega) = 0; \quad \vartheta(\omega) = kT\omega.$$

Уравнения амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик

$$r(\omega) = kT\omega; \quad \varphi(\omega) = \arctg \infty = \frac{\pi}{2}.$$

Из этих уравнений следует, что амплитудно-фазовая характеристика звена совпадает с положительной ветвью мнимой оси. Точка, соответствующая частоте  $\omega = 0$ , совпадает с началом, а точка, отвечающая  $\omega = \infty$ , лежит в бесконечности (см. рис. 2.11).

Реальное дифференцирующее звено обладает известной инерционностью и его уравнение имеет вид

$$(Ts + 1)x(s) = ksy(s),$$

а передаточная функция  $W(s) = \frac{ks}{Ts + 1}$ .

При единичном скачкообразном воздействии на входе  $y(s) = \frac{1}{s}$ , поэтому

$$(Ts + 1)x(s) = k,$$

откуда изображение выходной величины

$$x(s) = \frac{k}{Ts + 1} = \frac{k}{T} \cdot \frac{1}{S + \frac{1}{T}}.$$

Следовательно, уравнение переходной характеристики

$$x(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Вид переходной характеристики реального дифференцирующего звена показан на рис.2.12. Она показывает, что при единичном скачкообразном воздействии на выходе звена мгновенно устанавливается выходная величина, равная  $\frac{k}{T}$ , а затем с течением времени она уменьшается по экспоненциальному закону, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , то есть выходной сигнал постепенно исчезает.

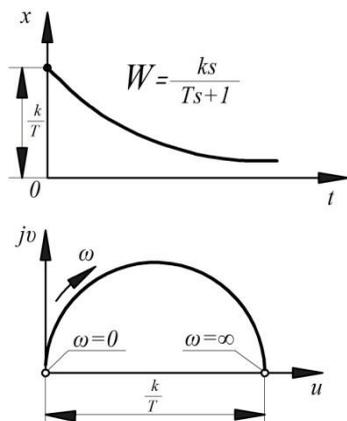


Рис. 2.12

Уравнения частотных характеристик реального дифференцирующего звена предлагается получить самостоятельно. Пользуясь этими уравнениями, можно показать, что амплитудно-фазовая характеристика - полуокружность радиуса  $\frac{k}{2T}$  с центром на вещественной оси, касающаяся мнимой оси (см.рис. 2.12).

Реальное дифференцирующее звено можно рассматривать как сложное звено - сочетание идеального дифференцирующего звена и апериодического звена первого порядка.

Дифференцирующее звено является математической моделью

таких элементов, как тахогенератор, гидравлический катаракт, RC-цепь и другие элементы.

Вид амплитудно-фазовой характеристики дифференцирующего звена (см.рис. 2.12) показывает, что такое звено пропускает с большим усилением сигналы высоких частот и вовсе не пропускает постоянные сигналы ( $\omega = 0$ ), то есть оно может служить фильтром высоких частот.

#### 2.4.7. Логарифмические частотные характеристики. Общие положения

Логарифмическими частотными характеристиками называются амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики, построенные с использованием логарифмических единиц и масштабов.

Логарифмическая **амплитудная** характеристика представляет собой график зависимости логарифма модуля частотной функции от логарифма частоты

$$m \lg R(\omega) = F(\lg \omega).$$

Логарифмическая **фазовая** характеристика представляет собой график зависимости аргумента  $\Phi$  частотной функции от логарифма частоты

$$\varphi = \varphi(\lg \omega).$$

Эти характеристики можно построить для отдельных множителей частотной функции, отдельных звеньев, разомкнутой и замкнутой цепей звеньев, составляющих части системы, и наконец - для разомкнутой и замкнутой системы в целом.

По оси абсцисс той и другой характеристики откладываются логарифмы частот, поэтому шкала оси абсцисс (рис.2.13) является равномерной для логарифмов частот и неравномерной - для самих частот.

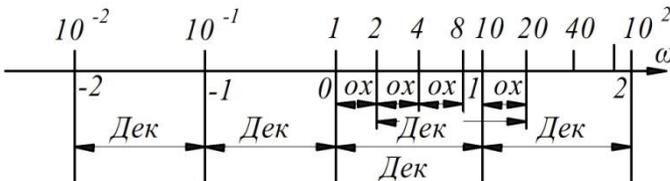


Рис.2.13

Интервал частот, отличающихся одна от другой в 10 раз, десятичный логарифм отношения которых равен, следовательно, единице, называется декадой.

Более мелкой логарифмической единицей отношения частот служит октава - интервал частот, отличающихся одна от другой в два раза. Следовательно,

$$1 \text{ окт} = \lg \frac{\omega_1}{\omega_2} = \lg 2 = 0,301 \text{ дек.}$$

По оси ординат логарифмической фазовой характеристики откладываются фазовые углы  $\varphi$  - значения аргумента частотной функции в градусах (рис.2.14). Следовательно, для углов  $\varphi$  шкала является равномерной.

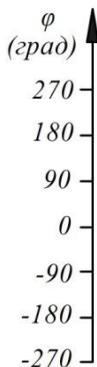


Рис.2.14

По оси ординат логарифмической амплитудной характеристики откладываются значения модуля частотной функции, выраженные в специальных логарифмических единицах, заимствованных из акустики, - децибелах.

Бел является логарифмической единицей отношения мощностей и равен десятичному логарифму отношения двух мощностей, отличающихся одна от другой в 10 раз. Поэтому, если отношение двух мощностей  $P_1$  и  $P_2$  равно  $a$  :

$$\frac{P_1}{P_2} = a,$$

то число  $b$ , равное логарифму этого отношения:

$$b = \lg \frac{P_1}{P_2} = \lg a,$$

выражает отношение этих мощностей в белах.

При  $a = \frac{P_1}{P_2} = 10$  имеем  $b = 1$  бел; при  $a = 10^2$   $b = 2$  бела;

если  $a = 10^6$ , то  $b = 6$  бел и т.д.

Децибел - дольная единица, равная 0,1 бела или 1 бел = 10 дБ. Поэтому отношение двух мощностей, выраженное в децибелах,

$$L = 10b = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} = 10 \lg a.$$

Следовательно, если  $a = 10$ ,  $L = 10$  дБ;

$a = 10^2$   $L = 20$  дБ,  $a = 10^6$   $L = 60$  дБ и т.д.

Известно, что при гармонических колебаниях отношение мощностей колебаний пропорционально отношению квадратов амплитуд:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{B^2}{A^2}.$$

В нашем случае  $B$  - амплитуда выходных колебаний,  $A$  - амплитуда входных колебаний, причем отношение амплитуд равняется модулю частотной функции:

$$\frac{B}{A} = R,$$

поэтому

$$a = \frac{P_1}{P_2} = R^2,$$

Заменяя отношение мощностей в децибелах отношением амплитуд, получим

$$L = 10 \lg a = 10 \lg R^2,$$

или

$$L = 20 \lg R.$$

Таким образом, значение модуля  $R$  частотной функции, выражено в децибелах, равняется увеличенному в 20 раз логарифму модуля.

Значения  $L$  в децибелах и откладываются по оси ординат логарифмической амплитудной характеристики. Шкала модулей частотной функции для значений  $L$  является равномерной (рис. 2.15).

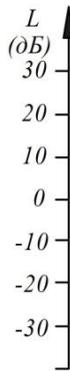


Рис.2.14

Логарифмическая амплитудная характеристика представляет собой, таким образом, зависимость

$$L = L(\lg \omega),$$

или

$$20 \lg R = L(\lg \omega).$$

Имея выражения для элементарных множителей, составим выражения для их модулей  $r_i(\omega)$  и аргументов  $\varphi_j(\omega)$  (табл.2.5).

Пользуясь этими выражениями можно получить уравнения логарифмических частотных характеристик элементарных множителей.

Таблица 2.5

Элементарные множители	$r(\omega)$	$\varphi(\omega)$
$k_p$	$k_p$	0
$Tj\omega$	$T\omega$	$+\frac{\pi}{2}$
$(Tj\omega)^{-1}$	$(T\omega)^{-1}$	$-\frac{\pi}{2}$
$Tj\omega + 1$	$[1 + (T\omega)^2]^{\frac{1}{2}}$	$\arctg T\omega$
$(Tj\omega + 1)^{-1}$	$[1 + (T\omega)^2]^{-\frac{1}{2}}$	$-\arctg T\omega$
$T_0^2(j\omega)^2 + T_1j\omega + 1$	$[(1 - T_0^2\omega^2)^2 + (T_1\omega)^2]^{\frac{1}{2}}$	$\arctg \frac{T_1\omega}{1 - (T_0\omega)^2}$
$[T_0^2(j\omega)^2 + T_1j\omega + 1]^{-1}$	$[(1 - T_0^2\omega^2)^2 + (T_1\omega)^2]^{-\frac{1}{2}}$	$-\arctg \frac{T_1\omega}{1 - (T_0\omega)^2}$

#### 2.4.8. Логарифмические частотные характеристики типовых звеньев

##### Усилительное звено

Для постоянного множителя  $k_p$  имеем уравнение логарифмической амплитудной характеристики

$$L_k = 20 \lg k_p$$

и уравнение логарифмической фазовой характеристики

$$\varphi_k = 0.$$

Первая из этих характеристик - прямая, параллельная оси  $\lg \omega$ , отстоящая от нее на  $k_p$  дБ; вторая - прямая, совпадающая с осью абсцисс (рис. 2.16).

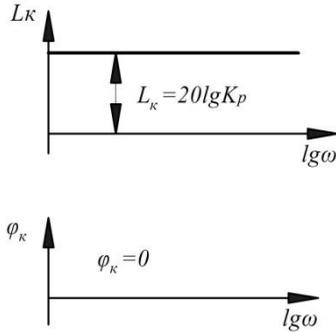


Рис.2.16

*Дифференцирующее и интегрирующее звенья*

Модуль и аргумент элементарного множителя  $Tj\omega$

$$r(\omega) = T\omega; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение логарифмической амплитудной характеристики

$$L = 20 \lg r = 20 \lg \omega + 20 \lg T.$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$tg \alpha = 20 \text{ дБ/дек}$$

и начальной ординатой, равной  $20 \lg T$ , то есть  $T$  дБ.

Абсцисса точки пересечения прямой с осью абсцисс найдется из условия  $L = 0$  или

$$\lg \omega_0 + \lg T = 0,$$

откуда

$$\lg \omega_0 = -\lg T = \lg \frac{1}{T},$$

следовательно

$$\omega_0 = \frac{1}{T}.$$

Логарифмическая фазовая характеристика – прямая

$$\varphi = +\frac{\pi}{2},$$

параллельная оси абсцисс и отстоящая от нее на расстоянии  $+\frac{\pi}{2}$ .

Логарифмические частотные характеристики дифференцирующего звена (множителя  $Tj\omega$ ) показаны на рис.2.17.

Уравнения логарифмических частотных характеристик интегрирующего звена (множителя  $(Tj\omega)^{-1}$ )

$$L = -20\lg\omega - 20\lg T; \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, логарифмические частотные характеристики множителя  $(Tj\omega)^{-1}$  являются зеркальным изображением соответствующих характеристик множителя  $Tj\omega$  относительно оси абсцисс (рис. 2.18).

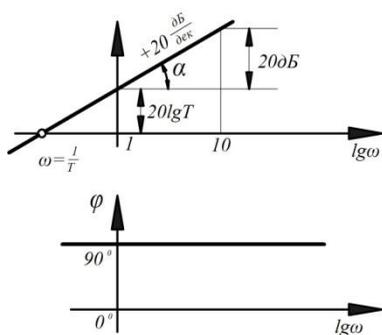


Рис.2.17

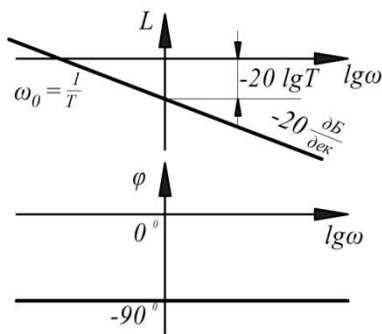


Рис.2.18

### **Форсирующее и апериодическое звенья первого порядка**

Модуль и аргумент множителя  $Tj\omega + 1$  - форсирующего звена

$$r(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctg T\omega$$

Уравнение логарифмической амплитудной характеристики

$$L = 20 \lg r = 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}.$$

Эта характеристика представляет собой некоторую кривую (рис. 2.19) и может быть построена по точкам. Логарифмическая фазовая характеристика, также кривая, соответствующая уравнению

$$\varphi = \arctg T\omega,$$

показана на том же рисунке.

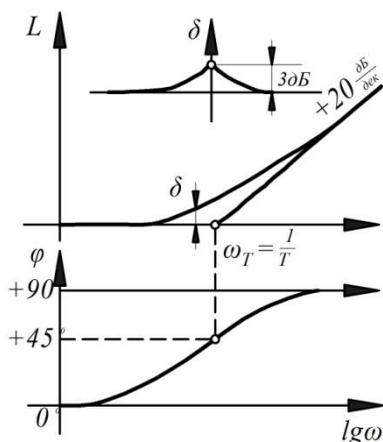


Рис.2.19

Построение логарифмической амплитудной характеристики существенно упрощается, так как она имеет две асимптоты. Найдем уравнения этих асимптот.

Первую из асимптот получим для низких частот, полагая  $T^2 \omega^2 \ll 1$ . Тогда уравнение низкочастотной асимптоты можно записать в виде

$$L'_a = 0.$$

Это означает, что низко-частотная асимптота совпадает с осью абсцисс.

Вторую асимптоту получим для высоких частот, полагая

$T^2\omega^2 \gg 1$ . Тогда, пренебрегая единицей по сравнению с  $T^2\omega^2$ , найдем

$$L'_a = 20\lg T\omega = 20\lg\omega + 20\lg T.$$

Это прямая, имеющая наклон 20 дБ/дек.

Найдем абсциссу точки пересечения асимптот из условия

$$L'_a = L''_a \text{ или}$$

$$20\lg\omega_T + 20\lg T = 0,$$

откуда

$$\omega_T = \frac{1}{T}.$$

Частота  $\omega_T$ , определяющая абсциссу точки пересечения асимптот, называется сопрягающей частотой или частотой сопряжения асимптот.

Ломаная, образованная асимптотами логарифмической амплитудной характеристики, носит название асимптотической логарифмической амплитудной характеристики.

Точка пересечения асимптот называется точкой излома асимптотической характеристики. Поэтому частоту сопряжения  $\omega_T$  называют также **частотой излома**.

Асимптотическую характеристику можно рассматривать как приближенную логарифмическую характеристику.

Наличие асимптот логарифмической амплитудной характеристики дает возможность существенно упростить построение точной характеристики. Действительно, точную характеристику можно получить, вычислив поправки  $\delta$  (рис.2.20) к ординатам асимптотической характеристики.

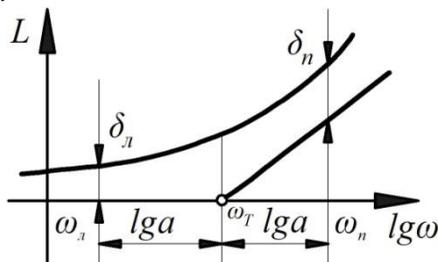


Рис.2.20

Поправка  $\delta$  равняется разности ординат точной и асимптотической характеристики:

$$\delta = L - L_a.$$

Для частот, меньших частоты излома  $\omega_T$ , то есть для точек слева от точки излома, имеем  $L'_a = L_a = 0$ , поэтому

$$\delta_{\text{л}} = L = 20\lg \sqrt{1 + (T\omega_{\text{л}})^2} = 20\lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{л}}}{\omega_T}\right)^2}.$$

Для частот, больших частоты излома, то есть для точек, лежащих справа от точки излома, имеем

$$L_a = L''_a = 20\lg T\omega_{\text{п}} = 20\lg \frac{\omega_{\text{п}}}{\omega_T};$$

$$L = 20\lg \sqrt{1 + (T\omega_{\text{п}})^2} = 20\lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega_T}\right)^2},$$

следовательно, поправка справа

$$\delta_{\text{п}} = 20\lg \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega_T}\right)^2}}{\left(\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega_T}\right)} = 20\lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_{\text{п}}}\right)^2}.$$

Покажем, что для равных интервалов частот  $\lg a$  (рис. 2.20) справа и слева от точки излома поправки симметричны, то есть  $\delta_{\text{л}} = \delta_{\text{п}}$ . В самом деле,

$$\lg \omega_T - \lg \omega_{\text{л}} = \lg a, \quad \frac{\omega_T}{\omega_{\text{л}}} = a,$$

$$\lg \omega_{\text{п}} - \lg \omega_T = \lg a, \quad \frac{\omega_{\text{п}}}{\omega_T} = a.$$

Подставляя в выражения для поправок слева и справа отношения частот, получим

$$\delta_{\text{л}} = 20\lg\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}; \quad \delta_{\text{п}} = 20\lg\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}},$$

следовательно,  $\delta_{\text{л}} = \delta_{\text{п}}$ , то есть

$$\delta = 20\lg\frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}.$$

По полученному уравнению можно построить кривую поправок (см.рис.2.19, 2.22, 2.23) к ординатам асимптотической характеристики. Кривая поправок симметрична относительно точки излома. Прибавляя эти поправки к ординатам асимптотической характеристики, получим ординаты точной характеристики:

$$L = L_a + \delta.$$

Наибольшее значение поправки соответствует точке излома, где  $\lg a = 0$ ,  $a = 1$ :

$$\delta_{\text{max}} = 20\lg\frac{\sqrt{1+1}}{1} = 20\lg\sqrt{2} = 10\lg 2 = 3 \text{ дБ}.$$

Для интервала частот, равного октаве, то есть при  $a = 2$ , получим

$$\delta_{\text{окт}} = 20\lg\frac{\sqrt{1+2^2}}{2} = 10\lg 5 - 20\lg 2 = 1 \text{ дБ}.$$

Наконец, для интервала частот, равного одной декаде, или  $a = 10$ , найдем

$$\delta_{\text{дек}} = 20\lg\frac{\sqrt{1+10^2}}{10} = 10\lg 101 - 20\lg 10 = 0,04 \text{ дБ}.$$

Для удобства суммирования поправок с ординатами асимптотической характеристики кривую поправок следует строить над точкой излома асимптотической характеристики в том же масштабе, в каком строится логарифмическая амплитудная характеристика, как это показано на рис.2.19, 2.22.

Логарифмическая фазовая характеристика множителя  $Tj\omega + 1$ , показанная на рис.2.19, представляет собой график арктангенса, соответствующий уравнению

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_T},$$

построенный в полулогарифмических координатах.

Очевидно, при  $\omega \rightarrow 0$   $\varphi \rightarrow 0$ , при  $\omega \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , то есть характеристика располагается между двумя параллельными прямыми  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , которые служат асимптотами кривой.

В точке излома имеем  $\omega = \omega_T$ , поэтому

$$\varphi_T = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ.$$

При логарифмической шкале оси абсцисс характеристика имеет один и тот же вид для всех множителей, независимо от значений  $T$ . Влияние  $T$  отражается лишь на положении средней точки характеристики, которая имеет абсциссу, равную  $\lg \omega_T$ .

Это обстоятельство дает возможность использовать для построения логарифмической фазовой характеристики один общий для всех множителей  $Tj\omega + 1$  шаблон, построенный в выбранных масштабах  $\lg \omega$  и  $\varphi$ .

Множитель  $(Tj\omega + 1)^{-1}$  аperiodического звена первого порядка, обратный рассмотренному, имеет модуль

$$r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}},$$

следовательно, уравнение логарифмической амплитудной характеристики имеет

$$L = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2},$$

то есть отличается от соответствующего уравнения для множителя  $(Tj\omega + 1)$  только знаком.

Точно так же аргумент

$$\varphi = -\arctg T\omega$$

отличается лишь знаком.

Поэтому логарифмические частотные характеристики множителя  $(Tj\omega + 1)^{-1}$  представляют собой зеркальное относительно абсцисс отражение логарифметических частотных характеристик множителя  $Tj\omega + 1$  (Рис. 2.21).

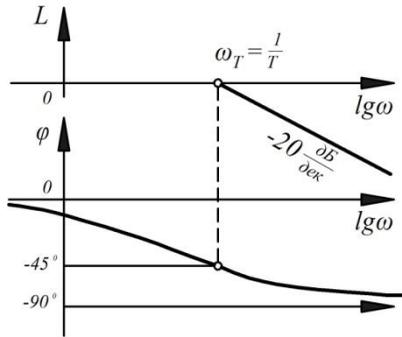


Рис.2.21

### ***Апериодические звенья второго порядка***

В случае, когда трехчлен  $T_0^2 s^2 + T_1 s + 1$  имеет вещественные корни  $T_1 \geq 2T_0$ , его можно представить в виде произведения

$$(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1),$$

где  $\tau_1 = -\frac{1}{s_1}$ ;  $\tau_2 = -\frac{1}{s_2}$ ,  $s_1$  и  $s_2$  - корни трехчлена.

Соответственно множитель  $T_0^2(j\omega)^2 + T_1j\omega + 1$  заменяется произведением двух более простых множителей

$$(\tau_1j\omega + 1)(\tau_2j\omega + 1),$$

модули которых равняются

$$r_1 = \sqrt{1 + \tau_1^2\omega^2}; \quad r_2 = \sqrt{1 + \tau_2^2\omega^2},$$

а аргументы

$$\varphi_1 = \arctg\tau_1\omega; \quad \varphi_2 = \arctg\tau_2\omega.$$

Модуль множителя  $T_0^2(j\omega)^2 + T_1j\omega + 1$  будет равняться произведению модулей  $r_1$  и  $r_2$ :

$$r_1 = r_2.$$

Логарифмируя в децибелах, получим

$$20\lg r = 20\lg r_1 + 20\lg r_2,$$

или

$$L = L_1 + L_2.$$

Аргумент рассматриваемого множителя равен сумме аргументов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Следовательно, для получения логарифмических частотных характеристик множителя  $T_0^2(j\omega)^2 + T_1j\omega + 1$  при  $T_1 \geq 2T_0$  достаточно построить логарифмические частотные характеристики множи-

телей  $\tau_1 j\omega + 1$  и  $\tau_2 j\omega + 1$ , а затем просуммировать их ординаты (рис.2.22).

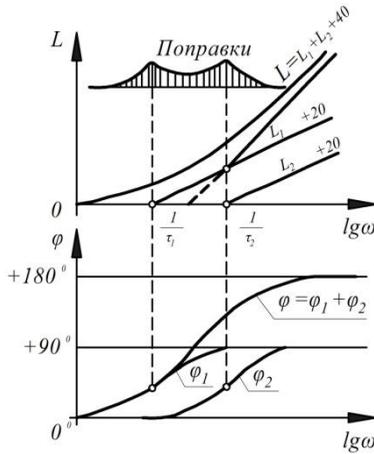


Рис.2.22

Логарифмическая амплитудная характеристика имеет две асимптоты, одна из которых - низкочастотная - совпадает с осью абсцисс, а вторая - высокочастотная - имеет наклон, равный 40 дБ/дек.

Для обратного множителя  $[T_0^2(j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1]^{-1}$  характеристики будут представлять зеркальное относительно оси абсцисс отражение.

В том случае, когда  $T_0^2 s^2 + T_1 s + 1$  имеет комплексные корни  $T_1 < 2T_0$ , представлять его в виде произведения двух сомножителей нецелесообразно. Поэтому выражения для модуля и аргумента множителя  $T_0^2(j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1$  запишем в полном виде

$$r = \sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{T_1 \omega}{1 - T_0^2 \omega^2}.$$

Следовательно, уравнение логарифмической амплитудной характеристики будет иметь вид

$$L = 20 \lg \sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Найдем уравнения асимптот для этой характеристики. Для области низких частот, пренебрегая членом  $T_0^2 \omega^2$  по сравнению с единицей, а затем членом  $T_1^2 \omega^2$ , получим  $L'_0 = 0$ .

Это прямая, совпадающая с осью абсцисс.

Для области высоких частот, пренебрегая единицей по сравнению с  $T_0^2 \omega^2$ , а затем членом  $T_1^2 \omega^2$  по сравнению с  $T_0^4 \omega^4$ , получим

$$L''_0 = 20 \lg \sqrt{T_0^4 \omega^4} = 20 \lg T_0^2 \omega^2 = 40 \lg T_0 \omega,$$

или

$$L''_0 = 40 \lg \omega + 40 \lg T_0.$$

Это прямая, имеющая наклон  $tg \alpha = 40$  дБ/дек, пересекающая ось абсцисс в точке с абсциссой

$$\lg \omega_T = -\lg T_0 = \lg \frac{1}{T_0},$$

то есть при  $\omega_T = \frac{1}{T}$ .

Точка пересечения асимптот представляет собой точку излома, а частота  $\omega_T = \frac{1}{T_0}$  - частоту излома.

Вид асимптотической характеристики множителя показан на рис.2.23.

Для построения точной характеристики найдем выражение для поправки  $\delta$  к ординатам асимптотической характеристики для частот, меньших частоты излома, то есть для точек слева от точки излома:

$$\delta = L - L'_0 = 20 \lg \sqrt{(1 - T_0^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2};$$

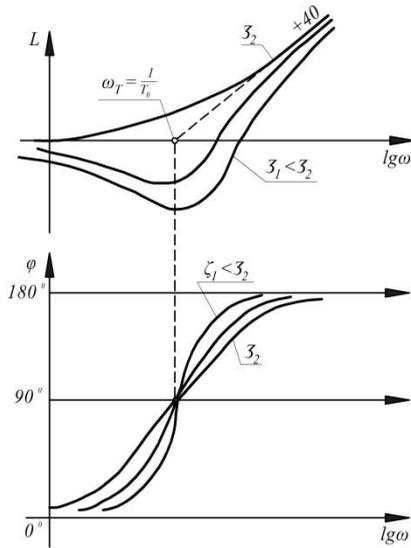


Рис.2.23

где  $\omega \leq \omega_T$ .

Обозначим отношение  $\frac{T_1}{2T_0}$  через  $\xi$ :

$$\xi = \frac{T_1}{2T_0},$$

причем  $\xi < 1$ , так как  $T_1 < 2T_0$ , тогда

$$\delta = 20 \lg \sqrt{\left(1 - T_0^2 \omega^2\right)^2 + 4T_0^2 \xi^2 \omega^2}$$

и после замены  $T_0$  на  $\frac{1}{\omega_T}$  получим

$$\delta = 20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_T^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_T^2}}.$$

Выражая отношение частот в логарифмических единицах

$$\lg \frac{\omega_T}{\omega} = \lg \omega_T - \lg \omega = \lg a; \quad a = \frac{\omega_T}{\omega},$$

получим

$$\delta = 20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{1}{a^2}}. \quad (2.1)$$

Можно показать, что для точек справа от точки излома выражение для поправки аналогично, то есть поправки симметричны относительно точки излома.

Величина поправки зависит не только от интервала частот  $a$ , но и от коэффициента  $\xi$ :

$$\delta = \delta(a, \xi),$$

поэтому кривые поправок представляются семейством с параметром  $\xi$  (см. рис. 2.23). Величина поправки в точке излома найдется при  $a = 1$  ( $\lg a = 0$ ):

Эта поправка, зависящая от  $\xi$ , является максимальной только для некоторых значений  $\xi$ .

Для построения кривых поправок существуют шаблоны, рассчитанные по уравнению (2.1). Каждый шаблон отвечает одному значению  $\xi$ .

С учетом поправок логарифмические амплитудные характеристики множителя  $T_0^2(j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1$  имеют вид, показанный на рис. 2.23, причем вид кривой зависит от относительного коэффициента демпфирования  $\xi$ .

Логарифмическая фазовая характеристика множителя  $T_0^2(j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1$  определяется уравнением

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{T_1 \omega}{1 - T_0^2 \omega^2},$$

или

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2T_0 \xi \omega}{1 - T_0^2 \omega^2} = \operatorname{arctg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_T}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_T}\right)^2}.$$

Она представляется семейством кривых с параметром  $\xi$  (см. рис. 2.23).

В точке излома  $\omega = \omega_T$ , поэтому  $\varphi_T = 90^\circ$ , при  $\omega_T \rightarrow 0$  имеем  $\varphi \rightarrow 0$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow 180$ . Следовательно, характеристика располагается между двумя параллельными асимптотами  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 180^\circ$ .

Для упрощения построения логарифмической фазовой характеристики множителя  $T_0^2(j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1$  используется набор шаблонов. Каждый шаблон строится по уравнению (2.1) для определенного значения  $\xi$ .

Множитель  $[T_0^2(j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1]^{-1}$ , обратный отношению к рассмотренному, имеет логарифмические частотные характеристики, являющиеся зеркальным относительно оси абсцисс изображением характеристик, показанных на рис.2.23.

### Вопросы для самоконтроля

1. Понятие о типовых звеньях.
2. Классификация звеньев, их уравнения и передаточные функции.
3. Передаточные и частотные характеристики звеньев.
4. Методы аналитического и экспериментального построения частотных характеристик.
5. Основные характеристики и свойства звеньев: пропорционального, апериодических первого и второго порядка, интегрирующего и дифференциального.
6. Понятие о логарифмических частотных характеристиках.
7. Логарифмические частотные характеристики типовых звеньев.

### Глава 3

## ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ. АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 3.1. Понятие о структурной схеме

Система автоматического регулирования может быть представлена не только как совокупность ее физических функциональных элементов, но и как совокупность типовых звеньев - математических моделей ее элементов, отражающих динамические свойства последних.

Условное изображение системы автоматического регулирования, представленной типовыми звеньями с обозначением их передаточных функций и изображений переменных, называется *структурной схемой* системы.

Основой структурной схемы является схема звена - условное изображение звена с обозначением его передаточной функции входной и выходной переменных (см.рис.2.1).

Для составления структурной схемы необходимо, пользуясь дифференциальными уравнениями элементов или их передаточными функциями, выяснить, какими типовыми звеньями можно представить отдельные элементы системы, составить схемы звеньев, а затем соединить их между собой в соответствии с уравнениями элементов так, чтобы входные и выходные величины звеньев были согласованы.

Очевидно, блоки структурной схемы будут соответствовать не физическим элементам, как на функциональной схеме, а таким частям системы, которые представляются типовыми звеньями. Некоторые элементы, описываемые уравнениями, совпадающими с уравнениями типовых звеньев, представляются типовыми звеньями непосредственно. Другие элементы, уравнения которых отличаются от уравнений типовых звеньев, всегда можно представить как связанные определенным образом типовые звенья; эти связи устанавливаются по уравнениям элементов. Наконец, одним типовым звеном может быть представлена группа элементов.

Поскольку структурная схема системы автоматического регулирования составляется по дифференциальным уравнениям элементов, то ее можно рассматривать как условное изображение системы уравнений процесса регулирования.

*Структурная схема дает возможность определить передаточные функции системы по всем внешним по отношению к системе воздействиям, не прибегая к алгебраическим операциям над уравнениями элементов.* Это достигается благодаря тому, что структурная схема допускает такие преобразования, которые эквивалентны алгебраическим действиям над уравнениями элементов.

Преобразования структурных схем и алгебраические действия над уравнениями элементов взаимно дополняют друг друга, обеспечивая полноту контроля правильности как структурных, так и алгебраических преобразований.

### **3.2. Представление уравнений элементов элементарными структурами типовых звеньев**

Простейшим является случай, когда уравнение элемента совпадает с уравнением типового звена. В этом случае не требуется расчленять элемент на типовые звенья, так как элемент в целом представляется типовым звеном. Например, если уравнение элемента и его передаточная функция имеют вид

$$(Ts + 1)x(s) = ky(s); \quad W(s) = \frac{k}{Ts + 1},$$

то есть совпадают с уравнением и передаточной функцией аperiodического звена первого порядка, то схема такого звена очевидна (см. рис. 2.1).

Наиболее важен случай, когда к элементу приложены два воздействия. Тогда в общей форме уравнение элемента имеет

$$d(s)x(s) = q_1(s)y_1(s) + q_2(s)y_2(s).$$

Пусть при этом собственный оператор элемента  $d(s)$ , а также операторы воздействий  $q_1(s)$  и  $q_2(s)$  совпадают с какими-либо операторами типовых звеньев, тогда передаточные функции элемента по воздействиям  $y_1$  и  $y_2$

$$W_1(s) = \frac{q_1(s)}{d(s)}; \quad W_2(s) = \frac{q_2(s)}{d(s)},$$

будут совпадать с передаточными функциями соответствующих типовых звеньев, а изображение выходной величины может быть записано в виде

$$x(s) = W_1(s)y_1(s) + W_2(s)y_2(s). \quad (3.1)$$

Слагаемые правой части можно рассматривать как две составляющие  $X_1$  и  $X_2$  выходной величины  $X(s)$ , то есть

$$x(s) = x_1(s) + x_2(s),$$

причем

$$x_1(s) = W_1(s)y_1(s); \quad x_2(s) = W_2(s)y_2(s).$$

Последние два соотношения можно представить схемами типовых звеньев (рис.3.1, а) Но так как выходные величины этих звеньев суммируются, то весь элемент представляется двумя типовыми звеньями и сумматором (см. рис. 3.1, б).

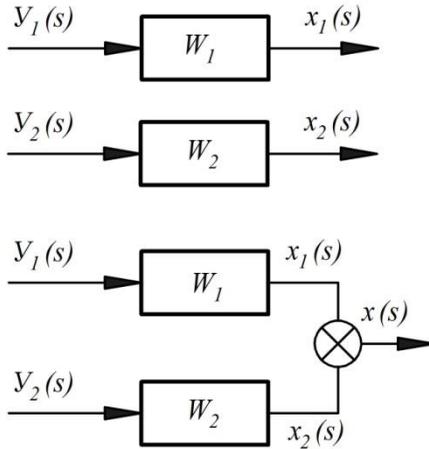


Рис.3.1

Выражение (3.1) позволяет представить элемент другими элементарными структурами (блок-схемами).

Если переписать уравнение, вынеся за скобку, например  $W_1(s)$ :

$$x(s) = W_1(s) \left[ y_1(s) + \frac{W_2(s)}{W_1(s)} y_2(s) \right],$$

то выражение в скобках можно рассматривать как некоторую величину

$$y(s) = y_1(s) + \frac{W_2(s)}{W_1(s)} y_2(s),$$

а изображение выходной величины элемента записать в виде

$$x(s) = W_1(s)y(s)$$

и представить это уравнение блок-схемой рис.3.2,а.

В свою очередь, выражение для  $y(s)$  представляется блок-схемой рис.3.2, б. Учитывая, что выходная величина в этой блок-схеме  $y(s)$  является входной для блок-схемы рис. 3.1, а, получаем окончательно блок-схему элемента в форме, показанной на рис.3.2, в.

Наконец, вынеся за скобки в выражении (3.1) величину  $W_2(s)$ :

$$x(s) = W_2(s) \left[ \frac{W_1(s)}{W_2(s)} y(s) + y_2(s) \right],$$

можно составить по этому уравнению еще одну блок-схему (составить самостоятельно).

Таким образом, один и тот же элемент может быть представлен различными блок-схемами.

В качестве конкретного примера представим блок-схемами типовых звеньев уравнение двигателя

$$(Ts + 1)\omega(s) = k_z Z(s) - k_m m(s),$$

или

$$\omega(s) = \frac{k_z}{Ts + 1} Z(s) - \frac{k_m}{Ts + 1} m(s). \quad (3.2)$$

В последнем выражении дроби перед изображениями воздействий представляют собой передаточные функции двигателя:

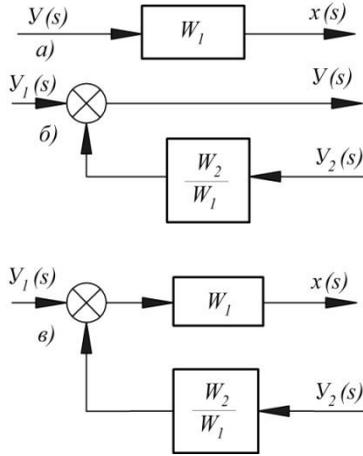


Рис. 3.2

- по регулируемому воздействию  $Z$

$$W_z = \frac{k_z}{Ts + 1};$$

- по моменту сил сопротивления  $m$  (по нагрузке)

$$W_m = \frac{k_m}{Ts + 1}$$

соответствующие аperiodическим звеньям первого порядка.

Следовательно, в соответствии с равенством (3.2) двигатель может быть представлен блок-схемами двух аperiodических звеньев первого порядка, соединенных сумматором (рис.3.3).

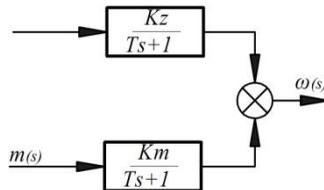


Рис. 3.3

В ряде случаев уравнение элемента требует представления его блок-схемами типовых звеньев в связи с тем, что собственный оператор элемента является сложным и не совпадает ни с одним из типовых собственных операторов. Например, уравнение двигателя, выходной величиной которого является не угловая скорость, а угол поворота ротора, при одном входном воздействии имеет вид

$$(Ts + 1)s\alpha(s) = kZ(s),$$

где  $\alpha(s)$  - изображение угла поворота, а  $s\alpha(s) = \omega(s)$ , так как  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ .

Собственный оператор двигателя  $(Ts + 1)s$  можно рассматривать как сложный оператор, представляющий собой произведение двух типовых операторов  $(Ts + 1)$  и  $s$ .

Передаточная функция элемента

$$W(s) = \frac{\alpha(s)}{Z(s)} = \frac{k}{(Ts + 1)s}$$

может быть представлена как произведение передаточных функций двух простых типовых звеньев: интегрирующего

$$W_1(s) = \frac{1}{s} = \frac{x_1(s)}{Z(s)}$$

и апериодического звена первого порядка

$$W_2(s) = \frac{k}{Ts + 1} = \frac{\alpha(s)}{x_1(s)},$$

где  $x_1(s)$  - изображение некоторой промежуточной переменной.

Таким образом,

$$W(s) = \frac{\alpha(s)}{Z(s)} = \frac{x_1(s)}{Z(s)} \cdot \frac{\alpha(s)}{x_1(s)} = W_1(s)W_2(s).$$

Каждое уравнение типовых звеньев

$$x_1 = \frac{1}{s} Z(s), \quad \alpha = \frac{k}{Ts+1} x_1(s)$$

представляется схемами, показанными на рис.3.4, а, но, так как выход первого звена является входом для второго, то окончательно элемент представляется двумя типовыми звеньями, соединенными последовательно (см. рис.3.4, б).

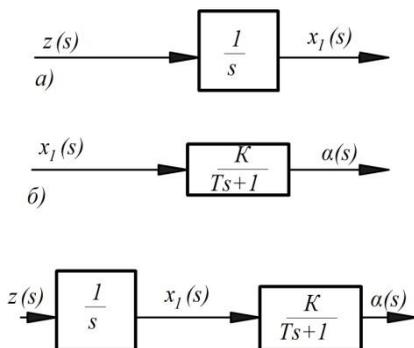


Рис.3.4

### 3.3. Составление структурной схемы САР

Порядок составления структурной схемы удобнее всего рассмотреть на конкретном примере. Сделаем это для системы автоматического регулирования скорости вращения электродвигателя постоянного тока, принципиальная схема которой представлена на рис. 1.7, а функциональная схема, составленная по принципиальной схеме, - на рис. 3.5.

На функциональной схеме обозначены малые отклонения переменных от их установившихся значений на некотором режиме, вблизи которого изучается движение системы.

Внешними для системы воздействиями являются изменение момента сил сопротивления  $m$ , приложенного к ротору двигателя, то есть механической нагрузки двигателя, и изменение задающего воздействия  $U_0$  - эталонного напряжения, подаваемого с потенциометра  $П$ .

Функциональная схема показывает, какие переменные должны связать уравнения элементов. Эти уравнения будут следующие:

- уравнение электродвигателя

$$(T_{\partial}s + 1)\omega(s) = k_U U_z(s) - k_m m(s);$$

- уравнение генератора

$$(T_{\Gamma}s + 1)U_{\Gamma}(s) = k_{\Gamma}U_B(s);$$

- уравнение электронного усилителя

$$U_B(s) = k_y U_y(s);$$

- уравнение тахогенератора

$$U_T(s) = k_T \omega(s);$$

- уравнение сравнивающего устройства

$$U_y(s) = U_o(s) - U_T(s).$$

Уравнения записаны в изображениях малых отклонений переменных (в абсолютных или безразмерных величинах).

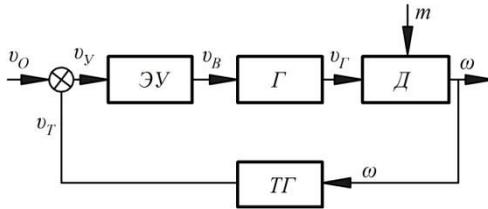


Рис.3.5

Все элементы системы, исключая двигатель, имеют уравнения, совпадающие с уравнениями типовых звеньев, и непосредственно представляются соответствующими типовыми звеньями: генератор - типовым апериодическим звеном первого порядка, а электронный усилитель и тахогенератор – пропорциональными звеньями.

Электродвигатель как элемент, имеющий два входа, представляется блок-схемой из двух апериодических звеньев первого порядка, соединенных сумматором, причем передаточные функции двигателя имеют вид:

- по напряжению на зажимах двигателя

$$W_U(s) = \frac{k}{T_\partial s + 1};$$

- по нагрузке

$$W_m(s) = \frac{k_m}{T_\partial s + 1}.$$

Передаточные функции остальных звеньев очевидны из уравнений элементов:

- для генератора

$$W_\Gamma(s) = \frac{k_\Gamma}{T_\Gamma s + 1};$$

- для электронного усилителя

$$W_y(s) = k_y;$$

- для тахогенератора

$$W_T(s) = k_T.$$

В зависимости от способа представления двигателя той или иной блок-схемой типовых звеньев (см.рис.3.1,3.2 и 3.3) можно составить различные структурные схемы рассмотренной системы автоматического регулирования. Две из них показаны на рис.3.б.

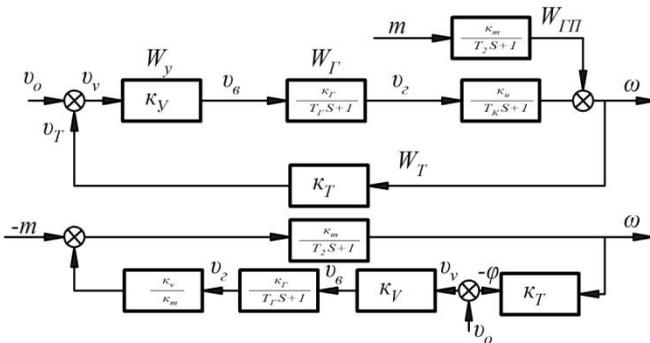


Рис.3.6

Полученные структурные схемы являются одноконтурными. При более сложных связях между переменными схемы могут быть и многоконтурными.

### 3.4. Передаточные функции простейших соединений звеньев

Структурная схема системы автоматического регулирования представляет собой сложную одно- или многоконтурную цепь связанных между собой звеньев. Эта цепь образуется за счет простейших соединений звеньев, образующих элементарные цепи. Такими простейшими соединениями являются:

- последовательное;
- параллельное;
- с охватом обратной связью.

Каждому виду соединения отвечает определенная зависимость передаточной функции элементарной цепи от передаточной функции ее звеньев.

Найдем эти зависимости для всех трех видов соединений.

Последовательное соединение звеньев показано на рис.3.7.

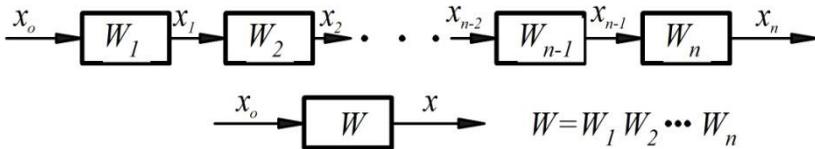


Рис.3.7

Звенья образуют разомкнутую цепь, причем входной для цепи величиной является входная для первого звена величина  $X_0$ , а выходной величиной цепи служит выходная величина  $X_n$   $n$ -го звена, если цепь состоит из  $n$  последовательно соединенных звеньев.

Передаточная функция такой системы звеньев есть отношение изображения  $x_n(s)$  выходной величины цепи к изображению  $x_0(s)$  входной величины

$$W(s) = \frac{x_n(s)}{x_0(s)}.$$

В свою очередь, передаточные функции звеньев цепи

$$W_1 = \frac{x_1(s)}{x_2(s)}; \quad W_2 = \frac{x_2(s)}{x_1(s)}; \dots; \quad W_n = \frac{x_n(s)}{x_{n-1}(s)}.$$

Перемножая передаточные функции звеньев, получим

$$W_1 W_2 \dots W_n = \frac{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n}{x_0 x_1 x_2 \dots x_{n-1}} = \frac{x_n(s)}{x_0(s)}.$$

Следовательно, передаточная функция цепи последовательно соединенных звеньев равняется произведению передаточных функций всех звеньев цепи:

$$W(s) = W_1 W_2 \dots W_n = \prod_{i=1}^n W_i.$$

Из этого следует, что любая последовательная цепь звеньев структурной схемы может быть заменена одним эквивалентным звеном с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций соответствующих звеньев.

Параллельное соединение звеньев показано на рис.3.24, 3.25.

Звенья образуют разомкнутую цепь, причем входная величина  $u$  является общей для всех звеньев, а выходная величина цепи  $x$  представляет собой сумму выходных величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  всех звеньев.

Передаточная функция цепи

$$W(s) = \frac{x(s)}{y(s)},$$

причем

$$x(s) = x_1(s) + x_2(s) + \dots + x_n(s).$$

Передаточные функции отдельных звеньев

$$W_1 = \frac{x_1(s)}{y(s)}; \quad W_2 = \frac{x_2(s)}{y(s)}; \dots; \quad W_n = \frac{x_n(s)}{y(s)}.$$

Складывая передаточные функции звеньев, получим

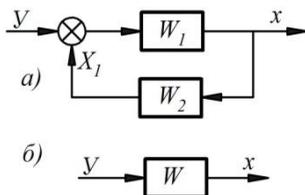
$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{y} = \frac{x(s)}{y(s)}.$$

Следовательно, передаточная функция цепи параллельных звеньев равняется сумме передаточных функций всех звеньев цепи

$$W(s) = W_1 + W_2 + \dots + W_n = \sum_{i=1}^n W_i.$$

Отсюда следует, что любая параллельная цепь звеньев структурной схемы может быть заменена одним эквивалентным звеном с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций соответствующих звеньев.

Соединение с охватом обратной связью показано на рис.3.8. Охваченным обратной связью звеном является звено  $W_1$ , а охватывающим - звено обратной связи  $W_2$ . Звенья образуют замкнутую цепь. Входной величиной цепи служит величина  $y$ , выходной - величина  $x$ . Одновременно величина  $x$  является входной для звена  $W_2$  обратной связи, которое преобразует ее в величину  $x_1$ . Величина  $x_1$  либо суммируется с величиной  $y$ , либо вычитается из нее. Таким образом, входной для звена  $W_1$  величиной является переменная  $x_2 = y \pm x_1$ .



$$W = \frac{W_1}{1 \pm W_1 W_2}$$

Рис.3.8

В том случае, когда величины  $y$  и  $x_1$  суммируются, обратная связь называется положительной, если не  $x_1$  вычитается из  $y$ , то обратная связь называется отрицательной.

Из сказанного следует, что передаточные функции звеньев цепи равняются

$$W_1(s) = \frac{x(s)}{x_2(s)} = \frac{x(s)}{y(s) \pm x_1(s)}; \quad W_2 = \frac{x_1(s)}{x(s)}.$$

Передаточная функция цепи с обратной связью

$$W(s) = \frac{x(s)}{y(s)}.$$

Это отношение найдем, исключая из двух равенств величину  $x_1(s)$ . В результате получим

$$W(s) = \frac{W}{1 \mp W_1 W_2},$$

где положительной обратной связи соответствует знак минус, а отрицательной - плюс.

Таким образом, передаточная функция замкнутой цепи звеньев с охватом обратной связью равняется передаточной функции охватываемого звена, деленной на сумму или разность единицы и произведения передаточных функций охватываемого звена и звена обратной связи.

Из этого следует, что соединение звеньев с охватом обратной связью может быть заменено эквивалентным звеном с передаточной функцией, определяемой формулой (3.3) (см. рис.3.8, б).

В частном случае, когда  $W_2 = 1$ , обратная связь называется единичной и цепь имеет вид, показанный на рис.3.9, а эквивалентное звено, заменяющее цепь, имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{W_1}{1 \mp W_1}.$$

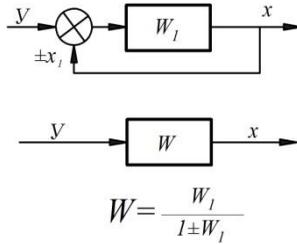


Рис. 3.9

Наконец, когда охватываемое звено имеет передаточную функцию  $W_1 = 1$ , то цепь может быть заменена эквивалентным звеном передаточной функции

$$W(s) = \frac{1}{1 \mp W_2}$$

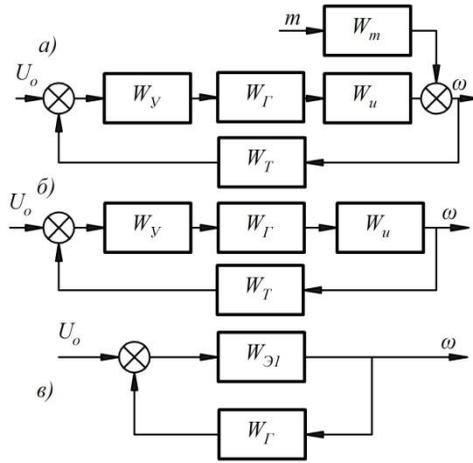
Полученные зависимости для трех видов соединений звеньев используются при преобразованиях сложных структурных схем и дают возможность заменять отдельные цепи соответствующего вида эквивалентными звеньями.

### 3.5. Передаточные функции одноконтурной замкнутой САР

Для определения передаточной функции одноконтурной замкнутой системы по какому-либо из внешних воздействий необходимо, полагая равными нулю все остальные внешние воздействия, свести ее структурную схему к простейшей цепи эквивалентных звеньев.

Выполним это преобразование для структурной схемы системы автоматического регулирования скорости вращения электродвигателя, показанной на рис.3.6, представив ее для сокращения записей в виде рис.3.10,а.

Для определения передаточной функции системы по задающему напряжению  $U_0$  положим  $m = 0$ , тогда структурная схема, подлежащая преобразованию, примет вид рис.3.10, б.



$$W_{Э1} = W_y W_{Г} W_U$$

Рис.3.10

Последовательную цепь звеньев  $W_y \rightarrow W_{Г} \rightarrow W_U$  заменим одним эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_{Э1} = W_y + W_{Г} + W_U,$$

и тем самым структурная схема - сведется к элементарной цепи из двух звеньев с охватом звена  $W_{Э1}$  отрицательной обратной связью со звеном  $W_T$  (см. рис. 3.10, в), а передаточная функция такой цепи равняется

$$W_1(s) = \frac{W_{Э1}}{1 + W_{Э1}W_T},$$

или в развернутом виде

$$W_1(s) = \frac{W_y W_{Г} W_U}{1 + W_y W_{Г} W_U W_T}.$$

Для определения передаточной функции системы по воздействию  $m$  положим  $U_0 = 0$  и получим структурную схему, представленную на рис.3.11,а. Заменяв последовательную цепь звеньев  $W_T \rightarrow W_Y \rightarrow W_\Gamma \rightarrow W_U$  одним эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_{\Sigma 2} = W_T + W_Y + W_\Gamma + W_U,$$

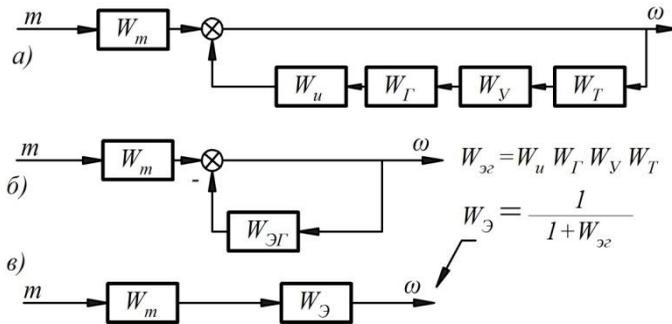


Рис.3.11

придем к схеме рис.3.11, б. В свою очередь цепь, содержащую звено  $W_{\Sigma 2}$ , охватывающую единичное звено, заменим эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{1 + W_{\Sigma 2}},$$

которое соединяется последовательно со звеном  $W_m$  (см.рис.3.11. в).

Следовательно, искомая передаточная функция системы по воздействию  $m$  равняется

$$W_2(s) = W_{\Sigma} W_m = \frac{W_m}{1 + W_{\Sigma 2}} = \frac{W_m}{1 + W_T + W_Y + W_\Gamma + W_U}.$$

### 3.6. Передаточная функция многоконтурной САР с непересекающимися связями

При наличии в системе регулирования, кроме главной обратной связи, дополнительных внутренних обратных связей система становится многоконтурной, что находит отражение и в структурной схеме. При этом структурная схема может иметь как непересекающиеся между собой связи, так связи пересекающиеся.

Пример структурной схемы с непересекающимися связями показан на рис.3.12.

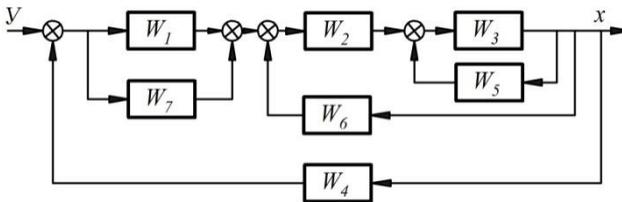


Рис.3.12

Для определения передаточной функции такой системы необходимо преобразовать ее структурную схему в одноконтурную, которая, как мы видели, сводится к простейшей цепи звеньев. Для этого необходимо все внутренние контуры (цепи) заменить эквивалентными звеньями с передаточными функциями, равными передаточным функциям соответствующих замкнутых контуров(цепей).

Выполним эти преобразования для схемы рис.3.12.

Внутренняя цепь звеньев  $W_1$  и  $W_7$  представляет собой параллельное соединение звеньев, следовательно, эквивалентным этой цепи будет звено с передаточной функцией

$$W_{31} = W_1 + W_7.$$

Цепь звеньев  $W_3$  и  $W_5$ , образующая соединение с охватом обратной связью, заменяется эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_{32} = \frac{W_3}{1 + W_3 W_5},$$

которое, в свою очередь, последовательно соединено со звеном  $W_2$ ,

поэтому звенья  $W_2$ ,  $W_3$  и  $W_5$  заменяются эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_{33} = W_{32}W_2 = \frac{W_2W_3}{1 + W_3W_5}.$$

Это звено, в свою очередь, охвачено обратной связью, содержащей звено  $W_6$ , следовательно, группа звеньев  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $W_5$ ,  $W_6$ , может быть заменена эквивалентным звеном с передаточной функцией:

$$W_{34} = \frac{W_{33}}{1 + W_{33}W_6} = \frac{W_2W_3}{1 + W_3W_5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{W_2W_3}{1 + W_3W_5} \cdot W_6} = \frac{W_2W_3}{1 + W_3W_5 + W_2W_3W_6}.$$

После этих преобразований структурная схема сводится к одноконтурной (рис. 3.13) с двумя соединенными последовательно звеньями  $W_{31}$  и  $W_{34}$ , схваченными обратной связью, содержащей звено  $W_4$ .

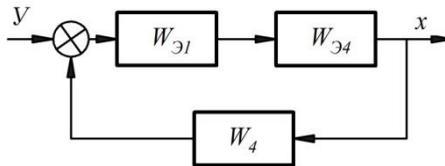


Рис.3.13

Следовательно, передаточная функция рассмотренной системы по входному воздействию  $Y$  окончательно будет иметь вид

$$W(s) = \frac{W_{31}W_{34}}{1 + W_{31}W_{34}W_4},$$

что после подстановки выражений для  $W_{31}$  и  $W_{34}$  дает

$$W(s) = \frac{W_2W_3(W_1 + W_7)}{1 + W_3 \cdot W_5 + W_2W_3W_6 + W_2W_3W_4(W_1 + W_7)}.$$

### 3.7. Передаточная функция многоконтурной САР с пересекающимися связями

Пример структурной схемы с пересекающимися связями показан на рис.3.14.

Связи являются взаимно пересекающимися в том случае, когда начало или конец одной из связей лежит на замкнутом контуре, образованном другой связью. На рис.3.14.а конец связи, содержащей звено  $W_5$ , находится на контуре, образованном связями звеньев  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_6$ , тогда как начало этой связи лежит вне этого контура. Вместе с тем, начало связи, содержащей звено  $W_6$ , лежит на контуре, образованном звеньями  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $W_5$ .

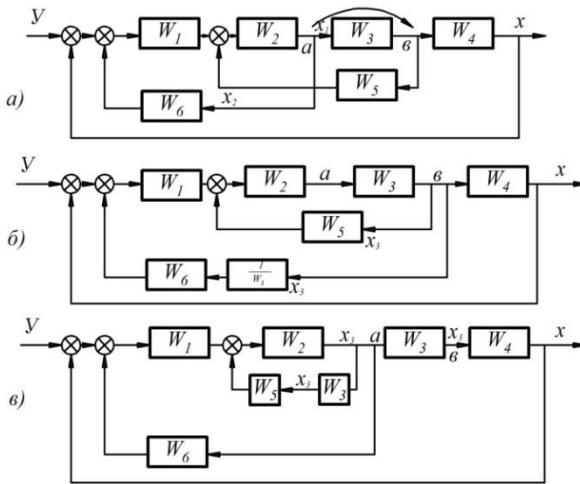


Рис.3.14

Многоконтурная схема с пересекающимися связями сначала должна быть преобразована в схему с непересекающимися связями, а затем сведена к одноконтурной схеме путем замены внутренних замкнутых цепей эквивалентными звеньями. При этом любое из преобразований не должно изменять передаточные функции отдельных цепей и системы в целом.

Освобождение от пересекающихся связей достигается переносом по определенным правилам точек съема или точек суммирования сигналов в другие точки на линиях связи некоторых звеньев.

Для схемы, изображенной на рис.3.14, а, достаточно перенести сигнал  $x_2$ , уходящий из точки  $a$  в звено  $W_6$ , в точку  $b$ , обойдя звено  $W_3$ , но при этом необходимо учесть, что уходящим из точки  $b$  сигналом будет не  $x_2$ , а  $x_3$ . Поэтому в новую линию связи, начинающуюся в точке  $b$  (см.рис.3.14,б), необходимо ввести дополнительное звено с такой передаточной функцией, которая преобразовала бы входную величину  $x_3$  в выходную величину  $x_2$ . Очевидно, таким звеном будет звено с передаточной функцией

$$W_x = \frac{x_2(s)}{x_3(s)},$$

а так как

$$W_3 = \frac{x_3(s)}{x_2(s)},$$

то

$$W_x = \frac{1}{W_3}.$$

Таким образом, в новую линию связи необходимо ввести звено с передаточной функцией  $W_3^{-1}$  обратной передаточной функции обойденного при переносе точки съема сигнала звена  $W_3$ . Полученная структурная схема (см.рис.3.14, б) является многоконтурной, но без пересекающихся связей и при помощи замены внутренних цепей эквивалентными звеньями легко сводится к одноконтурной.

Вместо рассмотренного переноса точки съема сигнала  $x_2$  из точки  $a$  в точку  $b$  можно перенести сигнал  $x_3$  из точки  $b$  в точку  $a$ . В этом случае в звено  $W_5$  стал бы поступать сигнал не  $x_3$ , а  $x_2$ , следовательно, для сохранения входа звена неизменным необходимо в новую линию связи, идущую от точки  $a$  съема сигнала, ввести звено, преобразующее входную величину  $x_2$  в выходную величину  $x_3$ , поступающую в звено  $W_5$ . Очевидно, таким звеном будет звено с передаточной функцией

$$W_3 = \frac{x_3(s)}{x_2(s)}$$

и структурная схема с непересекающимися связями примет вид, показанный на рис.3.14, в, где в линию связи звена  $W_5$  введено звено с передаточной функцией  $W_3$ .

Рассмотрим теперь в общем виде правила переноса сигналов, используемые при преобразовании структурных схем, разделив сигналы на приходящие в линию связи и уходящие из нее, а по направлению переноса на переносимые вперед - по направлению распространения основного сигнала и переносимые назад - в направлении, противоположном направлению распространения основного сигнала.

Найдем правила переноса приходящих сигналов.

Пусть в цепи (рис.3.15) приходящий сигнал  $x_1$  необходимо перенести вперед в точку  $a$ . При этом выходная величина цепи и передаточная функция ее по входной величине не должны изменяться.

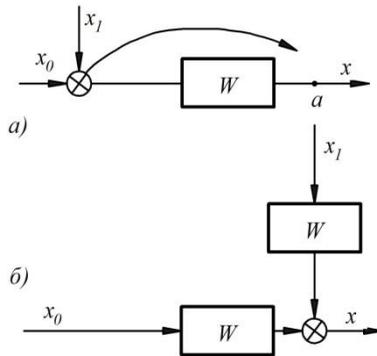


Рис.3.15

Для исходной цепи имеем

$$x = W(x_0 + x_1) = Wx_0 + Wx_1.$$

В преобразованной цепи (см.рис.3.15, б) в сумматор приходит сигнал  $Wx_0$ , следовательно, для сохранения прежнего значения выходной величины  $x$  в преобразованной цепи в сумматор необходимо ввести величину  $Wx_1$ . Это означает, что в новую линию воздействия  $x_1$  необходимо ввести звено с передаточной функцией  $W$ , равной передаточной функции обходимого звена.

Итак, при переносе приходящего сигнала вперед необходимо в новую линию воздействия этого сигнала ввести звено с передаточной функцией, равной передаточной функции обходимого звена.

В случае переноса приходящего сигнала назад необходимо в новую линию воздействия перенесенного сигнала ввести звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции обходимого звена (табл. 3.1).

Действительно, для исходной цепи имеем

$$x = Wx_0 + x_1,$$

а для преобразованной цепи

$$x = W \left( x_0 + \frac{1}{W} x \right),$$

что одно и то же.

Таблица 3.1

Правила переноса сигналов

Преобразование	Исходная цепь	Эквивалентная цепь
Перенос точки суммирования со входа звена на его выход		
Перенос точки суммирования с выхода звена на его вход		
Перенос точки съема со входа звена на его выход		
Перенос точки съема с выхода звена на его вход		
Перестановка точек суммирования на линии связи		
Перестановка точек съема на линии связи		

Для уходящих сигналов аналогичными рассуждениями получим следующие два правила:

- при переносе уходящего сигнала вперед в линию воздействия перенесенного сигнала необходимо ввести звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции обходимого звена;

- при переносе уходящего сигнала назад в линию воздействия перенесенного сигнала необходимо ввести звено с передаточной функцией, равной передаточной функции обходимого звена. Правила переноса сигналов сведены в табл.3.1.

### **3.8. Передаточная функция разомкнутой системы**

Для характеристики динамических свойств реальной замкнутой системы автоматического регулирования кроме передаточной функции замкнутой системы важное значение имеет передаточная функция ее в разомкнутом состоянии - передаточная функция разомкнутой системы.

Разомкнутая система образуется из данной замкнутой путем искусственного размыкания главной обратной связи замкнутой системы при условии равенства нулю всех внешних для замкнутой системы воздействий.

Мы видим, что реальная одно- или многоконтурная система в общем случае сводится (рис. 3.16, а) к простейшей цепи звеньев  $W_{\varepsilon 1}$  и  $W_{\varepsilon 2}$  с охватом обратной связью.

Отбрасывая внешнее воздействие  $U$  и размыкая какую-либо из линий связи по  $a - a$  или по  $b - b$  мы получим разомкнутую систему с выходной величиной  $x_{\text{ВЫХ}}$  и входной величиной  $x_{\text{ВХ}}$  (см.рис.3.16, б, в) в виде последовательной цепи эквивалентных звеньев  $W_{\varepsilon 1}$  и  $W_{\varepsilon 2}$ .

Следовательно, передаточная функция разомкнутой системы, соответствующей данной замкнутой, будет

$$W_p(s) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(s)}{x_{\text{ВХ}}(s)} = W_{\varepsilon 1} W_{\varepsilon 2}.$$

Для одноконтурной системы, к которой сводятся и многоконтурные системы, передаточные функции  $W_{\varepsilon 1}$  и  $W_{\varepsilon 2}$  представляют собой произведения передаточных функций отдельных звеньев. В случае

многоконтурной системы среди звеньев будут и неэлементарные эквивалентные звенья. При  $N$  звеньях, среди которых имеются и эквивалентные будем иметь

$$W_p(s) = W_1 W_2 \dots W_n.$$

Передаточная функция разомкнутой системы, определяемая без учета внешних для реальной замкнутой системы воздействий, не может дать зависимостей между действительными координатами системы и реальными внешними воздействиями, однако она отражает внутренние динамические свойства цепи звеньев, из которых состоит замкнутая система, и дает возможность исследовать реальную замкнутую систему по ее разомкнутому состоянию.

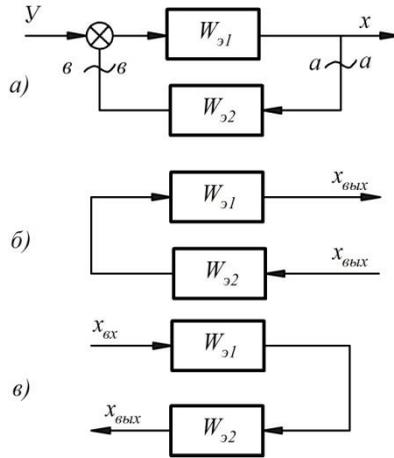


Рис.3.16

**Пример.** Найдем передаточную функцию системы автоматического регулирования скорости вращения электродвигателя в разомкнутом состоянии. Структурная схема системы в замкнутом состоянии показана на рис.3.6.

Полагая внешние воздействия  $U_0$  и  $m$  равными нулю и замыкая замкнутую цепь по какой-либо из линий связи, получаем

$$W_p(s) = W_y W_\Gamma W_U W_T.$$

После подстановки известных выражений передаточных функций звеньев найдем

$$W_p(s) = \frac{k_y k_\Gamma k_U k_T}{(T_\partial s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{k_p}{(T_\partial s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы определенным образом зависит от передаточной функции той же системы в разомкнутом состоянии.

Действительно, замкнутая система, будучи сведена в общем случае к простейшей цепи звеньев с охватом обратной связью (рис. 3.16, а), имеет по какому-либо воздействию  $y$  передаточную функцию

$$W_3(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{W_{31}}{1 + W_{31}W_{32}}.$$

Но произведение  $W_{31}W_{32}$  представляет собой передаточную функцию той же системы в разомкнутом состоянии, поэтому

$$W_3(s) = \frac{W_{31}}{1 + W_p}.$$

Если мы будем определять передаточную функцию замкнутой системы по какому-либо другому воздействию, то ее выражение будет другим только за счет передаточной функции эквивалентного звена  $W_{31}$ , тогда как выражение  $1 + W_p$  останется для данной замкнутой системы неизменным при всех внешних воздействиях, так как  $W_p$  не зависит от воздействий.

В частном случае, когда выходная величина подается на вход системы без какого-либо преобразования ее значения, то есть осуществляется единичная обратная связь, имеем  $W_{32} = 1$  и  $W_p = W_3$ , тогда

$$W_3(s) = \frac{W_p}{1 + W_p}.$$

Этот вид передаточной функции характерен для следящих систем, воспроизводящих на выходе задаваемые значения входной величины.

В другом частном случае, когда  $W_{\partial 1} = 1$ , в разомкнутой цепи имеем одно эквивалентное звено  $W_{\partial 2}$ , следовательно, в этом случае  $W_p = W_{\partial 2}$  и передаточная функция замкнутой системы принимает вид

$$W_p(s) = \frac{1}{1 + W_p}.$$

**Пример.** Найдем выражения передаточных функций замкнутой системы регулирования скорости вращения электродвигателя.

Передаточная функция разомкнутой системы получена в предыдущем примере:

$$W_p(s) = \frac{k_p}{(T_{\partial} s + 1)(T_e s + 1)}.$$

Передаточные функции замкнутой системы найдем по структурной схеме (рис.3.10, а):

- по задающему напряжению  $U_0$

$$W_{3U}(s) = \frac{\omega_U(s)}{U_0(s)} = \frac{W_y W_r W_U}{1 + W_p} = \frac{k_y k_r k_U}{(T_r s + 1)(T_{\partial} s + 1) + k_p};$$

- по моменту нагрузки

$$W_{3m}(s) = \frac{\omega_m(s)}{m(s)} = \frac{W_m}{1 + W_p} = \frac{k_m (T_r s + 1)}{(T_r s + 1)(T_{\partial} s + 1) + k_p}.$$

### 3.9. Передаточные функции ошибок.

#### Статические ошибки системы

Ошибкой  $\varepsilon(t)$  системы автоматического регулирования мы будем называть изменяющуюся во времени в процессе регулирования разность заданного и фактического значений регулируемой величины, вызываемую изменениями внешних воздействий. Эта разность равна, в свою очередь, разности малых отклонений этих величин от того уста-

новившегося значения регулируемой величины, около которого изучается движение системы:

$$\varepsilon(t) = x_0(t) - x(t).$$

Здесь  $x_0(t)$  - малое отклонение заданного, а  $x(t)$  - малое отклонение фактического значения регулируемой величины от фиксированного установившегося значения.

В операторной форме это равенство запишется в виде

$$\varepsilon(s) = x_0(s) - x(s).$$

Если заданное значение регулируемой величины останется неизменным, то есть  $x_0(t) = 0$ , то ошибка системы, обусловленная каким-либо возмущением  $f(t)$ , равняется изменению выходной величины системы с обратным знаком:

$$\varepsilon_f(t) = -x_f(t),$$

где  $x_f(t)$  - изменение выходной величины, соответствующее возмущению  $f(t)$  при отсутствии задающего воздействия.

Если передаточная функция системы по данному возмущению известна:

$$W_{3_f}(s) = \frac{x_f(s)}{f(s)},$$

то изображение выходной величины запишется в виде

$$x_f(s) = W_{3_f}(s)f(s).$$

Следовательно, изображение ошибки системы по возмущению

$$\varepsilon_f(s) = -W_{3_f}(s)f(s).$$

Отношение изображения ошибки по данному возмущению к изображению возмущения при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией ошибки по данному возмущению

$$W_{\varepsilon_f}(s) = \frac{\varepsilon_f(s)}{f(s)}.$$

Передаточная функция ошибки по каком-либо возмущению, очевидно, равняется передаточной функции системы по этому возмущению, взятой с обратным знаком:

$$W_{\varepsilon_f}(s) = -W_{3_f}(s).$$

Если возмущающее воздействие отсутствует, то есть  $f(t) = 0$ , ошибка системы, вызываемая изменением  $x_0(t)$  заданного значения регулируемой величины, определяется выражением

$$\varepsilon_0(t) = x_0(t) - x_{00}(t),$$

где  $x_{00}(t)$  - изменение выходной величины, обусловленное изменением  $x_0(t)$  заданного значения ее при отсутствии возмущений.

Поскольку передаточная функция системы по заданному значению регулируемой величины известна:

$$W_{3_0}(s) = \frac{x_{00}(s)}{x_0(s)},$$

то

$$x_{00}(s) = W_{3_0}(s)x_0(s).$$

Следовательно, изображение ошибки по заданному значению регулируемой величины имеет вид

$$\varepsilon_0(s) = x_0(s) - W_{3_0}(s)x_0(s),$$

или

$$\varepsilon_0(s) = [1 - W_{3_0}(s)]x_0(s).$$

Отсюда следует, что передаточная функция ошибки по изменению заданного значения регулируемой величины

$$W_{\varepsilon_0}(s) = \frac{\varepsilon_0(s)}{x_0(s)} = 1 - W_{3_0}(s).$$

Таким образом, передаточные функции ошибок выражаются через передаточные функции замкнутой систем по соответствующим внешним воздействиям.

Передаточные функции ошибок и передаточные функции замкнутой системы дают возможность определить величину установившейся ошибки системы по каждому внешнему воздействию.

Установившейся, или статической ошибкой системы автоматического регулирования по данному воздействию называется установившаяся разность заданного и фактического значений регулируемой величины, соответствующая новому установившемуся значению внешнего воздействия.

Если какое-либо воздействие  $x_0(t)$  или  $f(t)$ , ограниченное по величине, изменяется в течение некоторого времени произвольным образом, стремясь при этом к некоторому постоянному значению  $x_0 = const$  или  $f_0 = const$  (рис. 3.17), то ошибка системы, изменяясь во времени, будет стремиться либо к некоторому установившемуся нулевому или отличающемуся от нуля значению, либо будет неограниченно увеличиваться, либо будет совершать незатухающие колебания.

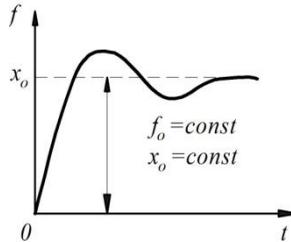


Рис. 3.17

Очевидно, для определения статической ошибки  $e_i$  по какому-либо воздействию  $i$  необходимо найти предел, к которому стремится величина ошибки  $\varepsilon_i(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$e_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t).$$

Из теории преобразования Лапласа известен следующий предельный переход, связывающий предельное значение функции  $Z(t)$  и ее изображения  $Z(s)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sZ(s).$$

В нашем случае для ошибки  $\varepsilon_i(t)$  получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon_i(s)$$

или, так как  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t)$  есть статическая ошибка системы  $e_i$ ,

$$e_i = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon_i(s).$$

В частности, статическая ошибка системы по изменению  $x_0(t)$  заданного значения регулируемой величины

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon_0(s),$$

а, по возмущению  $f(t)$

$$e_f = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon_f(s).$$

Выражая ошибки  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_f$  через их передаточные функции, получим

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{\varepsilon_0}(s)x_0(s);$$

$$e_f = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{\varepsilon_f}(s)f(s).$$

Проще всего определить статические ошибки, полагая, что внеш-

ние воздействия представляют собой единичные функции времени

$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

тогда

$$x_0 = \frac{1}{s}; \quad f(s) = \frac{1}{s}$$

и статические ошибки, соответствующие единичным скачкам соответствующих воздействий, будут равняться

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} W_{\varepsilon_0}; \quad e_f = \lim_{s \rightarrow 0} W_{\varepsilon_f}(s);$$

или

$$e_0 = W_{\varepsilon_0}(0); \quad e_f = W_{\varepsilon_f}(0),$$

и вообще для любого внешнего воздействия при единичном скачке его

$$e_i = W_{\varepsilon_i}(0).$$

Таким образом, статическая ошибка системы автоматического регулирования по данному воздействию при единичном скачке его равняется численному значению передаточной функции ошибки по этому воздействию при аргументе функции  $s = 0$ .

Выражая передаточные функции ошибки через передаточные функции замкнутой системы и полагая  $s = 0$ , получим для статических ошибок выражения

$$e_0 = 1 - W_{3_0}(0); \quad e_f = -W_{3_f}(0).$$

Таким образом, для определения статических ошибок системы достаточно знать выражения передаточных функций замкнутой системы по соответствующим воздействиям  $x_0$  и  $f$ , вычислить их численные значения при  $s = 0$ .

Можно показать, что передаточная функция  $W_{3_0}(s)$  замкнутой системы по изменению заданного значения регулируемой величины равняется

$$W_{3_0}(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)}.$$

Поэтому статическую ошибку  $e_0$  удобно определять по формуле

$$e_0 = \frac{1}{1 + W_p(0)}.$$

Что касается статической ошибки по возмущению, то для каждого возмущения она различна, так как передаточная функция системы по возмущению  $f(t)$  имеет вид

$$W_{3_f}(s) = \frac{W_{\varepsilon_1}(s)}{1 + W_p(s)},$$

где  $W_{\varepsilon_1}(s)$  - имеет свое выражение для каждого возмущения и зависит от места его приложения.

Пользуясь определением статической ошибки, можно найти условия, при которых система является статической или астатической.

Система регулирования является астатической по данному воздействию, если статическая ошибка ее по этому воздействию равняется нулю; если же статическая ошибка не равняется нулю, то система статическая.

Следовательно, условия астатизма системы можно записать в следующем виде:

- по задающему воздействию  $X_0$

$$e_0 = W_{\varepsilon_0}(0) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{1 + W_p(0)} = 0;$$

- по возмущению  $f$

$$e_f = W_{\varepsilon_f}(0) \quad \text{или} \quad W_{3_f}(0) = 0.$$

Пример. Найдем статические ошибки системы регулирования скорости вращения электродвигателя, передаточная функция которой по возмущению - моменту нагрузки  $m$  - имеет вид

$$W_{3_m}(s) = \frac{k_m(T_\Gamma s + 1)}{(T_\Gamma s + 1)(T_\Delta s + 1) + k_p},$$

а передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{k_p}{(T_\Gamma s + 1)(T_\Delta s + 1) + k_p}.$$

Статическая ошибка по моменту нагрузки

$$e_m = W_{3_m}(0) = \frac{k_m}{1 + k_p} \neq 0.$$

Таким образом, по отношению к единичному скачку момента нагрузки система регулирования является статической, то есть при изменении момента нагрузки угловая скорость двигателя принимает новое установившееся значение.

Статическая ошибка при изменении заданного значения регулируемой величины

$$e_0 = \frac{1}{1 + W_p(0)} = \frac{1}{1 + k_p} \neq 0.$$

Следовательно, и по отношению к единичному скачку заданного значения регулируемой величины система является статической.

В общем случае система автоматического регулирования, будучи статической по отношению к одним воздействиям, может быть астатической по отношению к другим. Кроме того, статизм системы зависит и от характера воздействия. Мы определяли его по отношению к скачкообразному воздействию.

### 3.10. Составление дифференциальных уравнений САР по их передаточным функциям

Передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем автоматического регулирования дают возможность записать дифференциальные уравнения этих систем.

Для разомкнутой системы имеем

$$W_p(s) = \frac{x_{\text{вых}}(s)}{x_{\text{вх}}(s)} = W_{\text{э1}}W_{\text{э2}} = W_1W_2\dots W_n,$$

где  $W_i$  - передаточные функции звеньев разомкнутой цепи, в числе которых могут быть и неэлементарные эквивалентные звенья.

В свою очередь

$$W_i = \frac{q_i(s)}{d_i(s)},$$

где  $q_i(s)$  - оператор воздействий, приложенных к звену;

$d_i(s)$  - собственный оператор звена.

Следовательно,

$$W_p(s) = \frac{q_1(s)q_2(s)\dots q_n(s)}{d_1(s)d_2(s)\dots d_n(s)}.$$

Произведение операторов воздействий звеньев представляет собой в общем случае операторный полином, степень которого  $k$  равняется сумме показателей степеней отдельных полиномов  $q_i(s)$ .

Обозначим этот полином  $Q_p(s)$ :

$$Q_p(s) = q_1(s)q_2(s)\dots q_n(s) = b'_0s^k + b'_1s^{k-1} + \dots + b'_k.$$

Произведение собственных операторов звеньев  $d_i(s)$  также дает операторный полином  $D_p(s)$  степени  $n$ , равной сумме показателей степеней полиномов  $d_i(s)$ :

$$D_p(s) = d_1(s)d_2(s)\dots d_n(s) = a'_0s^n + a'_1s^{n-1} + \dots + a'_n.$$

Следовательно, передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена как отношение двух операторных полиномов:

$$W_p(s) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(s)}{x_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{Q_p(s)}{D_p(s)} = \frac{b'_0 s^k + b'_1 s^{k-1} + \dots + b'_k}{a'_0 s^n + a'_1 s^{n-1} + \dots + a'_n},$$

то есть она представляет собой дробно-рациональную функцию  $s$ .

Операторный полином  $D_p(s)$ , равный произведению собственных операторов звеньев, называется собственным или характеристическим полиномом разомкнутой системы.

Операторный полином  $Q_p(s)$ , равный произведению операторов воздействий, называется операторным коэффициентом усиления разомкнутой системы.

Дифференциальное уравнение разомкнутой системы получим из соотношения (3.1):

$$D_p(s)x_{\text{ВЫХ}}(s) = Q_p(s)x_{\text{ВХ}}(s),$$

или в развернутом виде

$$(a'_0 s^n + a'_1 s^{n-1} + \dots + a'_n)x_{\text{ВЫХ}}(s) = (b'_0 s^k + b'_1 s^{k-1} + \dots + b'_k)x_{\text{ВХ}}(s).$$

Для замкнутой системы по некоторому внешнему воздействию  $y(t)$  в общем случае имеем передаточную функцию

$$W_{3_y}(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{W_{\text{э1}}(s)}{1 + W_p(s)}$$

или, после подстановки выражения передаточной функции разомкнутой системы в виде отношения двух операторных полиномов  $Q_p(s)$  и  $D_p(s)$ ,

$$W_{3_y}(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{D_p(s)W_{\text{э1}}(s)}{D_p(s) + Q_p(s)}.$$

Сумма операторных полиномов  $D_p(s)$  и  $Q_p(s)$  также явля-

ется полиномом  $D_3(s)$ :

$$D_3(s) = D_p(s) + Q_p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n,$$

причем степень полинома  $D_3(s)$  равняется степени полинома  $D_p(s)$ , так как степень полинома  $Q_p(s)$ , равная  $k$ , как правило, ниже степени  $n$  полинома  $D_p(s)$ .

Можно показать, что произведение  $D_p(s)W_{\text{э1}}(s)$  также представляет собой операторный полином  $Q_3(s)$ :

$$Q_3(s) = D_p(s)W_{\text{э1}}(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m,$$

зависящий от внешнего воздействия, по которому определена передаточная функция замкнутой системы.

Таким образом, передаточная функция замкнутой системы по рассматриваемому внешнему воздействию  $y(t)$  может быть записана в виде

$$W_{3_y}(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{Q_3(s)}{D_3(s)} = \frac{Q_3(s)}{D_p(s) + Q_p(s)}. \quad (3.4)$$

Операторный полином  $D_3(s) = D_p(s) + Q_p(s)$ , не зависящий от внешних воздействий, называется собственным или характеристическим полиномом замкнутой системы.

Обращается внимание на то, что характеристический полином замкнутой системы равняется сумме характеристического полинома разомкнутой системы и операторного коэффициента усиления той же системы.

Операторный полином  $Q_3(s) = W_{\text{э1}}(s)D_p(s)$ , зависящий от внешних воздействий и имеющий определенный вид для каждого внешнего воздействия, называется операторным коэффициентом усиления замкнутой системы.

Дифференциальное уравнение замкнутой системы для данного

внешнего воздействия  $Y$  получим из соотношения (3.4) в виде

$$D_3(s)x(s) = Q_3(s)y(s),$$

или

$$[D_p(s) + Q_p(s)]x(s) = Q_3(s)y(s),$$

или в развернутом виде

$$(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a'_n)x(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)y(s).$$

Пример. По передаточным функциям системы автоматического регулирования скорости вращения электродвигателя найдем дифференциальные уравнения системы в разомкнутом и замкнутом состояниях.

Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W_p(s) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(s)}{x_{\text{ВХ}}(s)} = W_y W_\Gamma W_U W_T,$$

или после подстановки известных выражений передаточных функций звеньев

$$W_p(s) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(s)}{x_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{k_y k_\Gamma k_U k_T}{(T_\Gamma s + 1)(T_\Delta s + 1)},$$

Отсюда операторный коэффициент усиления разомкнутой системы

$$Q_p(s) = k_y k_\Gamma k_U k_T = k_p$$

в данном случае представляет собой постоянное число  $k_p$  - коэффициент усиления разомкнутой системы, не зависящий от  $s$ .

Характеристический полином разомкнутой системы

$$D_p(s) = (T_\Gamma s + 1)(T_\Delta s + 1) = T_\Gamma T_\Delta s^2 + (T_\Gamma + T_\Delta)s + 1$$

- полином второй степени.

Дифференциальное уравнение разомкнутой системы имеет вид

$$\left[ T_{\Gamma} T_{\delta} s^2 + (T_{\Gamma} + T_{\delta})s + 1 \right] x_{\text{ВЫХ}}(s) = k_p x_{\text{ВХ}}(s).$$

Передаточные функции замкнутой системы:

- по задающему напряжению  $U_0$

$$W_{3_U}(s) = \frac{W_y W_{\Gamma} W_U}{1 + W_y W_{\Gamma} W_U W_{\Gamma}} = \frac{\omega_U(s)}{U_0(s)};$$

- по моменту нагрузки  $m$

$$W_{3_m}(s) = \frac{W_m}{1 + W_y W_{\Gamma} W_U W_{\Gamma}} = \frac{\omega_m(s)}{m(s)}.$$

Подставляя известные выражения передаточных функций звеньев, получим

$$W_{3_y}(s) = \frac{k_y k_{\Gamma} k_U}{(T_{\delta} s + 1)(T_{\Gamma} s + 1) + k_p};$$

$$W_{3_m}(s) = \frac{k_m (T_{\Gamma} s + 1)}{(T_{\delta} s + 1)(T_{\Gamma} s + 1) + k_p}.$$

Следовательно, характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$D_3(s) = (T_{\delta} s + 1)(T_{\Gamma} s + 1) + k_p = T_{\delta} T_{\Gamma} s^2 + (T_{\delta} + T_{\Gamma})s + (1 + k_p)$$

Операторные коэффициенты усиления замкнутой системы:

- по задающему напряжению  $U_0$

$$Q_{3_U}(s) = k_y k_{\Gamma} k_U = \frac{k_p}{k_{\Gamma}};$$

- по возмущающему воздействию - моменту нагрузки  $m$

$$Q_{3_m}(s) = -k_m(T_r s + 1).$$

Дифференциальное уравнение замкнутой системы, соответствующее только изменению задающего напряжения  $U_0$ ,

$$[(T_\delta s + 1)(T_r s + 1) + k_p] \omega_U(s) = \frac{k_p}{k_m} U_0(s);$$

для возмущающего воздействия  $m$

$$[(T_\delta s + 1)(T_r s + 1) + k_p] \omega_m(s) = -k_m(T_r s + 1)m(s).$$

При одновременном изменении как задающего, так и возмущающего воздействия получим единое уравнение, имея в виду, что  $\omega = \omega_U + \omega_m$ :

$$[(T_\delta s + 1)(T_r s + 1) + k_p] \omega(s) = \frac{k_p}{k_m} U_0(s) - k_m(T_r s + 1)m(s).$$

Имея внешние воздействия как заданные функции времени или выбирая какое-либо типовое воздействие, например единичную функцию, мы можем, интегрируя дифференциальное уравнение системы или определяя изображение выходной величины из операторного уравнения, а затем переходя к оригиналу, получить аналитическое выражение переходного процесса - временную характеристику  $x(t)$  системы, в частности, переходную функцию и переходную характеристику системы, то есть найти ее реакцию на единичный скачок какого-либо воздействия.

Однако такое решение для уравнений высокого порядка является трудоемким, так как оно связано с вычислением корней характеристического уравнения высокой степени. Нецелесообразность прямого интегрирования дифференциального уравнения системы вытекает также из того, что необходимо предварительно выяснить, устойчива ли система регулирования, так как для неустойчивой системы нет необходимости и смысла искать переходный процесс.

### 3.11. Частотные характеристики САР

Понятия и определения частотных характеристик, введенные ранее для звеньев системы, распространяются также на разомкнутые и замкнутые цепи звеньев, входящих в состав системы, а также и на систему автоматического регулирования в целом как в замкнутом, так и разомкнутом состоянии.

Частотными характеристиками системы называются зависимости между амплитудами, фазами, частотой установившихся на входе и выходе системы гармонических колебаний.

Наиболее общей зависимостью, связывающей эти величины, является частотная функция системы, представляющая собой передаточную функцию системы  $W(s)$  при чисто мнимых значениях ее аргумента  $s = j\omega$ . Как функция комплексной переменной частотная функция характеризуется модулем  $R$  и аргументом  $\varphi$ .

В показательной форме частотную функцию системы можно представить в виде

$$W(j\omega) = R(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$R(\omega) = \text{mod} W(j\omega);$$

$$\varphi(\omega) = \text{arg} W(j\omega).$$

В алгебраической форме частотную функцию системы будем записывать в виде

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где  $P(\omega)$  - вещественная, а  $Q(\omega)$  - мнимая части частотной функции системы.

Очевидными являются соотношения

$$R(\omega) = \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2}; \quad \varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)};$$

$$P(\omega) = R(\omega)\cos\varphi(\omega); \quad Q(\omega) = R(\omega)\sin\varphi(\omega).$$

Уравнениями частотных характеристик являются следующие зависимости:

$$R = R(\omega); \varphi = \varphi(\omega); P = P(\omega); Q = Q(\omega); R = R(\varphi).$$

Графики этих функций представляют собой соответствующие характеристики:

$R(\omega)$  - амплитудно-частотную;

$\varphi(\omega)$  - фазово-частотную;

$P(\omega)$  - вещественную;

$Q(\omega)$  - мнимую;

$R(\varphi)$  - амплитудно-фазовую.

Все сказанное относится как к замкнутым, так и к разомкнутым системам.

Наиболее важными из всех характеристик являются амплитудно-фазовые характеристики разомкнутой и замкнутой систем.

Для построения амплитудно-фазовой характеристики необходимо:

- в выражении передаточной функции  $W(s)$  заменить аргумент  $s$  на  $j\omega$  и получить таким образом выражение частотной функции  $W(j\omega)$ ;

- выделить вещественную  $P(\omega)$  и мнимую  $Q(\omega)$  части частотной функции;

- задаваясь значениями частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , вычислить значения  $P$  и  $Q$  и по этим значениям в прямоугольной системе координат на комплексной плоскости построить по точкам годограф вектора частотной функции - амплитудно-фазовую характеристику системы.

Поскольку передаточные и частотные функции систем могут представляться достаточно сложными выражениями, построение амплитудно-фазовых характеристик, не составляющее принципиальных затруднений, может оказаться практически трудоемким.

Существенное сокращение трудоемкости расчетов достигается за счет перехода к построению амплитудных и фазовых характеристик системы в логарифмических масштабах.

Амплитудно-фазовые, а также логарифмические частотные характеристики дают возможность судить об устойчивости системы, а также получить данные для приближенного построения переходного процесса без интегрирования дифференциального уравнения системы.

### 3.12. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой цепи последовательно соединенных звеньев

Как было показано раньше, частотная функция разомкнутой последовательной цепи звеньев или одноконтурной разомкнутой системы представляется как произведение элементарных множителей:

$$W_p(j\omega) = \prod_{i=1}^{i=N} k_i q'_i(j\omega) \frac{1}{d_i(j\omega)}.$$

Для построения логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы необходимо построить логарифмические частотные характеристики элементарных множителей и просуммировать их ординаты.

Для логарифмической амплитудной характеристики системы получим в децибелах

$$L_p = L_1 + L_2 + \dots + L_n.$$

Для логарифмической фазовой характеристики системы

$$\varphi_p = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

Рассмотрим это построение на примере.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{k_p(T_1 s + 1)}{s(T_2 s + 1)(T_3^2 s^2 + T_4 s + 1)}.$$

Для определенности положим  $T_3 < T_1 < T_2$ , а  $\frac{T_4}{2T_3} = \xi < 1$ .

Частотная функция разомкнутой системы

$$W_p(j\omega) = \frac{k_p(T_1 j\omega + 1)}{j\omega(T_2 j\omega + 1)(-T_3^2 \omega^2 + T_4 j\omega + 1)}.$$

Элементарные множители

$$k_p, (T_1 j\omega + 1), \frac{1}{j\omega}, \frac{1}{T_2 j\omega + 1}, \frac{1}{T_3^2(j\omega)^2 + T_4 j\omega + 1}.$$

Логарифмические частотные характеристики множителей известны.

Находим частоты излома асимптотических характеристик множителей:

$$\omega_{T_1} = \frac{1}{T_1}; \quad \omega_{T_2} = \frac{1}{T_2}; \quad \omega_{T_3} = \frac{1}{T_3},$$

при этом  $\omega_{T_3} > \omega_{T_1} > \omega_{T_2}$ .

Построение логарифмической амплитудной характеристики разомкнутой системы сводится к следующим операциям:

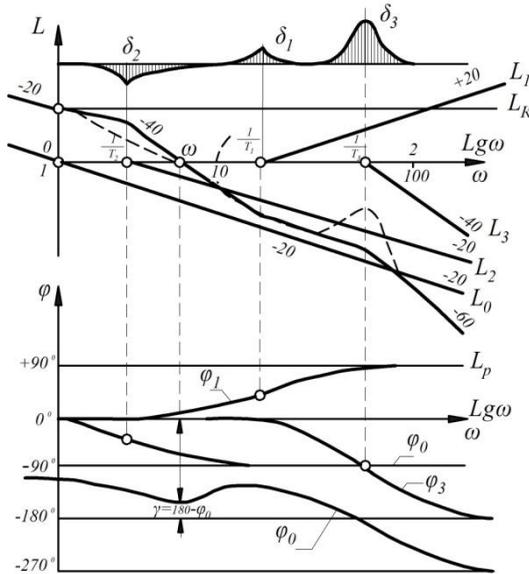


Рис.3.18

1. В системе координат  $\lg \omega, L$  (рис.3.18) на шкале логарифмов частот отмечаем точки излома асимптотических характеристик множителей, соответствующие найденным частотам  $\omega_{T_1}, \omega_{T_2},$  и  $\omega_{T_3}$ , а также точку, отвечающую  $\lg \omega = 0$  или  $\omega = 1$ .

2. Строим ЛАХ множителя  $(j\omega)^{-1}$ ; это прямая  $L_0$ , пересекающая ось  $\lg \omega$  в точке с абсциссой  $\omega = 1$  ( $\lg \omega = 0$ ) и имеющая наклон  $-20$  дБ/дек.

3. Строим асимптотические характеристики  $L_1, L_2, L_3$  множителей  $T_1 j\omega + 1, (T_2 j\omega + 1)^{-1},$  и  $[T_3^2(j\omega)^2 + T_4 j\omega + 1]^{-1}$ . Низкочастотные асимптоты этих характеристик совпадают с осью абсцисс, а высокочастотные проходят через соответствующие точки излома с наклоном:

- для первого множителя -  $+20$  дБ/дек;
- для второго  $-20$  дБ/дек;
- для третьего  $-40$  дБ/дек.

4. Строим ЛАХ  $L_k$  множителя  $k_p$ ; это прямая, параллельная оси абсцисс и отстоящая от нее на  $20 \lg k_p$  децибелов.

5. Суммируя ординаты ЛАХ всех множителей, получаем асимптотическую характеристику  $L_p$  разомкнутой системы в виде ломаной с чередующимися наклонами отрезков прямых  $-20, -40, -20,$  и  $-40$  дБ/дек.

6. Над точками излома строим кривые поправок и, суммируя их ординаты с ординатами асимптотической характеристики, получаем точную логарифмическую характеристику разомкнутой системы.

Построение логарифмической фазовой характеристики системы сводится к следующему:

1. При помощи шаблонов строим ЛФХ множителей  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Логарифмическая фазовая характеристика множителя  $(j\omega)^1$  - прямая  $\varphi_0 = -90^\circ$ .

2. Суммируя ординаты ЛФХ множителей, получаем ЛФХ разомкнутой системы. Асимптотами этой характеристики в нашем примере служат параллельные прямые  $\varphi_0 = -90^\circ$  и  $\varphi_0 = -270^\circ$ .

Логарифмические частотные характеристики дают возможность наиболее просто построить амплитудно-фазовую характеристику системы.

Для этого необходимо задаться рядом значений  $\varphi$  и по логарифмической амплитудной характеристике определить соответствующие значения  $L$  в дБ. При этом одному значению  $\varphi$  могут отвечать не только одно, но и два или три значения  $L$ . После этого из равенства  $L = 20 \lg R$  необходимо определить значения  $R$ . Эти расчеты удобно вести, заполняя таблицу (табл. 3.2).

Таблица 3.2

$\varphi$	$\omega$	$L$ дБ	$R$

По данным  $\varphi$  и  $R$  в полярной системе координат можно построить амплитудно-фазовую характеристику системы. Для логарифмических частотных характеристик, построенных на рис.3.18, амплитудно-фазовая характеристика имеет вид, показанный на рис.3.19.

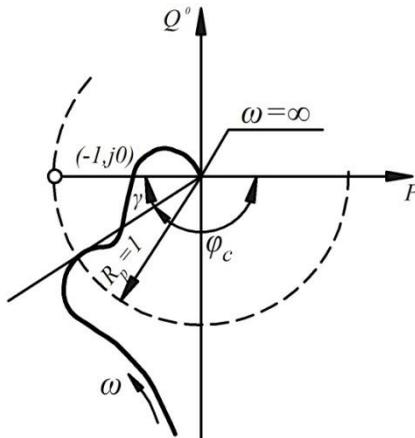


Рис.3.19

### **3.13. Логарифмические частотные характеристики замкнутых цепей звеньев**

Замкнутые цепи, образуемые за счет соединений звеньев с охватом обратной связью и параллельного соединения их (прямая связь), имеют частотные функции, не представляемые в виде произведения элементарных множителей и, следовательно, не логарифмируемые.

Действительно, для соединения звеньев  $W_1$  и  $W_2$  с охватом обратной связью (см.рис.3.3, а) имеем частотную функцию вида

$$W_3(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W_1(j\omega)W_2(j\omega)},$$

а при параллельном соединении (см.рис.3.1, б)

$$W_3(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega).$$

Содержащиеся в этих выражениях суммы не дают возможности представить модуль частотной функции замкнутой цепи в виде произведения модулей, а аргумент - в виде суммы аргументов частотных функций звеньев, входящих в состав цепи. Эти зависимости являются более сложными.

Модуль и аргумент частотной функции замкнутой цепи звеньев могут быть выражены через модуль и аргумент частотной функции той же цепи в разомкнутом состоянии. Определив эти зависимости, мы получим возможность по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой цепи рассчитать и построить логарифмические частотные характеристики замкнутой цепи звеньев.

#### **3.13.1. ЛЧХ замкнутой цепи звеньев с единичной обратной связью**

В случае единичной обратной связи, охватывающей какое-либо звено или группу звеньев, частотная функция образованной таким образом замкнутой цепи определяется выражением

$$W_3(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)},$$

где  $W_p(j\omega)$  - частотная функция той же цепи в разомкнутом состоянии.

Это выражение запишем в виде

$$\frac{1}{W_p(j\omega)} = \frac{1}{W_3(j\omega)} - 1. \quad (3.5)$$

Представим частотную функцию замкнутой цепи в показательной форме:

$$W_3(j\omega) = R_3(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)},$$

или

$$\frac{1}{W_3(j\omega)} = \frac{1}{R_3} e^{-j\varphi_3} = \frac{1}{R_3} (\cos\varphi_3 - j \sin\varphi_3).$$

Подставив последнее выражение в равенство (3.5), получим

$$\frac{1}{W_p(j\omega)} = \frac{\cos\varphi_3 - R_3}{R_3} - j \frac{\sin\varphi_3}{R_3}.$$

Отсюда модуль обратной частотной функции

$$\left| \frac{1}{W_p(j\omega)} \right| = \frac{1}{R_p} = \sqrt{\frac{(\cos\varphi_3 - R_3)^2 + \sin^2\varphi_3}{R_3^2}} = \sqrt{1 - \frac{2\cos\varphi_3}{R_3} + \frac{1}{R_3^2}}$$

и аргумент ее

$$\arg \frac{1}{W_p(j\omega)} = -\varphi_p = \operatorname{arctg} \frac{-\sin\varphi_3}{\cos\varphi_3 - R_3}.$$

Таким образом, зависимости между модулями и аргументами частотных функций разомкнутой и замкнутой цепей звеньев при единичной обратной связи выражаются уравнениями

$$R_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\cos\varphi_3}{R_3} + \frac{1}{R_3^2}}};$$

$$\varphi_p = \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi_3}{\cos\varphi_3 - R_3}.$$

Эти формулы дают возможность по значениям  $\varphi_p$  и  $R_p$  (или  $L_p = 20 \lg R_p$ ), определяемым по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой цепи, найти значения  $\varphi_3$  и  $R_3$  (или  $L_3 = 20 \lg R_3$ ) для различных значений частот и построить логарифмические частотные характеристики замкнутой цепи с единичной обратной связью.

### 3.13.2. Номограмма замыкания

Для удобства практического перехода от логарифмических частотных характеристик разомкнутой цепи к логарифмическим частотным характеристикам замкнутой цепи звеньев с единичной обратной связью зависимости (3.6) и (3.7) представляются в виде специальной номограммы, сокращенно называемой номограммой замыкания.

Номограмма замыкания строится в прямоугольной системе координат  $\varphi_p, L_p$ . По оси абсцисс откладываются значения  $\varphi_p$  в градусах, по оси ординат - значения  $L_p = 20 \lg R_p$  в децибелах (рис. 3.20).

Номограмма содержит два семейства кривых:

- кривые равных модулей частотной функции замкнутой цепи, соответствующие уравнению

$$L_p = L_p(\varphi_p, L_3),$$

параметром семейства служит величина  $L_3 = 20 \lg R_3$ ;

- кривые равных аргументов, соответствующие уравнению

$$L_p = L_p(\varphi_p, \varphi_3),$$

параметром этого семейства является величина  $\varphi_3$ .

Для получения одной из кривых равных модулей или равных амплитуд необходимо в уравнениях (3.6) и (3.7) положить  $R_3 = const$  (или  $L_3 = 20 \lg R_3 = const$ ), тогда получим два уравнения:

$$L_p = L_p(\varphi_3),$$

$$\varphi_p = \varphi_p(\varphi_3),$$

определяющие в параметрической форме уравнение кривой равной

амплитуды  $L_p = L_p(\varphi_p)$ , соответствующее данному значению  $L_3 = const$ . Вид семейства этих кривых показан на рис.3.20, а.

Для получения одной из кривых равных аргументов или равных фаз необходимо в уравнениях (3.6) и (3.7) положить  $\varphi_3 = const$ , тогда получим два уравнения:

$$L_p = L_p(L_3),$$

$$\varphi_p = \varphi_p(L_3),$$

определяющие в параметрической форме уравнение кривой равной фазы  $L_p = L_p(\varphi_p)$ , соответствующее данному значению  $\varphi_3 = const$ . Вид семейства этих кривых показан на рис.3.20, б.

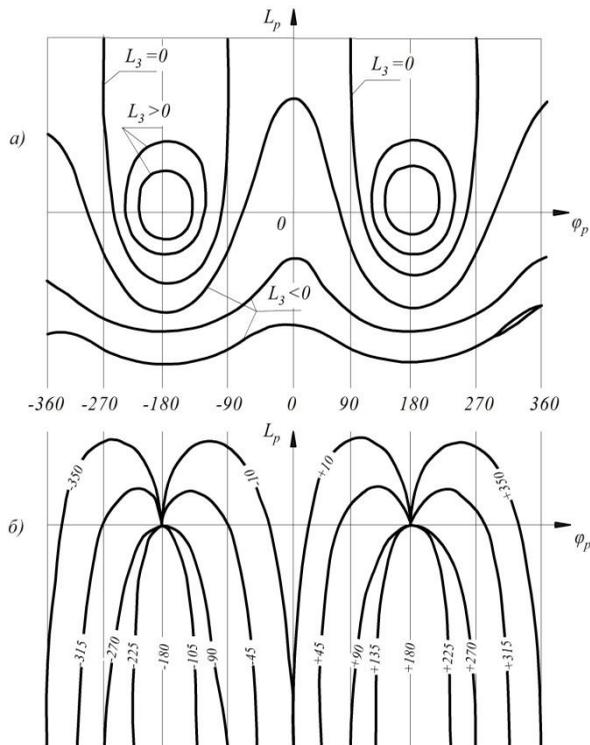


Рис. 3.20

Для практического применения оба семейства кривых строятся в общей сетке. Кроме того, поскольку зависимости являются периодическими, для практического использования достаточно иметь кривые для интервала фаз от  $0^\circ$  до  $-180^\circ$ .

Схема номограммы, применяемая на практике, показана на рис.3.21.

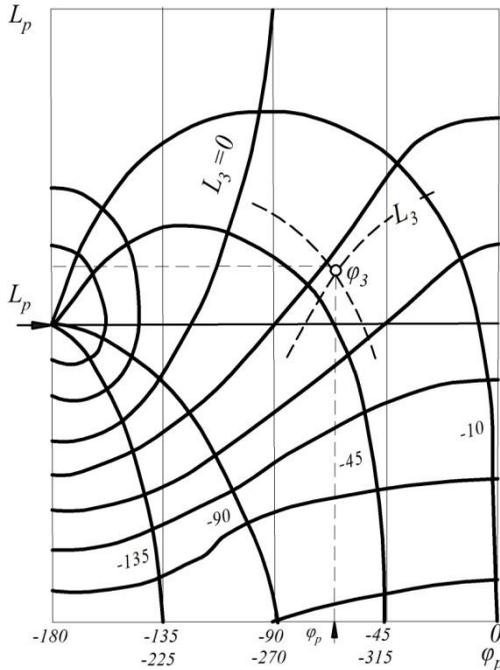


Рис.3.21

Для построения логарифмических частотных характеристик замкнутой цепи звеньев с единичной обратной связью по известным логарифмическим характеристикам той же цепи в разомкнутом состоянии необходимо:

- для ряда значений частот определить по логарифмическим характеристикам разомкнутой цепи значения  $L_p$  и  $\varphi_p$ , являющиеся входами в номограмму замыкания;

- по номограмме замыкания найти для каждой пары значений  $L_p$  и  $\varphi_p$  значения  $L_3$  и  $\varphi_3$ , как показано пунктирными линиями на рис.3.21.

Эти расчеты удобно вести, заполняя приведенную ниже табл. 3.3.

Таблица 3.3

$\omega$	$L_p$	$\varphi_p$	$L_3$	$\varphi_3$

По данным таблицы строятся логарифмические характеристики замкнутой цепи:

- логарифмическая амплитудная

$$L_3 = L_3(\lg \omega);$$

- логарифмическая фазовая

$$\varphi_3 = \varphi_3(\lg \omega).$$

При работе с номограммами и таблицами замыкания следует помнить, что кривые (см.рис.3.21) строят для значений  $\varphi_p$  от  $0^\circ$  до  $-180^\circ$  и значений  $L_p$  от  $-28$  до  $+36$  дБ, при этом искомые величины принимают значения:  $\varphi_3$  от  $0^\circ$  до  $-180^\circ$ ,  $L_3$  - от  $-28$  дБ до  $+\infty$ .

При  $L_p < -28$  дБ искомые значения  $\varphi_3$  близки к значениям  $\varphi_p$ , совпадая при  $L_p \rightarrow -\infty$  (т.е. практически при  $L_p < -28$  можно считать, что  $\varphi_3 = \varphi_p$ ).

При  $L_p > +36$  дБ значения  $\varphi_3$  близки к нулю при всех значениях  $\varphi_p$  и равняются нулю при  $L_p \rightarrow +\infty$  (т.е. практически при  $L_p > +36$  дБ можно считать, что  $\varphi_3 = 0$ ).

### 3.13.3. ЛЧХ замкнутых цепей звеньев с неединичными обратными связями

В тех случаях, когда обратная связь не является единичной, необходимо частотную функцию заданной цепи привести к виду, допускающему применение номограммы замыкания, то есть преобразовать ее так, чтобы она содержала частотную функцию цепи с единичной обратной связью. Такое преобразование можно выполнить либо алгебраически, либо как 'преобразование структурной схемы.

Пусть частотная функция замкнутой цепи имеет вид

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{1 + W_p(j\omega)},$$

что соответствует структурной схеме, показанной на рис.3.22, а. Логарифмические характеристики цепи в разомкнутом состоянии  $L_p = L_p(\lg \omega)$  и  $\varphi_p = \varphi_p(\lg \omega)$  известны.

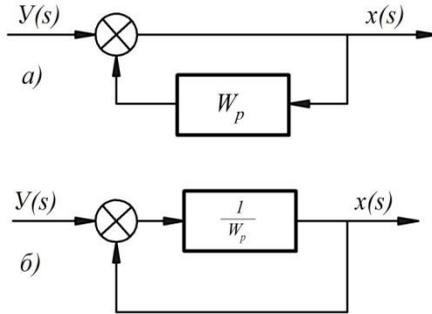


Рис.3.22

Это выражение можно представить в следующей форме:

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{W_p(j\omega) + 1},$$

которой соответствует структурная схема, показанная на рис.3.22, б, где обратная связь является единичной.

Последнее выражение допускает непосредственное использование номограммы замыкания по отношению к частотной функции  $\frac{1}{W_p(j\omega)}$ , обратной относительно известной функций  $W_p(j\omega)$ .

Поскольку

$$\frac{1}{W_p(j\omega)} = \frac{1}{R_p e^{j\varphi_p}} = R_p^{-1} e^{-j\varphi_p},$$

то модуль  $L'_p$  в логарифмических единицах и аргумент  $\varphi'_p$  обратной частотной функции разомкнутой цепи имеют ту же величину, что и модуль и аргумент функции  $W_p(j\omega)$ , но противоположны по знаку:

$$L'_p = 20 \lg R_p^{-1} = -20 \lg R_p = -L_p;$$

$$\varphi'_p = -\varphi_p.$$

Следовательно, для определения логарифмических характеристик замкнутой цепи с частотной функцией

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{1 + W_p(j\omega)}$$

необходимо определяемые по логарифмическим характеристикам разомкнутой цепи значения  $L_p$  и  $\varphi_p$  взять с обратными знаками и по этим данным ( $-L_p$  и  $-\varphi_p$ ) найти по номограмме замыкания значения  $L_3$  и  $\varphi_3$ .

В том случае, когда частотная функция замкнутой цепи имеет вид

$$W_3(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W_1(j\omega)W_2(j\omega)},$$

что соответствует структурной схеме, показанной на рис.3.23, а, ее можно записать в виде

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{1 + W_p(j\omega)} W_1(j\omega),$$

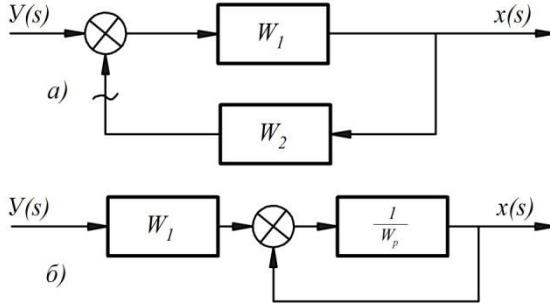


Рис.3.23

так как произведение  $W_1(j\omega)W_2(j\omega)$  представляет собой частотную функцию данной цепи в разомкнутом состоянии, или

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{\frac{W_p(j\omega)}{1 + \frac{1}{W_p(j\omega)}}} W_1(j\omega).$$

Этому выражению соответствует структурная схема, представленная на рис.3.23, б, содержащая цепь с единичной обратной связью.

Первый множитель в последнем выражении дает возможность определить по номограмме замыкания значения  $L'_3$  и  $\varphi'_3$  по известным для разомкнутой цепи значениям  $-L_p$  и  $-\varphi_p$  рассмотренным выше способом.

Логарифмические характеристики второго множителя  $W_1(j\omega)$  также известны:  $L_1 = L_1(\lg \omega)$  и  $\varphi_1 = \varphi_1(\lg \omega)$ . Поэтому для заданной замкнутой цепи с неединичной обратной связью получим

$$L_3 = L'_3 + L_1;$$

$$\varphi_3 = \varphi'_3 + \varphi_1.$$

### 3.13.4. ЛЧХ параллельных цепей звеньев

В случае параллельного соединения звеньев в выражении частотной функции системы будут появляться неэлементарные множители вида

$$W_3(j\omega) = 1 + W_0(j\omega),$$

которым соответствует структурная схема, показанная на рис. 3.24, причем логарифмические характеристики слагаемого  $W_0(j\omega)$  известны.

Для приведения этого выражения к виду, допускающему использование номограммы замыкания, достаточно взять равенство обратных величин

$$\frac{1}{W_3(j\omega)} = \frac{1}{1 + W_0(j\omega)},$$

или

$$\frac{1}{W_3(j\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{W_0(j\omega)}{1}}.$$

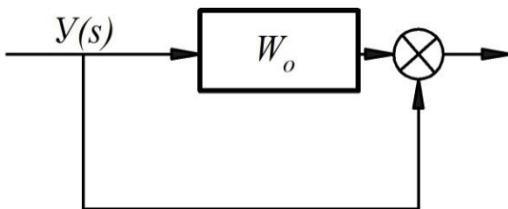


Рис.3.24

Отсюда следует, что, определив по логарифмическим характеристикам звена  $W_0$ , ординаты  $L_0$  и  $\varphi_0$ , необходимо изменить их знаки на обратные, по этим значениям ( $-L_0$  и  $-\varphi_0$ ) войти в номограмму замыкания, по которой будут определены значения  $-L_3$  и

—  $\varphi_3$ . Изменив знаки последних на обратные, получим ординаты  $L_3$  и  $\varphi_3$  исходного сомножителя  $1 + W_0(j\omega)$ .

Если замкнутая цепь образована двумя звеньями  $W_1$  и  $W_2$ , соединенными параллельно (рис.3.25), то частотная функция цепи имеет вид

$$W_3(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega).$$

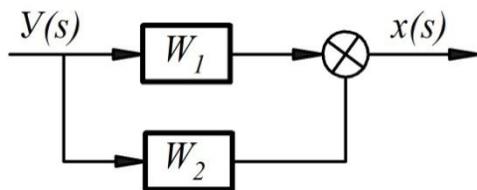


Рис.3.24

В этом случае, вынося за скобку одно из слагаемых и обозначая

$$\frac{W_2(j\omega)}{W_1(j\omega)} = W_0(j\omega),$$

получим

$$W_3(j\omega) = W_1(j\omega)[1 + W_0(j\omega)].$$

Следовательно, в этом случае необходимо найти по номограмме замыкания ординаты логарифмических характеристик множителя  $[1 + W_0(j\omega)]$  рассмотренным выше способом и просуммировать их с ординатами логарифмических характеристик множителя  $W_1(j\omega)$ :

$$L_3 = L_1 + L'_3, \quad \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi'_3,$$

где  $L'_3$  и  $\varphi'_3$  - ординаты логарифмических характеристик множителя  $[1 + W_0(j\omega)]$ .

### ***Вопросы для самоконтроля***

1. Понятие о структурной схеме.
2. Представление уравнений элементов элементарными структурами типовых звеньев.
3. Методика построения структурной схемы. Показать на примере.
4. Передаточные функции простейших соединений звеньев (последовательное соединение, параллельное соединение, соединение с охватом обратной связью).
5. Передаточные функции одноконтурных разомкнутых и замкнутых САР.
6. Передаточные функции многоконтурных САР с пересекающимися связями.
7. Понятие о статической ошибке САР. Передаточные функции ошибок.
8. Составление дифференциальных уравнений САР по их передаточным функциям.
9. Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) разомкнутых САР.
10. ЛЧХ замкнутых САР с единичными обратными связями. Номограммы и таблицы замыкания.
11. ЛЧХ замкнутых САР с неединичными обратными связями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.:Наука, 1975.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. -М.: Энергия.-4.1, 1965; ч.П, 1966; ч. Ш, 1970.
3. Теория автоматического регулирования/Под ред. В.В.Солодовникова.-Т.1,2,-М.: Машиностроение, 1967.
4. Вольский С.Г., Калужский Г.С., Грунтович Н.В. Теория линейных систем автоматического регулирования. Учебное пособие. ВМФ, 1991.
5. Суевалов Л.Ф. Теория корабельных автоматических систем управления.-Ленинград, 1978.
6. Голубничий Н.М. и др. Беседы по автоматике, - Киев: Техника, 1971.
7. Зайцев Г.Ф. и др. Основы автоматического управления и регулирования.-Киев: Техника, 1975.
8. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.-М.: Наука, 1978.
9. Вольский С.Г., Грунтович Н.В., Ремезов Д.И. Принципы построения систем управления автоматизированных атомных энергетических установок.-ВМФ, 1987.
10. Иващенко П.П. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем.-М.: Машгиз, 1962.
11. Гитис Э.И., Данилевич Г.А., Самойленко В.И. Техническая кибернетика.-М.: Советское радио, Т963.
12. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления/ Под общ.ред. Е.А.Санковского.-М.: Высшая школа, Т973.
13. Суевалов Л.Ф. Справочник по расчетам судовых автоматических систем.- 2-е изд., перераб. и доп.-Л.: Судостроение, 1989.
14. Архангельский Е.А. и др. Проектирование и эксплуатация комплексных автоматических систем управления корабельными техническими средствами. - Л.: ВМА, 1976.
15. Справочник по теории автоматического управления/Под ред. А.А.Красовского.- М.:Наука, гл.ред.физ.-мат.лит.,1987.



Учебное издание

ГРУНТОВИЧ Надежда Владимировна  
ГРУНТОВИЧ Николай Васильевич

# Теория автоматических систем управления

## часть I

ISBN 978-5-88517-231-8



Редактор Лебедева Е.М.

---

Подписано к печати 03.04.2015 г. Формат 60x84  $\frac{1}{16}$ .  
Бумага офсетная. Усл. п. л. 11,04. Тираж 550 экз. Изд. № 2952.

---

Издательство Брянского государственного аграрного университета  
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ