Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра автоматики, физики и математики

Ракул Е.А.

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика»

Брянская область 2022 г.

УДК 512.6 (07)
ББК 22.14
Р 19

Ракул, Е. А. Линейная и векторная алгебра: учебно-методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» / Е. А. Ракул. – Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2022. – 51 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения направлений подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 20.03.02 Природообустройство и водопользование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 35.03.06 Агроинженерия, 09.03.03 Прикладная информатика. Учебно-методическое пособие может быть использовано как для работы на практических занятиях, так и для самостоятельной работы студентов.

Рецензенты:
Панов М.В., к.т.н., доцент кафедры автоматики, физики и математики.

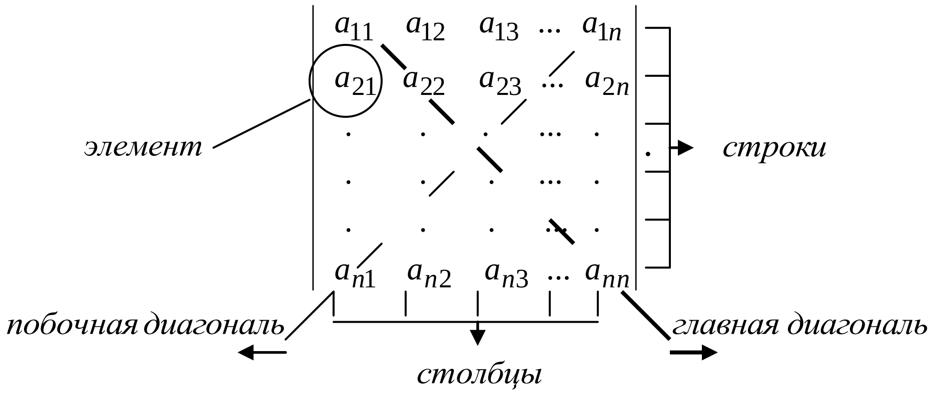
Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией института энергетики и природопользования Брянского ГАУ, протокол №3 от 28.10.2022 года.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

1.1 Определители второго и третьего порядка

Определение 1. ***Определителем порядка n*** называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы, имеющей n строк и n столбцов, которая раскрывается по определенному правилу.



Числа a_{ij} называются *элементами* определителя, i – номер строки, j – номер столбца. Элементы с одинаковым номером i образуют строки, а элементы с одинаковым номером j – столбцы. Элементы с равными номерами $(i = j)$ образуют ***главную диагональ.*** Другая диагональ квадратной таблицы, начинающаяся в левом нижнем углу и заканчивающаяся в правом верхнем углу, называется ***побочной.***

Определение 2. ***Определителем второго порядка*** называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы размером 2 х 2, то есть имеющей 2 строки и 2 столбца.

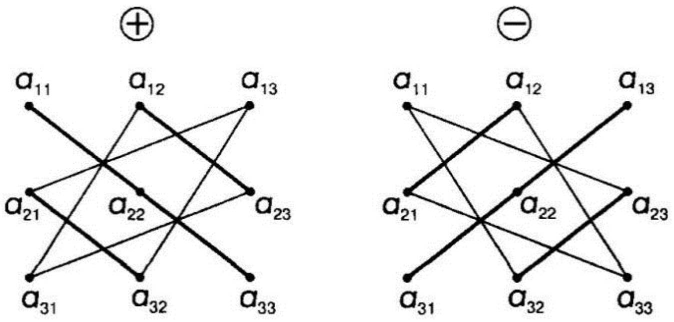
Определитель второго порядка вычисляется по правилу: *из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, надо вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Пример 1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = -13.$

Определение 3. Определителем третьего порядка называется число (выражение), записанное в виде квадратной таблицы размером 3 х 3, то есть имеющей 3 строки и 3 столбца.

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника (Саррюса):



Пример 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 0 - (60 - 2 + 0) = -7 - 58 = -65.$

Определение 4. Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель порядка $(n-1)$, который получается из исходного определителя порядка n путем вычеркивания строки i и столбца j, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 3. Найти миноры элементов a_{12} и a_{33} определителя из примера 2.

Вычеркивая в определителе строку 1 и столбец 2: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, получим минор $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. Поступая аналогично со строкой 3 и столбцом 3, получим минор $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Пример 4. Найти миноры элементов a_{11} и a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Исходя из определения минора M_{11}: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$, получаем $M_{11} = -2$, аналогично найдем минор $M_{21} = 1$.

Определение 5. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется произведение минора этого элемента на $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Замечание. Из определения алгебраического дополнения следует, что алгебраическое дополнение совпадает со своим минором, если сумма $i + j$ является четным числом, и противоположно ему по знаку, если сумма $i + j$ есть нечетное число.

Определение 6. Транспонированным определителем n-го порядка называется определитель порядка n, полученный из исходного определителя путем замены строк на соответствующие столбцы, а столбцов на соответствующие строки.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, то $\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Пример 5. Найти определитель, транспонированный к определителю $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

Из определения транспонированного определителя $\Delta^T = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2 Свойства определителей

1. Величина транспонированного определителя равна величине исходного определителя.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, тогда $\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Отсюда видно, что $\Delta^T = \Delta$.

2. Перестановка местами двух строк (столбцов) изменяет знак определителя на противоположный.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, тогда $\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} =$

$= -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\Delta$.

Замечание. Если поменять местами строки (столбцы) четное число раз, то величина и знак определителя не меняется. Нечетная перестановка местами строк (столбцов) не меняет величину определителя, но изменяет его знак на противоположный.

3. Определитель, содержащий две (или более) одинаковых строки (столбца), равен нулю.

Если определитель содержит два одинаковых столбца, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} -$

$- a_{21}a_{11} = 0$.

4. Для того чтобы умножить определитель на число k, достаточно умножить на это число все элементы какой-либо одной строки (столбца). Обратно: если все элементы какой-либо строки

(столбца) имеют общий множитель k, то его можно вынести за знак определителя.

Действительно,

$$k\cdot\Delta = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{12} \\ k\cdot a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\,a_{11}a_{22} - k\,a_{21}a_{12} = k\,(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,.$$

5. Если две каких-либо строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю.

Пусть в определителе второго порядка первая и вторая строки пропорциональны, тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}\,k\,a_{12} - k\,a_{11}a_{12} = k\,(a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12}) = 0\,.$$

6. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Пусть в определителе второго порядка все элементы первой строки равны нулю, тогда $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0\,a_{22} - a_{21}0 = 0\,.$

7. Если элементы какой-либо строки (столбца) можно представить в виде двух слагаемых, то сам определитель можно представить в виде суммы двух определителей.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, то $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2\,.$ Доказать самостоятельно.

8. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на вещественное число k и прибавить к соответствующим элементам другой строки (соответственно, столбца), то величина определителя не изменится.

Умножим элементы второго столбца на вещественное число k и прибавим результат умножения к соответствующим элементам первого столбца, получим

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+k\,a_{22} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} \\ k\,a_{22} & a_{22}\end{vmatrix}=\Delta+0=\Delta.$$ Второй определитель равен нулю по свойству 5.

Замечание. Данное свойство применяется для обнуления всех элементов какой-либо строки (столбца) за исключением одного, что существенно облегчает вычисление определителей порядка выше 3 (см. также свойство 9).

9. Метод раскрытия определителя по элементам какой-либо строки (столбца): Определитель любого порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta=\sum_i a_{ij}A_{ij}=\sum_j a_{ij}A_{ij}\,.$$

Пример 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4\end{vmatrix}$ по элементам 3 строки и по элементам 2 столбца.

Воспользуемся свойством 9: раскроем определитель по элементам 3 строки

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4\end{vmatrix}=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=(-2)\cdot M_{31}+(-3)\cdot(-M_{32})+4\cdot M_{33}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1\end{vmatrix}=-2\cdot(-3)+3\cdot 8+4\cdot(-1)=26.$$

Вычислим определитель по элементам 2 столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=(-1)\cdot(-M_{12})+1\cdot M_{22}+(-3)\cdot(-M_{32})=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-10)+1\cdot 12+3\cdot 8=26.$$

Из полученных результатов видно, что свойство 9 является универсальным методом вычисления любых определителей по элементам любой строки или столбца.

Используя свойство 8 можно обнулить все элементы какой-либо строки (столбца) за исключением одного (***метод обнуления***), а затем раскрыть определитель по элементам этой строки, воспользовавшись свойством 9.

2 МАТРИЦЫ

2.1 Понятие матрицы, виды матриц

Определение 1. ***Матрицей*** называется таблица чисел (выражений), имеющая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем писать матрицу в сокращенном виде $A = \underset{m\times n}{(a_{ij})}$, где числа a_{ij} называются *матричными элементами*, i – *номер строки*, j – *номер столбца*, выражение $m \times n$ будем называть *размерностью* матрицы или ее структурой.

Определение 2. Если матрица содержит m строк и 1 столбец, то она называется ***матрицей-столбцом*** $B = \underset{m\times 1}{(b_{ij})} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$.

Определение 3. Если матрица содержит 1 строку и n столбцов, то она называется ***матрицей-строкой*** $C = \underset{1\times n}{(c_{ij})} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \end{pmatrix}$.

Пример 1. Следующие таблицы являются матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ \pi - 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Определение 4. Матрица, у которой совпадает количество столбцов с количеством строк, называется ***квадратной***.

Всякой квадратной матрице соответствует определитель, составленный из тех же матричных элементов, который в теории матриц называется ещё *детерминантом матрицы* $\det A = \Delta_A$.

Определение 5. ***Транспонированной*** к исходной квадратной матрице называется такая матрица, строки которой заменены на соответствующие столбцы, а столбцы – на соответствующие строки.

Определение 6. Матрицу, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю, будем называть ***треугольной***

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 7. Матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали, называется ***диагональной***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 8. ***Единичной*** матрицей называется диагональная матрица, у которой на главной диагонали все элементы равны единице, а остальные элементы равны нулю:

$$E_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Действия над матрицами

Определение 9. ***Суммой (разностью)*** двух матриц $A=\underset{m\times n}{(a_{ij})}$ и $B=\underset{m\times n}{(b_{ij})}$ одинаковой структуры называется матрица той же размерности $C=\underset{m\times n}{(c_{ij})}$, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$.

Пример 2. Найти сумму и разность матриц

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение.

Из приведенных матриц складывать (вычитать) можно только матрицы A и C, которые имеют одинаковую структуру. Найдем сумму

$$A+C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 3+(-1) & 8+(-2)\\ 2+5 & -4+4 & 6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ 7 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

и разность этих матриц

$$A-C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-1 & 3-(-1) & 8-(-2)\\ 2-5 & -4-4 & 6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 10\\ -3 & -8 & 3\end{pmatrix}$$

При умножении действительного числа k на матрицу $A=\underset{m\times n}{(a_{ij})}$ ***все*** элементы матрицы умножаются на это число.

Пример 3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}$. Найти матрицу $-2A$.

Решение

$$-2A=-2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-1) & -2\cdot 3 & -2\cdot 8\\ -2\cdot 2 & -2\cdot(-4) & -2\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6 & -16\\ -4 & 8 & -12\end{pmatrix}.$$

Определение 10. ***Произведением матриц*** $A=\underset{m\times l}{(a_{ij})}$ и $B=\underset{l\times n}{(b_{ij})}$ называется матрица $C=\underset{m\times n}{(c_{ij})}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{il} \cdot b_{lj}.$$

Замечание. Перемножать можно лишь те матрицы, для ***которых количество столбцов первой перемножаемой матрицы совпадает с количеством строк второй перемножаемой матрицы***. Матрица, получаемая в результате перемножения, имеет количество строк равное количеству строк первой матрицы и количество столбцов равное количеству столбцов второй матрицы.

Пример 4. Найти (если это возможно) произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Матрица A имеет структуру 2×3, матрица $B -\ 2 \times 2$, матрица $C - 3 \times 2$. Согласно определению можно найти произведения $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, $C \cdot B$. Не существуют произведения $A \cdot B$, $B \cdot C$.

Вычислим произведение $B \cdot A$. Для того чтобы найти элементы возможных произведений, надо просуммировать произведения элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы:

$d_{11} = 2 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 = 16;$ $d_{12} = 2 \cdot 3 + 9 \cdot (-4) = -30;$ $d_{13} = 2 \cdot 8 + 9 \cdot 6 = 70;$

$d_{21} = 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = -7;$ $d_{22} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) = 17;$ $d_{23} = 3 \cdot 8 + (-2) \cdot 6 = 12.$

Отсюда следует, что $D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -30 & 70 \\ -7 & 17 & 12 \end{pmatrix}.$

Остальные возможные произведения найти ***самостоятельно***.

Замечание. Из приведенного примера видно, что в общем случае произведение матриц *некоммутативно* (неперестановочно), т. е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Определение 11. Обратной матрицей к исходной квадратной матрице $A = \underset{n \times n}{(a_{ij})}$ называется матрица A^{-1} той же структуры, произведение которой с матрицей A коммутативно и равно единичной матрице, то есть $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Рассмотрим схему построения обратной матрицы A^{-1}:

– находим определитель матрицы A (Δ_A – определитель матрицы A, если $\Delta_A = 0$, то обратной матрицы ***не существует***);

– вычисляют алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов определителя Δ_A;

– записывают выражение для обратной матрицы по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Обращаем внимание на то, что матрица алгебраических дополнений записана в транспонированном виде.

Пример 5. Найти обратную матрицу к матрице $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Вычислим детерминант данной матрицы $\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, раскроем этот определитель по элементам первой строки:

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \left(- \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 7 = 13.$$

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов определителя:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 9 .$$

Запишем обратную матрицу $C^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Проверим правильность нахождения обратной матрицы, для чего воспользуемся ее определением. Умножим найденную матрицу на исходную матрицу, вычислим элементы результирующей матрицы

$d_{11} = 6 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) = 13;$ $d_{21} = -7 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) = 0;$

$d_{12} = 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 0;$ $d_{22} = -7 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 13;$

$d_{13} = 6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0;$ $d_{23} = -7 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0;$

$$d_{31} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 9 \cdot (-2) = 0;$$
$$d_{32} = -2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + 9 \cdot (-2) = 0;$$
$$d_{33} = -2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 13.$$

Таким образом, $C^{-1} \cdot C = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{(3)}$, т.е. обратная матрица найдена верно.

3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

3.1 Метод Крамера

Определение 1. ***Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)*** называется система вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, где числа a_{ij} называются *коэффициентами при неизвестных* x_j, а числа b_i называются *свободными коэффициентами*.

Определение 2. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *главным определителем* системы
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Крамер предложил следующий метод решения СЛАУ: умножим главный определитель на x_1, для этого умножим все элементы первого столбца на эту неизвестную: $x_1\cdot\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Второй столбец умножим на x_2, третий столбец – на x_3, … , n-ый столбец – на x_n и все эти произведения прибавим к первому столбцу, при этом произведение $x_1\cdot\Delta$ не изменится:
$$x_1\cdot\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
Согласно записи СЛАУ первый столбец получившегося определителя представляет собой столбец свободных коэффициентов, т.е.
$$x_1\cdot\Delta=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_1.$$

Определение 3. Определитель Δ_1 называется *первым вспомогательным определителем* СЛАУ.

Поступая аналогично тому, как описано выше, найдем все вспомогательные определители СЛАУ:

$$x_2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_2; \dots \; x_n \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix} = \Delta_n.$$

Замечание. *Для того чтобы найти вспомогательный определитель i, надо в главном определителе СЛАУ заменить столбец i на столбец свободных коэффициентов.*

Определение 4. Полученные выше соотношения называются *формулами Крамера*.

Используя формулы Крамера, находят неизвестные величины $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

Проанализируем полученные формулы:

– если главный определитель системы отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение;

– если главный определитель системы равен нулю ($\Delta = 0$), а хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля ($\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$, или, …, или $\Delta_n \neq 0$), то система не имеет решений (деление на ноль запрещено);

– если все определители системы равны нулю ($\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$), то система уравнений имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решить СЛАУ методом Крамера $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ y - 2z + x = 0 \end{cases}$.

Прежде всего, обращаем внимание на то, что в последнем уравнении переменные записаны в неправильном порядке, в этом случае говорят, что СЛАУ записана в ненормализованном виде. Нормализуем СЛАУ, для чего запишем неизвестные в последнем уравнении системы в правильном порядке, чтобы одноименные неизвестные были записаны друг под другом $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$. Найдем главный определитель СЛАУ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \left(-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 9 = -15.$$

Так как главный определитель системы отличен от нуля, то СЛАУ имеет единственное решение. Найдем три вспомогательных определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \left(- \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 18 + 6 = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 3 - 6 = -15;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 9 = -15.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1.$$

Замечание. После нахождения решения СЛАУ надо обязательно *провести проверку*, для чего найденные числовые значения неизвестных подставляется в нормализованную систему линейных алгебраических уравнений.

Выполним проверку $\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 1 \equiv 1 \\ 1 + 1 + 1 = 3 \qquad \Rightarrow 3 \equiv 3 \\ 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow 0 \equiv 0 \end{cases}$. Отсюда видно, что СЛАУ решена верно.

3.2 Матричный способ решения СЛАУ

Для решения СЛАУ матричным способом введем в рассмотрение матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ и матрицу столбец свободных коэффициентов $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$. Тогда СЛАУ можно записать в матричном виде $A\cdot X=B$. Матричный способ решения СЛАУ состоит в следующем: умножим слева матричное уравнение на обратную матрицу A^{-1} к матрице A, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$; в силу того, что произведение $A^{-1}\cdot A=E$ и $E\cdot X=X$, найдем $X=A^{-1}\cdot B$. Таким образом, *для нахождения неизвестных матричным способом, надо найти обратную к A матрицу A^{-1}, после чего надо умножить эту матрицу на матрицу-столбец свободных коэффициентов*.

Пример 2. Решить СЛАУ матричным способом $\begin{cases} 2x-3y+2z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$.

Введем в рассмотрение следующие матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1}(см. лекцию № 2): найдем определитель матрицы A $\Delta=-15$. Найдем алгебраические дополнения всех элементов Δ:

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3;\quad A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4;\quad A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3;\quad A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-6;\quad A_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$$A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\quad A_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5;\quad A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5.$$

Запишем обратную матрицу $A^{-1}=-\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ (в правильности нахождения обратной матрицы убедиться самостоятельно). Подействуем найденной матрицей на матрицу-столбец свободных коэффициентов B:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что $x=1$; $y=1$; $z=1$. После нахождения решения СЛАУ необходимо сделать проверку.

3.3 Метод Гаусса

Метод Гаусса или метод исключения неизвестных состоит в том, чтобы за счет элементарных преобразований привести СЛАУ к треугольному виду. Покажем использование расширенной матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных и расширенной за счет столбца свободных коэффициентов, для приведения СЛАУ к треугольному виду на примере системы, рассматриваемой в этой лекции. Расширенная матрица для СЛАУ Примера 1 имеет вид: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Замечание. В методе Гаусса желательно, чтобы *первая строка расширенной матрицы начиналась с единицы*.

Обменяем в расширенной матрице первую и вторую строки местами, получим $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Приведем матрицу к треугольному виду, выполнив следующие преобразования: умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Разделим все элементы второй строки на (-5), получим эквивалентную матрицу $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Умножим элементы первой строки на (-1) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$. Разделим все элементы третьей строки на (-3), получим $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Таким образом, эквивалентная СЛАУ имеет вид (напомним, что первый столбец это коэффициенты при неизвестной x, второй – при неизвестной y, третий – при неизвестной z, а за вертикальной чертой находится столбец свободных коэффициентов) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \qquad\quad y=1 \\ \qquad\quad z=1 \end{cases}$. Из первого уравнения находим, что $x=1$.

Вывод: *Из вышеизложенного материала следует, что вне зависимости от способа решения СЛАУ всегда должен получаться один и тот же ответ*.

Замечание. После нахождения решения СЛАУ надо обязательно выполнить проверку, то есть подставить полученные значения неизвестных в заданную СЛАУ и убедиться в тождественности левой части всех равенств системы соответствующим правым частям. Отметим, что задание СЛАУ всегда верно, то есть, если проверка показывает нарушение оговоренной тождественности, то надо искать ошибку в проведенных вычислениях.

4 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

4.1 Понятие вектора

Определение. ***Вектором*** называется направленный отрезок $\overline{AB}$, где A – начало, а B – конец вектора.

Векторы можно также обозначать одной прописной буквой латинского алфавита со стрелочкой (или черточкой) наверху $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$.

Определение. Если начало и конец вектора $\bar{a}$ не закреплены, то он называется ***свободным***.

Свободный вектор можно перемещать как вдоль его прямой, так и параллельно самому себе.

Определение. Если зафиксирована точка, которая определяет начало вектора, то она называется точкой приложения вектора.

Определение. ***Длиной (модулем)*** вектора $\bar{a}$ называется расстояние между началом и концом вектора и обозначается $|\bar{a}|$.

Определение. Векторы называются ***коллинеарными*** **(**Рис. 1**)**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначается: $\bar{a} \| \bar{b}$.

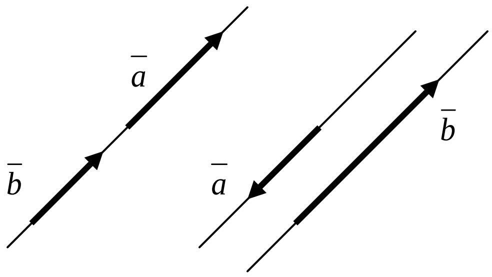


Рис. 1

Определение. Векторы называются ***компланарными*** **(**Рис. 2**)**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

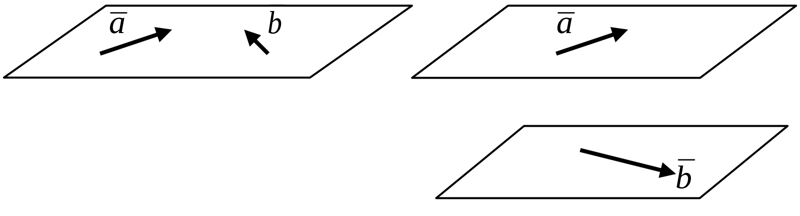


Рис. 2

Определение. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется ***нулевым вектором*** и обозначается $\overline{AA}=\overline{0}$. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Определение. Два коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***сонаправленными***, если они лежат в одной полуплоскости от прямой, соединяющей их начала. Обозначаются: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. Нулевой вектор считают сонаправленным любому вектору.

Определение. Два коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***противоположно направленными***, если они лежат в разных полуплоскостях от прямой, соединяющей их начала. Обозначаются: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$. Нулевой вектор считают противоположно направленным любому вектору.

Определение. Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***равными***, если они сонаправлены и их длины равны, т.е. $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ и $|\overline{a}|=|\overline{b}|$. Обозначаются: $\overline{a}=\overline{b}$.

Определение. Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***противоположными***, если они противоположно направлены и их длины равны, т.е. $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ и $|\overline{a}|=|\overline{b}|$. Обозначаются: $\overline{a}=-\overline{b}$.

4.2 Линейные операции над векторами

4.2.1 Сумма векторов

Для нахождения суммы векторов применяют три основных правила:

1) правило треугольника

Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарные, и пусть начало вектора $\overline{b}$ совпадает с концом вектора $\overline{a}$, тогда их суммой будет вектор $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, начало $\overline{b}$ которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а его конец – с концом вектора $\overline{b}$ (Рис. 3).

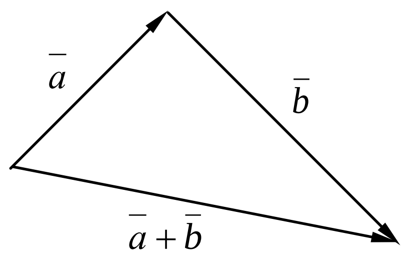


Рис. 3

2) правило параллелограмма

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарные, и пусть начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ совпадают. Построим на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллелограмм, тогда их суммой будет вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, начало которого совпадает с общим началом векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а его конец лежит в противоположной вершине параллелограмма **(**Рис. 4**)**.

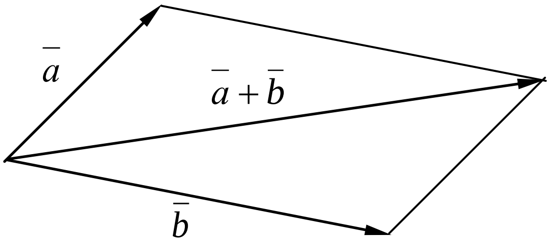


Рис. 4

3) правило многоугольника

Правило многоугольника применяется, если необходимо сложить более двух векторов. При этом каждый следующий вектор откладывается от конца предыдущего. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора в сумме с концом последнего, и будет суммой этих векторов (Рис. 5).

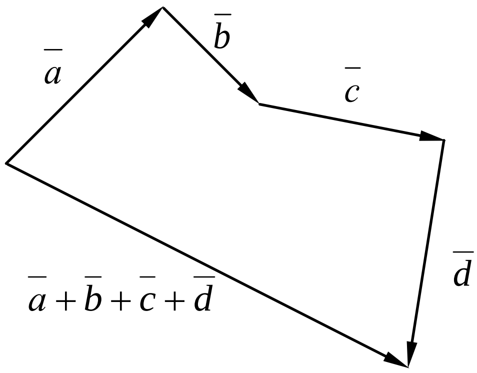


Рис. 5

4.2.2 Разность векторов

Определение. Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} - \bar{b}$, сумма которого с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$ (Рис. 6).

Вектор разности всегда направлен к тому вектору, от которого ведется вычитание. При вычитании векторы откладываются от одной точки.

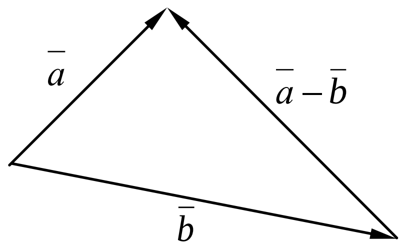


Рис. 6

4.2.3 Умножение вектора на число

Определение. Произведением вектора $\overline{a} \neq \overline{0}$ на число m называется вектор $m\overline{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\left|m\overline{a}\right| = |m| \cdot |\overline{a}|$;

2) вектор $m\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$ при $m > 0$, и $m\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$ при $m < 0$.

Из определения операции умножения вектора на число следует *первое условие коллинеарности векторов*: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если существует такое число m, что выполняется равенство $\overline{b} = m\overline{a}$.

Произведение числа на вектор обладает следующими свойствами:

– сочетательным $\lambda \cdot (\mu \cdot \overline{a}) = \mu \cdot (\lambda \cdot \overline{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overline{a}$;

– распределительным относительно чисел $(\lambda + \mu) \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{a}$;

– распределительным относительно векторов $\lambda \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b}$.

Если число $m = 0$, то в результате умножения $m \cdot \overline{a} = \overline{0}$ получают нулевой вектор.

4.3 Проекция вектора на ось

Пусть задана ось l и некоторый вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, не принадлежащий оси. Проведем через начало вектора $\overline{a}$ прямую, которая параллельна оси l, угол между прямой и вектором $\overline{a}$ обозначим через φ (Рис. 7).

Пусть точка A' – проекция начала вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на ось l, точка B' – проекция конца вектора на ту же ось. Вектор $\overline{A'B'}$ называется ***составляющей*** вектора $\overline{AB}$ на оси l.

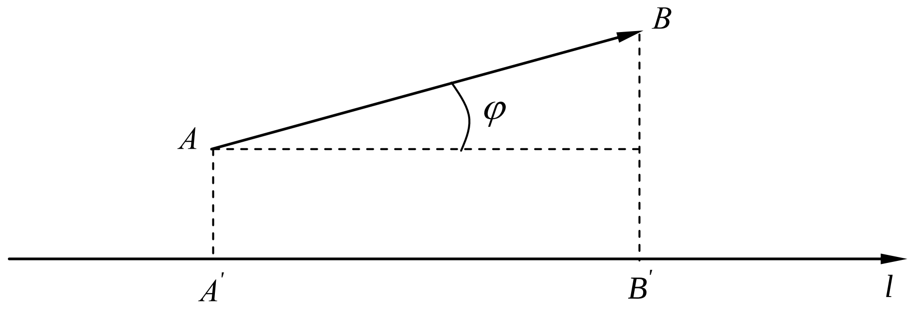


Рис. 7

Определение. *Проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* l называется длина составляющей вектора $\overline{A'B'}$, взятая со знаком «+», если $\overline{A'B'}\uparrow\uparrow l$, и со знаком «–», если $\overline{A'B'}\uparrow\downarrow l$.

Из рисунка 7 следует, что

$$np_l\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi. \tag{1}$$

Из формулы (1) вытекает, что при $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ величина $np_l\,\overline{a} > 0$, а при $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ величина $np_l\,\overline{a} < 0$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (или $\varphi = -\frac{\pi}{2}$) проекция равна нулю, т. е. $np_l\,\overline{a} = 0$. Проекции обладают следующими свойствами, сформулируем их в виде теорем.

Теорема 1. Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны, то и их проекции на ось l также будут равны, т.е.

$$np_l\,\overline{a} = np_l\,\overline{b}.$$

Теорема 2. Проекция суммы векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на ось l равна сумме проекций этих векторов на ту же ось, т.е.

$$np_l\,(\overline{a} + \overline{b}) = np_l\,\overline{a} + np_l\,\overline{b}.$$

Теорема 3. При умножении вектора $\overline{a}$ на число m его проекция на ось l умножается на то же число, т.е.

$$np_l\,(m \cdot \overline{a}) = m \cdot np_l\,\overline{a}.$$

Определение. Направленная прямая с выбранным началом отсчета и масштабом измерения называется ***числовой осью***.

Определение. Две (три) взаимно перпендикулярные числовые оси образуют ***прямоугольную (декартову) систему координат*** на плоскости (в пространстве).

Обозначим:

$пр_{Ox}\,\bar{a} = x$ – проекцию вектора $\bar{a}$ на ось абсцисс Ox,

$пр_{Oy}\,\bar{a} = y$ – проекцию вектора $\bar{a}$ на ось ординат Oy,

$пр_{Oz}\,\bar{a} = z$ – проекцию вектора $\bar{a}$ на ось аппликат Oz.

Определение. Проекции x, y, z вектора $\bar{a}$ на координатные оси называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$. Обозначается: $\bar{a}(x;\, y;\, z)$.

Длина вектора $\bar{a}$ определяется по формуле:

$$|\,\bar{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{2}$$

Пусть заданы произвольные точки в пространстве: $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\bar{b}(x_2;\, y_2;\, z_2)$. ***Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$ нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала***, т.е.

$$\overline{AB}(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1). \tag{3}$$

Следующие формулы определяют действия с векторами в координатной форме. Пусть заданы векторы $\bar{a}(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $\bar{b}(x_2;\, y_2;\, z_2)$, тогда

1) сумма векторов

$$\bar{a} + \bar{b}(x_1 + x_2;\, y_1 + y_2;\, z_1 + z_2)$$

2) разность векторов

$$\bar{a} - \bar{b}(x_1 - x_2;\, y_1 - y_2;\, z_1 - z_2)$$

3) умножение вектора на число

$$m\bar{a}\,(mx_1;\, my_1;\, mz_1).$$

4.4 Направляющие косинусы вектора

Пусть задан произвольный вектор пространства $\bar{a}(x;\, y;\, z)$. Совместим его начало с началом системы координат. Обозначим α – угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси Ox; β – угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси Oy; γ – угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси Oz.

Определение. Косинусы углов α, β, γ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Тогда по формуле (1) получим, что $x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha$; $y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta$; $z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma$. Откуда получаем формулы для определения направляющих косинусов вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \ \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \ \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}. \tag{4}$$

Вычислив квадрат модуля вектора $\bar{a}$, найдем соотношение, которое связывает направляющие косинусы вектора $\bar{a}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{5}$$

Направляющие косинусы вектора однозначно определяют его *направление* в пространстве.

4.5 Базис в пространстве

Определение. ***Ортом*** некоторой оси U называется вектор единичной длины в выбранном масштабе измерения, сонаправленный с этой осью $\bar{e}_U$.

Рассмотрим пространственную декартову систему координат $Oxyz$, по всем осям координат выберем одинаковый масштаб измерения. Вдоль направления каждой оси отложим отрезки единичной длины.

Обозначим орты координатных осей: Ox – через $\bar{i}$, Oy – через $\bar{j}$, Oz – через $\bar{k}$ (Рис. 8).

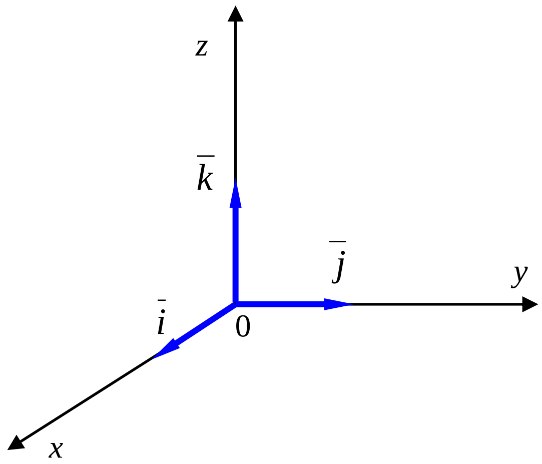


Рис. 8

Из рисунка 8 видно, что орты координатных осей имеют следующие свойства:

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1, \quad \bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}.$$

Так как векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ некомпланарные, то они образуют ***базис в пространстве***: $B_3 = \{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$. На плоскости базис состоит только из двух единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$: $B_2 = \{\bar{i},\ \bar{j}\}$.

Теорема. Любой вектор пространства может быть единственным образом разложен по векторам базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, т.е.

$$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}, \qquad (6)$$

где числа x, y, z – координаты вектора $\bar{a}$.

4.6 Скалярное произведение векторов

Определение. ***Скалярным произведением*** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (7)$$

где $\varphi = \left(\bar{a}; \widehat{\ }\ \bar{b}\right)$ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если их длины равны 2 и 5, соответственно, а угол между векторами равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Используя определение скалярного определения, находим

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

Используя определения проекции вектора на ось и скалярного произведения двух векторов, можно записать, что

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\, \bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\, \bar{a}. \qquad (8)$$

Откуда можно найти ***проекцию одного вектора на другой***, например,

$$np_{\bar{a}}\, \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\,\bar{a}\,|}.$$

Рассмотрим основные ***свойства скалярного произведения***:

1. $\bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$;
2. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$;

4. $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора $\bar{a}$ равен квадрату его длины);

5. Вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$ тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Теорема. Пусть заданы векторы $\bar{a}(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $\bar{b}(x_2;\,y_2;\,z_2)$. Тогда их скалярное произведение равно

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{9}$$

Формула (9) выражает скалярное произведение векторов в координатной форме.

Следствие 1. Если вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{10}$$

Следствие 2. Если φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{11}$$

Пример 2. Найти, при каком значении m векторы $\bar{a}(m;\,-1;\,2)$ и $\bar{b}(3;\,m;\,-1)$ перпендикулярны.

Решение. Условием перпендикулярности векторов является обращение в нуль их скалярного произведения, поэтому воспользуемся следствием 1 из теоремы:

$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=3m-m-2=2m-2=0$, откуда находим $m=1$.

4.7 Векторное произведение векторов

Определение. Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется ***упорядоченной***, если указано, какой вектор считается первым, какой – вторым, а какой третьим.

Например, в последовательности векторов ($\bar{b}$, $\bar{a}$, $\bar{c}$) вектор $\bar{b}$ считается первым, вектор $\bar{a}$ - вторым, а вектор $\bar{c}$ - третьим.

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется ***правой*** при выполнении условия: если смотреть из конца вектора $\bar{c}$, то кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки. Если такой поворот виден совершающимся по часовой стрелке, то тройка векторов будет ***левой***.

Определение. ***Векторным произведением*** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, который удовлетворяет условиям:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\bar{a};\bar{b}})$ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\bar{a} \times (\lambda \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$;

2. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$;

4. Если вектор $\bar{a}$ коллинеарен вектору $\bar{b}$, то их векторное произведение равно нулю, т.е. $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ (*второе условие коллинеарности векторов*).

5. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ численно равна модулю их векторного произведения (Рис. 9): $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$. Следствием этого свойства является формула для вычисления площади треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (Рис.9): $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

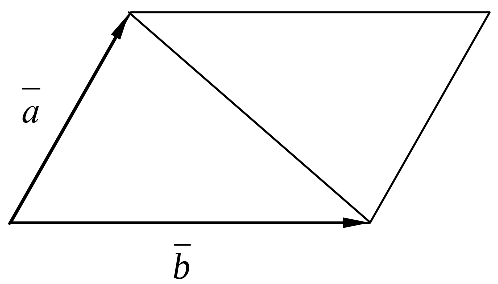


Рис. 9

Теорема. Пусть $\bar{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x;\, b_y;\, b_z)$. Тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Найти, при каком значении параметра m вектор $\bar{a}(4;\,2;\,-m)$ коллинеарен вектору $\bar{b}(2;\;1;\;-1)$.

Решение. Согласно свойству 4 векторного произведения найдем векторное произведение заданных векторов

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 2 & -m\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & -m\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}4 & -m\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(m-2)\bar{i}-(2m-4)\,\bar{j}+0\bar{k}\,.$$

Так как вектор $\bar{c}$ должен быть нулевым, то все его проекции должны быть равными нулю, следовательно, $m=2$.

Пример 2. Найти векторное произведение векторов $\bar{a}(3;\,2;\,1)$ и $\bar{b}(-2;\;0;\;4)$.

Решение.

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=8\,\bar{i}-14\,\bar{j}+4\bar{k}$$

$\bar{c}\,(8;\;-14;\;4)$.

4.8 Смешанное произведение векторов

Определение. ***Смешанным произведением векторов*** $\bar{a}$**,** $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число равное векторному произведению $\bar{a}\times\bar{b}$, умноженному скалярно на вектор $\bar{c}$, т. е. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Формула для вычисления смешанного произведения имеет вид:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Таким образом, смешанное произведение векторов представляет собой определитель III порядка, откуда следуют его ***свойства***:

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}$, т.е. векторы, входящие в смешанное произведение, можно циклически переставлять местами, поэтому зачастую смешанное произведение пишут без знаков $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

2. Модуль смешанного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, т.е. $V = \left|\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}\right|$ (Рис. 10).

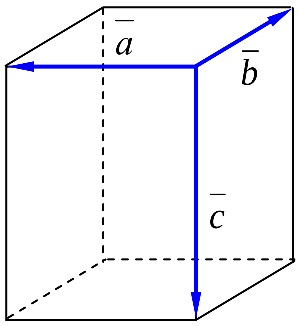


Рис. 10

3. Площадь пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, определяется по формуле: $V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}\right|$ (Рис.11)

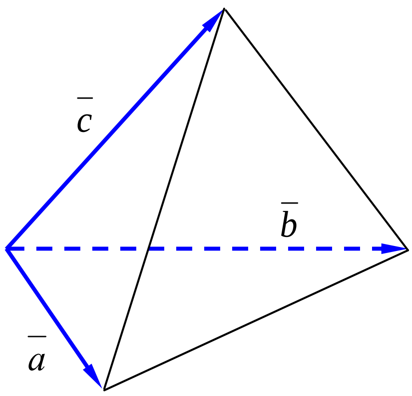


Рис. 11

4. Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны (лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях), то их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = 0$.

Замечание. Свойство 4 определяет *условие компланарности трех векторов*.

Пример 1. Доказать, что векторы $\bar{a}(1;\, 2;\, 3)$, $\bar{b}(4;\, 5;\, 6)$ и $\bar{c}(7;\, 8;\, 9)$ компланарны.

Решение. Согласно формуле, определяющей смешанное произведение векторов, имеем

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-3+12-9=0,$$

значит, векторы компланарны, согласно свойству 4.

Пример 2. Даны четыре вершины параллелепипеда $M_1(1;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ 1;\ 0)$, $M_3(0;\ 0;\ 1)$ и $M_4(1;\ 1;\ 1)$. Вычислить объем параллелепипеда.

Решение. Рассмотрим векторы

$$\bar{a}=\overrightarrow{M_1M_2}(-1;\ 1;\ 0),\quad \bar{b}=\overrightarrow{M_1M_3}(-1;\ 0;\ 1)\quad \text{и}\quad \bar{c}=\overrightarrow{M_1M_4}(0;\ 1;\ 1).$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1+1=2\ .$$

Тогда объем параллелепипеда равен: $V=|2|=2$ (куб. ед.).

ПРАКТИКУМ

Задача 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 2\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 5 & 0 & 2\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: а) $A+2B$; б) $4A-B$; в) A^2; г) BA^2.

Решение

а) $A+2B=\begin{pmatrix}2+2\cdot 1 & -1+2\cdot 1 & 0+2\cdot(-4)\\ 1+2\cdot 5 & -3+2\cdot 0 & 2+2\cdot 2\\ 3+2\cdot(-2) & 1+2\cdot 3 & -3+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -8\\ 11 & -3 & 6\\ -1 & 7 & -5\end{pmatrix}$;

б) $4A-B=\begin{pmatrix}4\cdot 2-1 & 4\cdot(-1)-1 & 4\cdot 0-(-4)\\ 4\cdot 1-5 & 4\cdot(-3)-0 & 4\cdot 2-2\\ 4\cdot 3-(-2) & 4\cdot 1-3 & 4\cdot(-3)-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -5 & 4\\ -1 & -12 & 6\\ 14 & 1 & -11\end{pmatrix}$;

в) $A^2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 2\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 2\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}4-1+0 & -2+3+0 & 0-2+0\\ 2-3+6 & -1+9+2 & 0-6-6\\ 6+1-9 & -3-3-3 & 0+2+9\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & 10 & -12\\ -2 & -9 & 11\end{pmatrix}$

г) $BA^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 5 & 0 & 2\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & 10 & -12\\ -2 & -9 & 11\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}3+5+8 & 1+10+36 & -2-12-44\\ 15+0-4 & 5+0-18 & -10+0+22\\ -6+15+2 & -2+30+9 & 4-36-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 47 & -58\\ 11 & -13 & 12\\ 11 & 37 & -43\end{pmatrix}$.

Задача 2. Дан многочлен $f(x)=3x^2-2x+5$ и матрица $C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

Найти значение многочлена $f(C)$.

Решение

Подставим матрицу C в функцию вместо переменной x:.

Вычислим отдельно матрицу C^2:

$$C^2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4+9 & -2+8-15 & 3-2+6\\ 2-8+3 & -4+16-5 & 6-4+2\\ 3-10+6 & -6+20-10 & 9-5+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9 & 7\\ -3 & 7 & 4\\ -1 & 4 & 8\end{pmatrix}$$

$$f(C)=3\cdot\begin{pmatrix}6 & -9 & 7\\ -3 & 7 & 4\\ -1 & 4 & 8\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}18-2+5 & -27+4+0 & 21-6+0\\ -9-4+0 & 21+8+5 & 12-2+0\\ -3-6+0 & 12+10+0 & 24-4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -23 & 15\\ -13 & 34 & 10\\ -9 & 22 & 25\end{pmatrix}$$

Задача 3. Вычислить определитель разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и по правилу треугольника: $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}$.

Решение

Разложим определитель по элементам 3 строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+(-3)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(8-6)+(4-3)-3\cdot(12-12)=8+1-0=9.$$

Вычислим определитель по правилу треугольника:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}=-36-3+32-24+4+36=9.$$

Задача 4. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases}x+3y-6z=12,\\ 3x+2y+5z=-10,\\ 2x+5y-3z=6.\end{cases}$

1. по формулам Крамера; 2) с помощью обратной матрицы.

Решение

1) Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 90 + 30 + 24 - 25 + 27 = -40.$$

Так как $\Delta = -40 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72 + 90 + 300 + 72 - 300 - 90 = 0;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & -6 \\ 3 & -10 & 5 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 30 + 120 - 108 - 120 - 30 + 108 = 0;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & -10 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 180 - 60 - 48 + 50 - 54 = 80.$$

Тогда по формулам Крамера находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{-40} = 0; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-40} = 0; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{80}{-40} = -2.$$

Выполним проверку:

$$\begin{cases} 0 + 3\cdot 0 - 6(-2) = 12, \\ 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 5(-2) = -10, \\ 2\cdot 0 + 5\cdot 0 - 3(-2) = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 12 = 12, \\ -10 = -10, \\ 6 = 6, \end{cases} \quad \text{верно.}$$

Ответ: (0; 0; -2).

2) Запишем данную по условию систему в матричной форме. Обозначим

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$, тогда $A \cdot X = B$, откуда находим $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 25 = -31;$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-(-9-10)=19;$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=15-4=11;$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & -6\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-(-9+30)=-21;$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -6\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-3+12=9;$$

$$A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-(5-6)=1;$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -6\\ 2 & 5\end{vmatrix}=15+12=27;$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & -6\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-(5+18)=-23;$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2-9=-7.$$

Тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{-40}\cdot\begin{pmatrix}-31 & -21 & 27\\ 19 & 9 & -23\\ 11 & 1 & -7\end{pmatrix}$ - обратная матрица для матрицы A.

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-40}\cdot\begin{pmatrix}-31 & -21 & 27\\ 19 & 9 & -23\\ 11 & 1 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\ -10\\ 6\end{pmatrix}=-\frac{1}{40}\cdot\begin{pmatrix}-372+210+162\\ 228-90-138\\ 132-10-42\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{40}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -2\end{pmatrix}.$$

Ответ: (0; 0; -2).

Задача 5. Дан вектор $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}$. Найти его длину и направляющие косинусы.

Решение

Длину вектора определяем по формуле $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где x, y, z - координаты вектора. Имеем:

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

Определяем направляющие косинусы вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{2}{7},\ \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{3}{7},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = -\frac{6}{7}.$$

Направляющие косинусы вектора должны удовлетворять соотношению

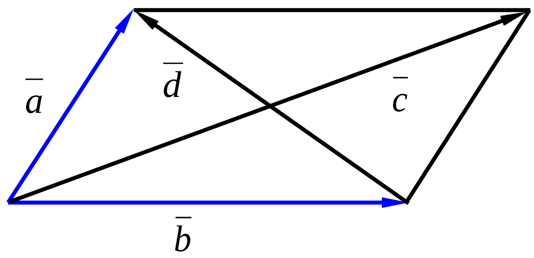
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Проверим это соотношение для направляющих косинусов вектора $\bar{a}$:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = 1,\quad \frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = 1,\quad 1 = 1, \text{ верно.}$$

Задача 6. Построить параллелограмм на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{k} - 3\bar{j}$ и определить длины его диагоналей.

Решение



Итак, требуется найти длины векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$. Вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ (по правилу параллелограмма), поэтому

$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k} - 3\bar{j} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$,

отсюда $\bar{c}(2; -2; 1)$, тогда длина вектора $\bar{c}$ равна $|\bar{c}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

Вектор $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$, поэтому $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k} + 3\bar{j} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$, отсюда $\bar{d}(2; 4; -1)$, тогда длина вектора $\bar{d}$ равна $|\bar{d}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$.

Задача 7. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

Решение

Направляющие косинусы вектора должны удовлетворять соотношению $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Проверим его для заданных по условию углов:

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Имеем: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1,\ \frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1,\ \frac{5}{4}=1,$ неверно, значит, вектор *__не может__* составлять с координатными осями указанные углы.

Задача 8. Вектор составляет с осями Ox и Oy углы $\alpha=60^\circ$ и $\beta=120^\circ$. Вычислить его координаты при условии, что $|\bar{a}|=2$.

Решение

Так как $\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta=\frac{y}{|\bar{a}|}$, то $x=|\bar{a}|\cos\alpha=2\cos 60^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1$, $y=|\bar{a}|\cos\beta=2\cos 120^\circ=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$. Третью координату вектора $\bar{a}$ определим по формуле длины вектора: $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, отсюда получаем уравнение:

$$2=\sqrt{1+1+z^2},\ \sqrt{2+z^2}=2,\ 2+z^2=4,\ z^2=2,\ z=\pm\sqrt{2}.$$

Таким образом, для вектора $\bar{a}$ получаем следующие координаты:

$$\bar{a}\left(1;\,-1;\,\sqrt{2}\right) \text{ или } \bar{a}\left(1;\,-1;\,-\sqrt{2}\right).$$

Задача 9. На плоскости даны три вектора $\bar{a}=2\bar{i}$, $\bar{b}=3\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{c}=2\bar{i}+6\bar{j}$. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение

Требуется найти такие числа m и n, что выполняется равенство $\bar{c}=m\bar{a}+n\bar{b}$. Подставим в это равенство разложение по базису векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, заданное по условию:

$$2\bar{i}+6\bar{j}=m\left(2\bar{i}\right)+n\left(3\bar{i}+3\bar{j}\right),$$
$$2\bar{i}+6\bar{j}=2m\bar{i}+3n\bar{i}+3n\bar{j},$$
$$2\bar{i}+6\bar{j}=(2m+3n)\bar{i}+3n\bar{j}.$$

Для отыскания чисел m и n составим систему уравнений:

$$\begin{cases}2m+3n=2,\\3n=6;\end{cases}\quad\begin{cases}2m+6=2,\\n=2;\end{cases}\quad\begin{cases}2m=-4,\\n=2;\end{cases}\quad\begin{cases}m=-2,\\n=2.\end{cases}$$

В итоге получим следующее разложение вектора $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{c}=-2\bar{a}+2\bar{b}$.

Задача 10. Даны векторы $\bar{a}(-3;4;-1)$, $\bar{b}(-1;2;3)$, $\bar{c}(-4;-2;1)$. Найти векторы $4\bar{a}+3\bar{b}-2\bar{c}$, $-5\bar{a}+4\bar{b}+\bar{c}$.

Решение

Выполним действия с векторами в координатной форме:

$$4\bar{a}(-12;16;-4),\ 3\bar{b}(-3;6;9),\ -2\bar{c}(8;4;-2),$$

тогда

$$4\bar{a}+3\bar{b}-2\bar{c}(-12-3+8;16+6+4;\ -4+9-2),$$

$$4\bar{a}+3\bar{b}-2\bar{c}(-7;26;\ 3).$$

Аналогично находим координаты вектора $-5\bar{a}+4\bar{b}+\bar{c}$:

$$-5\bar{a}(15;-20;5),\ 4\bar{b}(-4;8;12),$$

тогда

$$-5\bar{a}+4\bar{b}+\bar{c}(15-4-4;-20+8-2;5+12+1),$$

$$-5\bar{a}+4\bar{b}+\bar{c}(7;-14;18).$$

Задача 11. Известно, что $|\bar{a}|=3,\ |\bar{b}|=4$, $\varphi=\left(|\bar{a}|,\widehat{\ }|\bar{b}|\right)=60^\circ$. Вычислить: 1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; 2) $\bar{a}^2$; 3) $\bar{b}^2$; 4) $(3\bar{a}+2\bar{b})(\bar{a}-2\bar{b})$.

Решение.

1) Скалярное произведение векторов определяется формулой $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi-$угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Подставим сюда известные величины, получим:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=3\cdot4\cdot\cos60^\circ=12\cdot\frac{1}{2}=6.$$

2) Величина $\bar{a}^2$ есть скалярные квадрат вектора. По свойству скалярного произведения $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$. Тогда $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=3^2=9$.

3) Аналогично находим скалярный квадрат $\bar{b}^2=|\bar{b}|^2=4^2=16$.

4) $(3\bar{a}+2\bar{b})(\bar{a}-2\bar{b})=3\bar{a}^2-6\bar{a}\cdot\bar{b}+2\bar{b}\cdot\bar{a}-4\bar{b}^2=3\bar{a}^2-4\bar{a}\cdot\bar{b}-4\bar{b}^2=$
$=3\cdot9-4\cdot6-4\cdot16=27-24-64=-61.$

Задача 12. Заданы векторы $\bar{a}=2\bar{i}-5\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}+7\bar{k}$. Найти скалярное произведение векторов, их длины и угол между векторами.

Решение

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в координатной форме определяется формулой: $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. По условию $\bar{a}(2;-5;4)$, $\bar{b}(-1;2;7)$. Тогда получим:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot(-1)+(-5)\cdot2+4\cdot7=-2-10+28=16.$$

Длина вектора определяется формулой $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где x, y, z – координаты вектора $\bar{a}$. Для заданных по условию векторов имеем:

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 4 + 49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Из определения скалярного произведения следует, что косинус угла между векторами определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

Для заданных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находим: $\cos\varphi = \dfrac{16}{3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{6}} = \dfrac{16}{9\sqrt{30}}$. Тогда угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\varphi = \arccos\dfrac{16}{9\sqrt{30}} \approx 71^\circ$.

Задача 13. Заданы векторы $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n},\ \bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$. Известно, что $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$, угол между векторами $\bar{m}$ и $\bar{n}$ равен $\varphi = 120^\circ$. Найти угол γ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение

Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определим по формуле: $\cos\gamma = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$.

Имеем:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (2\bar{m} + 4\bar{n})(\bar{m} - \bar{n}) = 2\bar{m}^2 - 2\bar{m} \cdot \bar{n} + 4\bar{n} \cdot \bar{m} - 4\bar{n}^2 = 2\bar{m}^2 + 2\bar{m} \cdot \bar{n} - 4\bar{n}^2 =$$

$$= 2|\bar{m}|^2 + 2|\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cdot \cos 120^\circ - 4|\bar{n}|^2 = 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = 2 - 1 - 4 = -3.$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{(2\bar{m} + 4\bar{n})^2} = \sqrt{4\bar{m}^2 + 16\bar{m} \cdot \bar{n} + 16\bar{n}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\bar{m}|^2 + 16|\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cdot \cos 120^\circ + 16|\bar{n}|^2} = \sqrt{4 + 16\left(-\frac{1}{2}\right) + 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{\bar{b}^2} = \sqrt{(\bar{m} - \bar{n})^2} = \sqrt{\bar{m}^2 - 2\bar{m} \cdot \bar{n} + \bar{n}^2} =$$

$$= \sqrt{|\bar{m}|^2 - 2|\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cdot \cos 120^\circ + |\bar{n}|^2} = \sqrt{1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1} = \sqrt{3}.$$

Тогда получим: $\cos\gamma = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$, откуда $\gamma = 120^\circ$.

Задача 14. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = -\bar{j} + \bar{k}$.

Решение

Обозначим диагонали параллелограмма через векторы (Рис. 12). Тогда задача сводится к нахождению угла между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$, определим его по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\bar{c}\cdot\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}$.

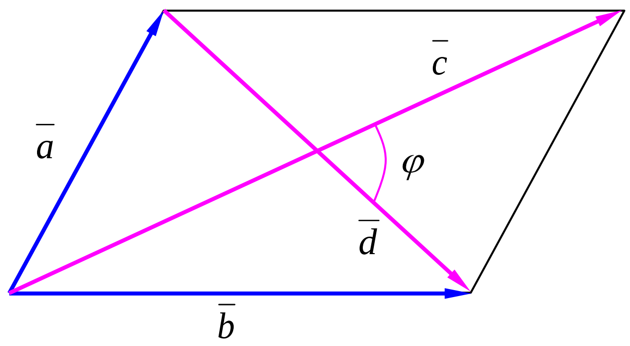


Рис. 12

Выразим векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{j} + \bar{k} = 2\bar{i} + \bar{k}$,

$\bar{c}(2;0;1)$.

$\bar{d} = \bar{b} - \bar{a} = -\bar{j} + \bar{k} - 2\bar{i} - \bar{j} =$

$= -2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$,

$\bar{d}(-2;-2;1)$.

Тогда их скалярное произведение равно:

$$\bar{c}\cdot\bar{d} = 2\cdot(-2) + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1 = -4 + 0 + 1 = -3.$$

Найдем длины векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$:

$$|\bar{c}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad |\bar{d}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Находим далее

$$\cos\varphi = \frac{\bar{c}\cdot\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|} = \frac{-3}{\sqrt{5}\cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 117^\circ.$$

Задача 15. Даны векторы $\bar{a} = 5\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$. Найти проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$.

Решение

Из определения скалярного произведения векторов следует, что

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\,\bar{a}.$$

Отсюда находим искомую проекцию:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

Найдем скалярное произведение векторов в координатной форме. Имеем:

$$\bar{a}(5; 4; -6),\ \bar{b}(2; -1; -1),$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-6) \cdot (-1) = 10 - 4 - 6 = 0, \quad \text{поэтому } np_{\bar{b}}\bar{a} = 0.$$

Задача 16. При каком значении m векторы $\bar{a}(4;\ m;\ -6)$ и $\bar{b}(m;\ 2;\ -7)$ перпендикулярны?

Решение

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Получим:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 4 \cdot m + m \cdot 2 + (-6) \cdot (-7),$$

$$4m + 2m - 42 = 0,$$

$$6m = 42,$$

$$m = 7.$$

Следовательно, при $m = 7$ данные по условию векторы перпендикулярны.

Задача 17. Найти работу, произведенную силой $\overline{F}(1;\ -2;\ -5)$, если точка её приложения перемещается прямолинейно из положения $M_1(0; -4; 2)$ в положение $M_2(4; -7; 0)$.

Решение.

Работа силы $\overline{F}$ при перемещении материальной точки вдоль прямолинейного участка $\overline{M_1M_2}$ определяется формулой: $A = \overline{F} \cdot \overline{M_1M_2}$.

Найдем вектор $\overline{M_1M_2}$: $\overline{M_1M_2}(4 - 0;\ -7 - (-4); 0 - 2)$, $\overline{M_1M_2}(4;\ -3; -2)$.

Тогда искомая работа равна:

$$A = \overline{F} \cdot \overline{M_1M_2} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = 4 + 6 + 10 = 20 \text{ (Дж).}$$

Задача 18. Найти вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, если $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

Решение

Имеем:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6\bar{i} + 6\bar{k} + 0 - 0 - 0 - 4\bar{j} = 6\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}.$$

***Задача 19*.** Упростить выражение $(3\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}) \times (2\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k})$.

Решение.

Применяя свойства векторного произведения и правило перемножения векторов базиса, получим:

$$(3\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}) \times (2\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k}) = 6\,\bar{i} \times \bar{i} + 18\,\bar{i} \times \bar{j} - 3\,\bar{i} \times \bar{k} - 8\,\bar{j} \times \bar{i} - 24\,\bar{j} \times \bar{j} + 4\,\bar{j} \times \bar{k} +$$
$$+ 10\,\bar{k} \times \bar{i} + 30\,\bar{k} \times \bar{j} - 5\,\bar{k} \times \bar{k} = 6 \cdot \bar{0} + 18\bar{k} - 3(-\bar{j}) - 8(-\bar{k}) - 24 \cdot \bar{0} + 4\bar{i} + 10\bar{j} + 30(-\bar{i}) =$$
$$= 18\bar{k} + 3\bar{j} + 8\bar{k} + 4\bar{i} + 10\bar{j} - 30\bar{i} = -26\bar{i} + 13\bar{j} + 26\bar{k}$$

***Задача 20*.** Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} - 2\bar{b}$ и $3\bar{a} + 2\bar{b}$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 5$.

Решение

Обозначим $\bar{c} = \bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{d} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$. Тогда площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{c}$ и $\bar{d}$, определим по формуле: $S = \frac{1}{2}|\bar{c} \times \bar{d}|$.

Найдем векторное произведение $\bar{c} \times \bar{d}$:

$$\bar{c} \times \bar{d} = (\bar{a} - 2\bar{b}) \times (3\bar{a} + 2\bar{b}) = 3\bar{a} \times \bar{a} + 2\bar{a} \times \bar{b} - 6\bar{b} \times \bar{a} - 4\bar{b} \times \bar{b} = 2\bar{a} \times \bar{b} + 6\bar{a} \times \bar{b} =$$
$$= 8\bar{a} \times \bar{b}.$$

Тогда $S = \frac{1}{2}|\bar{c} \times \bar{d}| = \frac{1}{2} \cdot 8|\bar{a} \times \bar{b}| = 4|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin 45^\circ = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$ (кв.ед.).

***Задача 21*.** Дан треугольник с вершинами $A(9; -9; 13)$, $B(7; -13; 17)$, $C(17; -3; 17)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины C.

Решение

Введем векторы, как показано на рисунке 13. Найдем их координаты:

$$\overline{AB}(7 - 9;\ -13 - (-9);\ 17 - 13),\ \overline{AB}(-2;\ -4;\ 4);$$
$$\overline{AC}(17 - 9;\ -3 - (-9);\ 17 - 13),\ \overline{AC}(8;\ 6;\ 4).$$

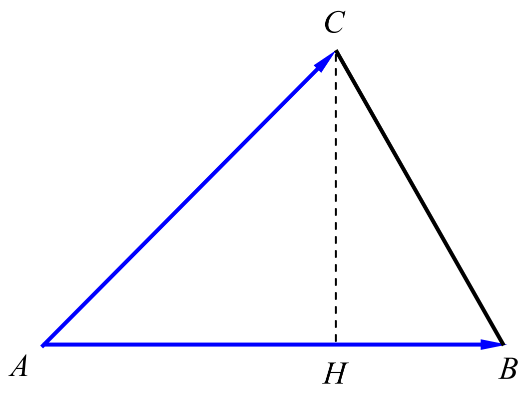


Рис. 13

Найдем площадь треугольника ABC по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -4 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -16\bar{i} - 12\bar{k} + 32\bar{j} -$$

$$-\left(-32\bar{k}\right) - 24\bar{i} - \left(-8\bar{j}\right) = -16\bar{i} - 12\bar{k} + 32\bar{j} +$$

$$+32\bar{k} - 24\bar{i} + 8\bar{j} = -40\bar{i} + 40\bar{j} + 20\bar{k}$$

Тогда получим:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-40)^2 + 40^2 + 20^2} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3 = 30 \text{ (кв. ед.)}$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right| \cdot CH$, откуда высота CH равна

$$CH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overline{AB}\right|} = \frac{2 \cdot 30}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{60}{\sqrt{36}} = \frac{60}{6} = 10.$$

***Задача 22*.** Найти синус угла между векторами $\bar{a}(3;0;-4)$, $\bar{b}(1;-2;2)$.

Решение

Из определения векторного произведения векторов следует, что $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \sin\varphi$, отсюда находим синус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|}{\left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right|}.$$

Найдем длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\left|\bar{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6\bar{k} - 4\bar{j} - 8\bar{i} - 6\bar{j} = -8\bar{i} - 10\bar{j} - 6\bar{k},$$

тогда $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \sqrt{(-8)^2+(-10)^2+(-6)^2} = \sqrt{64+100+36} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{10\sqrt{2}}{5\cdot 3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Задача 23. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}(1;1;2)$, $\bar{b}(1;-2;3)$, $\bar{c}(2;1;1)$.

Решение

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2+2+6-(-8)-3-1 = 10.$$

Задача 24. Найти объем параллелепипеда с вершинами в точках $A(-1;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(3;1;-1)$, $D(1;0;-2)$.

Решение

Рассмотрим векторы $\bar{a} = \overline{AB}(3;-3;1)$, $\bar{b} = \overline{AC}(4;0;-1)$, $\bar{c} = \overline{AD}(2;-1;-2)$. Вычислим смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4+6-3-24 = -25.$$

Тогда объем параллелепипеда равен $V = \left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right| = |-25| = 25$ (куб. ед.).

Задача 25. Проверить, компланарны ли векторы $\bar{a}(3;2;1)$, $\bar{b}(1;0;-1)$, $\bar{c}(1;-2;1)$.

Решение

Вычислим смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2-2-6-2 = -12.$$

Так как смешанное произведение $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = -12 \neq 0$, то данные векторы не компланарны. Поскольку $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = -12 < 0$, то векторы образуют левую тройку векторов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

2. Решить систему уравнений методом Крамера $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$.

3. Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

4. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

5. Даны точки $A(2;-6;-3)$ и $B(4;-1;-7)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, его разложение по базису, длину и направляющие косинусы.

6. Известны длина вектора $|\overline{a}|=4$ и углы, образуемые им с координатными осями: $\alpha=60^\circ$, $\beta=120^\circ$, $\gamma=45^\circ$ Найти координаты вектора $\overline{a}$.

7. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=120^\circ$?

8. На плоскости даны три вектора $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}$, $\overline{b}=-2\overline{i}+\overline{j}$, $\overline{c}=7\overline{i}-4\overline{j}$. Разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

9. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(3;2;-3)$, $B(2;4;6)$, $C(8;3;4)$, $D(9;1;-5)$ есть параллелограмм. Найти длины его сторон.

10. Векторы $\overline{AB}(2;6;-4)$ и $\overline{AC}(4;2;-2)$ совпадают со сторонами треугольника *ABC*. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами *AM*, *BN*, *CP*.

11. Даны векторы $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-2\overline{j}-\overline{k}$. Найти значение выражения $2\overline{a}^2-4\overline{a}\cdot\overline{b}+5\overline{b}^2$.

12. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\frac{2\pi}{3}$. Найти длину вектора $\overline{c} = 5\overline{a} + 3\overline{b}$, если $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 4$.

13. Определить стороны и углы треугольника с вершинами $A(-1; -4; 0)$, $B(-2; -2; -2)$, $C(-3; -3; 2)$.

14. Даны векторы $\overline{a} = 3\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = -2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$. Найти проекции вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - 5\overline{b}$ на векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

15. Даны силы $\overline{F}_1(4;\ -2;\ 5)$, $\overline{F}_2(1;\ -6;\ -7)$. Найти работу их результирующей при перемещении материальной точки из начала координат в точку $M(-3;\ -4;\ 1)$.

16. Раскрыть скобки и упростить выражения:
1) $\overline{i} \times \left(\overline{j} + \overline{k}\right) - \overline{j} \times \left(\overline{i} + \overline{k}\right) + \overline{k} \times \left(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}\right)$;
2) $\left(2\overline{a} + \overline{b}\right) \times \left(\overline{c} - \overline{a}\right) + \left(\overline{b} + \overline{c}\right) \times \left(\overline{a} + \overline{b}\right)$.

17. Найти векторное произведение векторов $\overline{a} = 5\overline{i} - 4\overline{j} + 7\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$.

18. Найти площадь и высоту BD треугольника с вершинами $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$.

19. Найти смешанное произведение векторов $\overline{a} = 5\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$.

20. В тетраэдре с вершинами $A(3;1;1)$, $B(1;4;1)$, $C(1;1;6)$, $D(3;4;9)$ найти площадь грани ABC и длину высоты, проведенной к этой грани.

21. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a}(1;1;2)$, $\overline{b}(1;-3;3)$, $\overline{c}(2;1;-4)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: учеб. пособие. М.: Инфра-М, 2017. 224 с.
2. Геворкян П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2014. 208 с.
3. Горлач Б.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник. СПб.: Лань, 2017. 300 с
4. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие для вузов. М.: Физматлит, 2011. 168 с.
5. Кожухов И.Б. Сборник задач по математике для втузов. В 4 т. Т. 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры: учеб. пособие для втузов. М.: Физматлит, 2009. 288 с.
6. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие / Р.Б. Козин, Н.И. Кривцов, В.И. Лебедев и др. СПб.: Лань, 2007. 320 с.
7. Козлов В.М. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2009. 320 с.
8. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Мн.: Вышэйшая шк., 2011. 304 с.
9. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие / И.А. Соловьев, В.В. Шевелев, А.В. Червяков и др. СПб.: Лань, 2009. 320 с.

Учебное издание

Елена Анатольевна Ракул

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Высшая математика»

Редактор Осипова Е.Н.

Подписано к печати 01.11.2022 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16.}$
Бумага офсетная. Усл. п. л. 2,96. Тираж 25 экз. Изд. № 7396.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ