МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «БРЯНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Рыжик В.Н.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к расчетно-графическим работам
по

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для бакалавров

БРЯНСК 2014 г.

УДК 512.8
ББК 22.1Я73
Р 93

Рыжик, В.Н. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ/ В.Н. Рыжик.- Брянск.- Издательство Брянской ГСХА, 2014. - 52 с.

Методические указания к расчетно-графическим работам по высшей математике предназначены для бакалавров, обучающихся по всем направлениям инженерно-технологического факультета и факультета электрификации и природообустройства. Рекомендуются для закрепления студентами теоретических знаний по темам «Функции нескольких переменных», «Кратные и криволинейные интегралы», «Элементы теории поля».

Рецензент: к.т.н., доцент кафедры
высшей математики и физики Панкова Е.А.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерного факультета от 2.06.2014 г., протокол №4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

В В Е Д Е Н И Е

Цель расчетно-графических работ – закрепление студентами теоретических знаний по темам «Функции нескольких переменных», «Кратные и криволинейные интегралы», «Элементы теории поля»; умение применять математические расчеты и формулы к задачам физики, механики.

Задачи, которые входят в данную работу, должны выдаваться студентам для самостоятельного решения. Каждое задание – индивидуальное.

Все задания снабжены краткими теоретическими сведениями. Для каждого задания рассмотрено решение типового примера.

I. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функция двух переменных и ее область определения

Определение. Переменная z называется функцией двух переменных x и y, если:

1) задано множество G пар численных значений x и y;

2) задан закон, по которому каждой паре чисел $(x; y)$ из этого множества соответствует единственное численное значение.

При этом переменные x и y называются аргументами или независимыми переменными. Обозначения функций двух переменных аналогичны обозначениям функций одной переменной:

$z = f(x; y)$, $z = \varphi(x; y)$, $z = z(x; y)$, $z = F(x; y)$ и т.д.

При нахождении частного значения z_0 функции $z = f(x; y)$, которое она принимает при заданных значениях аргументов $x = x_0$ и $y = y_0$, пишут или

$$z_0 = z\,|_{(x=x_0;\,y=y_0)} \quad \textit{или} \; z_0 = f(x_0; y_0)$$

Определение. Множество G всех пар значений аргументов данной функции двух переменных называется областью определения этой функции.

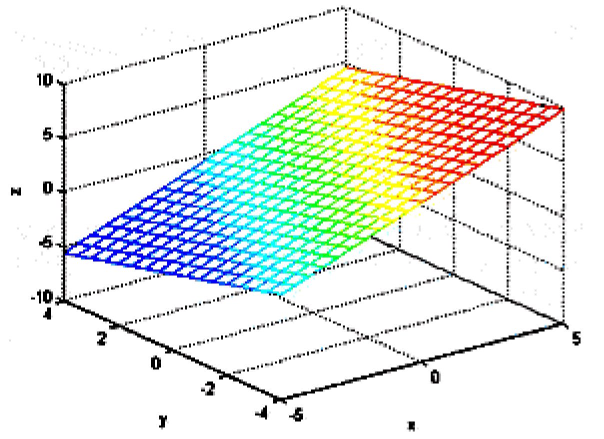
Например, областью определения функции $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ является множество, для которого $1 - x^2 - y^2 \succ 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \prec 1$. Множество $z = f(x; y)$ таких точек образует внутренность круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

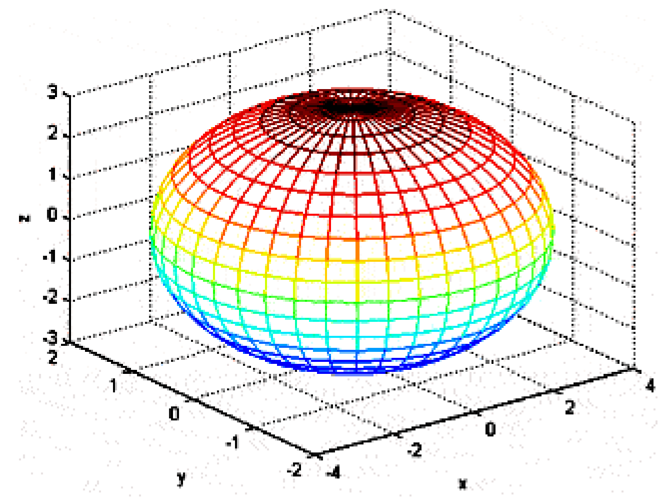
Графиком функции двух переменных в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве является в общем случае поверхность.

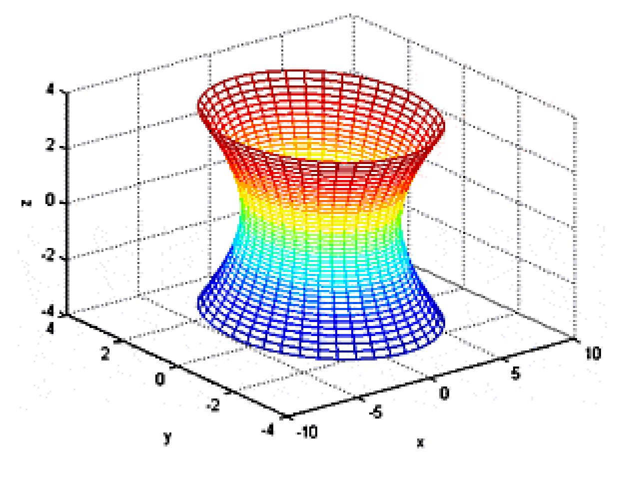
Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется линия $f(x; y) = C$ на плоскости XOY, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$.

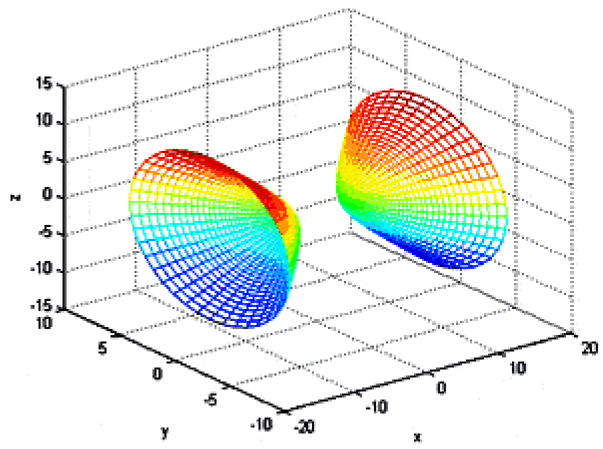
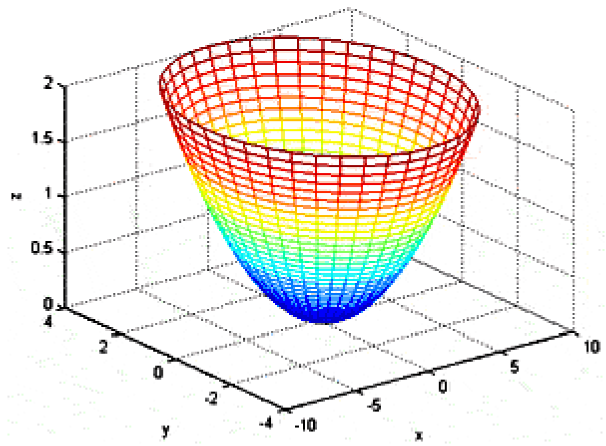
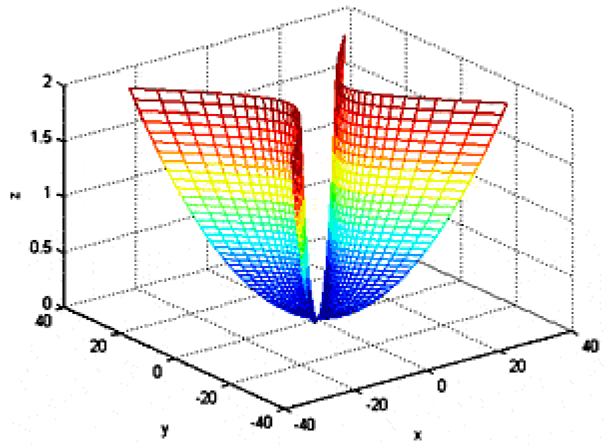
Аналогично $U = f(x; y; z)$ функция трех переменных.

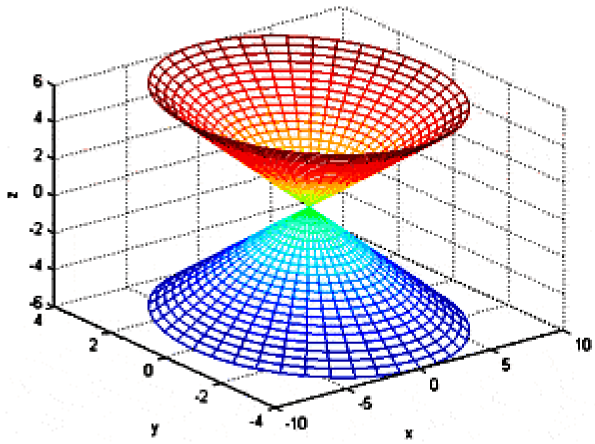
Некоторые примеры поверхностей:

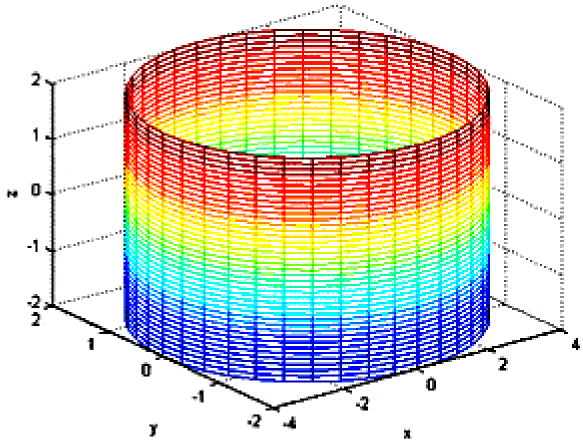
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ Уравнение плоскости	

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ Эллипсоид	

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Однополостный гиперболоид	

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$ Каноническое уравнение: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a>0,\ \ b>0,\ \ c>0).$$	 Двуполостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ \ q>0).$$	 Эллиптический параболоид
$$2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$	 Гиперболический параболоид

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	 Действительный конус

$x^2/a^2 + y^2b^2 = 1$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ - Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ - Гиперболический цилиндр	 Эллиптический цилиндр

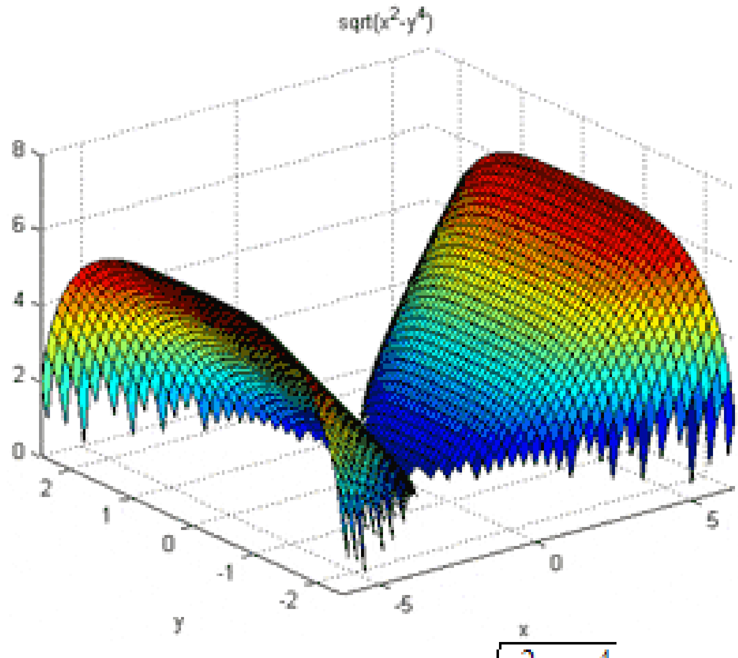


График функции $\sqrt{x^2-y^4}$

Примеры построения некоторых поверхностей.

Пример 1.

Определение 1. Конусом второго порядка называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

где a, b, c-- положительные числа.

Замечание 1. С математической точки зрения поверхность(1) лучше определять с помощью уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2, \tag{1.1}$$

так как в нем меньше параметров, но при этом, во-первых, теряется аналогия с уравнениями предыдущих поверхностей, а во-вторых, если считать, что величины a, b, x, у, zимеют размерность длины, то в уравнении(1.1) размерности правой и левой части не согласуются.

Для краткости в дальнейшем конус второго порядка будем называть просто конус. Исследуем форму конуса. Так же, как эллипсоид и гиперболоиды, он имеет три плоскости симметрии, три оси симметрии и центр симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат.

Для построения конуса найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью xOy. На этой плоскости $z=0$, поэтому

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Координаты только одной точки плоскости xOy могут удовлетворять данному уравнению, а именно, начала координат. Найдем линию пересечения с плоскостью. На этой плоскости $x=0$, поэтому

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Это уравнение пары прямых $z = \pm \frac{c}{b} y$ на плоскости yOz. Построим эти прямые (рис. 1). Сечение плоскостью xOz также является парой прямых с уравнением $z = \pm \frac{c}{a} y$. Нарисуем и эти прямые (рис. 1).

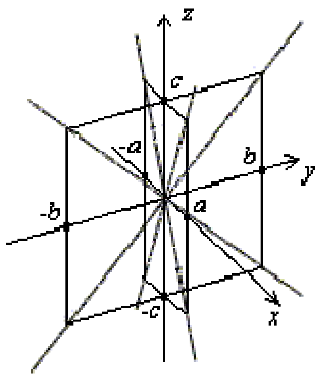


Рис.1.Сечения конуса координатными плоскостями

Найдем линии пересечения поверхности с плоскостями $z = \pm y, h \succ 0$, Уравнения этих линий

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = \pm h. \end{cases}$$

Первое уравнение преобразуем к виду

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2 h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{b^2 h^2}{c^2}\right)} - 1,$$

то есть к виду

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{1.2}$$

где $a_1 = \frac{ah}{c}; b_1 = \frac{bh}{c}$. Уравнение(1.2) является уравнением эллипса. Нарисуем полученные сечения (рис. 2).

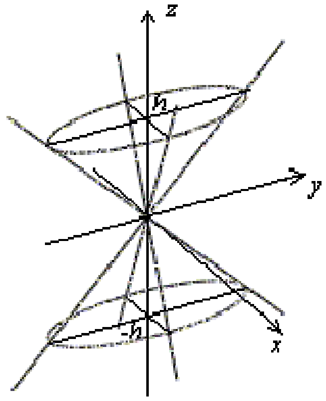


Рис.2. Изображение конуса с помощью сечений

Привычное для глаза изображение приведено на рисунке 3.

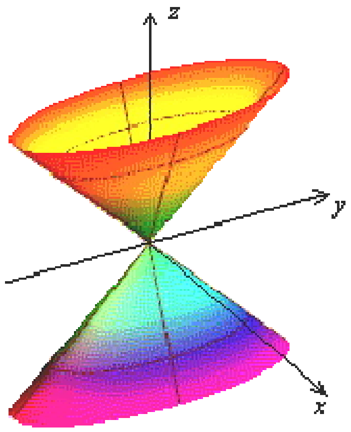


Рис.3. Конус

Точка пересечения конуса с плоскостью xOy называется вершиной конуса.

Если в уравнении $a = b$, то сечения конуса плоскостями параллельными плоскости являются окружностями. В этом случае поверхность называется прямым круговым конусом и может быть получена вращением прямой, лежащей в плоскости yOz, вокруг оси Oz. Именно с таким конусом мы имеем дело в школьном курсе математики.

Пример 2.

Определение 2. Цилиндрической поверхностью называется геометрическое место параллельных прямых, пересекающих данную линию. Эта линия называется направляющей, а параллельные прямые -- образующими.

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x,y) = 0 \tag{2}$$

и покажем, что оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ -- некоторая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению. Поскольку в это уравнение не входит явно переменная z, ему будут удовлетворять координаты всех точек $M_0(x_0;y_0;z\ )$, где z-- любое число. Следовательно, при любом Z точка M лежит на поверхности, определяемой уравнением(2). Отсюда следует, что на поверхности целиком лежит прямая, проходящая через точку M_0 параллельно оси Oz. А это означает, что поверхность, определяемая уравнением(2), составлена из прямых, параллельных оси Oz, то есть она является цилиндрической поверхностью.

Заметим, что на плоскости xOy уравнение(2) определяет направляющую рассматриваемой цилиндрической поверхности.

Итак, делаем вывод, что если уравнение поверхности не содержит в явном виде какой-либо переменной, то это уравнение определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси отсутствующего переменного и направляющей, которая в плоскости двух других переменных имеет то же самое уравнение.

Нас будут интересовать только те цилиндрические поверхности, которые являются поверхностями второго порядка, а это значит, что уравнение(2), их задающее будет иметь вид(2.1).

Определение 3 Поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.1}$$

называется эллиптическим цилиндром, поверхность, которая задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.2}$$

называется гиперболическим цилиндром, а которая задается уравнением

$$y^2=2px, \tag{2.3}$$

называется параболическим цилиндром.

Для того чтобы построить поверхность, задаваемую уравнением (2.1) или уравнением (2.2), или (2.3), достаточно нарисовать на плоскости xOy направляющую, уравнение которой на этой плоскости совпадает с уравнением самой поверхности, и затем через точки направляющей провести образующие параллельно оси Oz. Для наглядности следует построить также одно-два сечения плоскостями, параллельными плоскости xOy. В каждом таком сечении получим такую же кривую, как и исходная направляющая. Изображения этих цилиндров сечениями приведены на рисунках 2.1, 2.3 и2.5, а их объемные изображения -- на рисунках 2.2, 2.4 и 2.6.

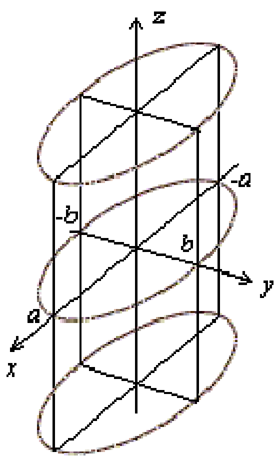


Рис.2.1. Изображение эллиптического цилиндра с помощью сечений

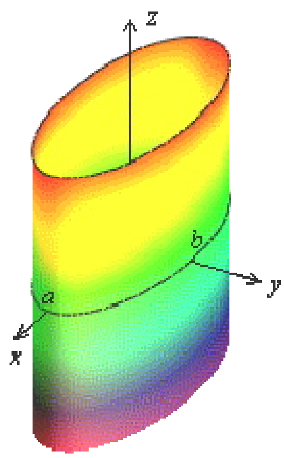


Рис.2.2. Эллиптический цилиндр

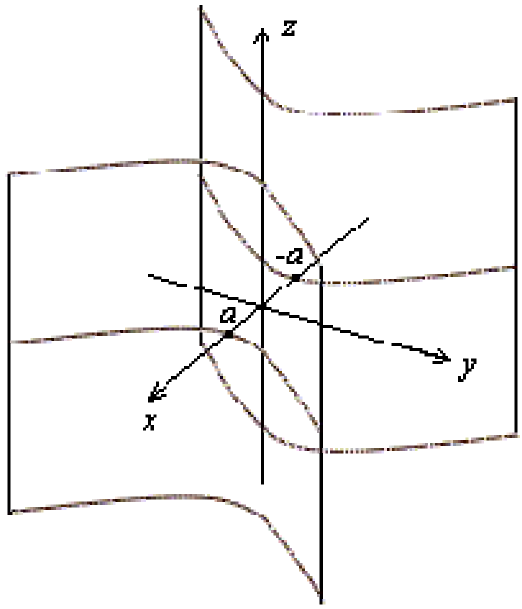


Рис.2.3. Изображение гиперболического цилиндра с помощью сечений

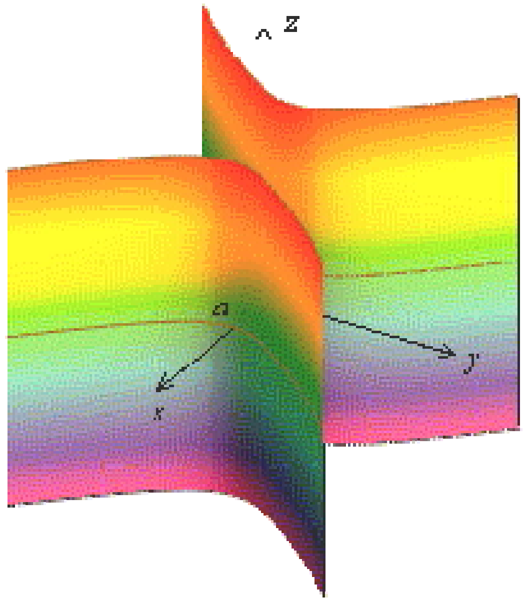


Рис.2.4. Гиперболический цилиндр

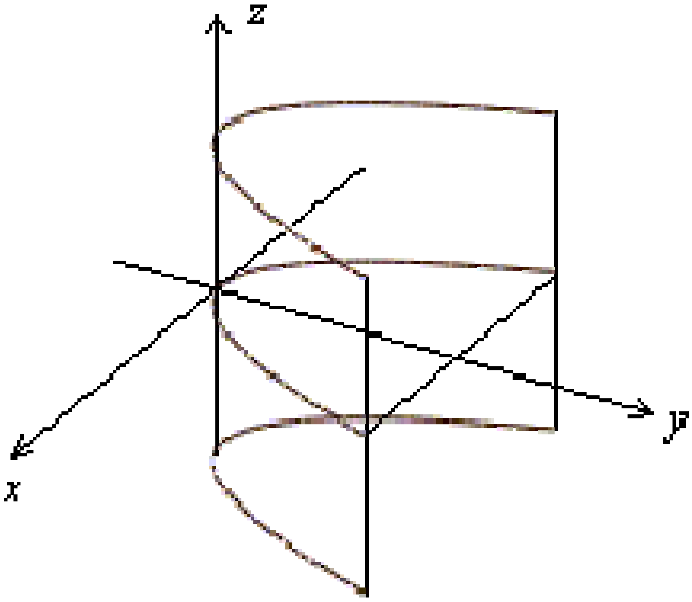


Рис.2.5. Изображение параболического цилиндра с помощью сечений

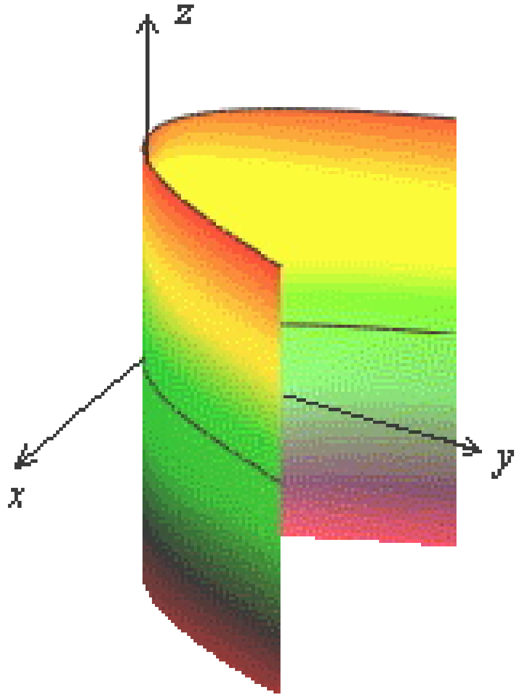


Рис.2.6. Параболический цилиндр

2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Частной производной от функции $z = f(x;y)$ по независимой переменной x называется производная
$\frac{\partial x}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x} = f'_x(x;y)$, вычисленная при постоянном y.

Частной производной по y называется производная $\frac{\partial x}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y} = f'_y(x;y)$, вычисленная при постоянном x. Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Пример. $z = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Рассматривая y как постоянную величину $(y = const)$, получим $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 5$.

Рассматривая x как постоянную величину $(x = const)$, получим $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6y$.

Полным приращением функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x_0;y_0)$ называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$, где Δx и Δy произвольные приращения аргументов. Функция $z = f(x;y)$ называется *дифференцируемой* в точке $(x;y)$, если в этой точке полное приращение можно представить в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, то есть $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f(x;y)$ вычисляется по формуле $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Для функции трех переменных $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$.

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x;y)$ справедливы приближенные равенства $\Delta z \approx dz$; $f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + dz$, которые применяются для приближенного вычисления значения функции
$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(x_0;y_0)\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\Delta y$. (*)

Пример 3. Вычислить приближенное значение: $1{,}08^{3{,}96}$.

Решение. Полагая, что $1{,}08^{3{,}96}$ есть частное значение функции $f(x;y)=x^y$ в точке $M_1(1{,}08;3{,}96)$ и что вспомогательная точка будет $M_0(1;4)$, получим $f(M_0)=1^4=1$

$f'_x(M_0)=yx^{y-1}\,|_{(x=1;y=4)}=4$; $f'_y(M_0)=x^y\ln x\,|_{(x=1;y=4)}=0$; $\Delta x=1{,}08-1=0{,}08$; $\Delta y=3{,}96-4=-0{,}04$.

Подставляя в формулу (∗), найдем:

$$1{,}08^{3{,}96}\approx f(M_0)+f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y=1+4\cdot 0{,}08=1{,}32.$$

Частными производными второго порядка от функции $z=f(x;y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x;y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x;y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x;y).$$

Смешанные производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Дифференциалом второго порядка от функции $z=f(x;y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, то есть $d^2z=d(dz)$. Если x и y – независимые переменные и функция $f(x;y)$ имеет непрерывные производные, то дифференциал второго порядка вычисляется по формуле:

$$d^2x=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Пример . $z=y\ln x$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение. Найдем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x$. Дифференцируя повторно, получим $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\ln x)=0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}.$$

3. Экстремум функции

Необходимое условие экстремума: если дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0;y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, то есть: $\frac{\partial f(x_{0;}y_0)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y} = 0$.

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными точками. Стационарные точки и точки, в которых производные не существуют и которые лежат внутри области определения функции, называются *критическими точками*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Достаточное условие существования экстремума:

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ стационарная точка функции $z = f(x;y)$. Обозначим $A = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}$ и составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно максимум, при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум, при $A > 0$ (или $C > 0$);

если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;

если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

Замечание: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$

Индивидуальные задания 1.

Задача 1

Задача 1. Дана функция $z = f(x;y)$. Проверить, удовлетворяет ли она данному уравнению.

1.1. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.2. $z = e^{xy}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.3. $z = e^{-\cos(ax+y)}$; $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.4. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.5. $z = \sin^2(y - ax)$; $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.6. $z = \frac{y}{x}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.7. $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.8. $z = arctg\frac{x}{y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.9. $z = \frac{\sin(x-y)}{x}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right) - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.10. $z = \frac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$; $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

1.11. $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$.

1.12. $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

1.13. $z = e^{xy}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.14. $z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

1.15. $z = \frac{x}{y}$; $x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

1.16. $z = x^y$; $y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

1.17. $z = xe^{\frac{y}{x}}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.18. $z=\sin(x+ay)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.19. $z=\cos y+(y-x)\sin y$; $(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

1.20. $z=\cos^3(3x-5y)$; $\frac{5}{3}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

1.21. $z=arctg\frac{x}{2y}$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

1.22. $z=y\ln\left(x^2-y^2\right)$; $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

1.23. $z=\ln(x^2+xy+y^2)$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

1.24. $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

1.25. $z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

1.26. $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$.

1.27. $z=xe^{-\frac{y}{x}}$; $x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.28. $z=e^{\frac{x}{y^2}}$; $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

1.29. $z=e^{\frac{y}{x}}$; $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=yz$.

Решение типового примера:

Пример.

Дана функция $z=\ln(2xy+x^2)$ проверить удовлетворяет ли она уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}-(y+x)\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\ln(2xy+x^2))'_x=\frac{2y+2x}{2xy+x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(\ln(2xy+x^2)'_y=\frac{2x}{2xy+x^2};$$

Полученные значения подставляем в исходное уравнение.

$$x\frac{2y+2x}{2xy+x^2}-(y+x)\frac{2x}{2xy+x^2}=0\ ;$$

$$\frac{2xy+2x^2}{2xy+x^2}-\frac{2xy+2x^2}{2xy+x^2}=0;\quad 0=0\text{-верно.}$$

Ответ: функция удовлетворяет уравнению.

Задача 2

Задача 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

2.1. $z=x^2+y^2-xy+x+y$; D: $x=0$; $y=0$; $x+y=-3$.

2.2. $z=2x+y-xy$; D: $0\le x\le 4$; $0\le y\le 4$.

2.3. $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$; D: $x=0$; $y=0$; $x+y=3$.

2.4. $z=x^3+y^3-3xy$; D: $0\le x\le 2$; $0\le y\le 3$.

2.5. $z=xy$; D: $x^2+y^2\le 1$.

2.6. $z=x^2+3y^2+x-y$; D: $x=1$; $y=1$; $x+y=1$.

2.7. $z=x^2-xy+y^2-4x$; D: $x=0$; $y=0$; $2x+3y-14=0$.

2.8. $z=\frac{1}{2}x^2-xy$; D: $y=\frac{1}{3}x^2$; $y=3$.

2.9. $z=x^2+2xy-4x+8y$; D: $x=0$; $y=0$; $x=1$; $y=2$.

2.10. $z=x^3+8y^3-6xy+1$; D: $y=1$; $y=-1$; $x=0$; $x=2$.

2.11. $z=xy-2x-y$; D: $0\le x\le 3$; $0\le y\le 4$.

2.12. $z=x^2+xy$; D: $-1\le x\le 1$; $0\le y\le 3$.

2.13. $z=x^2+2xy-y^2+4x$; D: $x\le 0$; $y\le 0$; $x+y+2=0$.

2.14. $z=10+2xy-x^2$; D: $0\le y\le 4-x^2$.

2.15. $z=5x^2-3xy+y^2+4$; D: $x\ge -1$; $y\ge -1$; $x+y\le 1$.

2.16. $z=x^2+2xy+2y^2$; D: $-1\le x\le 1$; $0\le y\le 2$.

2.17. $z=x^2+3xy^2+x-y$; D: $x\ge 1$; $y\ge -1$; $x+y\le 1$.

2.18. $z=3-2x^2-xy-y^2$; D: $x\le 1$; $y\ge 0$; $y\le x$.

2.19. $z=x^2+2y^2-1$; D: $x\ge 0$; $y\ge 0$; $x+y\le 3$.

2.20. $z=x^2+y^2-9xy+27$; D: $0\le x\le 3$; $0\le y\le 2$.

2.21. $z=xy-x-2y$; D: $y=x$; $x=3$; $y=0$.

2.22. $z=x^2+xy-3x-y$; D: $0\le x\le 2$; $0\le y\le 3$.

2.23. $z=xy-3x-2y$; D: $0\le x\le 4$; $0\le y\le 4$.

2.24. $z=3x+y-xy$; D: $y=x$; $y=4$; $x=0$.

2.25. $2z=x^2-2xy$; D: $y=2x^2$; $y=8$.

2.26. $z=5x^2-3xy+y^2$; D: $-1\le x\le 1$; $-1\le y\le 1$.

2.27. $z=x^2+2xy+4x-y^2$; D: $x=0$; $y=0$; $x+y+2=0$.

2.28. $z=2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-4y$; D: $y=2x$; $y=2$; $x=0$.

2.29. $z=x^2+xy-2$; D: $y=4x^2-4$; $y=0$.

Решение типового примера:

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

Решение. 1. Находим первые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0 \;\; M(0{,}0), z(0{,}0) = 0.$$

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе, то есть на окружности $x^2 + y^2 = 4 \;\; (y^2 = 4 - x^2)$, то для точек окружности функцию $z = x^2 - y^2$ можно представить как функцию одной переменной x: $z = x^2 - (4 - x^2)$, то есть $z = 2x^2 - 4$, причем $-2 \le x \le 2$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции. Находим критические точки функции в интервале $(-2;2)$ и вычислим значения функции в этих точках и на концах интервалов: $z' = 4x$, $4x = 0$.

Отсюда имеем критическую точку $x = 0$; $z_{(x=0)} = -4$. На концах интервала $(-2;2)$: $z_{(x=-2)} = 4$; $z_{(x=2)} = 4$.

3.Выпишем полученные значения функции:

$z_{(x=0;y=0)} = 0$, $z_{(x=-2;y=4)} = -4$, $z_{(x=2;y=0)} = 4$

Отсюда видим, что функция имеет наибольшее значение, равное 4, и наименьшее значение, равное –4.

Замечание. Если граница области определения функции состоит из нескольких частей, например, треугольник или прямоугольник, то находят наибольшее и наименьшее значения функции на каждой части, а затем сравнивают.

Задача 3

Задача 3. Исследовать функцию на экстремум

3.1 $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

3.2. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

3.3. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

3.4. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

3.5. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

3.6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

3.7. $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$, $(x > 0, y > 0)$.

3.8 . $z = \frac{1}{2}xy + (47 + x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

3.9. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

3.10. $z = x^2 y(2 - x - y)$, $(x > 0, y > 0)$.

3.11. $z = y^2 (1 - x - y)$.

3.12. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $(x > 0, y > 0)$.

3.13. $z = e^{(x-y)}\left(x^2 - 2y^2\right)$.

3.14. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

3.15. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $(x > 0, y > 0)$.

3.16. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$, $(x > 0, y > 0)$.

3.17. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

3.18. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3.19. $z = 1 + 6x - x^2 - xy + y^2$.

3.20. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

3.21. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

3.22. $z = 2xy - 2x - 4y$.

3.23. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

3.24. $z = \left(x^2 + y\right)\sqrt{e^y}$.

3.25. $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

3.26. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

3.27. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$.

3.28. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3.29. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

Решение типового примера.

Пример 1. Найти экстремум функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Решение. Находим частные производные первого порядка z'_x и z'_y и критические точки, в которых они равны нулю или не существуют: $z'_x = 3x^2 - 6y$; $z'_y = 24y^2 - 6x$. Решая систему $\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$, найдем две точки: $M_1(0;0)$ и $M_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$. Обе точки являются критическими, т.к. функция z определена на своей плоскости XOY. Исследуем критические точки M_1 и M_2 по знаку определителя Δ, составленного из частных производных второго порядка: $z''_{xx} = A = 6x$; $z''_{xy} = B = -6$; $z''_{yy} = C = 48y$. Для точки $M_1(0;0)$ получим $A = 0$, $B = -6$, $C = 0$. $\Delta = AC - B^2 = -36 < 0$. Следовательно, согласно достаточному условию в точке M_1 нет экстремума.

Для точки $M_2(1;\frac{1}{2})$ получим $A = 6$, $B = -6$, $C = 24$, $\Delta = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = 108 \succ 0$ Согласно достаточному условию M_2 есть точка минимума $z_{\min} = z(1;\frac{1}{2}) = 4$

Задача 4

Задача 4. Даны: функция $z = z(x;y)$, точка A и вектор $\bar{a}$. Найти:

1) $\overline{gradz}$ в точке A;

2) производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

4.1. $z = \ln(5x+3y)$; $A(2;2)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.

4.2. $z = arctg\dfrac{y^2}{x}$; $A(2;1)$; $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.

4.3. $z = \dfrac{xy}{x-y}$; $A(2;1)$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

4.4. $z = 2x^4 + 8x^2y^3$; $A(2;-1)$; $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$.

4.5. $z = \ln(2x^2 + y^3)$; $A(3;-1)$; $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$.

4.6. $z = arctg\dfrac{x}{y^2}$; $A(3;1)$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

4.7. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2;-2)$; $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j}$.

4.8. $z = \ln(3x^2 + 5y^3)$; $A(2;3)$; $\bar{a} = -4\bar{i} + 3\bar{j}$.

4.9. $z = 2x^3y + 3x^2y^2$; $A(1;-2)$; $\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}$.

4.10. $z = \ln(5x + 3y)$; $A(2;2)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.

4.11. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

4.12. $z = 3x^2 + 2x^2y^3$; $A(-1;2)$; $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.

4.13. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; $A(1;3)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.

4.14. $z = \arcsin\frac{x^2}{y}$; $A(1;2)$; $\bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$.

4.15. $z = arctg(xy^2)$; $A(2;3)$; $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.

4.16. $z = 5x^2 + 6xy$; $A(2;1)$; $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$.

4.17. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.

4.18. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$.

4.19. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2;1)$; $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.

4.20. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.

4.21. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.

4.22. $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$; $A(1;-2)$; $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$.

4.23. $z = \ln(3x^2 + 2xy^2)$; $A(1;2)$; $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.

4.24. $z = arctg(xy)$; $A(2;3)$; $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$.

4.25. $z = \frac{3x}{y^2}$; $A(3;4)$; $\bar{a} = -3\bar{i} - 4\bar{j}$.

4.26. $z = 5x^2y + 3xy^2$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}$.

4.27. $z = \ln(2x + 3y)$; $A(2;2)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.

4.28. $z = x^3y + xy^2$; $A(1;3)$; $\bar{a} = -5\bar{i} + 12\bar{j}$.

4.29. $z = arctg\frac{y}{x}$; $A(-1;2)$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

Производная функции $z = f(x;y)$ *в точке* $M(x;y)$ в направлении вектора $\bar{l} = \overline{MM_1}$ называется $\lim\limits_{|MM_1|\to 0}\frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho} = \frac{\partial z}{\partial l}$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Если функция $f(x;y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$, где α, β - углы, образованные вектором $\bar{l}$ с осями Ox и Oy. Производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ дает скорость изменения функции z в направлении вектора $\bar{l}$.

Градиентом функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ называется вектор, выходящий из точки M и имеющий своими координатами частные производные функции z:

$$\overline{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j};$$

$$\overline{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Градиент функции и производная в направлении вектора $\bar{l}$ связаны формулой $\frac{\partial z}{\partial l} = np_l\,\overline{grad z}$. Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке.

Пример. Вычислить производную функции $z = 2x^2 + xy$ в точке $M(-1;2)$ в направлении вектора $\bar{l} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ и градиент.

Решение. Найдем значение частных производных в точке M.

$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x + y)\,|_{(x=-1;y=2)} = -2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x\,|_{(x=-1;y=2)} = -1$.

Вычислим направляющие косинусы $\bar{l} = x\bar{i} + y\bar{j}$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{5}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}_{(M)} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}_{(M)} \cdot \cos\beta;$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = -2 \cdot \frac{3}{5} + (-1) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{4}{5} = -2;$$

$$\overline{grad z} = \frac{\partial z}{\partial x}_{(M)} \cdot \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}_{(M)} \cdot \bar{j};$$

$$\overline{grad z} = -2\bar{i} - \bar{j}.$$

II. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Основные понятия и определения

Обобщением определенного интеграла на случай функций двух переменных является так называемый двойной интеграл.

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция z=f(x;y). Разобьем область D на n «элементарных областей» $D_i\ (i=\overline{1,n})$, площади которых обозначим через ΔS_i, а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) - через d_i(см. рис. 3).

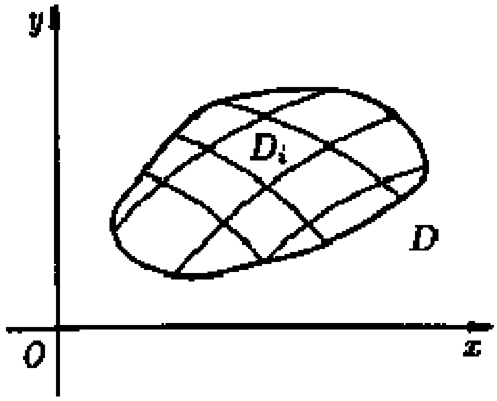


Рис. 3.

В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$, умножим значение $f(x_i;y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i и составим сумму всех таких произведений:

$$f(x_1;y_1)\Delta S_1 + f(x_2;y_2) + \ldots + f(x_n;y_n)\Delta S_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции f(x;y) в области D.

Рассмотрим предел интегральной суммы (1), когда n стремится к бесконечности таким образом, что $\max d_i$ -> 0. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется *двойным интегралом* от функции f(x;y) по области D и обозначается

$$\iint_D f(x;y)dxdy \quad \text{или} \quad (\iint_D \text{f(x; y) dS})$$

Таким образом, ***двойной интеграл*** определяется равенством

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\cdot\Delta S_i \qquad (2)$$

В этом случае функция f(x;y) называется ***интегрируемой в области D***; D - ***область интегрирования;*** x и y - ***переменные интегрирования***; dxdy (или dS) - ***элемент площади.***

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Покажем, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ где функция f(x;y)>=0 непрерывна в области D. Тогда, как это было показано в п. 2, двойной интеграл выражает объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью z=f(x;y). Найдем этот объем, используя метод параллельных сечений. Ранее было показано, что

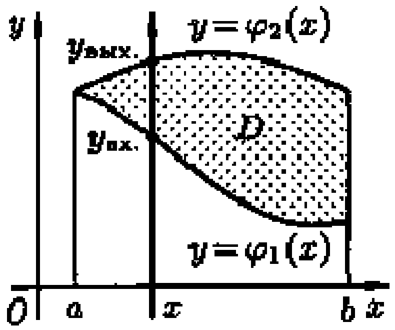


Рис. 7.

$$V=\int_a^b S(x)\,dx, \qquad (3)$$

где S(x) - площадь сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox, а x=a,x=b - уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

Положим сначала, что область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми x=a и x=b и кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ для всех x є [a;b] (см. рис. 7). Такая область называется *правильной в направлении оси Oy*: любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках.

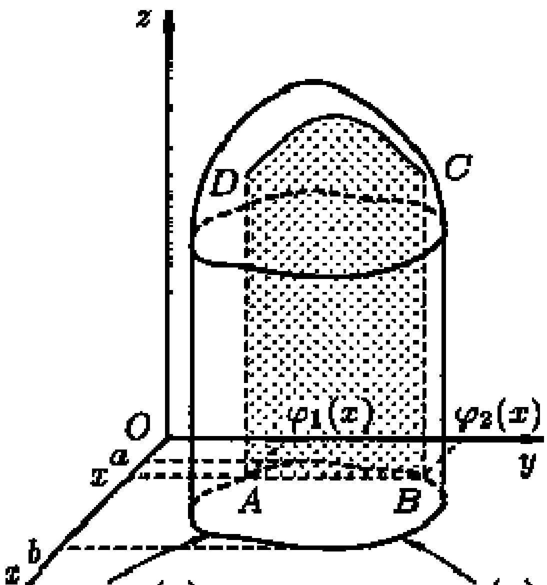


Рис. 8.

Построим сечение цилиндрического тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox: x =const, где x є [a; b].

В сечении получим криволинейную трапецию ABCD, ограниченную линиями z=f(x;y), где x=const, z=0, $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ (см. рис. 8). Площадь S(x) этой трапеции находим с помощью определенного интеграла

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy. \qquad (4)$$

Теперь, согласно методу параллельных сечений, искомый объем цилиндрического тела может быть найден так:

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx. \qquad (5)$$

С другой стороны, в п. 2 было доказано, что объем цилиндрического тела определяется как двойной интеграл от функции $f(x;y) >= 0$ по области D. Следовательно,

$$V = \iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx. \qquad (6)$$

Это равенство обычно записывается в виде

$$\iint\limits_D f(x;y)\;dxdy = \int\limits_a^b dx \quad \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \qquad (7)$$

Формула (7) представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы (7) называют *двукратным* (или *повторным*) интегралом от функции $f(x;\ y)$ по области D.

При этом $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{f}(x;\ y)dy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берем внутренний интеграл, считая x постоянным, затем берем внешний интеграл, т. е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b.

Если же область D ограничена прямыми y=c и y=d(c<d), кривыми $x=\Psi_1(y)$и $x=\Psi_2(y)$> причем $\Psi_1(y) \le \Psi_2(y)$ для всех y є [c;d], т. е. область D - правильная в направлении оси Ox, то, рассекая тело плоскостью y=const, аналогично получим:

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \cdot \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,dx \qquad (8)$$

Здесь, при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

Замечания.

1. Формулы (7) и (8) справедливы и в случае, когда f(x;y)<0, (x;y) e D.

2. Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно вычислять как по формуле (7.7), так и по формуле (7.8).

3. Если область D не является правильной ни «по x», ни «по y», то для сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на части, правильные в направлении оси Ox или оси Oy.

4. Полезно помнить, что внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Пример 1. Вычислить $\iint_D (x+2y)dxdy$ где область D ограничена линиями y $=x^2$, y=0, x+y-2=0.

Решение: На рисунке 9 изображена область интегрирования D. Она правильная в направлении оси Ox. Для вычисления данного двойного интеграла воспользуемся формулой (7.8):

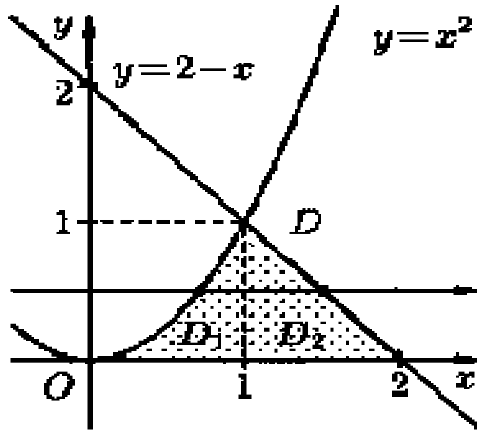


Рис. 9.

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)\,dx =$$

$$= \int_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int_0^1\left(\frac{(2-y)^2}{2}+4y-2y^2-\frac{y}{2}-2y^{\frac{3}{2}}\right)dy =$$

$$=\left(\frac{(y-2)^3}{6}+\frac{7\cdot y^2}{2\cdot 2}-2\cdot\frac{y^3}{3}-2\cdot 2\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}+\frac{8}{6}+\frac{7}{4}-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{29}{20}=1{,}45.$$

Отметим, что для вычисления данного двойного интеграла можно воспользоваться формулой (7). Но для этого область D следует разбить на две области: D_1 и D_2. Получаем:

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} (x+2y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+2y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x+2y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx\cdot(xy+y^2)\Big|_0^{x^2} + \int_1^2 dx\cdot(xy+y^2)\Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^1 (x^3+x^4)\,dx + \int_1^2 (2x-x^2+(2-x)^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 + \left(x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{(x-2)^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(4-1-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{20}+3-2=1{,}45.$$

2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Тройной интеграл от функции функции $f(x,y,z)$ в произвольной области U определяется в виде:

$$\iiint\limits_{U} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} g(x,y,z)\,dV.$$

Пример. Вычислим интеграл $\iiint\limits_{V} xyzdxdydz$ где V – треугольная пирамида с вершинами в точках (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1). Ее проекцией на плоскость Oxy является треугольник с вершинами (0, 0), (1, 0) и (0, 1). Снизу область ограничена плоскостью z = 0, а сверху – плоскостью x + y + z = 1. Перейдем к трехкратному интегралу:

$$\iiint\limits_{Y} xyzdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz$$

Множители, не зависящие от переменной интегриро-вания, можно вынести за знак соответствующего интеграла:

$$\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} ydy \int\limits_0^{1-x-y} zdz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} ydy(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} y(1-x-y)^2\,dy =$$

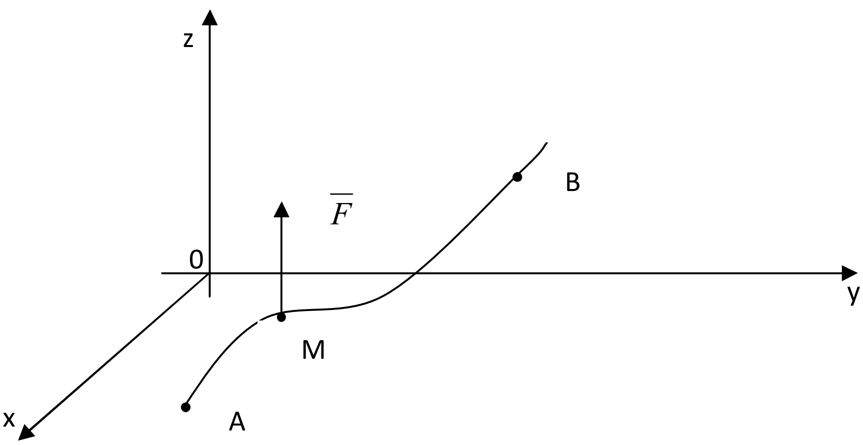
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx[(1-x)^2\frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \Big|_0^{1-x}] = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 x(1-x)^4\,dx = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5)dx =$$

$$= \frac{1}{24}(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^6}{6}) - \Big|_0^1 = \frac{1}{720}$$

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

К понятию криволинейного интеграла 2-го рода приводит задача вычисления работы переменной силы по перемещению материальной точки вдоль данной кривой.

Пусть вдоль некоторой пространственной кривой L движется материальная точка M(x,y,z) под действием переменной силы $\overline{F}(F_x, F_y, F_z)$.



Проекции силы являются функциями точки M(x,y,z).

$$F_x = P(x, y, z),\ F_y = Q(x, y, z),\ F_z = R(x, y, z)$$

Требуется найти работу силы по перемещению т.М из А в В.

Если АВ-прямая и сила const., то работа

:

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right| Cos(\overline{F} \wedge, \overline{S}) = F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z \quad (\overline{S} = \overline{AB}).$$

Разобьем кривую на элементарные участки и вычислим работу на каждом таком участке.

Пусть $\overline{dS} = \overline{dS}(dx, dy, dz)$-вектор, изображающий бесконечно малый участок кривой. Точка M(x,y,z)

Индивидуальные задания 2.

Задача 1

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

1. $$\int_{0}^{1} dx \int_{x/2}^{2x} f(x;y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{x/2}^{2/x} f(x;y)dy$$

2. $$\int_{2}^{41} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x;y)dy$$

3. $$\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x;y)dx$$

4. $$\int_{1}^{2} dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x;y)dy$$

5. $$\int_{2}^{4} dy \int_{y/2}^{y} f(x;y)dx$$

6. $$\int_{0}^{3} dx \int_{x^2}^{3+2x} f(x;y)dy$$

7. $$\int_{0}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y\ /2} f(x;y)dx$$

8. $$\int_{1}^{2} dx \int_{2/x}^{2x} f(x;y)dy$$

9. $$\int_{0}^{4} dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x;y)dy$$

10. $$\int_{0}^{1} dx \int_{=1+\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x;y)dy$$

11. $$\int_{0}^{2} dx \int_{\sqrt{4x-x^2=2}}^{0} f(x;y)dy$$

12. $$\int_{-\sqrt{2}}^{0} dy \int_{y^2/2}^{1-y^2} f(x;y)dx$$

13. $$\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{2-x} f(x;y)dy$$

14. $$\int_{4}^{1} dx \int_{x}^{8-x} f(x;y)dy$$

16. $$\int_{0}^{4} dx \int_{0}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x;y)dy$$

17. $$\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy$$

18. $$\int_{0}^{a} dx \int_{=\sqrt{2a-x^2}}^{\sqrt{2a-x^2}} f(x;y)dy$$

19. $$\int_{0}^{a} dx \int_{=\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x;y)dy$$

20. $$\int_{0}^{a} dx \int_{2x-1}^{x+1/2} f(x;y)dy$$

21. $$\int_{0}^{2} dx \int_{=+\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy$$

22. $$\int_{0}^{8/5} dx \int_{2x-2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy$$

23. $$\int_{0}^{8/5} dx \int_{2x-2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy$$

24. $$\int_{0}^{1} dy \int_{2y-1}^{y+1/2} f(x;y)dx$$

25. $$\int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{-x}}^{-x} f(x;y)dx$$

26. $$\int_{0}^{2} dx \int_{x}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x;y)dy$$

27. $$\int_{-3}^{0} dx \int_{x}^{3+x} f(x;y)dy$$

28. $$\int_{0}^{4} dx \int_{x-2}^{\sqrt{ч}} f(x;y)dy$$

15 $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x;y)dx$ 29. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{-y}^{9/2} f(x;y)dx$

Решение типового примера.

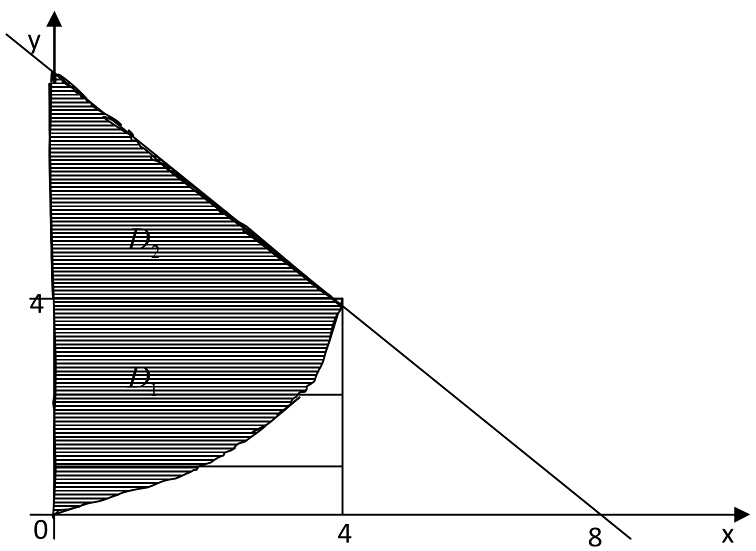
Пример. Изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл

$$\int\limits_{0}^{4} \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dxdy.$$

Решение. Так как переменные пределы зависят от х, то внутренний интеграл берется по переменной у, можно записать:

$$\int\limits_{0}^{4} \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dy.$$

Построим область интегрирования. $x = 0;\ x = 4;\ y = 2\sqrt{x};\ y = 8 - x$;-уравнения линий, ограничивающих эту область. Таким образом область ограничена слева осью ОУ, справа прямой $x = 4$; снизу параболой $y = 2\sqrt{x}$, сверху прямой $y = 8 - x$



Изменить порядок интегрирования- это значит в нашем случае внутренний интеграл взять по х, а внешний по у,т.е. интеграл записать в виде: $\int dy \int f(x,y)dx$.

Чтобы найти пределы интегрирования внутреннего интеграла по х, нужно в области интегрирования провести прямую параллельно оси ОХ, отметить точку входа и выхода. Тогда Х точки входа, полученное из уравнения линии, на которой лежит точка, будет нижним пределом интегрирования, а X точки выхода-верхним.

В нашем случае точка выхода может лежать либо на прямой $y = 8 - x$, либо на параболе $y = 2\sqrt{x}$. В этом случае область D разбивают на две области D_1

и D_2. И интеграл находят, как сумму интегралов:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Область D_1 ограничена линиями: $x = 0; y = 4; y = 2\sqrt{x}$

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{(\frac{y}{2})^2} f(x,y)dx$$

Область D_2 ограничена линиями $x = 0; y = 4; y = 8 - x$

$$\iint\limits_{D2} f(x,y)dxdy = \int\limits_{4}^{8} dy \int\limits_{0}^{8-y} f(x,y)dx$$

Итак: $\int\limits_{0}^{4} \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{o}^{\frac{y^2}{4}} f(x,y)dx + \int\limits_{4}^{8} dy \int\limits_{0}^{8-y} f(x,y)dx$

Задача 2.

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

1. $x^2 2z;\ x=2y;\ y=2x;\ x=2\sqrt{2};\ z=0$ (V=12)

2. $y^2=x+1;\ y^2=1-x;\ z=3-x-y;\ z=0$ (V=8)

3. $z=0;\ x=0;\ z=y^2+1;\ x+y=1$ $(V=\frac{7}{12})$

4. $z=0;\ z=(x-1)^2;\ y^2=x$ $(V=\frac{32}{105})$

5. $z=0;\ z=x^2;\ 2x-y=0;\ x+y=9$ $(V=\frac{81}{4})$

6. $z=4\sqrt{y};\ x+y=4;\ x=0;\ z=0$ $(V=34\frac{2}{15})$

7. $z=0;\ y=0;\ z=x^2+3y^2;\ x=y=1$ $(V=\frac{1}{3})$

8. $z=0;\ z=\sqrt{x-4};\ y=x^2$ $(V=\frac{\pi}{4})$

9. $z=2x;\ x+y=3;\ x=\sqrt{\frac{y}{2}};\ z=0$ $(V=\frac{4}{3})$

10. $z=\frac{1}{4}y^2;\ 2x-y=0;\ x+y=9;\ z=0$ $(V=\frac{1539}{16})$

11. $y=1-z^2;\ y=x;\ y=-x$ $(V=\frac{16}{15})$

12. $z=y^2;\ z=0;\ x=0;\ x+y=2$ $(V=\frac{4}{3})$

13. $z=y;\ z=0;\ x=0;\ x=4;\ y=\sqrt{25-x^2}$ $(V=39\frac{1}{3})$

14. $z=0;\ z=2-x;\ y=2\sqrt{x};\ y=\frac{1}{4}x^2$ $(V=\frac{32\sqrt{2-5}}{15})$

15. $z=0;\ y=x;\ y=5-x;\ y=0;\ y=\sqrt{4-z}$ $(V=\frac{56}{3})$

16. $4z=x^2;\ y=0;\ y+z=4$ $(V=\frac{512}{15})$

17. $y=4-x^2;\ y+z=4;\ z=0;\ y=0$ $(V=\frac{128}{5})$

18. $z=4-y^2;\ z=0;\ y=2-x^2$ $(V=\frac{1024}{35})$

19. $z=1+y^2;\ x+y=2;\ z=0;\ y=0;\ y=2+2x$ (V=5)

20. $z=x^2+y^2;\ z=0;\ y=2x;\ y=6-x;\ y=1$ (V=136)

21. $y=0;\ z=0;\ x+y+z=4;\ 2x+z=4$ $(V=\frac{8}{3})$

22. $z^2=4y;\ x=y;\ x+y=2$ $(V=\frac{32}{15})$

23. $y=0;\ z=y;\ z=4-x^2$ $(V=\frac{256}{15})$

24. $x^2 = y;\ z^2 = 4 - y;\ x = 0;\ x + y = 4$ $\quad (V = \sqrt{2}\,\frac{32}{3})$

25. $x = 2y^2;\ x + 2y + z = 4;\ y = 0;\ z = 0$ $\quad$ (V=3,4)

26. $y = 1 - x^2;\ y = -\sqrt{1 - x^2};\ z = 0;\ z = 6$ $\quad (V = 3\pi + 8)$

27. $x^2 = 4y;\ z + y = 4;\ y + 2z = 4$ $\quad (V = \frac{256}{15})$

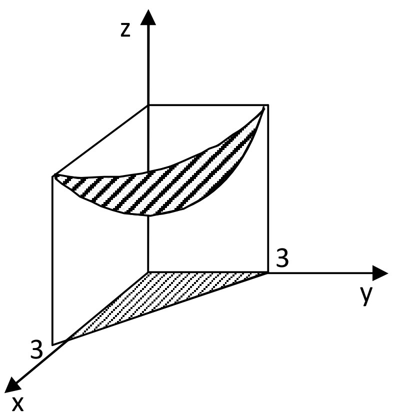
28. $y^2 = 4x + 4;\ y^2 = -2x + 4;\ z = 0;\ z = 3$ $\quad$ (V=24)

29. $y = x;\ x + y = 2;\ z^2 = 9x$ $\quad (V = \frac{16}{5})$

Решение типового примера.

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2 + 1$ и плоскостью
$x + y - 3$ и координатными плоскостями.

Решение: Сделаем чертеж.



Найдем объем с помощью тройного интеграла:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{x^2+y^2+1} dz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy\ z\Big|_0^{x^2+y^2+1} = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dyz\Big|_0^{x^2+y^2+1} =$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x^2 + y^2 + 1)dy = 18 \text{ (ед.куб.)}$$

Задача 3 .

В каждой точке линии L на материальную точку единичной массы действует сила $\overline{F} = \{P(x;y);\ Q(x;y)\}$.

Вычислите работу, совершаемую этой силой при движении материальной точки по линии L из точки A в точку B.

1. $\overline{F} = \{xy;\ x+y\}$; L: $y = x$; $A(0;0)$; $B(1;1)$
2. $\overline{F} = \{2xy;\ x^2\}$; L: прямая; $A(1;0)$; $B(0;3)$
3. $\overline{F} = \{xy;\ x+y\}$; L: $y = x^2$; $A(0;0)$; $B(1;1)$
4. $\overline{F} = \{x;\ 1/y^2\}$; L: $xy = 1$; $A(`1;1)$; $B(4;1/4)$
5. $\overline{F} = \{Sin^2x;\ y^2\}$ L: $y = Cosx$; $A(0;1)$; $B(\pi;-1)$
6. $\overline{F} = \{x^2+y;\ x+y^2\}$; L: прямая; $A(-1;1)$; $B(0;2)$
7. $\overline{F} = \{-y;\ \ x\}$ L: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
8. $\overline{F} = \{y;\ \ x\}$; L- прямая соединяющая точки $A(a;0)$; $B(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4})$
9. $\overline{F} = \{-y^2;\ \ xy\}$ L: $\begin{cases} x = a\cos\ t \\ y = b\sin\ t \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
10. $\overline{F} = \{\ x^2y;\ \ xy^2\}$ L- прямая проходящая через точку $A(0;0)$; *и* $B(2;2)$
11. $\overline{F} = \{\ 3x^2+4xy;\ 2x^2-3y^2\}$; L- прямая соединяющая точки $A(0;0)$; $B(1;2)$
12. $\overline{F} = \{xy;\ \ x-y\ \}$; L: $y = x$; $A(0;0)$; $B(3;3)$
13. $\overline{F} = \{\ 2xy;\ \ x^2\}$ L: $y = x$; $A(1;1)$; $B(2;2)$
14. $\overline{F} = \{\ 2x+y;\ \ 2y\}$; L: $\begin{cases} x = 0{,}5\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $A(\dfrac{1}{2};0)$; $B(0;1)$
15. $\overline{F} = \{x+y;\ \ 2x\}$; L: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $A(1;0)$; $B(-1;0)$
16. $\overline{F} = \{\ x;\ \ 2y+x\}$; L: $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $A(3;0)$; $B(-3;0)$
17. $\overline{F} = \{x;\ \ -y\}$; L: $y = \dfrac{x^2}{2}$; $A(-2;2)$; $B(\sqrt{2};1)$
18. $\overline{F} = \{x^2+y;\ \ y^2+x\}$; L-ломаная $x = 5$; $y = 1$; $A(2;1)$; $B(5;3)$
19. $\overline{F} = \left\{\ \dfrac{y}{x^2+y^2};\ \ \dfrac{x}{x^2+y^2}\right\}$ L: прямая; $A(1;2)$; $B(3;6)$
20. $\overline{F} = \{2xy;\ \ x^2\}$ L: $y = x^2$; $A(0;0)$; $B(1;1)$
21. $\overline{F} = \{xy;\ \ y-x\}$ L: $y^2 = x$; $A(0;0)$; $B(2;2)$
22. $\overline{F} = \{\ xy;\ \ x+y\}$ L-ломаная $x = 1$; $y = 0$; $A(0;0)$; $B(1;1)$
23. $\overline{F} = \{xy;\ \ x+y\}$ L-ломаная $x = 0$; $y = 1$; $A(0;0)$; $B(1;1)$

24. $\overline{F}=\{x^2-y;\quad y^2-x\}$ L-окружность $x=5\cos t;\ y=5\sin t$ $A(5;0)$; $B(0;5)$

25. $\overline{F}=\{\ x^2-2xy;\quad y^2-2xy\}$ L-парабола $y=x^2$; $A(0;0)$; $B(1;1)$

Решение типового примера.

Пример. В каждой точке линии L на материальную точку действует сила $\overline{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$. Вычислить работу совершаемую этой силой при движении материальной точки по линии L из точки A в точку B, если $P(x,y)=2xy$; $Q(x,y)=x$

L- прямая соединяющая точку $A(1,0)$ с точкой $B(0,2)$.

Решение. Из механического смысла криволинейного интеграла имеем

$A=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ или $A=\int_L 2xydx+xdy$

Составим уравнение прямой L как уравнение прямой, проходящей через две точки A и B по формуле :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

$$\frac{y-0}{2-0}=\frac{x-1}{0-1};\quad y=-2(x-1).$$

Получили уравнение линии L: $y=-2(x-1)$.

Тогда $dy=-2dx$ и работа силы будет:

$$A=\int_1^0 2x(-2(x-1))dx+x(-2)dx=\int_0^1(4x^2-4x+2x)dx=\int_0^1(4x^2-2x)dx=(\frac{4}{3}x^3-x^2)\Big|_0^1=$$
$$=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}.$$

Задача 4.

Найти центр тяжести плоской пластины ограниченной указанными линиями.

1. $y = 3x^2$; $3x + 3y = 2$ плотность $\rho = 2 + y$
2. $x - 2y^2 = 0$; $x + y = 1$ плотность $\rho = 1 + x$
3. $x + y = 1$; $x - 2y + 2 = 0$; $y = 0$ плотность $\rho = 1 - y$
4. $y - x^2 = 0$; $x + y = 2$ плотность $\rho = 2 + y$
5. $y = 4 - x^2$; $y = 0$ плотность $\rho = x^2$
6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$; $x = 0$; $y = 0$ плотность $\rho = y$
7. $x + y = 3$; $3y = 2x^2$ плотность $\rho = x + y$
8. $y = x^2 + 1$; $y = 2$ плотность $\rho = 1 - x$

Найти моменты инерции I_x и I_y для плоской пластины, ограниченной указанными линиями.

9. $x + y + 1 = 0$; $x - 2y + 2 = 0$; $y = 0$ плотность $\rho = 4 + y$
10. $x + \sqrt{2y} = 1$; $x = 0$; $y = 0$ плотность $\rho = x$
11. $x - 3y^2 = 0$; $3x + 3y = 2$ плотность $\rho = 2 + x$
12. $y = x + 1$; $x + 2y = 2$; $y = 0$ плотность $\rho = 1 - y$
13. $\sqrt{2x} + \sqrt{y} = 1$; $x = 0$; $y = 0$ плотность $\rho = 2x$
14. $y + x^2 = 0$; $y + 1 = 0$ плотность $\rho = x^2$
15. $y = 1 + x$; $2x + y + 2 = 0$; $x = 0$ плотность $\rho = 1 + x$
16. $x - 2y^2 = 0$; $x + y = 1$ плотность $\rho = 1 + x$
17. $x - y = 1$; $x + 2y + 2 = 0$; $y = 0$ плотность $\rho = 1 - y$
18. $x + y = 3$; $3y = 2x^2$ плотность $\rho = x + y$
19. $3x - y^2 = 0$; $x + y = 6$ плотность $\rho = y^2$
20. $y = x^2$; $x + y = 2$ плотность $\rho = 2 + x$
21. $y = 3x^2$; $3x + 3y = 2$ плотность $\rho = 1 + y$

Найти массу тела, ограниченного указанными поверхностями.

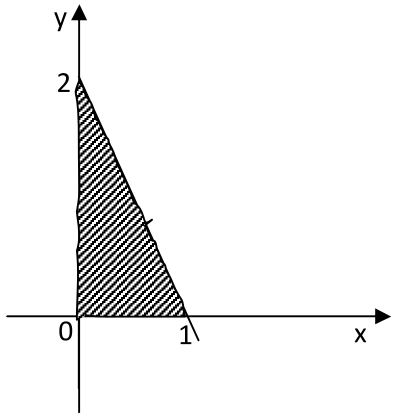
22. $z = 0$; $x^2 + y^2 = 1$; $z = 4$ плотность $\rho = 4 - z$
23. $z = x^2 + y^2$; $z = 1$ плотность $\rho = x^2 + y^2$
24. $z = x^2 + y^2$; $x + y = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ плотность $\rho = x$
25. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ плотность $\rho = x^2$

Решение типового примера.

Пример: Найти центр тяжести плоской пластины, ограниченной линиями

$x = 0,\quad y = 0,\quad 2x + y = 2$, плотность пластины $\rho = xy$

Решение: Найдем массу пластинки:



$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} xydy = \int_0^1 dx \frac{xy^2}{2}\Big|_0^{2-2x} = \int_0^1 2x(1-x)^2 dx =$$

$$= 2\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Вычислим интеграл

$$\iint_D x\rho(x,y)dxdy = \iint_D x^2 ydxdy = \int_0^1 2x^2(1-x)^2 dx = 2\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - x^4 + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

Тогда $x_c = \dfrac{\iint_D x\rho dxdy}{M} = \dfrac{1/15}{1/6} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

Вычислим интеграл $\iint_D y\rho(x,y)dxdy = \iint_D xy^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} xy^2 dy =$

$$= \int_0^1 dx \frac{xy^3}{3}\Big|_0^{2-2x} = \frac{8}{3}\int_0^1 x(1-x)^3 dx = \frac{8}{3}\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)dx = (\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x^3 +$$

$$+ 2x^4 - \frac{8}{15}x^5)\Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2 - \frac{8}{15} = \frac{2}{15};$$

Тогда $y_c = \dfrac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{M} = \dfrac{2/15}{1/6} = \dfrac{4}{5}$

Центр тяжести имеет координаты $(2/5; 4/5)$.

Задача 5.

Применяя формулу Грина, вычислить интегралы.

1. $\oint\limits_c 2xydx + 3x^2dy$, где С-контур треугольника $x = 0$; $y = 0$; $x + y + 1 = 0$
2. $\oint\limits_c 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$,где С-контур ΔZMN ,если $Z(1;1)$, $M(2;2)$, $N(1;3)$ пробегаемый против хода часовой стрелки.
3. $\oint\limits_c -x^2ydx + xy^2dy$, где С-окружность $x^2 + y^2 = R^2$,пробегая против хода часовой стрелки.
4. $\oint\limits_c y^2dx + (x + y)^2 dy$,где С-контур ΔABC с вершинами $A(a;0)$, $B(a;a)$, $C(0;a)$
5. $\oint\limits_c (x + y)dx - 2xdy$, где С-треугольник со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$
6. $\oint\limits_c \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$, где С-контур треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$
7. $\oint\limits_c ydx + (x + y)dy$,где С-контур фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$
8. $\oint\limits_c 2xdx + (x + 2y)dy$, вдоль периметра треугольника с вершинами $A(-1;0)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$
9. $\oint\limits_c y\cos xdx + \cos xdy$, вдоль периметра треугольника с вершинами $A(-1;0)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$
10. $\oint\limits_c (x^2 - y)dx + (x^2 + y^2)dy$,где С-эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
11. $\oint\limits_c (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, где С-контур фигуры ограниченной линиями $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$, пробегаемой против хода часовой стрелки.
12. $\oint\limits_c 2x(y - 1)dx - x^2dy$ по контуру фигуры ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 9$
13. $\oint\limits_c (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$ по контуру круга $x^2 + y^2 = R^2$
14. $\oint\limits_c (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$ по контуру треугольника ограниченного прямыми $y = x$, $x + y = 1$, $y = 0$
15. $\oint\limits_c 2xydx + 2x^2dy$, где С-контур фигуры, ограниченной линиями $x = y^2$, $y = 0$, $x = 3$
16. $\oint\limits_c y^2dx + (x - y)dy$, где С-контур фигуры, ограниченной линиями $x = y^2$, $y = x$,

17. $\oint\limits_c xdy - 2ydx$,где С-контур треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(2;-1)$, $C(0;2)$

18. $\oint\limits_c 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, где С-контур фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$

19. $\oint\limits_c (x^2 + y^3)dx + 2dy$, где С-окружность $x^2 + y^2 = 4$

20. $\oint\limits_c (x^2 - y^2)dx + x^2dy$,где С-контур треугольника ограниченного линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 4$

21. $\oint\limits_c y^2dx + (x + y^2)dy$, где С-контур треугольника ограниченного линиями $y = 2 - x^2$, $x - y + 1 = 0$

22. $\oint\limits_c ydx + (x^2 + y)dy$ где С-контур треугольника с вершинами $A(0;0)$, $B(2;1)$, $C(0;2)$

23. $\oint\limits_c (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$,пои контуру фигуры ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $y = 2$

24. $\oint\limits_c 2x^2dy - (x + y)dx$,где С-контур треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(0;3)$

25 $\oint\limits_c 2xdx + (x + 2y)dy$ вдоль периметра окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$

26. $\oint\limits_c 2x(y - 1)dx - x^2dy$,где С-контур треугольника ограниченного линиями $y = x$, $x + y = 3$, $y = -2$

27. $\oint\limits_c 2xydx + (x^2 - y)dy$,где С-контур фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x + y = 1$, $y = 0$

Решение типового примера.

Пример. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_z (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$ где z -есть окружность $x^2 + y^2 = 4$

Решение: $P(x, y) = (1 - x^2)y$

$$Q(x, y) = x(1 + y^2)$$

Находим $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2$

Вычислим: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ $\qquad 1 + y^2 - (1 - x^2) = x^2 + y^2$

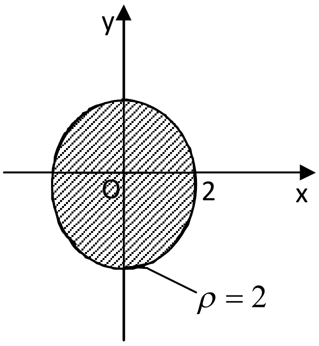
По формуле Грина имеем:

$$\oint\limits_{z}(1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy=\iint\limits_{D}(x+y^2)dxdy$$

$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi$-для вычисления нашего интеграла переходим к полярным координатам.

Уравнение окружности в полярных координатах имеет вид:

$$\rho^2=4;\quad \rho=2$$



Тогда:

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_{D}\rho^2\rho d\varphi d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\rho^3 d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2=4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=4\varphi\Big|_0^{2\pi}=8\pi.$$

III. Элементы теории поля

Пусть на заданной поверхности S в пространстве определена векторная функция $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$. Потоком вектора $\overline{F}$ через поверхность S называется поверхностный интеграл $\iint\limits_S \overline{F}\cdot\overline{n}\cdot dS$, где $\overline{n}$-единичный вектор нормали к поверхности S, при этом подразумевается, что $\overline{n}$ -«внешняя» нормаль, иначе интеграл берется со знаком минус.

$\iint\limits_S \overline{F}\cdot\overline{n}\cdot dS = \iiint\limits_V div\overline{F}dxdydz$ - для замкнутой поверхности, где

$div\overline{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ - дивергенция вектора $\overline{F}$.

Основной характеристикой скалярного поля $U(x,y,z)$ является градиент, это вектор, который по численному значению и по направлению характеризует наибольшую скорость возрастания величины U. Обозначается градиент скалярного поля $gradU$

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}.$$

Основными характеристиками векторного поля

$\overline{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z). R(x,y,z)\}$ являются дивергенция и ротор(вихрь)

$$div\,\overline{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ротор векторного поля $\overline{a}$ обозначается $rot\,\overline{a}$ и вычисляется:

$rot\,\overline{a} = \left\{\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}; \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}; \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right\}$ или

$$rot\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{dx} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Индивидуальные задания 3.

Задача 1

Вычислить поток векторного поля через сторону треугольника ,вырезаемого из плоскости Р координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью z острый угол.

1. $\overline{F}=(2z-x)\overline{i}+(x-y)\overline{j}+3(x+z)\overline{k}$; (P): $x+y+2z-2=0$

2. $\overline{F}=4z\overline{i}+(x-y-z)\overline{j}+3(y+z)\overline{k}$:(P): $x-2y-2z-2=0$

3. $\overline{F}=(y-я)\overline{i}+(2x+y)\overline{j}+(x+y+z)\overline{k}$; (P): $2x+y+z-2=0$

4. $\overline{F}=(2x-2y)\overline{i}+(y+x)\overline{j}+(x+2z)\overline{k}$; (P): $x-y+z-2=0$

5. $\overline{F}=(x-2z)\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(2x+y+2z)\overline{k}$; (P): $-x+2y+2z-2=0$

6. $\overline{F}=(2z+x)\overline{i}+(x-3z)\overline{j}+(y+z)\overline{k}$; (P): $-3x+2y+4z-6=0$

7. $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(2x+2z)\overline{k}$; (P): $2x+3y+z-6=0$

8. $\overline{F}=(x+y+z)\overline{i}+2z\overline{j}+(y-7z)\overline{k}$; (P): $2x+3y+z-6=0$

9. $\overline{F}=4z\overline{i}+(x-y-z)\overline{j}+(3y+2x)\overline{k}$; (P): $-2x+y+z-4=0$

10. .$\overline{F}=(2z-x)\overline{i}+(x+2z)\overline{j}+3z\overline{k}$; (P): $-x+4y+z-4=0$

11 $\overline{F}=z\overline{i}+yx\overline{j}+\frac{1}{2}z^2\overline{k}$:(P): $x+4y+z-4=0$

12. $\overline{F}=x\overline{i}+y^2\overline{j}+z^2\overline{k}$:(P): $z=x+y+2$

13. $\overline{F}=2x\overline{i}+6y\overline{j}-4z\overline{k}$; (P): $z-2x+y=4$

14. $\overline{F}=x\overline{i}+3y\overline{j}-3z\overline{k}$; (P): $x-2y+z=2$

15. $\overline{F}=\frac{1}{2}x^2\overline{i}+\frac{1}{2}y^2\overline{j}+\frac{1}{2}z^2\overline{k}$; (P): $x-y+2z=4$

16. $\overline{F}=2y\overline{i}+3z\overline{j}+x\overline{k}$; (P): $x+y+z=3$

17. $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+z\overline{j}-x\overline{k}$; (P): $2x-y+2z=2$

18. $\overline{F}=(y-1)\overline{i}+2x\overline{j}+z\overline{k}$; (P): $x-y+z=1$

19. $\overline{F}=(1-x)\overline{i}+2z\overline{j}+y\overline{k}$; (P): $x+2y+2z=2$

20. $\overline{F}=(z+1)\overline{i}-y\overline{j}+2z\overline{k}$; (P): $x+3y-z=1$

21. $\overline{F}=(1-x)\overline{i}+4\overline{j}-z\overline{k}$; (P): $x+3y-3z=6$

22. $\overline{F}=(2z-x)\overline{i}+4\overline{j}-2z\overline{k}$; (P): $x+2y+z=2$

23. $\overline{F}=(2z-x)\overline{i}+y\overline{j}+z^2\overline{k}$; (P): $x-2y-z=2$

24. $\overline{F}=(y-1)\overline{i}+2x\overline{j}+z\overline{k}$; (P): $x-y+2z=2$

25. $\overline{F}=(2x+z)\overline{i}-y\overline{j}+(z-3)\overline{k}$; (P): $x+2y-2z=4$

Решение типового примера.

Пример. Вычислить поток векторного поля $\overline{F}$ через сторону треугольника S, вырезаемого из плоскости P координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью OZ острый угол, если $\overline{F} = (2x - z)\overline{i} + (y - x)\overline{j} + (x + 2z)\overline{k}$, уравнение плоскости $P\ : x - y + z - 2 = 0$

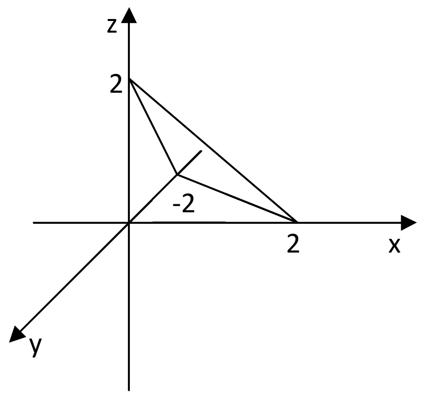
Решение: по формуле Остроградского-Гаусса находим

$div\,\overline{F} = 2 + 1 + 2 = 5$.

Тогда $\iint\limits_S \overline{F}\,\overline{n}\,dS = \iiint\limits_V 5dx\,dy\,dz$ (см.рис.)

$$\iiint\limits_V 5\,dx\,dy\,dz = 5\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x-2}^0 dy \int\limits_0^{2-x+y} dz = 5\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x-2}^0 (2 - x + y)dy =$$

$$= 5\int\limits_0^2 dx(2y - xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{x-2}^0 = 5\int\limits_0^2 (-2x + 4 + x^2 - 2x - \frac{(x-2)^2}{2})dx =$$



$$= 5\int\limits_0^2 (x^2 - 4x + 4 - \frac{(x-2)^2}{2}dx = 5(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - \frac{(x-2)^3}{6})\Big|_0^2 = 5(\frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{8}{6}) = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

Задача 2.

Для данного скалярного поля U и векторного поля $\bar{a}$ найти: $gradU$; $div\bar{a}$; $rot\bar{a}$ а также $div\,grad\,U$; $rot\,grad\,U$; $div\,rot\,\bar{a}$.

1. $U = xy - \frac{x}{z}$: $\bar{a} = \{5x - 6y;\ x^2 + 2y;\ x^2 - 4z\}$

2. . $U = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$: $\bar{a} = \{y^2 + z^2 + 6z;\ e^z - 2y + x;\ x + y - z\}$

3. $U = x^2 - arctg(y + z)$; $\bar{a} = \{x + z;\ xz + y;\ xy - 2\}$

4. $U = \ln(x^2 + y^2) + xyz$; $\bar{a} = \{3yz - x;\ x^2 - y;\ 6z - 1\}$

5. $U = z^2 + 2arctg(x - y)$; $\bar{a} = \{yz - 2x;\ xy^2;\ x - 2z\}$

6. $U = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$; $\bar{a} = \{2y - x;\ x^2;\ 2\sqrt{xy}\}$

7. $U = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$; $\bar{a} = \left\{e^{xy};\ x + z;\ \frac{1}{z}\right\}$

8. $U = x^2y^2z - \ln(z - 1)$; $\bar{a} = \{2yz;\ xz + 2y;\ x^2\}$

9. $U = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$; $\bar{a} = \left\{\frac{1}{\sqrt{x + y}};\ y^3;\ xz^2 -\right\}$

10. $U = \ln(3 - x^2) + xy^2z$; $\bar{a} = \{\sqrt{y + z};\ x;\ x + 3\}$

11. $U = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$; $\bar{a} = \{x^2y;\ e^{xy} - z;\ 3z^2\}$

12. $U = x + \ln(z^2 + y^2)$; $\bar{a} = \left\{\ln(x^2 + y^2);\ \frac{1}{y};\ xz -\right\}$

13. $U = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$; $\bar{a} = \{x^2y^2;\ z + 3;\ y^2\}$

14. $U = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$; $\bar{a} = \{y - z;\ x^2y;\ y^3z\}$

15. $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\bar{a} = \left\{\sqrt{x^2 + y^2};\ y^3;\ z^2 -\right\}$

16. $U = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$; $\bar{a} = \{\sin(x, y);\ \sqrt{x + y};\ z^3\}$

17. $U = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$; $\bar{a} = \left\{\ln(x - y);\ \frac{2}{y};\ xyz -\right\}$

18. $U = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$; $\bar{a} = \left\{arctg\frac{x}{z};\ 2y;\ z^8 -\right\}$

19. $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z$; $\bar{a} = \left\{tg(yx);\ \ln y;\ x^2z^3 -\right\}$

20. $U = arctg\frac{y}{x} + xz$; $\bar{a} = \left\{x^2y;\ \frac{y}{z};\ \sin z -\right\}$

21. $U = \ln(2 + x^2) - 4yxz$; $\bar{a} = \left\{2x;\ \frac{y}{x};\ (z - x)^2 -\right\}$

22. $U = x\sqrt{y} - yx^2;$ $\qquad \overline{a} = \left\{ arctgx;\ \ln(y^2+1)\ ;\ 3z- \right\}$

23. $U = -2\ln(x^2-8) - 4yxz;$ $\qquad \overline{a} = \left\{ \cos(xz);\ 7y+x)\ ;\ \frac{y}{x} \right\}$

24. $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z};$ $\qquad \overline{a} = \{ x\cos z;\ yz^3\ ;\ x^2y^3 \}$

25 $U = x^2y - \sqrt{x^2+5z^2};$ $\qquad \overline{a} = \left\{ y2^{-x};\ y^{-7};\ \frac{1}{z+2} \right\}$

Решение типового примера.

Пример. Дано векторное поле $\overline{a}\{x+yz, y, z-x^2\}$. Найти $div\,\overline{a}$ и $rot\,\overline{a}$.

Решение: Из условия имеем, что $P(x,y,z) = x+yz$; $Q = (x,y,z) = y$; $R(x,y,z) = z - x^2$

$$div\,\overline{a} = 1+1+1 = 3$$

$$rot\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+yz & y & z-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z-x^2 \end{vmatrix}\overline{i} -$$

$$-\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+yz & z-x^2 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x+yz & y \end{vmatrix}\overline{k} = 0 - (-2x-y)\overline{j} + (0-z)\overline{k} = (2x+y)\overline{j} - zk)\ .$$

Литература

1. Высшая математика под ред. Г.Н.Яковлева. -М.: «Просвещение»,1988.

2. Гусак, А.А., Высшая математика: Т.2/ А.А. Гусак - Мн.: Изд-во «Университетское»,1984.

3. Минорский, В.П., Сборник задач по высшей математике/ В.П. Минорский.- М.: Изд-во физ. мат. лит-ры, 2003.

4. Натансон, И.П. Краткий курс высшей математики/ И.П. Натансон.- СПб.: Изд-во «Лань»,20057.

5. Пискунов, Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления/ Н.С. Пискунов. - М.: Изд-во физ. мат. лит-ры, 1987.

6. Шипачев, В.С., Основы высшей математики/ В.С. Шипачев. - М.: Высш. шк., 1994.

7. Хинчин, А.Я. Краткий курс математического анализа/А.Я. Хинчин, - М.: Изд-во технико-теоретической лит.,1955.

7. Пискунов, Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления/Н.С. Пискунов,. - М.: Изд-во физ. мат. Лит-ры, 1987.

Учебное издание

Рыжик Валентина Николаевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к расчетно-графическим работам
по
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для бакалавров

Редактор Павлютина И.П.

Подписано в печать 10.06.2014 г. Формат 60×84 1/16.

Бумага типографская офсетная. Гарнитура Taims.

Усл. печ. л. 3,02. Тираж 100 экз. Изд. № 2715.

Издательство Брянской ГСХА

243365, Брянская обл., Выгоничский р-н, п. Кокино