МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный аграрный университет»

Кафедра Математики, физики и информатики

Рыжик В.Н.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
по теме «Неопределенный интеграл»

Брянская область
2019

УДК 51 (07)
ББК 22.1
Р 93

Рыжик, В. Н. **Высшая математика:** методические указания по теме «Неопределенный интеграл» / В. Н. Рыжик. - Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2019. - 64 с.

Учебное пособие составлено с учетом требований ФГОС ВО и предназначено для бакалавров направлений подготовки 35.03.06 Агроинженерия, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания, 23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы, 20.03.01 Техносферная безопасность.

Данное методическое пособие разработано по теме «Неопределенный интеграл». В нем содержатся методы нахождения неопределенного интеграла. Приведены конкретные примеры решения неопределенного интеграла. Оно составлено в помощь студентам и может быть использовано в качестве самостоятельной работы при выполнении расчетно-графических работ, домашнего задания и выполнении контрольных работ. Методическое пособие разработано для студентов очного и заочного обучения таких направлений как «Агроинженерия», «Технология продукции и организация общественного питания», «Наземные транспортно-технологические комплексы», «Техносферная безопасность».

Рецензент: зав. кафедрой математики, физики и информатики, кандидат технических наук Ракул Е.А.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией факультета Энергетики и природопользования, протокол №7 от 04.03.2019 г.

Оглавление

§1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Определение

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией (первообразной) для функции f(x) на интервале (a,b), если в любой точке x этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную f(x).

Теорема

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ -любые первообразные для данной функции f(x), то разность $F_2(x) - F_1(x)$ есть величина постоянная, то есть любые две первообразные для одной и той же функции могут отличаться лишь на постоянную величину.

Определение

Множество всех первообразных функций для данной функции f(x) называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается символом $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ есть одна из первообразных для функции f(x), то есть $F'(x)$= f(x), то

$$\int f(x)dx = \text{f(x)+C} \quad (1)$$

где C-любая постоянная.

В равенстве (1) $\int$ -знак интеграла

f(x)-подынтегральная функция
f(x)dx-подынтегральное выражение
x-переменная интегрирования
C-постоянная интегрирования

Подынтегральное выражение f(x)dx представляет собой дифференциал любой из первообразных правой части равенства (1).

Нахождение неопределенного интеграла от данной функции называется итегрированием. Интегрирование и дифференцирование- это две взаимно-обратные операции.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл есть семейство некоторых плоских кривых $y = F(x) + C$, где С-параметр.

Кривые данного семейства есть интегральные кривые. Они обладают следующим свойством: касательные, проведенные к этим кривым в точках с одинаковой абсциссой, параллельны между собой. Любую интегральную кривую данного семейства можно получить с помощью параллельного переноса любой другой кривой этого семейства вдоль оси Оу.

Свойства неопределенного интеграла :

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой же функции, сложенной с любой постоянной, то есть

$$\int d(\varphi(x)) = \varphi(x) = C$$

3. Постоянный множитель(отличный от нуля) можно выносить за знак неопределенного интеграла, то есть

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции в отдельности, то есть

$$\int\{f(x)+\varphi(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int\varphi(x)dx-\int g(x)dx$$

§2. Таблица основных интегралов

Интегрирование есть операция обратная дифференцированию. Следовательно, каждая формула дифференцирования приводит к соответствующей формуле интегрирования. Интегралы, помещенные в указанной ниже таблице, будем называть табличными.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ где $n \neq -1$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int Sinxdx = -Cosx + C$
7. $\int Cosxdx = Sinx + C$
8. $\int \dfrac{dx}{Cos^2x}dx = tgx + C$
9. $\int \dfrac{dx}{Sin^2x}dx = -ctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arccos x + C$

15. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$

С помощью дифференцирования и определения неопределенного интеграла можно установить справедливость табличных интегралов.

Познакомимся с различными методами интегрирования.

§3. Непосредственное интегрирование

Данное интегрирование основано на применении таблицы основных интегралов, основных свойств неопределенного интеграла, а также простейших тождественных преобразований подынтегральной функции и его принято называть непосредственным интегрированием.

Рассмотрим примеры

1. Найти интеграл:

$$\int (3x^4 - \sqrt{x} + \frac{6x}{\sqrt{x}}) dx$$

Р е ш е н и е

Предварительно преобразуем подынтегральную функцию, затем применим свойство (4) неопределенного интеграла и табличную формулу (2)

$$\int (3x^4 - \sqrt{x} + \frac{6x}{\sqrt{x}})dx = \int (3x^4 - x^{\frac{1}{2}} + \frac{6x}{x^{\frac{1}{2}}})dx =$$

$$\int 3x^4 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int 6x^{\frac{1}{2}} dx = 3\int x^4 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 6\int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$3\frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{3x^5}{5} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{6 \cdot 2\sqrt{x^3}}{3} =$$

$$\frac{3x^5}{5} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 4\sqrt{x^3} + C$$

2. Найти интеграл

$$\int (6Sinx - 2e^x)dx$$

Р е ш е н и е

Применяем свойства неопределенного интеграла и табличные интегралы (6) и (4)

$$\int (6Sinx - 2e^x)dx = \int 6Sinxdx - \int 2e^x dx = -6Cosx - 2e^x + C$$

3. Найти интеграл

$$\int \left[\frac{2}{9 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} + \frac{4}{x} \right] dx$$

Р е ш е н и е

Применяем свойства (3) и (4) и табличные интегралы под номерами (11), (10), (3)

$$\int\left[\frac{2}{9+x^2}-\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\frac{4}{x}\right]dx=2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}-\arcsin\frac{x}{5}+3\ln x+C$$

4. Найти интеграл

$$\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx$$

Р е ш е н и е

Необходимо раскрыть скобки в числителе и полученное выражение почленно разделить на знаменатель

$$\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx=$$

$\int\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^3}dx=\int(\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}-\frac{6x}{x^3})dx=$ (сократим дроби и по свойству(4) представим интеграл в виде суммы и разности интегралов) $=\int 1dx+\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{3}{x^2}dx-\int\frac{6}{x^3}dx=$ (вынесем постоянные множители за знак интеграла) $\int dx+2\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x^2}-6\int\frac{dx}{x^3}$ (первые 2 интеграла табличные(1),(3), а в 3 и 4 воспользуемся свойством степеней $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$) $=x+2\ln|x|-3\int x^{-2}dx-6\int x^{-3}dx$ $=$

$$=x+2\ln|x|-3\frac{x}{-1}^{-1}-6\frac{x^{-2}}{-2}+C=x+2\ln|x|+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+C$$

5. Найти интеграл

$$\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}dx$$

Р е ш е н и е

Преобразуем подынтегральную функцию и представим интеграл в виде суммы интегралов, каждый из которых является табличным

$$\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}dx=$$

$$\int \frac{1+2x+x^2}{x\cdot(1+x^2)}dx=\int \frac{(1+x^2)+2x}{x\cdot(1+x^2)}dx=\int \frac{(1+x^2)}{x\cdot(1+x^2)}dx+\int \frac{2x}{x\cdot(1+x^2)}dx$$

$$= \quad =\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{dx}{(1+x^2)}=\ln|x|+2arctgx+C$$

6. Найти интеграл

$$\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$$

Р е ш е н и е

Раскроем скобки в выражении и представим интеграл в идее суммы интегралов

$$\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx=$$

$$\int (e^x+\frac{1}{\cos^2 x})dx=\int e^x dx+\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=e^x+tgx+C$$

7. Найти интеграл

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

Р е ш е н и е

Воспользуемся основным тригонометрическим свойством ($1 = \sin^2 x + \cos^2 x$) и разобьем интеграл на сумму интегралов

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = tgx - ctgx + C$$

§4.Интегрирование заменой переменной или метод подстановки

Если данный интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным и не может быть найден способом непосредственного интегрирования, то во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести данный интеграл к табличному. В этом заключается сущность метода подстановки.

Упростим интеграл $\int f(x)dx$ методом подстановки. Введем новую переменную t, где $\varphi(t)$ -есть монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на некотором промежутке. Если на указанном промежутке изменения переменной x функция f(x) интегрируема, то будем иметь: x=$\varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, и $\int f(x)dx = \int \mathrm{f}(\varphi(\mathrm{t}))\varphi'(\mathrm{t})\mathrm{dt}$

После того, как интеграл будет найден от переменной t, необходимо назад вернуться к первоначальной переменной x.

Иногда вместо подстановки x=$\varphi(t)$ применяют подстановку t=$\varphi(x)$, то есть рассматривают новую переменную t, как функцию от x.

Рассмотрим решение примеров.

1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3x-1}$$

Р е ш е н и е

Воспользуемся подстановкой $t=3x-1$ и сведем интеграл к табличному интегралу (3)

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \left| \begin{array}{l} \textit{подстановка} \\ 3x-1=t \\ \text{дифференцируем} \\ 3\text{dx}=\text{dt} \\ \text{выражаем dx} \\ \text{dx}=\dfrac{\text{dt}}{3} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3t} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$$

2. Найти интеграл

$$\int e^{x^2+1} x dx$$

Р е ш е н и е

$$\int e^{x^2+1}xdx = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2x} \end{array} \right| = \int e^t x \frac{dt}{2x}$$ (сократим

x)$= \int e^t \dfrac{dt}{2} = \dfrac{1}{2}e^t = \dfrac{1}{2}e^{x^2+1} + C$

3. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$$

Р е ш е н и е

Чтобы привести данный интеграл к табличному (15), необходимо выполнить подстановку

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \left| \begin{array}{l} \textit{подстановка} \\ x^3=t \\ 3x^2dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{3x^2} \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{x^2 \frac{dt}{3x^2}}{1+t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}arctgt = \frac{1}{3}arctgx^3 + C$$

4. Найти интеграл

$$\int \frac{2xdx}{x^4-9}$$

Р е ш е н и е

Преобразуем интеграл и выполним подстановку

$$\int \frac{2xdx}{x^4-9} = \int \frac{2xdx}{(x^2)^2-3^2} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \mathrm{x}^2 = t \\ 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{2x\dfrac{dt}{2x}}{t^2-3^2} = \int \frac{dt}{t^2-3^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C$$

5. *Найти интеграл*

$$\int (tg2x+1)^3 \sec^2 2xdx$$

Р е ш е н и е

$$\int (tg2x+1)^3 \sec^2 2xdx = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \mathrm{tg2x+1=t} \\ \sec^2 2x \cdot 2dx = dt \\ \sec^2 2xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int t^3 \cdot \frac{dt}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}t^4 + C = = \frac{1}{8}(tg2x+1)^4 + C$$

6. *Найти интеграл*

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \arcsin x = t \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{array} \right| =$$

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\arcsin^3 x + C$$

В тех случаях, когда становится ясным, какая подстановка подходит к данному интегралу, чтобы свести его к табличному, можно интеграл решать следующим образом: $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^2 x d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C$

7. Найти интеграл

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{6x}-7}}dx$$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{6x}-7}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ e^{3x} = t \\ 3e^{3x}dx = dt \\ e^{3x}dx = \dfrac{dt}{3} \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{dt}{3\sqrt{t^2-7}} = \frac{1}{3}\ln(t + \sqrt{t^2-7} + C = \frac{1}{3}\ln\left| e^{3x} + \sqrt{e^{3x}-7} \right| + C$$

8. Найти интеграл

$$\int \frac{\sin 2x dx}{4+\sin^2 x}$$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{\sin 2x dx}{4+\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ 4+\sin^2 x = \mathrm{t} \\ 2\sin x \cos x dx = dt \\ \sin 2x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|4+\sin^2 x\right| + C$$

9. Найти интеграл

$$\int \frac{\cos x dx}{16+\sin^2 x}$$

Р е ш е н и е

$\int \frac{\cos x dx}{16+\sin^2 x}$ =(можно явным образом не вводить переменную t)= $\int \frac{d(\sin x)}{4^2+\sin^2 x} = \frac{1}{4} arctg \frac{\sin x}{4} + C$

§5. Интегрирование по частям

Так как интегрирование- действие, обратное дифференцированию, то каждому правилу дифференцирования должно соответствовать некоторое правило интегрирования.

Метод интегрирования по частям следует из формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть U(x) и V(x)-дифференцируемые функции от x. Имеем

$$d(UV) = UdV + VdU$$

Откуда

$$UdV = d(UV) - VdU\,.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем

$$\int UdV = \int d(UV) - \int VdU$$

или

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

Данная формула является формулой интегрирования по частям.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ представлено в виде произведения двух множителей U и dV

Пользуясь формулой найти интегралы:

а) $\int x \cdot e^x dx$ б) $\int (x+2) \cdot \cos x dx$ в) $\int arctgxdx$

а) ***Р е ш е н и е***

$$\int x\cdot e^x dx \left| \begin{array}{l} \textit{по частям} \\ \text{положим} \\ \mathrm{U = x \;\; и \; dV = e^x} dx \\ \text{тогда} \\ \mathrm{dU = dx, \;\; V} = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x\cdot e^x - \int e^x dx =$$

$$x\cdot e^x - e^x + C$$

б) ***Р е ш е н и е***

$$\int (x+2)\cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \textit{по частям} \\ \text{положим} \\ \mathrm{U = x + 2 \;\; и \; dV = cosx}dx \\ \text{тогда} \\ \mathrm{dU = dx, \;\; V} = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$(x+2)\cdot \sin x - \int \sin x dx = (x+2)\cdot \sin x + \cos x + C$$

в) ***Р е ш е н и е***

$$\int arctgx dx = \left| \begin{array}{l} \textit{по частям} \\ U = arctgx \\ dU = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ dV = dx \\ V = \int dx = x \end{array} \right| = arctgx\cdot x - \int x\cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

(интеграл решаем подстановкой)

$$\left|\begin{array}{l} \textit{подстановка} \\ 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array}\right| = arctgx \cdot x - \int \frac{dt}{2t} = arctgx \cdot x - \frac{1}{2}\ln|t| =$$

$$arctgx \cdot x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

Найдем интеграл $\int x^2 - 2x + 5)e^x dx =$

$$\left|\begin{array}{l} \text{по частям} \\ \mathrm{U} = \mathrm{x}^2 - 2x + 5 \\ dU = (2x-2)dx \\ dV = e^x dx \\ V = e^x \end{array}\right| = (x^2 - 2x + 5) \cdot e^x - \int e^x (2x-2)dx =$$

$$\left|\begin{array}{l} \text{по частям} \\ \mathrm{U} = 2x - 2 \\ dU = 2dx \\ dV = e^x dx \\ V = e^x \end{array}\right| = (x^2 - 2x + 5) \cdot e^x - ((2x-2) \cdot e^x - \int e^x 2dx) =$$

$$(x^2 - 2x + 5) \cdot e^x - (2x-2) \cdot e^x + 2e^x + C =$$
$$(x^2 - 2x + 5 - 2x + 2)e^x + 2e^x + C = (x^2 - 4x + 9)e^x + C$$

(в данном случае мы дважды применили формулу интегрирования по частям).

<u>УКАЗАНИЕ.</u> Чтобы найти интегралы следующего вида $\int P(x) \cdot e^{\alpha x} dx;\quad \int P(x)\sin\alpha x dx;\quad \int P(x)\cos\alpha x dx$,

где $P(x)$ - многочлен, следует последовательно применять формулу интегрирования по частям столько раз, какова степень многочлена. При этом за U -принимают многочлен, т.е. функцию, которая упрощается при дифференцировании.

В таких интегралах, как

$\int e^{mx}\sin nxdx$; $\int e^{mx}\cos nxdx$; $\int \sin(\ln x)dx$; $\int \cos(\ln x)dx$; $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$; $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ и других, применение формулы повторно (интегрирования по частям) приводит данный интеграл к уравнению.

Рассмотрим пример.

Найти интеграл $\int e^x \cdot \sin xdx$

Решение

$$\int e^x \cdot \sin xdx = \left| \begin{array}{l} \text{по частям} \\ \mathrm{U} = e^x \\ dU = e^x dx \\ dV = \sin xdx \\ V = \int \sin xdx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$-e^x\cos x - \int -\cos x e^x dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos xdx =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{по частям} \\ \mathrm{U} = e^x \\ dU = e^x dx \\ dV = \cos xdx \\ V = \int \cos xdx = \sin x \end{array} \right| = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x \sin xdx;$$

будем иметь:

$$\int e^x \sin x dx + \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x;$$

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x;$$

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$$

Рассмотрим еще такой пример.

Найти интеграл $\int \sin(\ln x)dx$

Р е ш е н и е

$$\int \sin(\ln x)dx = \left| \begin{array}{l} \text{по частям} \\ \mathrm{U} = \sin(\ln x) \\ dU = \cos(\ln x)\dfrac{1}{x}dx \\ dV = dx \\ V = x \end{array} \right| =$$

$$\sin(\ln x)\cdot x - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \text{по частям} \\ \mathrm{U} = \cos(\ln x) \\ dU = -\sin(\ln x)dx \\ dV = dx \\ V = x \end{array} \right| =$$

$$= \sin(\ln x)\cdot x - \left[\cos(\ln x)\cdot x - \int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx\right] =$$

$$= \sin(\ln x)\cdot x - \cos(\ln x)\cdot x - \int \sin(\ln x)dx;$$

$$2\int \sin(\ln x)dx = \sin(\ln x)\cdot x - \cos(\ln x) + C$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + C$$

Найдем интеграл:

$\int\sqrt{1+x^2}\cdot dx$ -перенесем иррациональность в знаменатель и интеграл представим в виде 2-х интегралов, и используем метод интегрирования по частям.

$$\int\sqrt{1+x^2}\cdot dx=\int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx\text{ -}$$

первый интеграл находим по таблице, во втором используем указанный метод:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{x\cdot xdx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{по частям}\\ \mathrm{U}=x\\ dU=dx\\ dV=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\\ V=\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot xdx=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2)=\sqrt{1+x^2}\end{array}\right|$$

$$=x\cdot\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx$$ и

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx+2C.$$

Имеем $\int\sqrt{1+x^2}dx={}^1\!/_2\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\sqrt{1+x^2}\right]+C$

Рекуррентная формула для интеграла вида

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} =$$

$$\int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n} \cdot dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x \cdot \frac{xdx}{(x^2+1)^n} \quad (*)$$

Такой интеграл будем находить с помощью формулы интегрирования по частям. Полагают $U = x$ и $dV = \frac{xdx}{(x^2+1)^n}$, тогда $dU = dx$ и

$$V = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-n} d(x^2+1) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(n^2+1)^{n-1}}$$

Таким образом $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} =$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} =$$

$$-\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (1 - \frac{1}{2n-2})\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

$(**)$

Формула$(**)$

Называется рекуррентной. Она позволяет понизить степень знаменателя в подынтегральном выражении на единицу. Последовательно применяя формулу **(∗∗)**

$(m-1)$ раз, данный интеграл приводится к табличному интегралу $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

§6. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \text{ и } \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$$

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c при дискриминанте $D=b^2-4ac\succ 0$, имеет действительные и разные корни, кратные корни при $D=0$ и комплексные корни при $\mathrm{D}\prec 0$. В первом случае квадратный трехчлен можно представить в виде разности двух квадратов, во втором случае трехчлен является полным квадратом, а в третьем случае он может быть представлен в виде суммы двух квадратов.

Интеграл вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ приводится к табличному интегралу путем преобразования квадратного трехчлена(выделяем из него полный квадрат).

Рассмотрим примеры:

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+10} \left| \begin{array}{l} x^2+2x+10=(x^2+2x)+10= \\ (x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2)-1^2+10= \\ (x+1)^2+9 \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+9} = = \int \frac{dx}{(x+1)^2+3^2} = \frac{1}{3} arctg \frac{x+1}{3} + C$$

2. $\int \frac{dx}{x^2-10x+25}$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+25} = \left| x^2-10x+25=(x-5)^2 \right| =$$

$\int \frac{dx}{(x-5)^2} = \int (x-5)^{-2} d(x-5)$ (подняли знаменатель вверх)$=(x-5)^{-1}/-1 = -\frac{1}{(x-5)} + C$

3. $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{dx}{x^2-4x-5} = \left| \begin{array}{l} \text{выделяем полный квадрат} \\ \mathrm{x}^2-4x-5=(x^2-4x)-5= \\ =(x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2)-2^2-5= \\ =(x-2)^2-9 \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2-9} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-3^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2-3}{x-2+3}\right| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C$$

4. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+17}$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+17} =$$

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+1+16} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2+4^2} =$$

$$= \frac{1}{8} arctg\frac{2x+1}{4} + C$$

5. $\int \frac{dx}{3x^2+4x-7}$

Р е ш е н и е

$\int \frac{dx}{3x^2+4x-7} = \int \frac{3dx}{9x^2+12x-21}$ (числитель и знаменатель домножили на 3)

$$= \int \frac{3dx}{9x^2+12x+4-25} = \int \frac{3dx}{(3x+2)^2-5^2} = \int \frac{d(3x+2)}{(3x+2)^2-5^2} =$$

$$\frac{1}{10}\ln\left|\frac{3x+2-5}{3x+2+5}\right| = = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{3x-3}{3x+7}\right| + C$$

В интеграле вида $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$

Если выражение $Mx+N$ -есть производная от ax^2+bx+c квадратного трехчлена, то интеграл берется по формуле (3).

Если выражение $Mx+N$ не совпадает с производной знаменателя, то необходимо его преобразовать так, чтобы из него можно было бы выделить производную знаменателя, затем интеграл представляют в виде суммы двух интегралов, один из которых берется непосредственно, а другой есть интеграл предыдущего вида.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{x-1}{x^2+6x+26}dx$

Решение

$\int \frac{x-1}{x^2+6x+26}dx$ = (производная знаменателя 2x+6 . Будем преобразовывать числитель так, чтобы из числителя можно было выделить выражение 2x+6 и затем наш интеграл разобьем интеграл на 2 интеграла)=

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+6x+25}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-8}{x^2+6x+25}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+25} - 4\int \frac{dx}{x^2+6x+25} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+6x+25)}{x^2+6x+25} - 4\int \frac{dx}{(x+3)^2+4^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+25) - arctg\frac{x+3}{4} + C$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+3}dx$

Решение

$\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+3}dx$=(Производная знаменателя $4x-4$. Выполним необходимые преобразования)$=3\int \frac{x-\frac{1}{3}}{2x^2-4x+3}dx$=(Вынесли 3 за знак интеграла)$=\frac{3}{4}\int \frac{4x-\frac{4}{3}}{2x^2-4x+3}dx=$

(Домножили и разделили на 4)

$=\frac{3}{4}\int \frac{4x-4+4-\frac{4}{3}}{2x^2-4x+3}dx$=(Отняли и прибавили 4 в числителе)=

$$\frac{3}{4}\int \frac{(4x-4)+4-\frac{4}{3}}{2x^2-4x+3}dx=\frac{3}{4}\int \frac{(4x-4)}{2x^2-4x+3}dx+\frac{3}{4}\int \frac{\frac{8}{3}}{2x^2-4x+3}dx$$

=(Разбили на 2 интеграла)=

$$\frac{3}{4}\int \frac{d(2x^2-4x+3)}{2x^2-4x+3}+2\int \frac{dx}{2x^2-4x+3}=\frac{3}{4}\ln(2x^2-4x+3)+\int \frac{dx}{x^2-2x+\frac{3}{2}}$$

=(Во втором интеграле 2 занесли под знак интеграла)$=\frac{3}{4}\ln(2x^2-4x+3)+\int \frac{dx}{(x-1)^2+\frac{1}{2}}=$

$$=\frac{3}{4}\ln(2x^2-4x+3)+\sqrt{2}arctg\left[(x-1)\cdot\sqrt{2}\right]+C$$

§7. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ и } \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводятся к табличному интегралу (13), если $a>0$ b и к табличному интегралу (10), если $a<0$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+1}} =$$

$$\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+1}} = \ln(x-3)+\sqrt{x^2-6x+10}) + C$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

Решение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 8-(x^2-2x+1)+1= \\ =9-(x-1)^2 - \text{выделяем} \\ \text{полный квадрат} \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{3^2-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{3} + C$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

Решение

$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ =(вынесем в знаменателе $\sqrt{2}$ за скобки и получим)$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}}=$

$$\left|\begin{array}{l} \text{выделяем полный квадрат} \\ 1-(x^2-2x\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{16})+\frac{9}{16}= \\ =\frac{25}{16}-(x-\frac{3}{4})^2 \end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x-\frac{3}{4})}{\sqrt{\frac{25}{16}-(x-\frac{3}{4})^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{(x-\frac{3}{4})\cdot 4}{5}==\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$$

Рассмотрим интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Если числитель является производной от подкоренного выражения, то интеграл берется непосредственно (сводится к табличному).

Если выражение $Mx+N$ не совпадает с производной от квадратного трехчлена, то необходимо числитель преобразовать так, чтобы из числителя можно было выделить производную подкоренного выражения знаменателя. После этого интеграл представляют в виде суммы двух интегралов, один из которых берется непосредственно, а другой является интегралом вышерассмотренным.

Рассмотрим решение следующих примеров:

1. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$ **2.** $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$

Решение

1. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$ =(преобразуем числитель)=

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-10+6}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx =$$

(Разбиваем интеграл на 2 интеграла)

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-10)}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} =$$

$$\frac{1}{2}\int (x^2-10x+29)^{-\frac{1}{2}} d(x^2-10x+29) +$$

$$+3\int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2+2^2}} =$$

$$\sqrt{x^2-10x+29} + 3\ln(x-5+\sqrt{x^2-10x+29}) + C$$

Решение

2.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{-8x-24}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx =$$

$$-\frac{1}{8}\int \frac{-8x+4-28}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx =$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{(-8x+4)}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx+\frac{7}{4}\int\frac{2dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}=$$

$$-\frac{1}{8}\int(3+4x-4x^2)^{-\frac{1}{2}}d(3+4x-4x^2)+ +\frac{7}{4}\int\frac{d(2x-1)}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}=$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$$

К интегралу такого же вида приводится и интеграл вида $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ для этого достаточно воспользоваться подстановкой $x-a=\frac{1}{t}$, где t-новая переменная.

Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$

Решение

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}=\left|\begin{array}{l} \textit{подстановка}\quad x=\dfrac{1}{t}\\ dx=-\dfrac{dt}{t^2};\quad 2x^2+2x+1=\\ =\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{2}{t}+1=\dfrac{2+2t+t^2}{t^2};\\ \sqrt{2x^2+2x+1}=\dfrac{\sqrt{2+2t+t^2}}{t}\end{array}\right|=$$

$$-\int\frac{t\cdot t\cdot dt}{t^2\sqrt{2t^2+2t+2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+1}}=$$

$$=-\ln(t+1+\sqrt{t^2+2t+2})=-\ln\left[\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+2}\right]+C=$$

$$\ln\left[\frac{x}{1+x+\sqrt{2x^2+2x+1}}\right]+C.$$

Рассмотрим решение следующего примера $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

Р е ш е н и е

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=\left|\begin{array}{l}\text{подстановка}\\ \mathrm{x}-1=\frac{1}{\mathrm{t}},\quad x=\frac{1}{t}+1,\\ dx=-\frac{dt}{t^2},\\ x^2-2=(\frac{1}{t}+1)^2-2=\frac{1+2t-t^2}{t^2},\\ \sqrt{x^2-2}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}\end{array}\right|=$$

$$-\int\frac{t\cdot tdt}{t^2\sqrt{1+2t-t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=$$

$$=-\int\frac{d(t-1)}{\sqrt{2-(t-1)^2}}=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}=-\arcsin\frac{\frac{1}{x-1}-1}{\sqrt{2}}=$$

$$-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)}+C$$

Интеграл вида $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ решаем аналогично, выполняя подстановку $x+1=\frac{1}{t}$

§8. Интегрирование элементарных дробей

Правильные рациональные дроби следующих четырех типов называются элементарными

(I) $\frac{A}{x-a}$; (II) $\frac{A}{(x-a)^m}$: (III) $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

(IY) $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$.

m и n при этом -натуральные числа, а квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней.

Интегрирование элементарных дробей первых двух типов производится непосредственно.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A\ln(x-a)+C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int (x-a)^{-m}\ d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} =$$

$$\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m+1}}+C$$

В предыдущих примерах уже рассмотрено интегрирование элементарных дробей третьего типа.

Интегрирование элементарных дробей четвертого типа связано с применением рекуррентной формулы. В более общем виде эта формула имеет вид:

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^n} = \frac{t}{m^2(2n-2)(t^2+m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{m^2(2n-2)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx$

Решение

$$\int \frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx = \int \frac{2x-4+2}{(x^2-4x+5)^2}dx = \int \frac{(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$+2\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} =$$

$$\int (x^2-4x+5)^{-2} d(x^2-4x+5) + 2\int \frac{d(x-2)}{\left[(x-2)^2+1\right]^2} =$$

$$-\frac{1}{x^2-4x+5} + 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \text{ (где t=x-2)}$$

Полагая в рекуррентной формуле n=2, находим интеграл

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}arctgt + C$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx = -\frac{1}{x^2-4x+5} + \frac{t}{t^2+1} + arctgt =$$

$$-\frac{1}{x^2-4x+5}+\frac{x-2}{x^2-4x+5}+arctg(x-2)+C=$$
$$\frac{x-3}{x^2-4x+5}+arctg(x-2)+C$$

§9. Разложение рациональной дроби на элементарные

Пусть $Q_n(x)$ е5сть многочлен с действительными коэффициентами степени n, то есть

$$Q_n(x)=C_n\cdot x^n+C_{n-1}\cdot x^{n-1}+...C_3\cdot x^3+C_2\cdot x^2+C_1\cdot x+C_0$$

Известно, что всякий такой многочлен разлагается единственным образом на линейные и квадратичные множители вида $(x-a)$ и (x^2+px+g), где a действительный корень многочлена, а квадратный трехчлен x^2+px+g не имеет действительных корней, то есть

$$\frac{p^2}{4}-g<0.$$

Некоторые из множителей, на которые разлагается данный многочлен, могут входить в его разложение несколько раз.

В общем виде разложение многочлена имеет вид:

$$Q_n(x)=C_n\cdot(x-a)^k(x-b)^m...$$
$$(x^2+px+g)^r(x^2+p_1x+g_1)^s...$$

где a-действительный корень многочлена кратности k, b-действительный корень многочлена кратности m,…а натуральные числа r,s…выражают кратность каждой пары сопряженных комплексных корней многочлена.

При этом справедливо равенство: $k + m + ... + 2r + 2s + ... = n$

Рациональной дробью называется частное двух многочленов одного и того же аргумента.

Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

В данном случае можно говорить о следующей теореме, разложении рациональной дроби на сумму элементарных дробей.

Теорема. Всякая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой $Q(x)$ имеет разложение $Q_n(x) = C_n \cdot (x-a)^k (x-b)^m ...$ $(x^2 + px + g)^r (x^2 + p_1x + g_1)^s ...$, может быть представлена единственным образом в виде суммы конечного числа элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + ... + \frac{B_m}{(x-b)^m}$$

$$+ \ldots + \frac{M_r x + N_r}{(x^2 + px + g)^r} +$$

$$+$$

$$\frac{D_1 x + E_1}{x^2 + p_1 x + g_1} + \frac{D_2 x + E_2}{(x^2 + p_1 x + g_1)^2} + ... + \frac{D_s x + E_s}{(x^2 + p_1 x + g_1)^s} + ...$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов

$$A_1, A_2, ...A_k, B_1, B_2, ...B_m, M_1, M_2, ...M_r, N_1, N_2, ...N_r ...$$

поступают так: элементарные дроби правой части приводят к общему знаменателю, который, очевидно, будет равен $Q(x)$,а затем приравнивают многочлен, получившийся в числителе, многочлену $P(x)$. Полученное равенство таким образом является тождеством.

Сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого равенства, получают систему линейных уравнений относительно коэффициентов, которые необходимо найти. Решаем систему уравнений, (получившихся) и находим значения неопределенных коэффициентов.

Пример. Рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2 + 9x - 11}{(x-3)^2 (x+2)}$ разложить на элементарные дроби

Решение

Данная дробь является правильной. Применяя формулу разложения, будем иметь:

$$\frac{x^2 + 9x - 11}{(x-3)^2 (x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Приводим дроби в правой части к общему знаменателю.

$$\frac{x^2 + 9x - 11}{(x-3)^2 (x+2)} = \frac{A(x-3)(x+2) + B(x+2) + C(x-3)^2}{(x-3)^2 (x+2)}.$$

$$(x-3)^2 (x+2) \neq 0$$

Получим тождество:

$$x^2+9x-11=A(x-3)(x+2)+B(x+2)+C(x-3)^2$$

Раскроем скобки в правой части и расположим, полученный многочлен по убывающим степеням аргумента x.

$$x^2+9x-11=(A+C)x^2+(-A+B-6C)x+(-6A+2B+9C)$$

Найдем коэффициенты A,B,C. Для этого приравняем коэффициенты в правой и левой части тождества, стоящие перед одинаковыми степенями аргумента x. Получим систему уравнений относительно неизвестных A,B,C.

$$\begin{cases} A+C=1, \\ -A+B-6C=9, \\ -6A+2B+9C=-11 \end{cases} \quad \text{решаем систему уравнений}$$

$$\begin{cases} A=1-C, \\ -(1-C)+B-6C=9, \\ -6(1-C)+2B+9C=-11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1-C, \\ -1+C+B-6C=9, \\ -6+6C+2B+9C=-11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1-C, \\ -1-5C+B=9, \\ -6+15C+2B=-11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1-C, \\ -5C=10-B, \\ 15C=-5-2B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A == 2, \\ C = -1, \\ B = 5 \end{cases}$$

Имеем:

$$\frac{x^2+9x-11}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{2}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2} - \frac{1}{x+2}.$$

Второй способ нахождения неизвестных коэффициентов. Тождество справедливо при любом значении аргумента x. Давая аргументу x любые частные значения, можно получить достаточное число линейных уравнений (совместных) относительно искомых коэффициентов A,B,C.

Например, при x=3 получаем 25=5B, или B=5;

при x=-2 получаем -25=25C, откуда C=-1;

при x=0 получаем -11=-6A+2B+9C, или -11=-6A+10-9, откуда A=2

В том случае, когда знаменатель данной дроби, то есть многочлен $Q(x)$, имеет только действительные корни, наиболее удобно применять $2^{ой}$ способ определения неизвестных коэффициентов.

Пример.

Дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2+1}{x^5+2x^3+x}$ -разложить на элементарные дроби

Решение

Разложим знаменатель $Q(x)$ на линейные и квадратичные множители.

$$Q(x) = x^5 + 2x^3 + x = x(x^4 + 2x^2 + 1) = x(x^2 + 1)^2$$

Тогда $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2+1}{x(x^2+1)^2}$ -может быть представлен в виде суммы элементарных дробей по формуле

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приводим элементарные дроби к общему знаменателю.

$$\frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+c)x(x^2+1) + (Dx+E)x}{x(x^2+1)^2}$$

Отбрасываем знаменатель и располагаем многочлены в обеих частях полученного тождества по убывающим степеням аргумента x, получим:

$$x^2 + 1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & \\ x^3 & \\ x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array} \begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Решаем систему уравнений и получаем: $A=1, B=-1, C=1, D=-1, E=-1$

Следовательно

$$\frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{(x^2+1)} + \frac{-x-1}{(x^2+1)^2}$$

§10. Интегрирование дробей рациональной функции

Всякую рациональную дробь можно, используя формулу, представить в виде суммы конечного числа элементарных дробей, которые затем можно проинтегрировать.

Если рассматриваемая дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ является неправильной, то необходимо выделить целую часть, разделив многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ (уголком). При этом получают в частном многочлен $T(x)$ и в остатке многочлен $P_1(x)$, степень которого ниже степени многочлена $Q(x)$.

В этом случае

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)} \qquad \textbf{(1)}$$

В равенстве (1) дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ является правильной и может быть разложена по формуле предыдущего параграфа.

Так как интеграл от многочлена $T(x)$ и элементарных дробей выражается в элементарных функциях, то всякая рациональная дробь (дробная рациональная функция) может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Найти интеграл

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx$$

Решение

Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Представим эту дробь в виде суммы элементарных дробей.

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1};$$

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)};$$

$$x+1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array} \begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow A=1; \quad C=1; \quad B=-1.$$

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x+1}{x^2+1} = \ln x - \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + arctgx =$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arctgx + C$$

Найти интеграл $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

Решение

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель уголком.

$$\begin{array}{r|l} x^4-3x^2-3x-2 & x^3-x^2-2x \\ \cline{2-2} -\underline{x^4-x^3-2x^2} & x+1 \\ x^3-x^2-3x-2 & \\ -\underline{x^3-x^2-2x} & \\ -x-2 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=$$

$$\int (x+1+\frac{-x-2}{x(x-2)(x+1)})dx=\int xdx+\int dx+\int \frac{-x-2}{x(x-2)(x+1)}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+\int \frac{-x-2}{x(x-2)(x+1)}dx=\ldots..$$

Найдем интеграл

$\int \frac{-x-2}{x(x-2)(x+1)}dx$ -воспользуемся выше рассмотренным способом , который называется методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{-x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1};$$

$$\frac{-x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)};$$

$-x-2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+cx(x-2);$ - отбросили знаменатель и получили тождество.

При $x=0$ имеем $-2=-2A$; откуда $A=1$

При $x=2$ имеем $-4=6B$; откуда $B=-2/3$

При $x=-1$ имеем $-1=3C$; откуда $C=-\frac{1}{3}$

Следовательно,

$$\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$\frac{x^2}{2}+x+\ln x-\frac{2}{3}\ln(x-2)-$$

$$-\frac{1}{3}\ln(x+1)+C=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}\ln\frac{x^3}{(x-2)^2(x+1)}+C.$$

Найти интеграл $\int\frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2}$

Р е ш е н и е

Данная подынтегральная функция была представлена в виде суммы элементарных дробей в параграфе 9.

$$\int\frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2}=$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+1}+\frac{-x-1}{(x^2+1)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}-\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arctgx+\frac{1}{2(x^2+1)}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Находим последний интеграл по рекуррентной формуле

$$\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^n}=\frac{t}{m^2(2n-2)(t^2+m^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{m^2(2n-2)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}$$

при n=2, имеем

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx+C$$

Тогда наш интеграл

$$\int\frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2}=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arctgx+\frac{1}{2(x^2+1)}-$$

$$\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}arctgx+C=$$

$$=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1-x}{2(x^2+1)}+C$$

§11. Интегрирование тригонометрических функций

Все тригонометрические функции рационально выражаются через синус и косинус. Следовательно, всякая функция рационально зависящая от тригонометрических функций, может быть преобразована и представлена в виде функции, рационально зависящей только от синуса и косинуса.

Рассмотрим интегрирование целых степеней тригонометрических функций, то есть интегралы вида

$\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n –целые числа.

Замечание 1.Чтобы найти интеграл такого вида для случая, когда хотя бы одно из чисел m и n есть число нечетное и положительное, применяют подстановку $\cos x = t$, если m –нечетное и положительное, и $\sin x = t$, если n –нечетное и положительное.

Найти интегралы: $a)$ $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$

Р е ш е н и е

$a)$ Так как нечетным и положительным является показатель степени функции cos x, то применим указанную подстановку

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \left| \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \right| = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) =$$

$$\left| \begin{matrix} \text{подстановка} \\ \text{sinx = t;} \\ \text{cosxdx = dt} \end{matrix} \right| = \int t^2 (1 - t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt =$$

$$\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5}{5} + C$$

б) Показатель степени $\sin x$ есть число нечетное и положительное. Применяем подстановку $\cos x = t$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\cos^6 x} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \cos x = t; \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{(1-t^2)(-dt)}{t^6} = -\int \frac{dt}{t^6} + \int \frac{t^2 dt}{t^6} = = -\int t^{-6}dt + \int t^{-4}dt =$$

$$-\frac{t^{-5}}{-5} + \frac{t^{-3}}{-3} = \frac{1}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} = \frac{1}{5\cos^5 x} - \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

Замечание 2. Если показатели степени m и n –четные и положительные(в частности один из них может быть равен 0), необходимо воспользоваться формулой понижения степени:

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$; и $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

Найти интегралы: $a) \int \cos^4 x dx$; б) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$;

Р е ш е н и е

$a) \int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx =$

$$\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{(1+2\cos 2x + \cos^2 2x)}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$\frac{1}{4}(x + \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

б) $\int \sin^4 x\cos^2 x dx =$

$$\int (\sin x\cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx -$$

$$-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

Замечание 3.Чтобы найти интеграл в случае, когда показатели m и n четные и хотя бы один из них отрицательный, применяют подстановку $tgx = t$ или $ctgx = t$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$

Решение

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int tg^2 x(1+tg^2 x)d(tgx) =$$

$$= \int (tg^2 x + tg^4 x)d(tgx) = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^6 x\cos^6 x}$

Решение

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x\cos^6 x} =$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x\cos x)^6} = 64\int \frac{1}{\sin^4 2x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 2x} = 64\int \operatorname{cosec}^4 2x \cdot \frac{dx}{\sin^2 2x} =$$

$$-32\int(\cos ec^2 2x)^2 d(ctg 2x) = -32\int(1+ctg^2 2x)^2 d(ctg 2x) =$$
$$-32\int(1+ctg^2 2x+ctg^4 2x)dctg 2x =$$
$$= -32(ctg 2x + \frac{2ctg^3 2x}{3} + \frac{ctg^5 2x}{5}) + C$$

Рассмотрим интегрирование произведения синусов и косинусов различных аргументов, то есть интегралы вида:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx; \quad \int \sin mx \cdot \sin nx dx; \int \cos mx \cdot \cos nx dx;$$

Замечание 4. Для того, чтобы найти указанные интегралы, необходимо воспользоваться известными тригонометрическими формулами:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$

Решение

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(5-3)x + \sin(5+3)x\right]dx =$$
$$\frac{1}{2}\int\left[\sin 2x + \sin 8x\right]dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \sin 8x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \cos 3x \cdot \cos^2 x dx$

Решение

$\int \cos 3x \cdot \cos^2 x dx =$

$$\int \cos 3x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int \cos 3x + \frac{1}{2}\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx =$$

$$\frac{1}{6}\sin 3x + +\frac{1}{4}\int (\cos x + \cos 5x) dx = \frac{1}{6}\sin 3x +$$

$$\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{20}\sin 5x + C$$

Замечание 5. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$,где $R(\sin x, \cos x)$ есть рациональная функция относительно sinx и cosx, находят с помощью подстановки $tg\frac{x}{2} = t$. Эта подстановка приводит данный интеграл к интегралу от рациональной функции переменной t.

При этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\text{; } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\text{; } dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Т.к.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\text{;}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$tg\frac{x}{2} = t;\ \frac{x}{2} = arctgt;\ x = 2arctgt;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Решение

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \mathrm{sinx} = \dfrac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}. \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$\int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + C = \ln(1+tg\frac{x}{2}) + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{5-4\cos x+3\sin x}$

Решение

$$\int \frac{dx}{5-4\cos x+3\sin x} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}. \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{5-\dfrac{4(1-t^2)}{1+t^2}+\dfrac{6t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5+5t^2-4+4t^2+6t} =$$

$$= \int \frac{2dt}{9t^2+6t+1} = \int \frac{2dt}{(3t+1)^2} = \frac{2}{3}\int (3t+1)^{-2} d(3t+1) = -\frac{2}{3(3t+1)} = -\frac{2}{3(3tg\frac{x}{2}+1)} + C.$$

§12. Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx; \int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx;$$

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost, если применить подстановку $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \text{x} = 2\sin t,, \\ dx = 2\cos t dt. \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{4\sin^2 t \cdot 2\cos t \cdot dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = 4\int \sin^2 t dt = 4\int \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$2\int dt - \int 2\cos 2t dt = 2t - \sin 2t + C =$$

(переходим к старой переменной х, $t = \arcsin\frac{x}{2}$)

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$ сводятся к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost, если применять подстановку $x = atgt$ или $x = actgt$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Р е ш е н и е

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \text{x} = tgt, \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}. \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{(1+tg^2 t)\sqrt{1+tg^2 t}}$$

$$= \int \cos t dt = \sin t + C = \left| \begin{array}{l} \mathrm{sint} = \mathrm{tgt} \cdot \mathrm{cost} = \\ = \dfrac{tgt}{\sec t} = \dfrac{tgt}{\sqrt{1 + tg^2 t}} = \\ = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \end{array} \right| = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C$$

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost, если применить подстановку $x = a\sec t$ или $x = a\cos ect$.

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$

Решение

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ \mathrm{x} = 2\sec t, \\ dx = 2\sec t \cdot tgtdt. \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{\sqrt{4\sec^2 t - 4}}{2\sec t} 2\sec t \cdot tgt \cdot dt = 2\int tg^2 t5dt = 2\int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2\int dt = 2tgt - 2t \left| \begin{array}{l} \text{перейдем к прежней переменной x} \\ \mathrm{x} = 2\sec t = \dfrac{2}{\cos t}, \\ \cos t = \dfrac{2}{x}, t = \arg\cos\dfrac{2}{x} \\ tgt = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} - 1} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \end{array} \right|$$

$$= \sqrt{x^2 - 4} - 2\arccos\frac{2}{x} + C.$$

§13. Интегрирование простейших иррациональных выражений

Если подынтегральная функция является иррациональной (аргумент находится под знаком интеграла), то необходимо подобрать такую подстановку, которая позволяет подынтегральное выражение привести к рациональному виду относительно новой переменной.

Замечание 1. Если под знаком интеграла стоит рациональная функция от аргумента x и его дробных степеней, то используют подстановку $x = t^m$, где m есть общее наименьшее кратное показателей корней, и приводят подынтегральное выражение к рациональному виду относительно новой переменной t.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x}}dx$

Решение

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{наименьшее общее кратное} \\ \text{корней равно } 6 \\ \text{подстановка} \\ \text{x} = t^6, \\ dx = 6t^5 dt. \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1+t^2)} \cdot 6t^5 dt = 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1+t^2} dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3(t^2+1)}{1+t^2} dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}t^4 + 6arctgt = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6arctg\sqrt[6]{x} + C$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{x(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}} dx$

Решение

$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{x(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}} dx$=(т.к. наименьшее общее кратное корней равно 12, то выполним необходимую подстановку)
$\left| \begin{array}{l} \mathrm{x}=t^{12}, \\ dx=12t^6 dt. \end{array} \right| = \int \frac{t^2+1}{t^{12}(t^3+t^2)} 12t^5 dt = 12\int \frac{t^2+1}{t^3(t+1)} dt$ =(*)

Применяем метод неопределенных коэффициентов. (Нашу дробь представляем в виде суммы дробей).

$\frac{t^2+1}{t^3(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{D}{t+1}$; (Приводим в правей части к общему знаменателю)

$$\frac{t^2+1}{t^3(t+1)} = \frac{At^2(t+1)+Bt(t+1)+C(t+1)+Dt^3}{t^3(t+1)};$$

$$t^2+1 = At^3 + At^2 + Bt^2 + Bt + Ct + C + Dt^3;$$

(Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях)

$$\left. \begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{cases} A+D=0 \\ A+B=1 \\ B+C=0 \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow C=1; \quad B=-1; \quad A=2; \quad D=-2$$

$$(*)=12\int\frac{2}{t}dt+\int\frac{-1}{t^2}dt+\int\frac{1}{t^3}dt+\int\frac{-2}{t+1}dt=$$

$$12(2\ln t-\int t^{-2}dt+\int t^{-3}dt-2\ln(t+1))=24\ln\sqrt[12]{x}\text{ -}$$

$$12\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+12\cdot\frac{t^{-2}}{-2}\text{ - }24\ln(\sqrt[12]{x}+1)=24\ln\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+C$$

Если под знаком интеграла имеется рациональная функция от аргумента x и дробных степеней двучлена $ax+b$, то необходимо выполнить подстановку $ax+b=t^m$, где m есть интегральное выражение, тем самым функцию мы приведем к рациональному виду относительно новой переменной t.

Пример 3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$

Решение

$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$ =(Общее наименьшее кратное показателей корней равно 6)

$$\left|\begin{array}{l}\text{подстановка}\\ x+2=t^6,\\ dx=6t^5dt.\end{array}\right|=\int\frac{6t^5\cdot dt}{t^4-t^2}=6\int\frac{t^2dt}{t-1}=6\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$

$$6\int(t+1+\frac{1}{t-1})dt=6\left[\frac{t^2}{2}+t+\ln(t-1)\right]=$$

$$=6\frac{\sqrt[3]{x+2}}{2}+6\sqrt[6]{x+2}+\ln(\sqrt[6]{x+2}-6+C.$$

Если под знаком интеграла имеется рациональная функция от аргумента x и дробных степеней дробно-линейной функции $\frac{ax+b}{cx+d}$, то подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$, где m есть наименьшее общее кратное показателей корней, подынтегральное выражение приводит относительно новой переменной t к рациональному виду.

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}dx$

Решение

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}dx=\left|\begin{array}{l}\text{подстановка}\\ \frac{1+\text{x}}{1\text{-}\text{x}}=t^2\\ 1+x=t^3-xt^3; xt^3+x=t^3-1\\ x(t^3+1)=t^3-1; x=\frac{t^3-1}{t^3+1};\\ dx=\frac{3t^2(t^3+1)-3t^2(t^3-1)}{(t^3+1)^2}dt=\frac{6t^2dt}{(t^3+1)^2}\\ 1-x=1-\frac{t^3-1}{t^3+1}=\frac{2}{t^3+1}\end{array}\right|=$$

$$\int \frac{1}{(\frac{2}{t^3+1})^2}\cdot t\cdot\frac{6t^2\cdot dt}{(t^3+1)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\int t^3dt=\frac{3}{8}t^4=\frac{3}{8}(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{4}{3}}+C$$

§14. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p-рациональные числа, называется биномиальным дифференциалом.

Выдающийся русский математик П.Л. Чебышев доказал, что интеграл от биномиального дифференциала, т.е. интеграл вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, выражается через элементарные функции в следующих трех случаях:

1) p есть целое число или равное нулю;

2) $\frac{m+1}{n}$ есть целое число или равное нулю;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ есть целое число или равное нулю.

В первом случае, когда p –целое положительное, то интегрирование выполняется непосредственно. Для этого достаточно бином разложить по формуле Ньютона. Если же p-целое отрицательное, то применяют подстановку $x=t^g$, где g-наименьшее общее кратное чисел m и n.

Во втором случае, когда $\frac{m+1}{n}$ есть целое число, применяют подстановку $a+bx^n=t^s$,где s знаменатель дроби $p=\frac{r}{s}$.

В третьем случае, когда $\frac{m+1}{n}+p$ есть целое число, применяют подстановку $a+bx^n=t^s x^n$, где s-знаменатель дроби p.

Пример 1.

Найти интеграл $\int x^{-\frac{2}{3}}\left[1+x^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}dx$

Решение

$$m=-\frac{2}{3};\quad n=\frac{1}{3};\quad p=\frac{1}{2}.$$

В данном случае р не есть целое число.

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}}=1\text{-целое число}$$

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left[1+x^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{l}\text{подстановка}\\ 1+\mathrm{x}^{\frac{1}{3}}=t^{2},\text{откуда}\,\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=2tdt\\ x^{-\frac{2}{3}}dx=6tdt\end{array}\right|=$$

$$6\int t^{2}dt=2t^{3}=2(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}+C$$

Пример 2.

Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^{5}}}=\int x^{-1}(1+x^{5})^{-\frac{1}{3}}dx$

Решение

$$m=-1;\quad n=5\quad p=-\frac{1}{3}.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{подстановка} \\ 1+\mathrm{x}^5 = t^3, \text{откуда} \quad x = (t^3-1)^{\frac{1}{5}} \\ dx = \dfrac{3t^2 dt}{5(t^3-1)^{\frac{4}{5}}} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} ==$$

$$= \int \frac{3t^2 dt}{(t^3-1)^{\frac{1}{5}} 5(t^3-1)^{\frac{4}{5}} t} = \frac{3}{5}\int \frac{tdt}{t^3-1} = \frac{3}{5}\int \frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)}dt =$$

$$\frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt = \frac{1}{5}\ln(t-1) -$$

-

$$\frac{1}{10}\int \frac{2t+1-3}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{5}\ln(t-1) - \frac{1}{10}\ln(t^2+t+1) +$$

$$\frac{3}{10}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + + \frac{3}{10}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\frac{(\sqrt[3]{1+x^5}-1)^2}{\sqrt[3]{1+x^5}^{\,2} + \sqrt[3]{1+x^5}+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}arctg\,\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Интеграл вида $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ решают применяя подстановку 3-го случая.

Литература

1. Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Высшая математика: учебник. М.: Флинта: МПСИ, 2010. 359 с.

2. Высшая математика: учебник для студентов высших технических учебных заведений / Г.Л. Луканкин [и др.]. М.: Высшая школа, 2009. 583 с.

3. Малыхин В.И. Высшая математика: учебное пособие. М.: Инфра-М, 2010. 363 с.

4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Лань, 2007.

5. Михальченков А.М., Феськов С.А. Рыжик В.Н. Компьютерные технологии при измерении износов стрельчатых лап культиваторов // Вестник Брянской государственной сельскохозяйственной академии. 2016. № 2 (54). С. 89-93.

6. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Основы высшей математики: пособие для студентов вузов. Минск: ТетраСистемс, 2012. 204 с.

7.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М: Физматлит, 2002. 746 с.

8. Рыжик В.Н. Высшая математика. Ч. I. Брянск: Изд-во Брянский ГАУ, 2017.

9. Шипачев В.С. Основы высшей математики: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2009. 478 с.

Учебное издание

Рыжик Валентина Николаевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
по теме «Неопределенный интеграл»

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 6.03.2019 г. Формат 60х84. 1/16.
Бумага печатная Усл.п.л. 3,72. Тираж экз. Изд. № 6334.

Издательство Брянского государственного аграрного университета
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянский ГАУ