

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВО «Брянский государственный аграрный университет»

*Институт энергетики и природопользования*

*Кафедра математики, физики и информатики*

Ракул Е.А.

# ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Методические указания и задания  
для самостоятельной работы по дисциплине  
«Дополнительные главы математики»

для магистрантов направления подготовки  
13.04.02 Электроэнергетика и электротехника

УДК 517.518.475 (076)

ББК 22.16

Р 19

Ракул, Е.А. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье: методические указания и задания для самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» для магистрантов направления подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» / Е.А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2018. – 26 с.

Рецензенты:

Безик В.А., к.т.н., доцент, зав. кафедрой электроэнергетики и автоматики

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования от 10.04. 2018 г., протокол №6.

© Брянский ГАУ, 2018

© Ракул Е.А., 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

Интеграл Фурье	4
Задания для самостоятельной работы	12
Преобразование Фурье	14
Задания для самостоятельной работы	20
Литература	22
Приложение 1	23

## ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Пусть функция (сигнал)  $y = f(t)$  описывает некоторый периодический процесс. С целью исследования этого процесса часто представляют функцию  $f(t)$  в виде суммы постоянного члена и гармонических составляющих с частотами  $\omega_0, \omega_1 = 2\omega_0, \dots$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{\pi}{\ell}. \quad (1)$$

Совокупность коэффициентов Фурье периодической функции называется ее спектром. Спектр периодической функции дискретный. С точки зрения физики разложение в ряд Фурье можно трактовать как представление периодического сигнала в виде суммы гармонических колебаний.

Если на числовой оси  $(-\infty, \infty)$  задан непериодический сигнал  $f(t)$ , то для исследования такого процесса представим  $f(t)$  на промежутке  $[-\ell, \ell]$  в виде ряда (1). За пределами рассматриваемого промежутка сумма тригонометрического ряда будет повторять значения функции  $f(t)$  в промежутке  $[-\ell, \ell]$ . После этого естественно сделать предельный переход при  $\ell \rightarrow +\infty$ . Оказывается, что в результате такого предельного перехода произойдет качественный скачок. Непериодическая функция, заданная на всей оси, представится в виде интеграла, который является непрерывным аналогом ряда Фурье и представляет собой “сумму гармонических составляющих”, частоты которых заполняют всю действительную полуось  $0 \leq \omega < \infty$ . А именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема.** (О представимости функции интегралом Фурье).

Если функция  $f(t)$  абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е.

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  и удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном промежутке этой оси, то при всех  $t$  имеет место равенство

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau. \quad (2)$$

Если  $t_0$  - точка разрыва первого рода функции  $f(t)$ , то левую часть формулы (2) следует понимать как  $\frac{f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)}{2}$ , что мы всегда будем иметь в виду.

Формула (2) называется интегральной формулой Фурье, а ее правая часть – двойным интегралом Фурье.

Обозначая

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad \text{и} \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad (3)$$

запишем интегральную формулу Фурье (1) в виде

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (4)$$

Интегральная формула Фурье (4) аналогична разложению периодической функции в ряд Фурье (см. приложение 1). Подынтегральная функция формулы (4) напоминает общий член ряда Фурье, только здесь частота  $\omega$ , непрерывно изменяясь, пробегает все значения от 0 до  $\infty$ , и потому суммирование заменяется интегрированием от 0 до  $\infty$ . Функции  $A(\omega), B(\omega)$ , определенные формулами (2), аналогичными формулам для коэффициентов ряда Фурье (см. приложение 1), дают закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты  $\omega$ .

Смысл интегральной формулы Фурье состоит в следующем: интегральная формула Фурье представляет непериодическую функцию как наложение гармоник с непрерывной последовательностью частот.

С физической точки зрения это означает, что непериодический процесс уже нельзя построить из гармонических колебаний только с определенными изолированными частотами  $\omega_n = n \frac{\pi}{\ell}$ , теперь для его построения необходимы гармонические колебания всех частот.

Рассмотрим частные случаи применения формулы (4).

1. Пусть  $f(t)$  - четная функция. Тогда  $A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau$ ,  $B(\omega) = 0$ .

Формула (4) в этом случае принимает вид

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right) \cos \omega t d\omega. \quad (5)$$

Запишем эту формулу в симметричном виде, положив

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_C(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad \text{где} \quad F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

$F_C(\omega)$  называется косинус-преобразованием Фурье функции  $f(t)$ .

2. Пусть  $f(t)$ - нечетная функция. В этом случае  $A(\omega)=0$ ,

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau ,$$

тогда

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right) \sin \omega t d\omega . \quad (6)$$

Введем синус-преобразование Фурье, положив  $F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau$ ,

тогда формула (6) принимает вид  $f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_S(\omega) \sin \omega t d\omega$ .

3. Пусть  $f(t)$  определена только в интервале  $(0, \infty)$ . Тогда ее можно представить при  $t > 0$  как формулой (5), так и формулой (6). Для этого следует функцию  $f(t)$  продолжить на промежуток  $(-\infty, 0)$  так, чтобы она стала или четной или нечетной на всей действительной оси.

Теперь рассмотрим примеры представления неперiodических функций интегралом Фурье.

1. Представить интегралом Фурье функцию  $f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 3, \\ \frac{1}{2}, & t = -1, t = 3, \\ 0, & t > 3, t < -1 \end{cases}$

График функции представлен на рисунке 1.

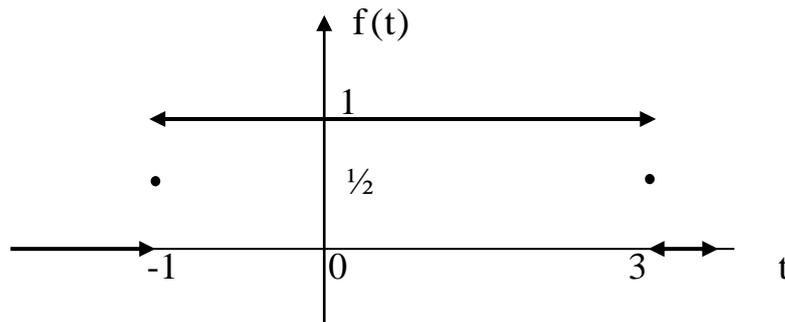


Рис. 1

**Решение.** Данная функция на любом конечном промежутке числовой оси  $(-\infty, \infty)$  удовлетворяет условиям Дирихле. Очевидно, что  $f(t)$  является абсолютно интегрируемой функцией на всей числовой оси, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_{-1}^3 1 \cdot dt = t \Big|_{-1}^3 = 4 < \infty .$$

Следовательно, данная функция может быть представлена интегралом Фурье; имеем

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-1}^3 1 \cdot \cos \omega(t-\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-\sin \omega(t-\tau)}{\omega} \Big|_{-1}^3 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-\sin \omega(t-3) + \sin \omega(t+1)}{\omega} d\omega = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega(t-1) \cdot \sin 2\omega}{\omega} d\omega.
 \end{aligned}$$

В точках разрыва  $f(t)$ , т.е. при  $t = -1$  и  $t = 3$ , полученное представление сохраняется, т. к. в этих точках  $\frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)] = \frac{1}{2} f(t)$ .

В частности, при  $t = 3$  имеем  $f(3) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\omega \cdot \sin 2\omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2}$ , откуда

легко находим значение интеграла:  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

Таким образом, в результате решения основной задачи – представления заданной функции интегралом Фурье – мы смогли вычислить интеграл от функции, первообразная которой через элементарные функции не выражается. И еще одна характерная особенность. Как видно из данного примера, интеграл Фурье может представлять функцию, которая на разных промежутках числовой оси задается разными аналитическими выражениями.

2. Представить интегралом Фурье заданную на всей оси функцию

$$f(t) = \begin{cases} t+2, & -2 < t < 0 \\ -t+2, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & |t| \geq 2 \end{cases}$$

График функции представлен на рисунке 2.

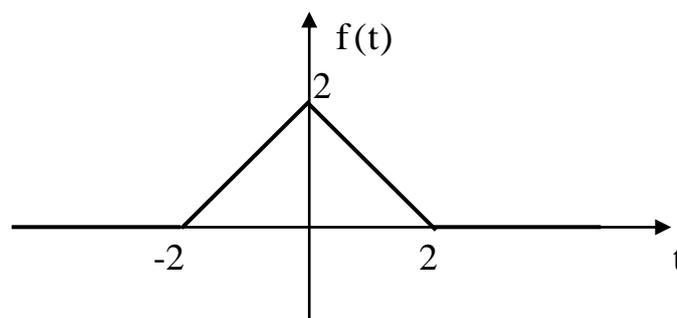


Рис. 2

**Решение.** Условия представимости данной функции интегралом Фурье выполняются. Эта функция – четная, поэтому воспользуемся формулой (5):

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^2 [2-\tau] \cdot \cos \omega \tau d\tau \right) \cdot \cos \omega t d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( 2 \cdot \frac{\sin \omega \tau}{\omega} \Big|_0^2 - \frac{\cos \omega \tau}{\omega^2} \Big|_0^2 - \frac{\tau \sin \omega \tau}{\omega} \Big|_0^2 \right) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2\omega}{\omega^2} \cos \omega t d\omega =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 \cos \omega t d\omega .$$

В частности, полагая  $t = 0$ , найдем  $\int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$ .

3. Представить интегралом Фурье функцию  $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi n \\ 0, & t < 0, t > \pi n \end{cases}$ , где  $n$  – целое число. График функции представлен на рисунке 3.

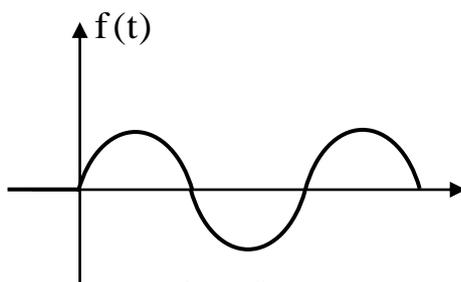


Рис. 3

**Решение.** Функция  $f(t)$  непрерывна на всей числовой оси и абсолютно интегрируема, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_0^{\pi n} |\sin t| dt < \pi n < \infty .$$

Следовательно, возможно представление этой функции интегралом Фурье. Согласно формуле (1)

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\pi n} \sin \tau \cdot \cos \omega(t-\tau) d\tau .$$

Используя равенство

$$\sin \tau \cdot \cos \omega(t - \tau) = \frac{1}{2} [\sin(\tau - \omega t + \omega \tau) + \sin(\tau + \omega t - \omega \tau)],$$

интегрируя и производя несложные преобразования, получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t + (-1)^{n+1} \cos \omega(t - \pi n)}{1 - \omega^2} d\omega.$$

4. Представить интегралом Фурье функцию  $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ,

продолжив ее на всю числовую ось: а) четным, б) нечетным образом. График функции представлен на рисунке 4.

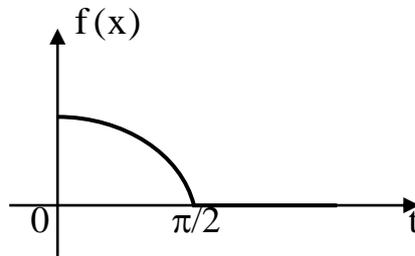


Рис. 4

**Решение.** Функции, получаемые продолжением  $f(t)$  на  $(-\infty, 0)$  четным и нечетным образом, удовлетворяют условиям теоремы. Для четного продолжения воспользуемся формулой (5)

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\pi/2} \cos \tau \cdot \cos \omega \tau d\tau \right) \cos \omega t d\omega.$$

Вычислим отдельно внутренний интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \cos \tau \cdot \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(1 - \omega)\tau d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(1 + \omega)\tau d\tau =$$

$$= \frac{\sin(1 - \omega)\tau}{2(1 - \omega)} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(1 + \omega)\tau}{(1 + \omega)} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\omega\right)}{2(1 - \omega)} +$$

$$+ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\omega\right)}{2(1+\omega)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{2(1-\omega)} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{2(1+\omega)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{(1-\omega^2)}.$$

Следовательно, при четном продолжении функции

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2} \cos \omega t d\omega.$$

Если  $f(t)$  продолжена нечетным образом, то следует применить формулу (6). Получим

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\pi/2} \cos \tau \cdot \sin \omega \tau d\tau \right) \sin \omega t d\omega.$$

Производя аналогичные вычисления, приходим к следующему представлению функции  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t d\omega.$$

Таким образом, для  $t > 0$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2} \cos \omega t d\omega.$$

5. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции  $f(t) = \exp(-at)$ ,  $a > 0$ ,  $t \geq 0$ .

**Решение.**

$F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau$ , следовательно, используя формулу для

вычисления циклического интервала, получим

$$F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \cos \omega \tau d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{e^{-a\tau}}{a^2 + \omega^2} (-a \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau) \right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

Аналогично

$$F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \sin \omega \tau d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{e^{-a\tau}}{a^2 + \omega^2} (-a \sin \omega \tau - \omega \cos \omega \tau) \right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

Если теперь к полученным функциям применить обратные косинус- и синус-преобразования Фурье, то найдем

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega = e^{-at}, \quad t > 0,$$

и

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega = e^{-at}, \quad t > 0.$$

Применяя косинус- и синус-преобразования Фурье, можно получить таблицу значений несобственных интегралов, зависящих от параметра. Однако основное назначение косинус- и синус-преобразований Фурье состоит в применениях к решению задач математической физики.

6. Найти функцию  $\varphi(t)$ , если  $\int_0^{\infty} \varphi(\tau) \sin \omega \tau d\tau = e^{-\omega}$ ,  $\omega > 0$ .

**Решение.** Функция  $F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\omega}$ , как это видно из представленного уравнения, является синус-преобразованием Фурье функции  $\varphi(t)$ . Поэтому и на основании формулы обратного синус-преобразования Фурье находим

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-\omega}}{t^2 + 1} [-\sin \omega t - t \cos \omega t] \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{t^2 + 1}.$$

7. Вычислить интеграл  $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega$ .

**Решение.** Замечая, что  $\frac{\sin \alpha \omega}{\omega} = \int_0^{\alpha} \cos \omega \tau d\tau$ , можем записать

$$\frac{1}{\pi} \cdot I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\alpha} \cos \omega \tau d\tau \right) \cdot \cos \omega t d\omega.$$

Если ввести функцию  $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \alpha, \\ 0, & t \geq \alpha, t \leq 0, \end{cases}$  то предыдущее равенство

примет

вид  $\frac{1}{\pi} \cdot I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right) \cdot \cos \omega t d\omega = f(t)$ , т.е.  $I = \begin{cases} \pi, & 0 < t < \alpha, \\ 0, & t \geq \alpha, t \leq 0. \end{cases}$

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Представить интегралом Фурье функции:

$$1. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, t = 1, \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases}$$

**Ответ:**  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\omega(1-2t)}{2}}{\omega} d\omega.$

$$2. f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 < t < 1, \\ -1-t, & -1 < t < 0, \\ 0, & t \geq 1, t \leq -1. \end{cases}$$

**Ответ:**  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega - \sin \omega}{\omega^2} \sin \omega t d\omega.$

$$3. f(t) = \begin{cases} |t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

**Ответ:**  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}{\omega^2} \cos \omega t d\omega.$

$$4. f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ e^{-t}, & t < 0. \end{cases}$$

**Ответ:**  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{1 + \omega^2} d\omega.$

5. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(t) = \begin{cases} 2t - 3, & 0 \leq t \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & \frac{3}{2} < t < \infty. \end{cases}$$

**Ответ:**  $F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2 \left( \cos \frac{3\omega}{2} - 1 \right)}{\omega^2}.$

6. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(t) = a^{-t}, \quad 0 < t < \infty, \quad a > 0.$$

**Ответ:**  $F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\ln a}{\ln a^2 + \omega^2}.$

7. Найти функцию  $\varphi(t)$ , если  $\int_0^{\infty} \varphi(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{1 + \omega^2}.$

**Ответ:**  $\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + t^2}.$

8. Вычислить интеграл  $I = \int_0^{\infty} \left( \frac{1 - \cos h\omega}{\omega} \right) \sin \omega t d\omega.$

**Ответ:**  $I = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < t < h, \\ 0, & t > h. \end{cases}$

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Интегральную формулу Фурье можно записать в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (7)$$

Это есть комплексная форма интеграла Фурье. Введем функцию

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (8)$$

то согласно (7) получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9)$$

Переход от  $F(\tau)$  к  $F(\omega)$  по формуле (8) называется прямым преобразованием Фурье. Восстановление  $f(t)$  по  $F(\omega)$  с помощью формулы (9) называется обратным преобразованием Фурье. Функция  $F(\omega)$  называется спектральной функцией или спектральной плотностью сигнала  $f(t)$ . Функция  $|F(\omega)|$  называется амплитудным спектром, функция  $\Psi(\omega) = -\arg F(\omega)$  называется фазовым спектром функции  $f(t)$ .

$|F(\omega)|$  и  $\Psi(\omega)$  - спектральные характеристики сигнала  $f(t)$  соответственно амплитудная и фазовая  $|F(\omega)|$  - четная, а  $\Psi(\omega)$  - нечетная функция.

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot \exp(-j\Psi(\omega)).$$

Рассматривая интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье при  $\ell \rightarrow \infty$ , можно заметить, что спектральные линии в пределе сливаются. Поэтому амплитудный спектр непериодической функции будет сплошным и его изображают непрерывной линией.

Формулы (8) и (9) показывают, что если известна спектральная плотность сигнала  $f(t)$ , то можно восстановить сигнал  $f(t)$ , и, наоборот, по известному сигналу  $f(t)$  можно определить его спектральные характеристики. Таким образом, описания процессов временными функциями (сигналами) и спектральными функциями равноправны. При решении конкретных задач, связанных с распространением сигналов, используют ту или иную форму представления, исходя из простоты математического анализа.

Рассмотрим важные для практики примеры нахождения спектральной плотности и спектральных характеристик непериодических сигналов.

1. **Единичная функция**  $\chi(t)$  изображается графиком, как показано на рисунке 5.

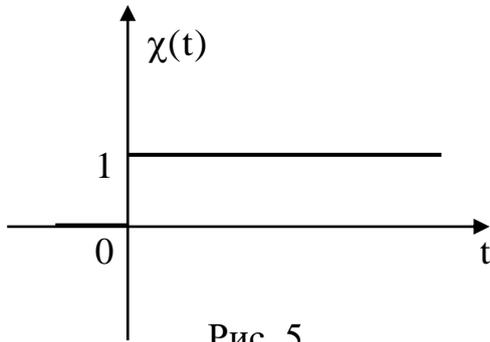


Рис. 5

Единичная функция  $\chi(t)$  определяется следующим образом:  $\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$

Если попытаться вычислить спектральную плотность единичной функции  $\chi(t)$  “напрямую”, возникает затруднение, связанной с тем, что эта функция не является абсолютно интегрируемой.

В этом случае умножают заданную функцию на экспоненту  $e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ . Вычислив спектральную плотность функции  $\chi(t)e^{-\alpha t}$ , искомую спектральную плотность находят предельным переходом при  $\alpha \rightarrow 0$ .

$$F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-\alpha \tau} \cdot e^{-j\omega \tau} d\tau = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)\tau} d\tau =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-1}{(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{j\omega}.$$

Таким образом, амплитудная характеристика единичной функции  $|F(\omega)| = \frac{1}{\omega}$  изображается графиком, как показано на рисунке 6.

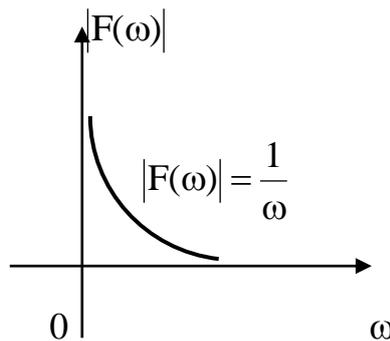


Рис. 6

## 2. Прямоугольный импульс.

Сигнал, определяемый выражением:  $S(t) = \begin{cases} h, & |t| \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2}, \end{cases}$

находит широкое распространение, как в технике, так и в теории сигналов и цепей. Прямоугольный импульс высотой  $h$ , длительностью  $\tau$  изображен на рисунке 7.

Применяя формулу (8), находим спектральную плотность этого импульса.

$$F(\omega) = h \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{h}{j\omega} \left( e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right) = \frac{2h}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = h\tau \left[ \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right].$$

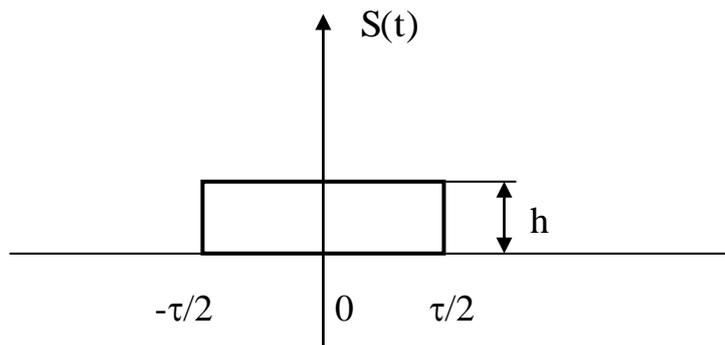


Рис. 7

Далее на рисунке 8 представлены графики спектральной плотности, амплитудного и фазового спектров прямоугольного импульса. На графике фазового спектра каждая перемена знака  $F(\omega)$  учитывается приращением фазы на  $\pi$ .

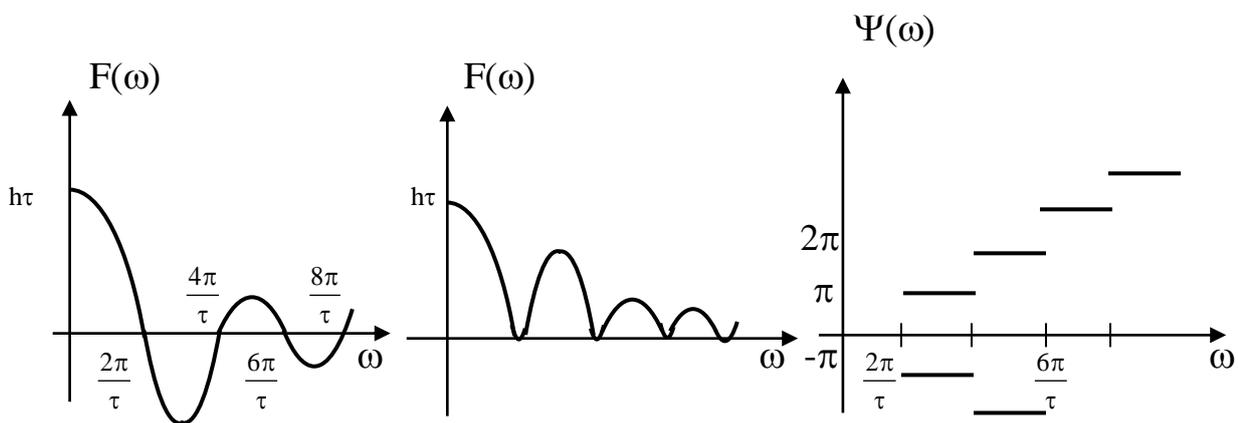


Рис. 8

3. **Треугольный импульс**

$$S(t) = \begin{cases} h \left( 1 + \frac{t}{\tau/2} \right), & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0, \\ h \left( 1 - \frac{t}{\tau/2} \right), & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & t > \frac{\tau}{2}, t < -\frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

График функции представлен на рисунке 9.

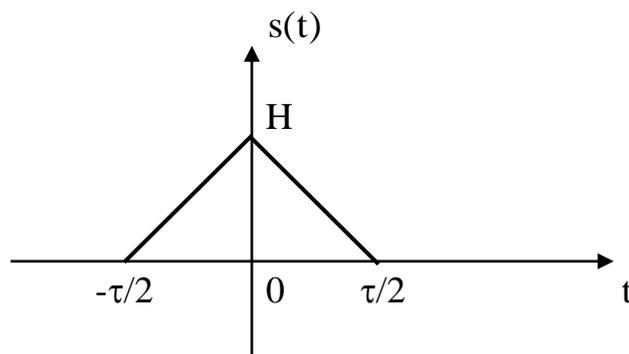


Рис. 9

**Решение.** Вычисляем спектральную плотность  $F(\omega)$ .

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^0 h \left( 1 + \frac{t}{\tau/2} \right) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\tau/2} h \left( 1 - \frac{t}{\tau/2} \right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= h \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\tau/2}^0 + \frac{2h}{\tau} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2} (-j\omega t - 1) \Big|_{-\tau/2}^0 + h \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_0^{\tau/2} - \\ &\quad - \frac{2h}{\tau} \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2} (-j\omega t - 1) \Big|_0^{\tau/2} = \dots = \frac{h\tau}{2} \left( \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \right)^2. \end{aligned}$$

График спектральной плотности  $F(\omega)$  изображен на рисунке 10.

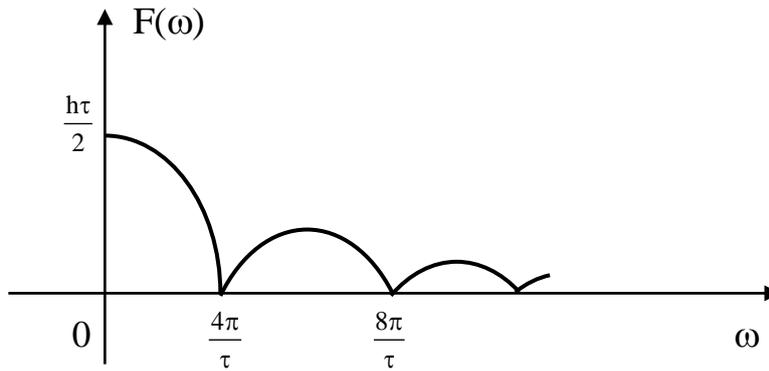


Рис. 10

4. **Колоколообразный импульс**  $S(t) = A \cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Этот импульс совпадает по форме с графиком нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей и называется также гауссовским импульсом. Колоколообразный импульс и его спектральная плотность изображены на рисунке 11.

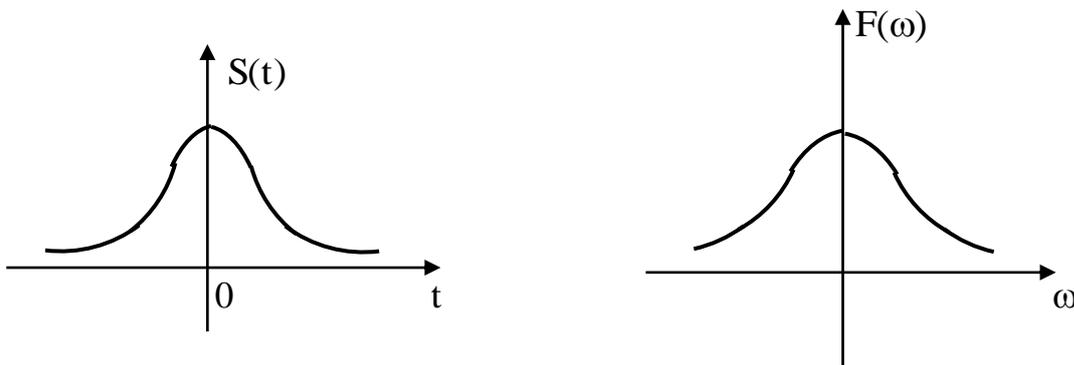


Рис. 11

Будем находить спектральную плотность данного импульса. По формуле (8) имеем

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Для вычисления интеграла удобно в подынтегральной функции дополнить показатель степени до квадрата суммы

$$-\left(\frac{t^2}{2a^2} + j\omega t\right) = -\left[\left(\frac{t^2}{2a^2} + j\omega t + d^2\right) - d^2\right] = -\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}a} + d\right)^2 - d^2\right],$$

где величина  $d$  определяется из условия

$$j\omega t = 2 \frac{t}{\sqrt{2}a} \cdot d, \text{ т.е. } d = \frac{j\omega a}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, выражение для  $F(\omega)$  приводится к виду

$$F(\omega) = A e^{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}a} + d\right)^2} dt.$$

Перейдем к новой переменной  $x = \frac{t}{\sqrt{2}a} + d$ , получим

$$F(\omega) = A e^{d^2} \sqrt{2} a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Так как  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , то окончательно  $F(\omega) = A \sqrt{2\pi} a e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}} = B e^{-\frac{\omega^2}{2b^2}}$ , где

$$b = \frac{1}{a}, \quad B = \sqrt{2\pi} a A.$$

Полученный результат имеет важное значение для теории сигналов. Оказывается, что гауссовский импульс и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: для получения одной из них по заданной другой достаточно совершить замену  $t$  на  $\omega$  и наоборот.

5. **Волновой цуг.** Так называют функцию, определяемую равенством:

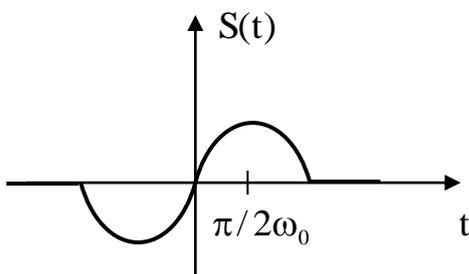


Рис. 12

$$S(t) = \begin{cases} h \cdot \sin \omega_0 t, & |t| < \frac{\pi}{\omega_0}, \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{\omega_0}. \end{cases}$$

График функции представлен на рисунке 12.

Рассматриваемый сигнал играет в теории связи важную роль. Находим его спектральную плотность по формуле (8):

$$F(\omega) = h \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = h \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2 + \omega_0^2} \left[ -j\omega \cdot \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t \right] \Big|_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} =$$

$$= \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2} \left\{ e^{-\frac{j\omega\pi}{\omega_0}} \cdot \omega_0 - e^{\frac{j\omega\pi}{\omega_0}} \cdot \omega_0 \right\} = \frac{-2h\omega_0 j}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0} = \frac{2h\omega_0 j}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \sin \frac{\pi\omega}{\omega_0}.$$

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти спектральные плотности и спектральные характеристики следующих непериодических сигналов.

1. Косинусоидальный импульс.

$$S(t) = \begin{cases} h \cos \frac{\pi t}{\tau}, & |t| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Ответ:**  $F(\omega) = \frac{2\pi h}{\tau} \cdot \frac{\cos \frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2}.$

2. Экспоненциальный импульс.

$$S(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

**Ответ:**  $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$

3. Линейно-экспоненциальный импульс.

$$S(t) = \begin{cases} ht e^{-ht}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

**Ответ:**  $F(\omega) = \frac{h}{h^2 + \omega^2} e^{-j \operatorname{arctg} \frac{2h\omega}{h^2 - \omega^2}}.$

$$4. f(t) = \begin{cases} \sin^2 t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$$

**Ответ:**  $F(\omega) = \frac{4 \sin \pi \omega}{\omega(4 - \omega^2)}$ .

$$5. f(t) = \begin{cases} \sin 2 m t, & |t| = \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi, \end{cases} \quad m - \text{натуральное число.}$$

**Ответ:**  $F(\omega) = \frac{4 m j}{4 m^2 - \omega^2} \cdot \sin \omega \pi$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: учебник для вузов. В 3 т. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Изд-во «Дрофа», 2004. 566 с.
2. Привалов И.И. Ряды Фурье: учебник для вузов. 5-е изд., стер. М.: Изд-во Юрайт, 2018. 164 с. (Авторский учебник). Режим доступа: [www.biblio-online.ru/book/F7FF0D52-3C35-4EAE-AC4F-5CCE948D7580](http://www.biblio-online.ru/book/F7FF0D52-3C35-4EAE-AC4F-5CCE948D7580).
3. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: пер. с англ. В.А. Скворцова. В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1985. 264 с.
4. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: пер. с англ. Т.П. Лукашенко, В.А. Скворцова. В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1985. 400 с.
5. Аникин А.Ю. Ряды Фурье: методические указания к выполнению типового расчета. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 32 с. Режим доступа: <https://rucont.ru/efd/287746>.
6. Панков Е.А. Ряды Фурье. Методические указания и задания для самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» для магистрантов направления подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника». Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2017 г. 12 с. Режим доступа: <http://www.bgsha.com/ru/book/374770/>

**РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ  $2\pi$  и  $2\ell$**

Рядом Фурье периодической функции  $f(x)$  с периодом  $2\pi$ , определенной на сегменте  $[-\pi, \pi]$ , называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма  $S(x)$  есть периодическая функция с периодом  $2\pi$ , т.е.  $S(x + 2\pi) = S(x)$ .

**Теорема Дирихле.** Пусть функция  $f(x)$  на сегменте  $[-\pi, \pi]$  имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента  $[-\pi, \pi]$  и сумма этого ряда  $S(x)$  вычисляется:

1)  $S(x) = f(x)$  во всех точках неразрывности  $f(x)$ , лежащих внутри сегмента  $[-\pi, \pi]$ ;

2)  $S(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ , где  $x_0$  - точка разрыва 1-го рода функции  $f(x)$ ;

3)  $S(x) = \frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$  на концах промежутка, т.е. при  $x = \pm\pi$ .

В случае, когда  $f(x)$  - четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (4)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

В случае, когда  $f(x)$  - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, dx, \quad (6)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (7)$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от  $2\pi$ . В этом случае, если  $f(x)$  - периодическая функция с периодом  $2\ell$ , для которой выполняются на сегменте  $[-\ell, \ell]$  условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (8)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad (9)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx. \quad (10)$$

В случае, когда  $f(x)$  - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad (11)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx. \quad (12)$$

В случае, когда  $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad (13)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \quad (14)$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких  $x$  полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

**ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ**

Методические указания и задания для самостоятельной работы  
по дисциплине «Дополнительные главы математики»

*для магистрантов направления подготовки  
13.04.02 Электроэнергетика и электротехника*

*Редактор Павлютина И.П.*

---

Подписано к печати 25.04.2018 г.  
Формат 60x84 1/16. Бумага печатная. Усл. печ. л. 1.51.  
Тираж 50 экз. Изд. № 5875.

---

Издательство Брянского государственного аграрного университета  
243365, Брянская обл., Выгоничский район, п. Кокино, БГАУ